# Отчет о выполненой лабораторной работе 1.2.3

Воронин Денис, Б04-403

December 7, 2024

## Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

## 1 Введение

**Цели работы:** измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетми по теоретиеским формулам; проверка аддитивноски моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**Оборудование:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

## 2 Теоретические сведения

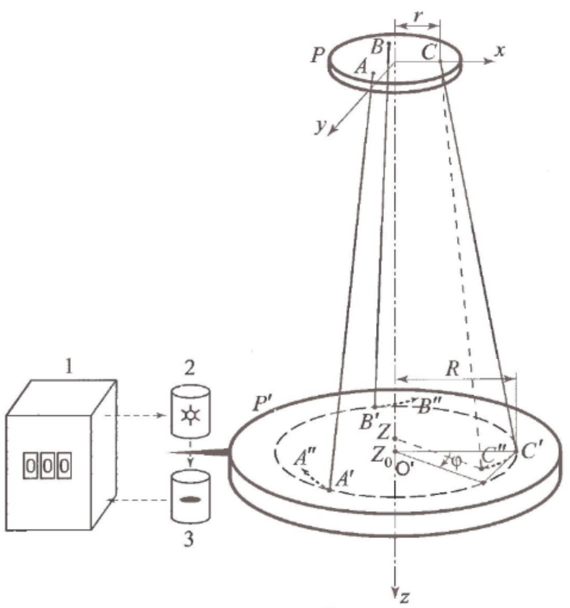


Рисунок 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы $P$ и подвешенной к ней на трех симметрично расположеных нитях $AA'$, $BB'$ и $CC'$, вращающейся платформы $P'$.

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебний. После того, как нижняя платформа $P'$ оказывается повернутой на угол $\varphi$ относительно верхней платформы $P$, вощникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Здесь $r$ – расстояние элемента массы тела $dm$ от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела $m$.

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при коебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \tag{2}$$

Здесь $I$ – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, $m$ – масса платформы с телом, $\varphi$ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, $z_0$ – координата по вертикали центра нижней платформы $O'$ при равновесии ($\varphi = 0$), $z$ – координата той же точки при некотором угле поворота $\varphi$. Превый член в левой части уравнения – кинетическач энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, $E$ – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат $x, y, z$, связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки $C$ в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити $C'$, находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол $\varphi$ эта точка переходит в $C''$ с координатами $(Rcos\varphi, Rsin\varphi, z)$. расстояние между точками $C$ и $C''$ равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1-\cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя $z$ в уравнение (2), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \tag{3}$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0 \tag{4}$$

Производная по времени от $E$ равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \tag{5}$$

Здесь амплитуда $\varphi_0$ и фаза $\theta$ колебаний определяются начальными условиями. Период кртуильных полебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{6}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \tag{7}$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки. При возбуждении крутильных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T \tag{8}$$

# 3 Результаты измерений и обработка данных

1. Измерим параметры установки:

| $z_0$, cm | $R$, mm | $r$, mm |
|---|---|---|
| $213,6 \pm 0,5$ | $114,6 \pm 0,5$ | $30,5 \pm 0,5$ |

2. Вычислим константу установки по формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} = 0,005\text{м}$$

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = 4,012 * 10^{-4} \pm 0,005\text{м}$$

3. Вычислим момент инерции пустой платформы:

$$I = \frac{mR^2}{2} = 7,33 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma^2_{\text{сист}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = 0,7 * 10^{-3}\text{м}$$

$$I = (7,3 \pm 0,7) * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

4.Проведем серии экспериментов и на их основе рассчитаем моменты инерции:

| Тело | Измеренный период (10 колеб) , с | Масса тела, $r$ | Радиус тела, mm | Момент инерции кг $*$ м$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| пустой диск | 43,80 | $983,2$ | 122,6 | $7,56 * 10^{-3}$ |
| кольцо | 41,66 | $777,5$ | 76 | $5,40 * 10^{-3}$ |
| кольцо+диск | 39,03 | $1361,9$ | 76 | $8,31 * 10^{-3}$ |
| диск | 39,18 | $584,4$ | 170 | $3,60 * 10^{-3}$ |
| цилиндр | 37,23 | $1200,0$ | 7,45 | $6,66 * 10^{-3}$ |
| разрез. диск | 30,72 | $1442,2$ | 38,8 | $5,45 * 10^{-3}$ |

Т.к практическая погрешность складывается только из массы, периода и k , то для всех она будет одинакова и равна :

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{сист}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = 0,021$$

