

Отчет о выполненной лабораторной работе 3.2.4 - 3.2.5

Воронин Денис, Б04-407

September 29, 2025

Колебания в электрическом контуре

Цель работы:

Исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются:

Осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКПП-3409/4, магазин сопротивлений МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

1 Теоретические сведения

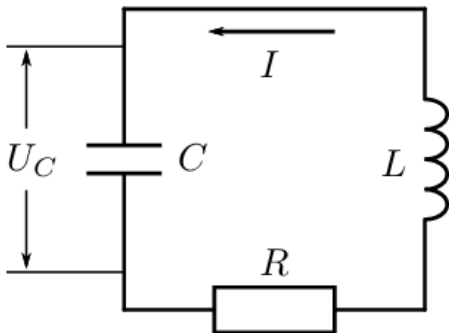


Рисунок 1: Последовательный колебательный контур

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (5)$$

1.1 Затухающие колебания

Для случая $\gamma < \omega_0$ в силу того, что $\omega_1 > 0$, получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (6)$$

Для получения фазовой траектории представим формулу в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

где a и b получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и токе через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} (\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t), \quad (8)$$

$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{U_{C0} \omega_0}{\rho \omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \quad (9)$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (10)$$

где τ – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (11)$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону, N_τ – число полных колебаний за время затухания τ .

1.2 Добротность

С логарифмическим декрементом связана ещё одна важная характеристика колебательного контура — его добротность Q :

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\sqrt{T_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{кр}^2}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{1}{4}}. \quad (12)$$

где $\rho = \frac{1}{2} R_{cr} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Как правило, о добротности говорят, только когда она достаточно велика, то есть $Q \gg 1$. Такой добротностью обладают колебательные контуры со слабым затуханием, представляющие большой практический интерес. Для них имеет место сильное неравенство

$$0 < \gamma \ll \omega_0, \quad (13)$$

или, в терминах параметров контура,

$$0 < R \ll R_{кр} = 2\rho. \quad (14)$$

Малость отношения $\frac{\gamma}{\omega_0}$ даёт следующее:

$$U_C(t) \approx U_0 e^{-\gamma t} [\cos \omega_0 t + \frac{\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t], \quad (15)$$

$$I(t) \approx -\frac{U_0}{\rho} e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t, \quad (16)$$

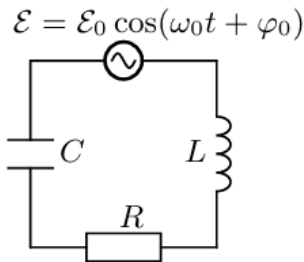
где $U_0 \approx U_{C0}$, а добротность Q связать с характеристиками контура соотношениями

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T_0} = \frac{\pi \omega_0}{2} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \gg 1. \quad (17)$$

1.3 Вынужденные колебания

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней синусоидальной источника.

Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рисунке:



$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (18)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L \phi_0} \sin(\Omega t - \varphi). \quad (19)$$

Рисунок 2: Последовательный контур с внешней ЭДС

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (20)$$

1.4 Способы изменения добротности

Способы измерения добротности $Q = \frac{W_0}{W_{loss, \tau}} = \frac{\pi}{\Theta}$:

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (21)$$

2. с помощью амплитуды резонанса можно получить добротность (в координатах U_C/U_0 , где U_0 – амплитуда колебаний напряжения источника, от частоты генератора). Отсюда нетрудно определить декремент затухания $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$,
3. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ($\Delta\Omega$) будет численно равна коэффициенту γ , то есть $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$.
4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$\Theta = \frac{\omega_0 n}{2 \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}. \quad (22)$$

5. с помощью формулы

$$\Theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

2 Экспериментальная установка

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L , активного сопротивления R , переменной ёмкости C и сопротивления R . Картина колебаний напряжения на ёмкости наблюдается на экране двухканального осциллографа.

