Отчет о выполненой лабораторной работе 1.4.2

Воронин Денис, Б04-403

October 6, 2024

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

1 Аннотация

Цель работы:с помощью оборотного маятника измерить величину ускорения свободного падения.

В работе используются:оборотный маятник с двумя подвесными призмами и двумя грузами (чечевицами); электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с острием для определения положения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлические линейки, штангенциркуль длиной 1 м.

2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Ось, проходящая через точку подвес перпендикулярно плоскости качания, называется осью качания маятника.

При малых колебаниях период колебаний физического маятника определяется формулой (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

Где J — момент инерции маятника относительно оси качания, m — масса маятника, l — расстояние от оси качания до центра масс маятника.

Если сравнить (1) с известной формулой колебаний математического маятника длиной l_m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_m}{g}}$$

, можно определить приведённую длину физического маятника как (4)

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}$$

Смысл приведённой длины в том, что при длине математического маятника, равной $l_m = l_{\text{пр}}$, его период колебаний совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

3 Теорема Гюйгенса об оборотном маятнике

Докажем теорему Гюйгенса об оборотном маятнике. Пусть O_1 и O_2 — две точки подвеса физического маятника, лежащие на одной прямой с точкой С по разные стороны от неё (см.рис.1). Тогда периоды колебаний маятника равны соответственно(5)

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}, T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}$$

По теореме Гюйгенса—Штейнера имеем (2):

$$J_1 = J_C + ml_1^2, J_2 = J_C + ml_2^2$$

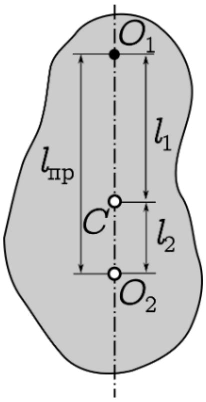

Рисунок 1: К теореме Гюйгенса

где J_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качания. Пусть периоды колебаний одинаковы: $T_1 = T_2$. Тогда одинаковы должны быть и приведённые длины:

$$l_{пр} = \frac{J_1}{ml_1} = \frac{J_2}{ml_2}$$

С учетом (2) получим (8):

$$l_{пр} = \frac{J_C}{ml_1} + l_1 = \frac{J_C}{ml_2} + l_2$$

откуда находим (при $l_2 \neq l_1$)

$$J_C = ml_1 l_2$$

Подставляя обратно получим (3) $l_{пр} = l_1 + l_2$ Таким образом, доказано следующее: если периоды колебаний при подвешивании маятника в точках O_1 и O_2 равны, то расстояние между точками подвеса равно приведённой длине маятника; и наоборот, из равенства (3) следует равенство периодов $T_1 = T_2$.

4 Измерение g

Пусть

$$L \equiv \overline{O_1 O_2} = l_1 + l_2$$

— расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны, $T_1 = T_2 = T$, то по теореме Гюйгенса L $= l_{пр}$. Тогда из (1) и (4) находим ускорение свободного падения (6)

$$g_0 = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2}$$

Точного совпадения $T_1 = T_2$ на опыте добиться, конечно, невозможно. Поэтому получим формулу для определения ускорения свободного падения g, если измеренные периоды незначительно различаются:

$$T_1 = T, T_2 = T + \triangle T$$

Из системы (5) и (2) получаем(7):

$$g = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}$$

Можно переписать (7) как:

$$g = g_0 \frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{T_2^2}{T_1^2}}, \text{где} \lambda = \frac{l_1}{l_2}$$

Проанализируем отличия формулы (7) от (6) и оценим величину поправки. Пусть $\varepsilon = \frac{\triangle T}{T} \ll 1$ — относительное отклонение при измерении периодов. Тогда при $\lambda \neq 1$, пользуясь малостью ε , получим (9)

$$g = g_0 \frac{\lambda - 1}{\lambda - (1+\varepsilon)^2} \approx g_0 \frac{1}{1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}} \approx g_0 (1 + \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1})$$

5 Экспериментальная установка

В работе используются маятники в форме стержней цилиндрического или прямоугольного сечения длиной ~ 1 м и массой 1/1.5 кг. Маятник подвешивается с помощью небольших треугольных призм ($П_1$и$П_2$), острым основанием опирающихся на закреплённую на стене консоль. Ребро призмы задаёт ось качания маятника. На стержне закрепляются два дополнительных груза в форме «чечевицы»($Г_1$и$Г_2$). Для выполнения условия $l_1 > l_2$ внешнюю чечевицу $Г_2$ следует крепить за призмой $П_2$, а чечевицу $Г_1$ (внутреннюю) — между призмами $П_1$и$П_2$ (см. Рис. 3).

