HOY ES...

Taller de Problemas #2

1) Lección 2.1.6:

3a) Tabla de multiplicación del grupo $G_\Delta = \{I, R_1, \bar{R}_1, X_A, X_B, X_C\}$

$\otimes$	I	R_1	$\bar{R}_1$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_1	$\bar{R}_1$	X_A	X_B	X_C
R_1	R_1	$\bar{R}_1$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$	I	R_1	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	R_1	$\bar{R}_1$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_1$	I	R_1
X_C	X_C	X_A	X_B	R_1	$\bar{R}_1$	I

Donde: $R_1 \equiv$ Rotación horaria de $\frac{2\pi}{3}$

$\bar{R}_1 \equiv$ Rotación antihoraria de $\frac{2\pi}{3}$

$X_i \equiv$ Reflección sobre el eje i

$I \equiv$ Identidad (No hay transformación)

El orden de multiplicación es el elemento de la columna $\otimes$ el de la fila.

Aunque rotaciones de $\frac{4\pi}{3}$ y 2π dejan invariante al triángulo, son ambiguas y se pueden representar con R_1, $\bar{R}_1$ e I

3b) Teniendo en cuenta los elementos y su tabla de multiplicación

1. $\exists\, g_k = g_i \otimes g_j \in G_\Delta$ (Siempre la concatenación se puede representar con un elemento)
2. $g_k \otimes (g_i \otimes g_j) = (g_k \otimes g_i) \otimes g_j$, esto se puede comprobar con la tabla.
3. $\exists\, I \in G_\Delta \Rightarrow g_i \otimes I = I \otimes g_i = g_i$ (Existe la identidad I)
4. $\forall g_i \in G_\Delta\ \exists\, g_i^{-1} \Rightarrow g_i \otimes g_i^{-1} = g_i^{-1} \otimes g_i = I$, el inverso de R_1 es $\bar{R}_1$ y vice versa, mientras que el inverso de X_i es el mismo X_i

Con estas propiedades podemos decir que $G_\Delta = \{I, R_1, \bar{R}_1, \{X_i\}\}$ es un grupo

3c) Considerando las 6 rotaciones horarias y antihorarias de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ y 2π:

$R_{2\pi/3} = R_1$ $\qquad \bar{R}_{2\pi/3} = \bar{R}_1$

$R_{4\pi/3} = R_2$ $\qquad \bar{R}_{4\pi/3} = \bar{R}_2$

$R_{2\pi} = R_3$ $\qquad \bar{R}_{2\pi} = \bar{R}_3$

Vemos que este conjunto se puede obtener operando únicamente R_1:

$$R_1 \otimes I = (R_1)^1 = \bar{R}_2,\quad (R_1)^1 \otimes R_1 = (R_1)^2 = R_2 = \bar{R}_1,$$

$$(R_1)^2 \otimes R_1 = (R_1)^3 = I = R_3 = \bar{R}_3$$

Así, se demuestra que el subgrupo de rotaciones R_Δ se describe como $R_\Delta = \{I, R_1, (R_1)^2\}$, por ende es cíclico de orden 3.

HOY ES...

Ahora con las reflexiones: χ_A, χ_B, χ_C

Teniendo en cuenta la tabla es claro ver que el inverso de χ_i es esa misma rotación, por ende $\chi_i \otimes I = (\chi_i)^{-1}$, $(\chi_i)^{-1} \otimes \chi_i = I$, y entonces el subgrupo de cada rotación queda definido por $\chi_{i\Delta} = \{I, \chi_i\}$ siendo cíclico de orden 2.

3 d) La forma más sencilla es con la tabla de multiplicaciones de M_Δ

X	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	D	E	C
B	B	I	A	E	C	D
C	C	E	D	I	B	A
D	D	C	E	A	I	B
E	E	D	C	B	A	I

1. $\exists\ M_k = M_i \times M_j \in M_\Delta$ [En la tabla se ve que es cerrado]

2. $M_k \times (M_i \times M_j) = (M_k \times M_i) \times M_j$ [Se comprueba con la tabla]

3. $\exists I \in M_\Delta \Rightarrow I \times M_i = M_i \times I = M_i$

4. $\forall M_i \in M_\Delta\ \exists\ M_i^{-1} \Rightarrow M_i \times M_i^{-1} = M_i^{-1} \times M_i = I$. El inverso de A es B, de B es A y de C, D, E; son ellos mismos.