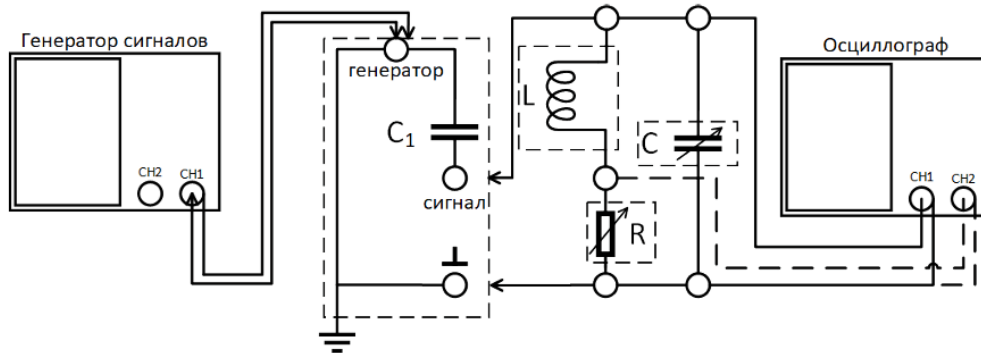


Рисунок 3: Схема установки

Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная ёмкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе U_C поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току I ($I \propto dU_C/dt$).

При изучении возбужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды возбужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчета добротности контура является определение декремента затухания по картине установления возбужденных колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи пугов синусоидальной формы.

3 Ход работы

3.1 Измерение периодов свободных колебаний

Определим с помощью осциллографа период затухающих колебаний:

$$T = 74 \text{ мкс}$$

По периоду колебаний определим нулевую емкость колебательного контура:

$$C_0 = \frac{T^2}{4\pi^2 L_0} = 1,39 \pm 0,15 \text{ нФ}$$

Проведем измерение периодов:

Емкость, С[мкФ]	0	0,002	0,004	0,006	0,008
Период Т,мс	0,074	0,111	,141	0,167	0,191

3.2 Критическое сопротивление и декремент затухания

Рассчитаем емкость C^* :

$$C_* = \frac{1}{4\pi^2 L \nu_0^2} = (6,01 \pm 0,03) * 10^{-9} \text{ Ф}$$

Рассчитаем $R_{кр}$ по формуле:

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C_*}} = 8165,1 \pm 0,4 \text{ Ом}$$

Определим сопротивление, при котором колебательный режим переходит в апериодический: $R_{\text{апериодический}} = 3500 \text{ Ом}$.

Измерим декремент затуханий Θ для разных сопротивлений:

R, Ом	U_m , В	U_{m+n} , В	n	Θ
408	86	56,4	2	$0,21 \pm 0,03$
735	99	38	3	$0,32 \pm 0,03$
1061	92,4	26	3	$0,42 \pm 0,03$
1388	86,8	19,2	3	$0,50 \pm 0,03$
1715	81,2	13,2	3	$0,61 \pm 0,03$
2041	74	9,2	3	$0,69 \pm 0,03$

Зафиксируем два различных значения: $R_1 = 408 \text{ Ом}$, $R_2 = 2041 \text{ Ом}$.

3.3 Свободные колебания на фазовой плоскости

Добьемся на экране осциллографа картинки спирали

Измерим декремент затуханий Θ для этого случая:

R, Ом	O_x , кл	O_{x+n} , кл	n	Θ
408	4	3,6	1	$0,11 \pm 0,04$
735	5	4	1	$0,22 \pm 0,04$
1061	4	2,8	1	$0,36 \pm 0,04$
1388	3,3	2	1	$0,50 \pm 0,04$
1715	2,6	1,5	1	$0,55 \pm 0,04$
2041	4,5	2	2	$0,71 \pm 0,01$

3.4 Исследование резонансных кривых

Изменяя частоту генератора вблизи резонансной частоты и наблюдая синусоиду на первом канале на экране осциллографа, убедимся, что амплитуда колебаний максимальна при достижении резонансной частоты. Ее значение $U_{amp} = 2,56 \text{ В}$.

Снимем АЧХ и ФЧХ колебательного контура вблизи резонанса:

В сторону возрастания \rightarrow :

ν , Гц	4226	4423	4616	4811	5006	5201	5336	5591	5786	5998	6176
АЧХ, В	1,02	1,16	1,32	1,49	1,67	1,87	2,08	2,26	2,48	2,54	2,56
ФЧХ, мкс	74	72	66	62	58	50	46	39	35	31	27

В сторону убывания \leftarrow :

ν , Гц	6176	6371	6466	6761	6958	7151	7346	7541	7736	7931	8126
АЧХ, В	2,56	2,54	2,52	2,46	2,34	2,26	2,20	2,12	2,04	1,96	1,92
ФЧХ, мкс	27	24	18	16	15	11	10	8	7	6	6