Регистрация времени колебаний проводится с помощью электронных счётчиков. Расстояния между точками установки маятников на консоли до электронных счётчиков фиксировано. Это накладывает ограничения на расположение призм и грузов на стержне. Призмы крепятся симметрично на равном расстоянии от концов стержней так, чтобы маятник при колебаниях пересекал фотоприёмники счётчика, не задевая оправу счётчика.

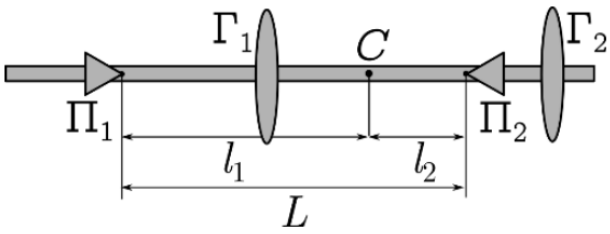

Рисунок 2: Маятник с грузами

Фиксированное положение призм однозначно задаёт приведённую длину оборотного маятника $l_{пр=L}$. Изменять в опыте можно только положения грузов на стрежне. Главная задача опыта — подобрать такое положение грузов, при котором периоды колебаний при перевороте маятника совпадали бы с достаточно высокой точностью, а для положения центра масс маятника выполнялось при этом условие $\frac{l_1}{l_2} > 1,5$.

6 Предварительный расчёт положения грузов

Если первоначально расположить грузы на стержне произвольным образом, то для достижения равенства периодов колебаний потребуется исследовать зависимости периодов колебаний T_1иT_2 при перемещении поочерёдно обоих грузов по штанге.

Существенно облегчить и ускорить поиск нужного положения грузов можно, если провести предварительные расчёты.После установки грузов согласно предварительным расчёам, их положение может быть уже уточнено экспериментально.

Пусть призмы $П_1$и$П_2$ задают сопряжённые точки подвеса, то есть период колебаний при перевороте маятника не изменяется. Тогда по теореме Гюйгенса расстояние между призмами L — это приведённая длина маятника. Это условие может быть записано либо в форме (4)

$$J_{пр} = MLl_2$$

где $J_п$ — момент инерции маятника относительно призмы $П_2$, либо в форме (8):

$$J_C = Ml_1l_2$$

где J_C — момент инерции маятника относительно его центра масс. Здесь M — полная масса маятника.

7 Оценка погрешностей

Оценим влияние погрешностей измерений на точность расчётов по формуле (7). Пусть все периоды измерены с одинаковой погрешностью σ_T, расстояние L между точками подвеса с погрешностью σ_L, расстояния $l_{1,2}$ до центра масс с погрешностью σ_l. Погрешность определения величины g_0 (по формуле (6)) равна

$$\frac{\sigma_{g0}}{g_0} = \sqrt{(\frac{\sigma_l}{L})^2 + 4(\frac{\sigma_T}{T})^2}$$

Это — основная погрешность опыта. Видно, что для её минимизации необходимо максимально точно измерить расстояние между точками повеса L и период колебаний маятника T. Проанализируем влияние поправки $g = g_0 + \triangle g$, где согласно (9)

$$\triangle g \approx 2\beta\frac{\triangle T}{T}g_0, \beta\frac{l_2}{l_1 - l_2}$$

Общая формула для погрешности (7) слишком громоздка, поэтому для наглядности анализа проведём вычисления приближённо. Достаточно учесть, что основной вклад в относительную погрешность $\triangle g$ вносят величины $\triangle T$и $\triangle\, l = l_1 - l_2$, поскольку являются разностями двух близких величин. Тогда для полной относительной погрешности получим(10)

$$\frac{\sigma_g}{g} \approx \sqrt{(\frac{\sigma_L}{L})^2 + 4(1+2\beta)(\frac{\sigma T}{T})^2 + 8(\beta\frac{\triangle T}{T}\frac{\sigma_l}{\triangle l})^2}$$

8 Ход работы

8.1 Измерение масс

Элемент	m,г
Целиком	4023$\pm 0,1$
Стержня	891,5$\pm 0,1$
Груз 1	1495,5 $\pm 0,1$
Груз 2	1481,3 $\pm 0,1$
Призма 2	76,6 $\pm 0,1$
Призма 1	78,3 $\pm 0,1$

