Gradiente: $\vec{\nabla}\phi(x,y,z)$, Rotacional: $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_x,A_y,A_z) = \varepsilon^{ijk}\partial_j A_k \hat{x}_i$

Divergencia: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \partial_i A^i(x^j)$, Por ahora $\vec{\nabla}$ es un vector.

Taller de Problemas Clase 2:

1) Lección 1.5.7:

2a) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \left(\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial z}\right) = \partial^i(\phi\psi)$$

Como tanto ϕ como ψ dependen de las tres variables, aplicamos la regla de la derivada del producto

$$\partial^i(\phi\psi) = (\partial^i\phi)\psi + \phi(\partial^i\psi) = (\vec{\nabla}\phi)\psi + \phi(\vec{\nabla}\psi) \blacksquare$$

2d) ¿$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})$ qué puede decir de $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$?

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \partial^i(\vec{\nabla}\times\vec{a})_i = \partial^i\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}a_z - \frac{\partial}{\partial z}a_y\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x\right)$$

De este análisis se puede ver que, si las derivadas mixtas son continuas, las derivadas mixtas son conmutables y entonces se anulan en la

HOY ES...

expansión anterior, por ende, si $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})=0$, entonces las derivadas mixtas son continuas. Sin embargo, la expresión $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$ carece de sentido pues se está hallando el rotacional de un campo escalar.

2f) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{\nabla}^2\vec{a}$.

$$= \varepsilon^{ijk}\partial_j(\vec{\nabla}\times\vec{a})_k = \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial^m a^n = (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)\partial_j\partial^m a^n$$

$$= \partial^i\partial_n a^n - \partial_m\partial^m a^i = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{\nabla}^2\vec{a} \blacksquare$$

2) Sección 1.6.6:

2a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)$

- Suponemos un número complejo cuya norma es 1 y su ángulo es α, entonces:

$z = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)$, elevando al cubo: $z^3 = e^{i(3\alpha)} = \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha)$

Sin embargo, sabemos que: $\cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) = (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))^3$,

expandiendo: $= \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\, i\operatorname{sen}(\alpha) - 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha) - i\operatorname{sen}^3(\alpha)$,

$= \cos^3(\alpha) + 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha) + i(3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha))$

Entonces, como ambos complejos son iguales, su parte real debe ser igual, siendo así: $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) + 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)$ $\blacksquare$

2b) $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$

Siguiendo el procedimiento anterior pero comparando las partes imaginarias veremos que: $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$ $\blacksquare$

5a) $(2i)^{1/2} = z^{1/2}$

$\Rightarrow z^{1/2} = \sqrt{|2i|}\cdot e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)}$, $k=0,1$

$\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow (2i)^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}\right)} \begin{cases} z_0^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \\ z_1^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi/2+2\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i5\pi/4} \end{cases}$$

HOY ES...

5b) $(1-\sqrt{3}\,i)^{1/2}$: $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$

$$(1-\sqrt{3}\,i)^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2\pi k + 5\pi/3}{2}\right)}, \quad k=0,1$$

$$z_0^{1/4} = \sqrt{2}\, e^{i(5\pi/6)}, \quad z_1^{1/4} = \sqrt{2}\, e^{i(11\pi/6)}$$

5c) $(-1)^{1/3}$ $\theta = \pi$

$$(-1)^{1/3} = 1\, e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)}, \quad k=0,1,2 \qquad \begin{cases} z_0^{1/3} = e^{i(\pi/3)} \\ z_1^{1/3} = e^{i\pi} = -1 \\ z_2^{1/3} = e^{i(5\pi/3)} \end{cases}$$

5d) $8^{1/6}$ $\theta = 0$

$$8^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i(2\pi k/6)}, \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$$\rightarrow z_0^{1/6} = \sqrt[6]{8}, \quad z_1^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i(\pi/3)}, \quad z_2^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i(2\pi/3)}, \quad z_3^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i\pi} = -\sqrt[6]{8}$$

$$z_4^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i(4\pi/3)}, \quad z_5^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{i(5\pi/3)}$$

5e) $(-8-8\sqrt{3}\,i)^{1/4}$ $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 4\pi/3$

$$(-8-8\sqrt{3}\,i)^{1/4} = \sqrt{4}\, e^{i\left(\frac{4\pi/3 + 2\pi k}{4}\right)} \qquad \begin{cases} z_0^{1/4} = 2\, e^{i(\pi/3)} \\ z_1^{1/4} = 2\, e^{i(5\pi/6)} \\ z_2^{1/4} = 2\, e^{i(4\pi/3)} \\ z_3^{1/4} = 2\, e^{i(11\pi/6)} \end{cases}$$

6a) $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

$$\text{Log}(-ie) = \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 - \frac{\pi}{2} i$$

6b) $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

$$\text{Log}(1-i) = \text{Log}\left(\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + 2n\pi)}\right)$$
$$= \text{Log}(\sqrt{2}) + i(\pi/4 + 2n\pi)$$
$$= \text{Log}(\sqrt{2}) - \pi/4\, i$$

6c) $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$

$$\text{Log}(e) = \text{Log}\left(e \cdot e^{i(2n\pi)}\right)$$
$$= \ln(e) + 2n\pi i$$
$$= 1 + 2n\pi i$$

6d) $\text{Log}(i) = (2n + 1/2)\pi i$

$$\text{Log}(i) = \text{Log}\left(e^{i(\pi/2 + 2n\pi)}\right)$$
$$= i(\pi/2 + 2n\pi)$$
$$= i\pi(1/2 + 2n)$$