3.5 Процессы установления и затухания

Измерим амплитуды колебаний для R_1 :

Возрастание ↗	Убывание ↘
$U_k = 4,5 \text{ В}$	$U_k = 6,9 \text{ В}$
$U_{k+3} = 6,9 \text{ В}$	$U_{k+3} = 2,1 \text{ В}$
$U_{k+1} = 2,7 \text{ В}$	$U_{k+1} = 2,2 \text{ В}$
$U_{k+6} = 7,1 \text{ В}$	$U_{k+6} = 4,10 \text{ В}$

Измерим амплитуды колебаний для R_1 :

Возрастание ↗	Убывание ↘
$U_k = 1,76 \text{ В}$	$U_k = 2,06 \text{ В}$
$U_{k+3} = 2,06 \text{ В}$	$U_{k+1} = 1,72 \text{ В}$
$U_{k+2} = 2,0 \text{ В}$	$U_{k+2} = 3,40 \text{ В}$

Рассчитаем логарифмический декремент затухания и добротность для R_1 и R_2 по формуле

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}. \quad (24)$$

Для R_1 имеем:

	Θ ↗	Θ ↘	Q
1 пара	0,27	0,31	$8,07 \pm 0,83$
2 пара	0,32	0,33	$8,09 \pm 0,83$
3 пара	0,31	0,34	$8,08 \pm 0,83$

Для R_2 имеем:

	Θ ↗	Θ ↘	Q
1 пара	1,23	1,20	$2,23 \pm 0,24$
2 пара	1,19	1,21	$2,21 \pm 0,24$
3 пара	1,18	1,19	$2,20 \pm 0,24$

4 Обработка результатов

Построим график $T_{exp} = f(T_{theor})$:

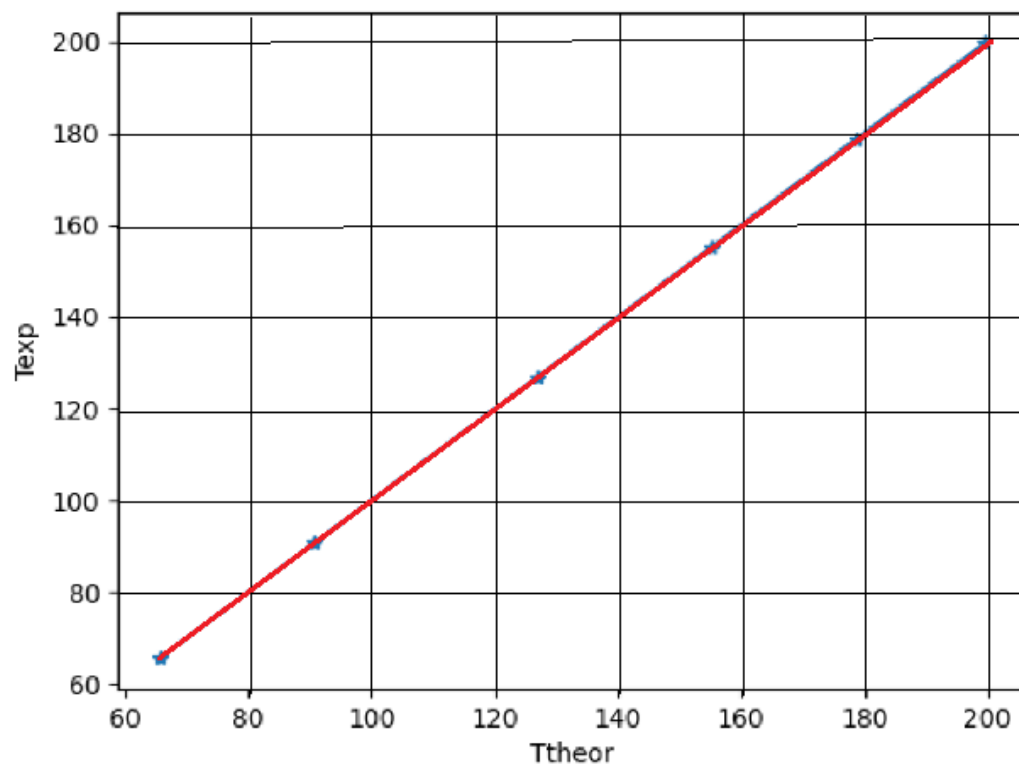


Рисунок 4: $T_{exp}(T_{theor})$

Из графика видно, что результаты сходятся, погрешность < 1%.
 Построим график $1/Q^2 = f(1/R^2)$.