Таблица 1: Масса маятника стержня груза и призм

8.2 Измерение длины

Расстояние между призмами:

$$L = 50,41 \pm 0,05\text{см}$$

Длина всего стержня:

$$l_{\text{ст}} = 98.31 \pm 0,05\text{см}$$

8.3 Рассчет положения грузов на стержне

С помощью программы произведем рассчет положения грузов: Из имеющихся данных (см.табл.1) получаем: Масса маятника вычисленная(M) = 4023,2

$$L_1 = 36\text{см}, \text{и} L_2 = 14,4\text{см}, \text{при}\frac{L_1}{L_2} = 2,5$$

Момемнт инерции относительно призмы Π_2:

Момент инерции стержня $J_{\text{ст}}$	0,148 кг $*$ м^2
Момент инерции маятника J	0,292 кг $*$ м^2

Таблица 2

По вычисленным данным построим график зависимости момента инерции от положения грузов и определим точку пересечения

Из графика получим, что $L_1 = 9$см, а $L_2 = 50,41 - 9 = 41,41$см

Уточним эти значения с помощью программы:

Из графика получим, что $L_1 = 8,8$см, а $L_2 = 50,41 - 8,8 = 41,61$см

С помощью $\perp$ -образной подставки определите положение центра масс маятника с грузами. Получим 32,81

Измерим расстояние l_1иl_2: от центра масс до острия призм Π_1иΠ_2 соответственно. Получим $l_2 = 10,9$и$l_1 = 38,8$

8.4 Рассчет периода колебаний

При измерении времени для n = 10 колебаний значение $T_2 = 14,51 \pm 0,01$с

При подвешивании на призму Π_1 период для n = 10 колебаний $T_1 = 14,53 \pm 0,01$

Сравнивая значения T_1иT_2 получаем, что различие $\frac{\triangle T}{T} \approx 0,13\%$, что не превышает 1%, значит можем переходить к следующему пункту.

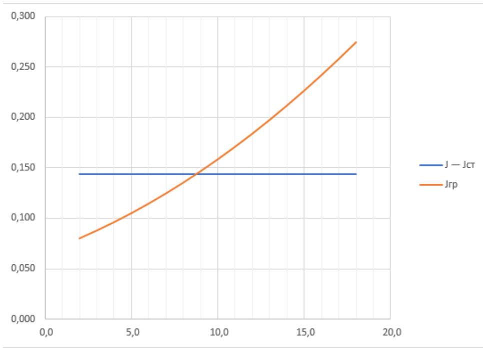

Рисунок 3: Зависимость момента инерции от положения грузов

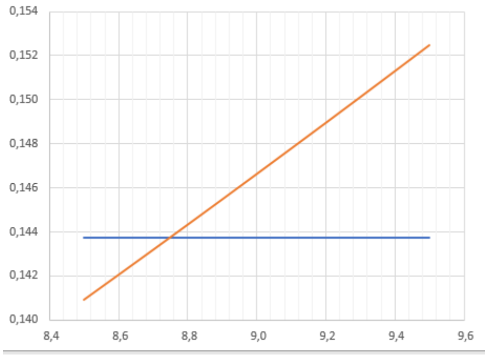

Рисунок 4: Уточнение положения точки пересечения

№ измерения	$T_{п1}$	$T_{п2}$
1	29,02	29,10
2	29,02	29,07
3	29,02	29,07
4	29,03	29,10

Таблица 3: Точные измерения T для n=20

Проведем окончательное измерение периодов $T_1 и T_2$ с максимальной точностью. Количесвто колебаний выберем равным n = 20. По результатам измерений имеем следующиее:

Т.к. n невелико,то рассчитаем погрешность измерения времени σ_t по формуле:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{ср}^2)}$$

Тогда для $T_{п1}$ имеем $\sigma_t = 0,005$, а для $T_{п2}$ - $\sigma_t = 0,015$

При снятии груза с консоли новые расстояния составили: $l_1 = 39,11$см и $l_2 = 11,3$см, что соответствует отношению $\frac{l_1}{l_2} > 1,5$

8.5 Определение ускорения свободного падения g

Подставляя значения в формулу

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + ml_1^2}{mgl_1}}$$

получим $T \approx 1,4$с.

Найдем g_0 по формуле (6), откуда $g_0 = 10,1\ \frac{м}{с^2}$, откуда найдем g по формуле(9): $g \approx 10,2\frac{м}{с^2}$ Найдем погрешность конечного результата по формуле (10): $\sigma_g \approx 0,21$

Имеем конечный результат: $g = 10,20 \pm 0,21\frac{м}{с^2}$

8.6 Вывод

С помощью оборотного маятника измерил величину ускорения свободного падения.