Tópicos en Física Contemporánea

Modelado de Objetos Autogravitantes

Presentado por:
Sebastian Alba - 2200807
Nicolas Mantilla - 2210707
Santiago A. Montes - 2210718

Pregrado en Física
Universidad Industrial de Santander

Presentado a:
Doctor Luis A. Nuñez

18 de julio de 2023

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

1. Introducción

En el ámbito de la física, la consideración de modelos con anisotropía en la presión representa un enfoque de gran relevancia y utilidad. Este enfoque nos permite comprender de manera más completa y precisa el comportamiento y las propiedades de los objetos autogravitantes, y a su vez, profundizar en nuestro conocimiento sobre los fenómenos gravitacionales que los gobiernan, por esto, el presente proyecto se enfoca en el modelado de objetos autogravitantes mediante la aplicación del concepto de anisotropía.

La anisotropía en la presión, referida a las diferencias en magnitud y dirección entre la presión radial y la presión tangencial, desempeña un papel fundamental en la descripción de la estructura y la dinámica de estos objetos. La presencia de anisotropía puede dar lugar a efectos interesantes, por tanto, considerar la anisotropía en la presión en nuestros modelos resulta esencial para una comprensión más completa de estos fenómenos.

Los objetos autogravitantes, por su parte, constituyen una clase de sistemas físicos en los que la gravedad es la fuerza predominante que determina su comportamiento. Estos objetos presentan características peculiares que los hacen especialmente interesantes de investigar.

En este orden de ideas se consideran ecuaciones de estructura (equilibrio hidrostático y gradiente de masa) que relacionan las diferentes características físicas del sistema (presión radial, presión tangencial, densidad, masa y distancia al centro) para el marco newtoniano:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa}\frac{\tilde{m}\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} + 2\frac{\tilde{P}_{\perp}(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}}, \tag{1}$$

con gradiente de masa:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = \eta\tilde{r}^2\tilde{\rho}, \tag{2}$$

por otro lado, la ecuación con correcciones relativistas:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa}\frac{\tilde{m}\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2}\left(1+\kappa\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}\right)\left(1+3\eta\kappa\frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}}\right)\left(1-2\mu\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}}\right)^{-1} + 2\frac{\tilde{P}\perp(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}}, \tag{3}$$

cuyo gradiente de presión es igual al newtoniano. Cabe destacar que las ecuaciones han sido adimensionalizadas bajo los parámetros μ, κ y η dependientes de la masa total, el radio total, la densidad en el centro y la presión en el centro; esto con el fin de evitar inconvenientes al momento de integrar numéricamente las ecuaciones. Esto implica que integramos sobre las nuevas variables adimensionalizadas tildadas que se diferencian de las variables físicas únicamente por un factor de escala.

2. Desarrollo y resultados

Para el desarrollo del estudio fue considerada una anisotropía de la forma:

$$\Delta P = C\frac{m(r)\rho(r)}{r}, \tag{4}$$

lo cual simplifica la ecuación diferencial de la presión, siendo esta así:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = h\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \tag{5}$$

para el caso del modelo Newtoniano, mientras que la ecuación de anisotropía para en el modelo relativista se tomó como:

$$\Delta P = \frac{C}{r}\left(1+\frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1-2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1}, \tag{6}$$

esto con el fin de simplificar las ecuaciones 1 y 3, viabilizando con ello su solución.

Asimismo, y con este mismo propósito, se utilizó un perfil de densidades de tipo Gokhroo-Mehra [1]:

$$\tilde{\rho} = \left(1 - B\tilde{r}^2\right) \tag{7}$$

$$B = \frac{5}{3}\left(1-\frac{3}{\eta}\right), \tag{8}$$

aprovechando su facilidad dado que permite calcular la densidad del objeto autogravitante en cualquier punto del objeto, únicamente a partir de su distancia radial.