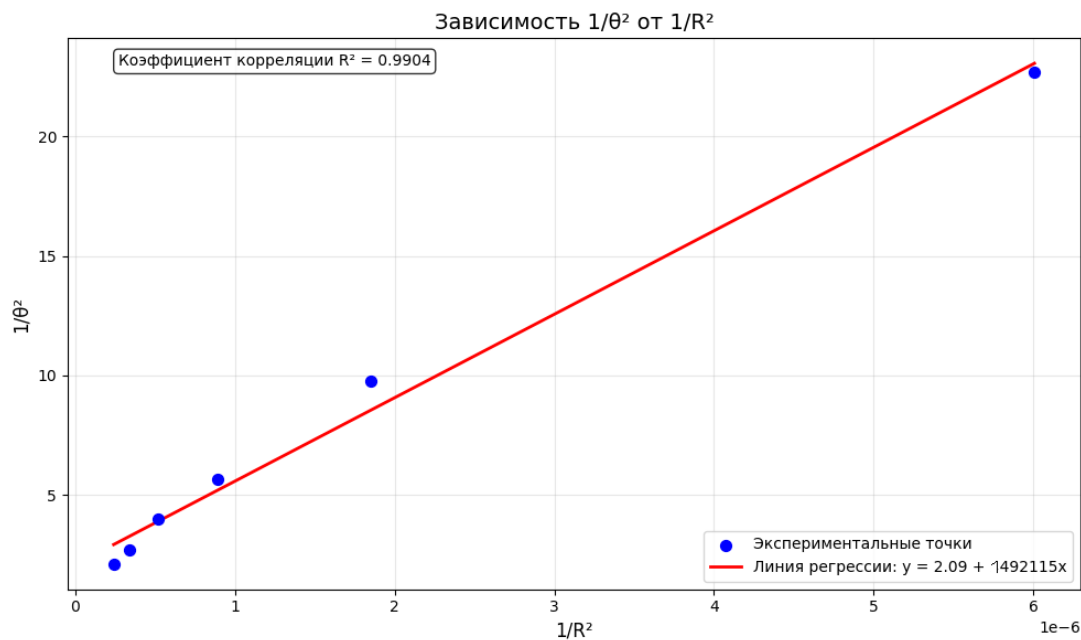


Рисунок 5: $1/Q^2 = f(1/R^2)$

Коэффициент затухания $K = 1492115 \pm 70000 \text{ Ом}^2$.
 Зная коэффициент затухания, найдём $R_{кр}$ по формуле $R_{кр} = 2\pi\sqrt{K} = 7671 \pm 200 \text{ Ом}$, это близко к теоретическому значению $R_{кр} = 8165 \text{ Ом}$.
 Расчитаем добротность для максимального и минимального значения θ и теоретическое с теми же параметрами.
 Вычисление добротности контура по секции 3.2:

$$Q(\theta_{\min}) = 8.97 \quad Q(\theta_{\max}) = 2.40 \tag{25}$$

Вычисление добротности контура по секции 3.3:

$$Q(\theta_{\min}) = 8.49 \quad Q(\theta_{\max}) = 2.21 \tag{26}$$

Вычисление добротности контура теоретически:

$$Q(\theta_{\min}) = 9.16 \quad Q(\theta_{\max}) = 2.34 \tag{27}$$

По секции 3.4 построим АЧХ в масштабе $U/U_{\text{рез}} = f(\nu/\nu_{\text{рез}})$