Finalmente, por la forma de su tabla, se comprueba que G_Δ y M_Δ son isomorfos.

3e) El grupo de permutaciones y el grupo G_Δ son isomorfos. Esto se puede ver mediante sus tablas de multiplicación si cambiamos el orden de las filas y columnas de G_Δ a: $\{I, \{\chi_i\}, R_1, \bar{R}_1\}$ y, en este caso, si cambiamos el orden de operación al elemento de la fila $\otimes$ el de la columna.

3 f) Para el triángulo isósceles únicamente tenemos rotación de 2π y reflexión por su eje de simetría mientras que para el escaleno solo está la rotación de 2π, y como la rotación de 2π se puede ver como la identidad, tenemos:

$G_{iso} = \{I, \chi_{simetría}\}$, $G_{es} = \{I\}$, los cuales forman grupo, el primero uno como los subgrupos de reflexión de G_Δ y el segundo el trivial.

10 a) Sea $|P_n\rangle \in P_n \Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$; $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in P_n$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $|a\rangle + |b\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = |P_n\rangle \in P_n$

2. $|a\rangle + |b\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i = |b\rangle + |a\rangle$

3. $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = \sum_{i=0}^{n-1} [[a_i + (b_i + c_i)] x^i] = \sum_{i=0}^{n-1} [[(a_i + b_i) + c_i] x^i] = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

4. $|0\rangle + |a\rangle = 0 + \sum_0^{n-1} a_i x^i = |a\rangle$

5. $\exists -|a\rangle \Rightarrow |a\rangle + (-|a\rangle) = \sum_0^{n-1} (a_i - a_i) x^i = 0 = |0\rangle$

6. $\alpha |a\rangle = \sum_0^{n-1} \alpha a_i x^i = |P_n\rangle \in P_n$

7. $\alpha(\beta |a\rangle) = \sum \alpha(\beta a_i x^i) = (\alpha\beta)|a\rangle$

HOY ES...

8. $(\alpha+\beta)|a\rangle = \sum(\alpha a_i + \beta a_i)x^i = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$ 10. $1|a\rangle = \sum 1\cdot a_i x^i = |a\rangle$

9. $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \sum \alpha(a_i + b_i)x^i = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

6b) Si los coeficientes son enteros, no es espacio vectorial en cuanto:

$$\alpha|P_n\rangle = \sum_0^{n-1} \alpha a_i x^i \notin P_n$$, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$, el producto $\alpha \cdot a_i$ puede no ser entero y dejar fuera de P_n al vector.

10 c) todos los subconjuntos mencionados son subespacios de P_n

2) Lección 2.2.4

6 a) Es sencillo demostrar que forma un E.V. en cuanto se pueden representar como vectores de $\mathbb{R}^4$ y su suma y producto por escalar quedan como siempre:

$$|a\rangle = a^0 + a^1|q_1\rangle + a^2|q_2\rangle + a^3|q_3\rangle = (a^0, a^1, a^2, a^3)$$

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^0+b^0, a^1+b^1, a^2+b^2, a^3+b^3); \quad \alpha|b\rangle = (\alpha b^0, \alpha b^1, \alpha b^2, \alpha b^3)$$

6b) $|b\rangle = (b^0, \vec{b}), \quad |r\rangle = (r^0, \vec{r})$

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0 + r^j|q_j\rangle)$$

$$\Rightarrow |d\rangle = b^0 r^0 + b^0 r^j |q_j\rangle + b^1 r^0 |q_1\rangle + b^1 r^j \langle q_1|q_j\rangle + b^2 r^0 |q_2\rangle + b^2 r^j \langle q_2|q_j\rangle + b^3 r^0 |q_3\rangle + b^3 r^j \langle q_3|q_j\rangle$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r^j |q_j\rangle + r^0 b^i |q_i\rangle + b^i r^j \langle q_i|q_j\rangle$$

$$= b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} - (b^i r_i) + b^1 r^2 |q_3\rangle - b^1 r^3 |q_2\rangle - b^2 r^1 |q_3\rangle + b^2 r^3 |q_1\rangle + b^3 r^1 |q_2\rangle - b^3 r^2 |q_1\rangle$$

$$= b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} + b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle + (b^3 r^1 - b^1 r^3)|q_2\rangle + (b^1 r^2 - b^2 r^1)|q_3\rangle$$

$$= (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\; b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{r}) \blacksquare$$