Para este caso, resulta lógico considerar un valor de densidad decreciente con el tiempo, dado se adecúa a un comportamiento coherente con la descripción física del tipo de cuerpos que se están estudiando. Para garantizar ello, el valor del parámetro η debe ser mayor o igual a 3, de manera que $\rho_0 \geq 3\overline{\rho}$. De esta forma, es posible obtener el comportamiento de una ecuación de estado de la forma $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\rho})$, el cual puede ser contemplado en la figura 1.

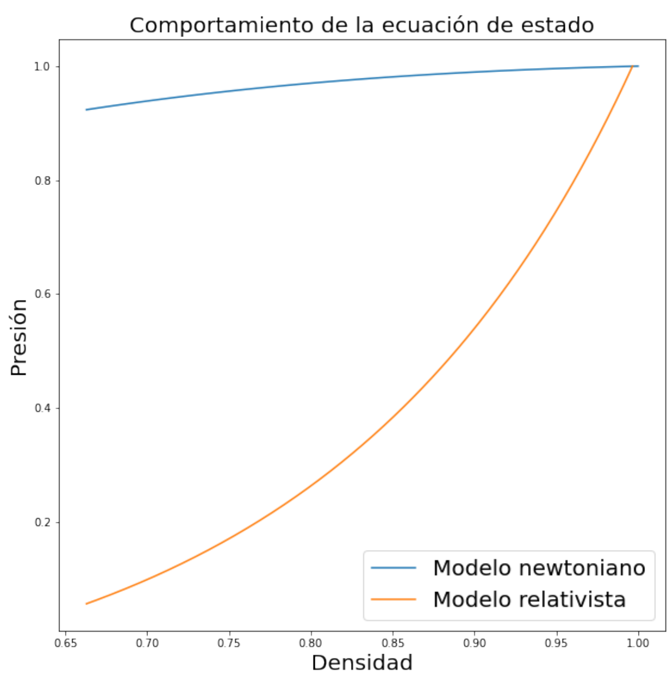

Fig. 1. Variación de la presión en función de la densidad, siendo ambas magnitudes adimensionales.

Cabe resaltar que los parámetros escogidos durante la adimensionalización dependen esencialmente de la masa total, el radio total; así como la presión y la densidad central, por lo que una variación de parámetros η, κ y μ conlleva una variación de tales magnitudes.

En este orden de ideas, el modelo newtoniano, el cual puede visualizarse en la figura 2, muestra un comportamiento decreciente, donde la presión radial decae más rápido cuanto mayor sea la masa y la densidad, y cuanto menor sea el radio y la presión central.