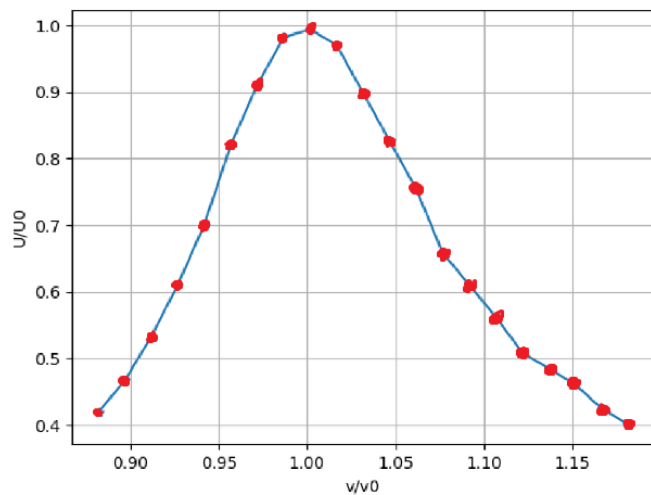


Рисунок 6: $U/U_{\text{рез}}(\nu/\nu_{\text{рез}})$

Рассматриваем добротность по формуле $Q = \nu_{\text{рез}}/2\Delta\nu$, $Q = 8,08$.

Определение добротности по графика АЧХ

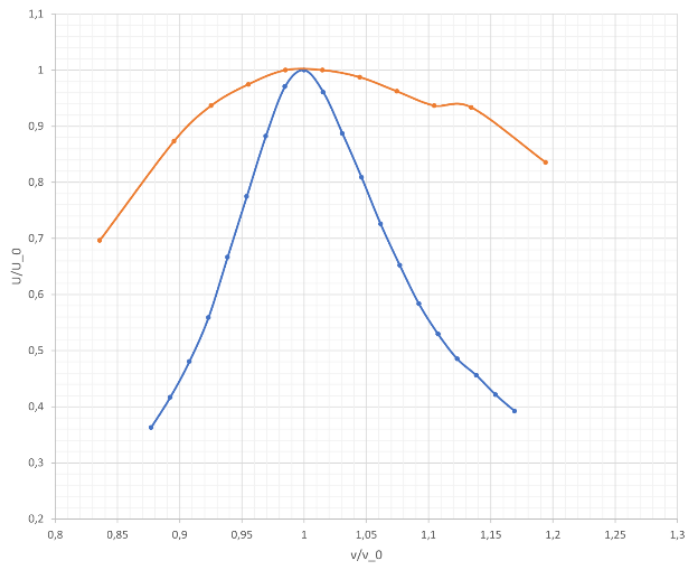


Рисунок 7

$R, \text{ Ом}$	$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$	Q
408	0,12	$8,21 \pm 0,65$
1633	0,43	$2,33 \pm 0,13$

Определение добротности по ФЧХ:

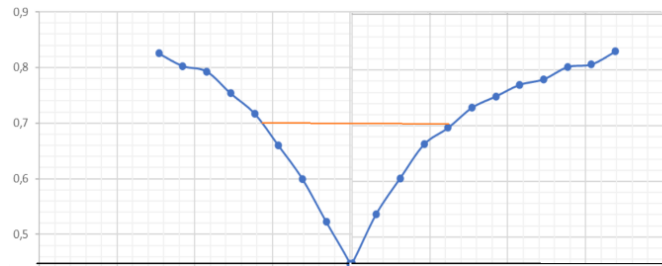


Рисунок 8

$R, \text{ Ом}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	Q
408	0,115	$8,15 \pm 0,68$
1633	0,415	$2,41 \pm 0,15$

Итого:

$R, \text{ Ом}$	$f(L, C, R)$	$f(\theta)$	Фаз. сдвиг	АЧХ	ФЧХ
408	$9,13 \pm 0,10$	$8,23 \pm 0,65$	$8,19 \pm 0,86$	$8,21 \pm 0,65$	$8,15 \pm 0,68$
1633	$2,33 \pm 0,01$	$2,42 \pm 0,06$	$2,31 \pm 0,18$	$2,33 \pm 0,13$	$2,41 \pm 0,15$

5 Вывод

В данной лабораторной работе мы исследовали свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре и различными способами находили его добротность. Достаточно эффективен способ вычисления через декремент затухания. Фазовая спираль даёт высокую погрешность, поэтому это не очень надёжный способ вычисления добротности. Способы вычисления через АЧХ и ФЧХ пригодны для использования, если есть специальная программа, позволяющая вычислять ширину резонансной кривой, и хорошо снятые данные, которые не всегда удается точно измерить. Несмотря на то, что при нашей оценке у $R_2 = 1668 \text{ Ом}$ относительная погрешность в этих опытах примерно около 10 процентов, , учитывая наши качественные данные(часть которых принадлежит другой установке) мы получили хороший результат.