6c) $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle, \quad |r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$

$$|d\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle \odot r^\beta |q_\beta\rangle = b^0 r^0 |q_0\rangle + b^0 r^j |q_j\rangle + r^0 b^j |q_j\rangle + r^i b^j \langle q_j | q_i\rangle$$

$$= (b^0 r^0 - b^i r_i)|q_0\rangle + (b^\alpha r^j + r^\alpha b^j)\delta^0_\alpha |q_j\rangle + \varepsilon^{ijk} b_j r_k |q_i\rangle$$

Ahora, definiendo $(b^\alpha r^j + b^j r^\alpha) = S^{(\alpha j)}$; y $\varepsilon^{ijk} = A^{i[jk]}$; y $(b^0 r^0 - b^i r_i) = a \in \mathbb{R}$

$$|d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{i[jk]} b_j r_k |q_i\rangle \blacksquare$$

HOY ES...

10 d) Como se vió anteriormente, $a = b^0 r^0 - b^1 r_1 - b^2 r_2 - b^3 r_3$, $S^{(ij)} = (b^0 r^j + b^j r^0)$ y finalmente $A^{i[jk]}$ no es más que el Levi-Civita ε^{ijk}. Como este depende de un Producto cruz, el vector $|d\rangle$ debería ser un pseudovector.

10 e) Se puede comprobar usando la tabla de multiplicación

$\times$	I	σ_1	σ_2	σ_3
I	I	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	I	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
σ_2	σ_2	$-i\sigma_3$	I	$i\sigma_1$
σ_3	σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	I

En cuanto su matriz de multiplicación tiene un comportamiento distinto al definidos para los cuaterniones, no puede ser base, pues cambiaría las propiedades.

Ahora, mediante las definiciones de las operaciones, se muestra que un cuaternion se puede representar así:

$$|q\rangle = a + b|q_1\rangle + c|q_2\rangle + d|q_3\rangle = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Suma: $|x\rangle = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+fi & g+hi \\ -g+hi & e-fi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+e)+(b+f)i & (c+g)+(d+h)i \\ -(c+g)+(d+h)i & (a+e)-(b+f)i \end{pmatrix}$

Como vemos, se suma componente a componente.

$\Rightarrow$ Prod. por escalar: $\alpha|x\rangle = \alpha \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha bi & \alpha c+\alpha di \\ -\alpha c+\alpha di & \alpha a-\alpha bi \end{pmatrix}$ Se multiplica por cada componente

$\Rightarrow$ Producto entre vectores:

$$|x\rangle \odot |y\rangle = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} e+fi & g+hi \\ -g+hi & e-fi \end{pmatrix} = a + b|q_1\rangle + c|q_2\rangle + d|q_3\rangle \odot e + f|q_1\rangle + g|q_2\rangle + h|q_3\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} (ae - \overbrace{bf - cg - hd}^{x_i y^i}) + (af + be + ch - gd)i & (ag - bh + ce + df) + (ah + bg - (f + de))i \\ (-ce - df - ag + bh) + (ah + bg - (f + de))i & (-cg - dh + ae - bf) + (-ch + dg - af - be)i \end{pmatrix}$$

$$= (x^0 y^0 - x^i y_i)|q_0\rangle + [(x^0 y^1 + x^1 y^0) + (x^2 y^3 - x^3 y^2)]|q_1\rangle + [(x^0 y^2 + x^2 y^0) + (x^3 y^1 - x^1 y^3)]|q_2\rangle$$
$$+ [(x^0 y^3 + x^3 y^0) + (x^1 y^2 - x^2 y^1)]|q_3\rangle$$

Esto comprueba que la matriz 2x2 representa al cuaternion.

10 f)

X	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	-I	C	-B
B	B	-C	-I	A
C	C	B	-A	-I

Mediante esta tabla calculada en MAXIMA, se ve que las matrices A, B, C y la identidad forman base para los cuaterniones.