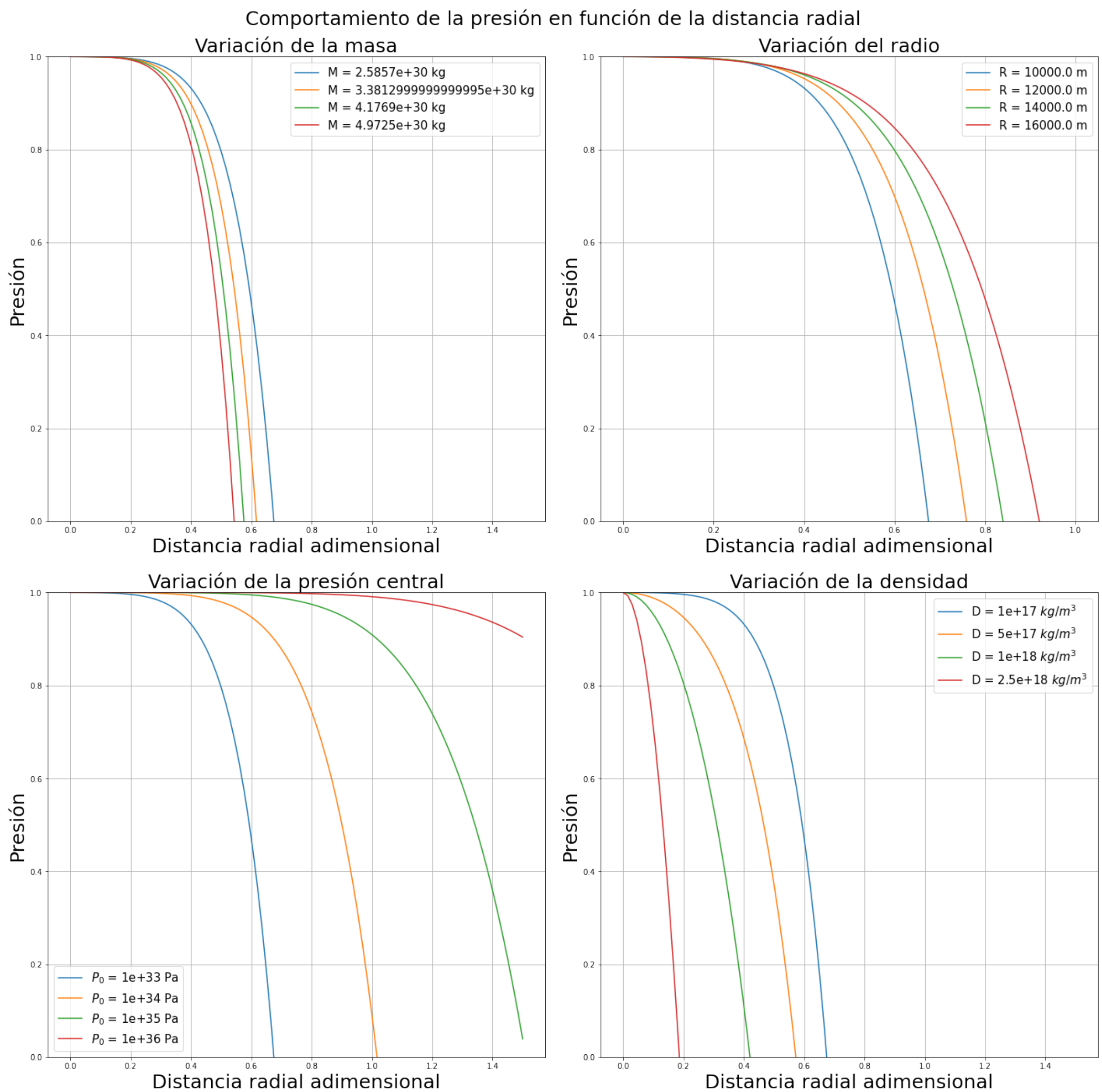

Fig. 2. Variación de los parámetros de masa, radio, presión y densidad, para un modelo de estructura estelar newtoniano.

De igual forma, el modelo relativista describe tendencias similares en estos comportamientos. Tal y como se aprecia en la figura 3, las tendencias de decrecimiento coinciden con el modelo newtoniano para las diferentes variaciones efectuadas, a excepción de la variación de la presión central, dado que si bien la presión radial alcanza un valor nulo en el mismo orden descrito por el modelo newtoniano, su comportamiento previo a este describe variaciones en la tendencia mucho más marcadas entre sí.