Рассчитаем теоретические моменты инерции для кольца, диска и цилиндра:

$$I_k = mr^2 = 4,67\text{кг} * \text{м}^2$$

$$I_d = \frac{mR^2}{2} = 2,8\text{кг} * \text{м}^2$$

$$I_c = \frac{mR^2}{2} = 5,9\text{кг} * \text{м}^2$$

Рассчитаем моменты инерции для половинок диска:

| Раздвиг, $mm$ | Измеренный период (10 колеб) , с | Масса тела, $r$ | Момент инерции кг $*$ м$^2$ |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 30,78 | $1442,2$ | $5,48 * 10^{-3}$ |
| 1 | 30,88 | | $5,52 * 10^{-3}$ |
| 1,5 | 31,21 | | $5,63 * 10^{-3}$ |
| 2 | 31,63 | | $5,77 * 10^{-3}$ |
| 2,5 | 32,14 | | $5,96 * 10^{-3}$ |
| 3 | 32,71 | | $6,18 * 10^{-3}$ |

По этим данным построим график $I(h^2)$:

Через апроксимацию находим накл коэф прямой, оттуда при h = 0, $I = 5,45 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$ , коэффициент наклона равен 0.812

Из графика масса диска равна 1390 г что составляет 96% от истинного значения

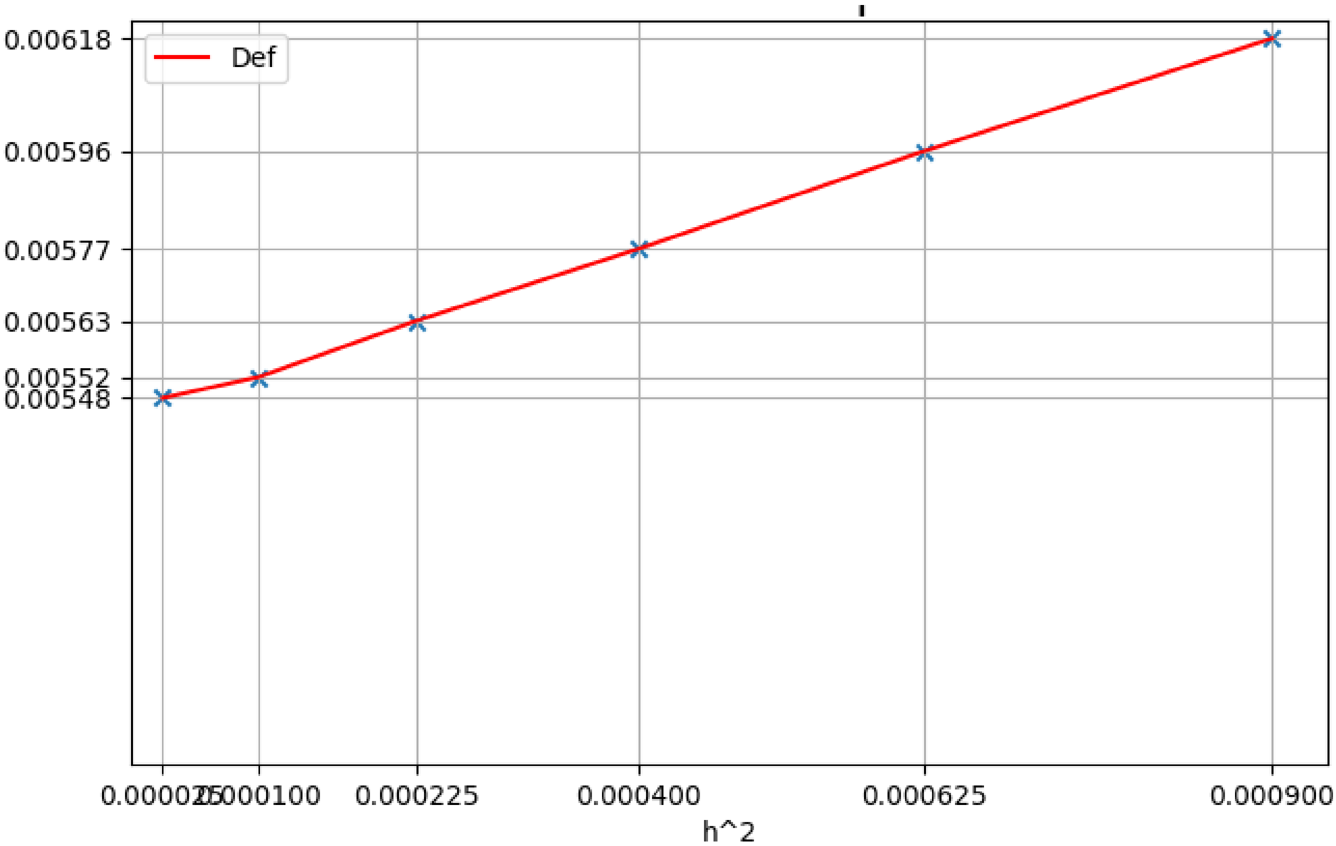


Рисунок 2: График I от $h^2$