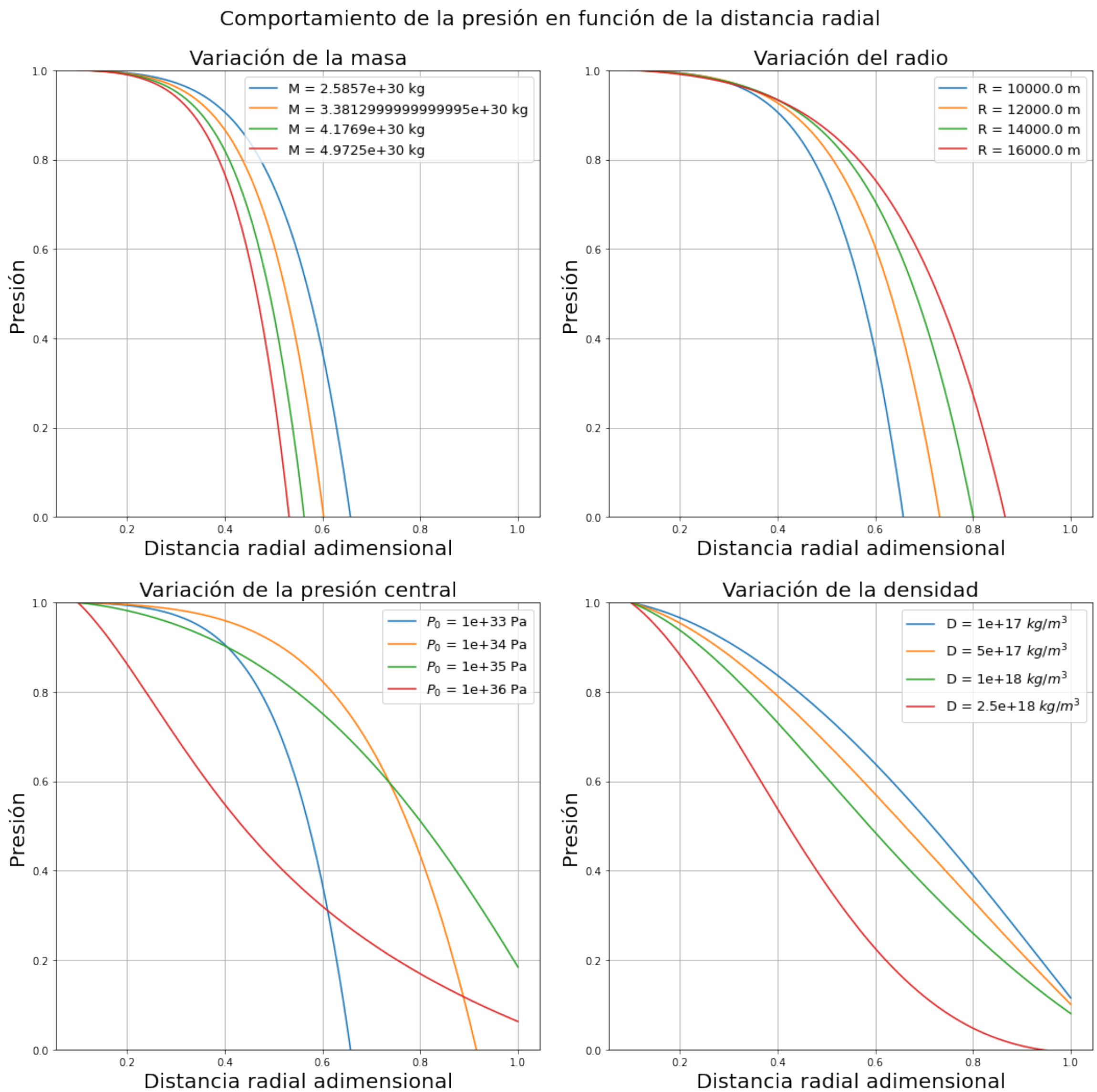

Fig. 3. Variación de los parámetros de masa, radio, presión y densidad, para un modelo de estructura estelar relativista.

3. Conclusiones

Al comparar los modelos newtoniano y relativista en cuanto a la variación de la presión radial para diferentes parámetros, se observa que presentan tendencias similares. Sin embargo, es importante destacar que existe una notable diferencia en el comportamiento de la ecuación de estado entre ambos modelos, lo cual no puede ser ignorado.

El estudio de la variación de parámetros revela cómo se comportan las soluciones para la presión cuando se consideran características distintas en los cuerpos celestes. Estas variaciones pueden ser contrastadas con los hallazgos experimentales, lo que proporciona una mayor comprensión de los fenómenos observados.

De igual forma, se recomienda realizar una variación de parámetros que incluya diferencias significativas en la compactibilidad de los cuerpos autogravitantes considerados. Esto permitiría obtener resultados más precisos y detallados, así como una mejor comprensión de las propiedades físicas de estos objetos celestes.

El desarrollo de este tipo de proyectos estimula en los estudiantes de física capacidad de resolver distintos tipos de problemas en ámbitos específicos de la ciencia. En este caso, se evidencia la importancia del uso de herramientas digitales para la obtención de resultados derivados de modelos matemáticos con los cuales generar conclusiones al respecto.

Referencias

[1] Mehra, M. K. G. . A. L. (1994). Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity.