

# Отчет о выполненной лабораторной работе 1.4.5

Воронин Денис, Б04-403

December 7, 2024

## Изучение колебаний струны

### 1 Аннотация

Цель работы: Изучить поперечные стоячие волн на тонкой натянутой струне; измерить собственные частоты колебаний струны и проверить условие образования стоячих волн; измерить скорость распространения поперечных волн на струне и исследовать её зависимость от натяжения струны.

Оборудование: В работе используются: закрепленная на станине стальная струна, набор грузов, электромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотомер.

### 2 Теоретические сведения

Струной в акустике называют однородную тонкую гибкую упругую нить. Примерами могут служить сильно натянутый шнур или трос, струны гитары, скрипки и других музыкальных инструментов. В данной работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами. Основное свойство струны — гибкость — обусловлено тем, что её поперечные размеры малы по сравнению с длиной. Это означает, что напряжение в струне может быть направлено только вдоль неё, и позволяет не учитывать изгибные напряжения, которые могли бы возникать при поперечных деформациях (то есть при изгибе струны). В натянутой струне возникает поперечная упругость, т.е. способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т.е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой поперечные бегущие волны, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения. В ненапрянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости, и поперечные волны на ней невозможны.

Уравнение волны на струне:

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение  $T$ , и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Отметим, что, если струна расположена горизонтально в поле тяжести, величина  $T$  должна быть достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия струна не провисала, т.е. сила натяжения должна существенно превышать вес струны.

Волновое уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = u^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

Бегущие волны:

Волновое уравнение представимо в виде суммы двух бегущих волн:

$$y(x, t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut)$$

Для гармонических волн будет:

$$y(x, t) = a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx), u = \frac{\omega}{k} = \nu \lambda$$

Здесь длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , частота  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ . Величина  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  называется волновым числом или пространственной частотой волны.

Собственные колебания струны. Стоячие волны:

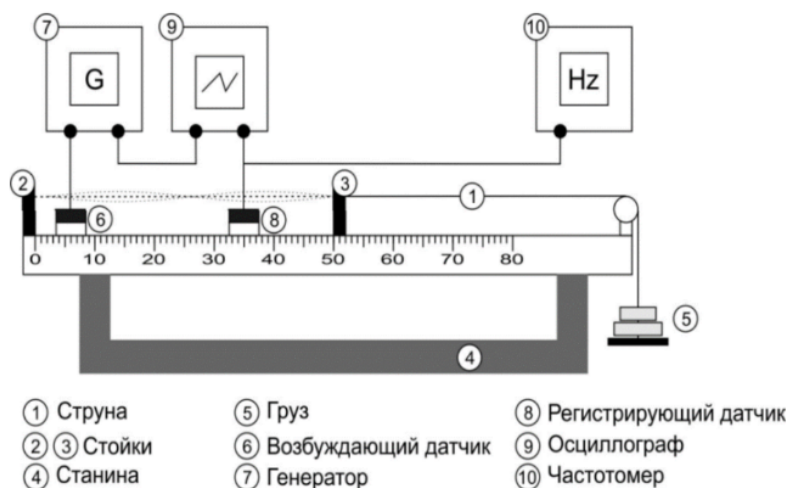


Рисунок 1: Экспериментальная установка

Свободные колебания струны с закрепленными концами

$$y(x, t) = 2a \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

Стоячие волны на струне с закреплёнными концами образуются, только если на длине струны укладывается целое число полуволин:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, L - \text{длина закрепления}$$

Частота колебания струны будет:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \text{ где } \rho_l - \text{погонная плотность, } T - \text{сила натяжения, } L - \text{длина струны, } n - \text{номер гармоники.}$$

#### Экспериментальная установка

Стальная гитарная струна 1 закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами 2 и 3, расположенными на массивной станине 4. Один конец струны закреплен в зажиме 2 неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплен платформа с грузами 5, создающими натяжение струны. Зажим 3 можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик 6 подключен к звуковому генератору 7 и служит для возбуждения колебаний струны, частота которых измеряется с помощью частотомера 10 (в некоторых установках частотомер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнал с которого передается на вход осциллографа 9. Разъёмы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

Для регистрации колебаний струны в работе используется электронный осциллограф, соединённый с электромагнитным датчиком 8. Он позволяет регистрировать колебания в случаях, когда это невозможно сделать визуально. Также с помощью осциллографа можно измерять амплитуду возбуждения и форму сигнала, что даёт возможность установить, является ли режим возбуждения стоячих волн линейным, иными словами, имеет ли место прямая пропорциональность между силой возбуждения и амплитудой колебаний струны.

### 3 Данные

На экспериментальной установке в зависимости от суммарной массы было сделано по 5 замеров для четных и 4 для нечетных гармоник для каждого из 5 опытов. Используемые зависимости:

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$$\nu_n = u \cdot \frac{n}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

- Длина струны постоянна и равна  $L = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$
- Погонная плотность  $\rho_l = 568,4 \text{ мг/м}$

	1	2	3	4	5
Общая масса, г	1099,2	1590,7	2085,3	2579,9	3074,9

Занесем полученные данные в таблицу:

Опыт	№1			№2			№3			№4			№5		
Сила натяжения	10,78 Н			15,6 Н			20,5 Н			25,3 Н			30,2 Н		
	n	$\nu_0$ ,	$\nu_{real}$ ,	n	$\nu_0$ ,	$\nu_{real}$ ,	n	$\nu_0$ ,	$\nu_{real}$ ,	n	$\nu_0$ ,	$\nu_{real}$ ,	n	$\nu_0$ ,	$\nu_{real}$ ,
	1	137,8	137	1	165,2	165,2	1	189,7	189	1	210,9	210,4	1	230,37	231,0
	3	413,4	412	3	497,1	498,5	3	569,7	570,6	3	624,3	634,6	3	682,5	693,0
	5	689	695	5	829,0	832,5	5	949,5	951,6	5	1040,5	1058,8	5	1137,5	1156,3
	7	964,6	974,8	7	1160,7	1168,2	7	1329,3	1334,7	7	1456,7	1484,5	7	1592,5	1621,6
	9	1240,2	1259,6	9	1492,5	1507,5	9	1709,1	1721,3	9	1872,9	1912,5	9	2047,5	2088,5
	2	275,6	276,5	2	331,2	332,2	2	379,8	379,2	2	416,2	422,4	2	455	462,0
	4	551,2	553,9	4	663,0	666,5	4	759,6	761,1	4	832,4	845,3	4	910	925,0
	6	826,8	834,0	6	994,8	1000,4	6	1139,4	1144,0	6	1248,6	1276,5	6	1365	1388,8
	8	1102,4	1117,4	8	1326,0	1338,9	8	1519,2	1527,7	8	1664,8	1698,9	8	1820	1854,7

### 4 Обработка результатов

На основе данных эксперимента были построены графики  $\nu_{real}(n), \nu_0(n)$ , реальной частоты от n и расчетной частоты от n. Для графика Получаем что при увеличении натяжения  $T$  увеличивается и  $u$  и при этом растёт разница между рассчитываемыми и реальными значениями  $u$ .

Погрешность образуется из случайной и систематической: погрешность при измерении длины  $\sigma_L = 0,0005$ , пренебрежем погрешностями генератора частот и осциллографа

$$\text{Среднее значение: } \bar{u} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 u_i \approx 137,3$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение: } \sigma_u = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (u_i - \bar{u})^2} \approx 0,97$$

$$\text{Погрешность среднего значения(случайная): } \sigma_u^{\text{случ}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{10}} \approx 0,3$$

$$\text{Систематическая погрешность: } \sigma_u^{\text{сист}} = u \sqrt{\left(\frac{du}{dT}\right)^2} \sigma_T^2 = u \cdot \sigma_L \approx 0,069$$

$$\text{Полная погрешность: } \sigma_u^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} \approx 0,3$$

Получаем  $u = 137,3 \pm 0,3 (\varepsilon_u = 0,2\%)$  для натяжения  $T = 10,78 \text{ Н}$

Аналогично для погонной плотности  $\rho_l$  получаем:

$$\text{Среднее значение: } \bar{\rho} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \rho_i \approx 567,9$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение: } \sigma_{\rho} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (\rho_i - \bar{\rho})^2} \approx 0,64$$

$$\text{Погрешность среднего значения(случайная): } \sigma_{\rho}^{\text{случ}} = \frac{\sigma_{\rho}}{\sqrt{5}} \approx 0,36$$

$$\text{Систематическая погрешность: } \sigma_{\rho}^{\text{сист}} = \rho \sqrt{\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 \sigma_u^2} = \rho \cdot 2\sigma_u \approx 2,3$$

$$\text{Полная погрешность: } \sigma_{\rho}^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} \approx 2,3$$

Получаем  $\rho_l = 570,5 \pm 2,3 \text{ мг/м} (\varepsilon_{\rho} = 0,4\%)$

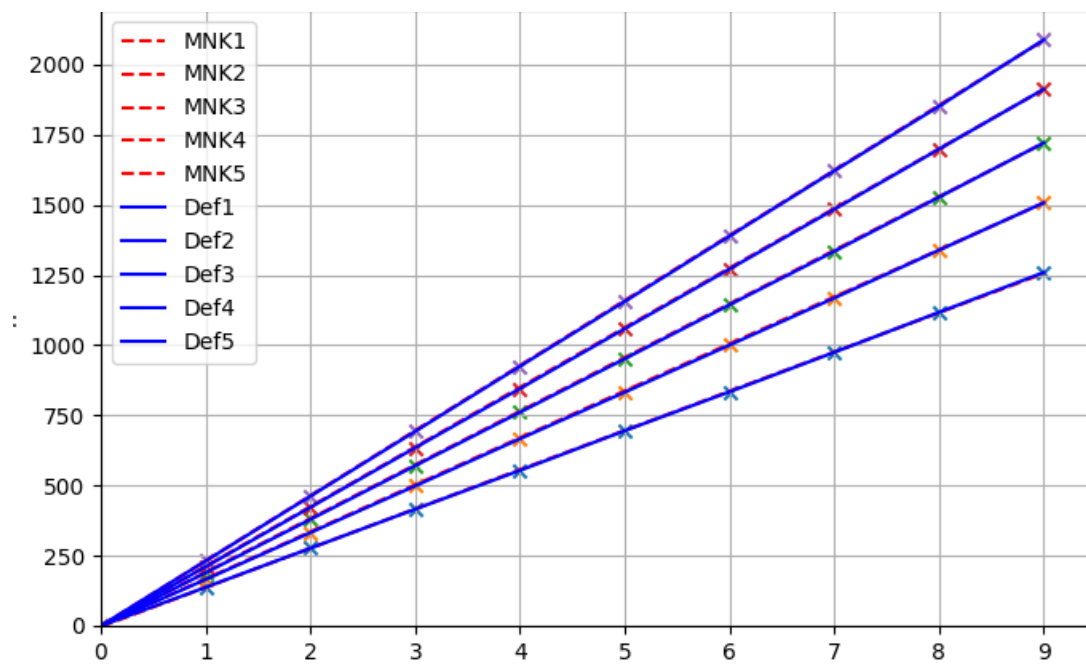


Рисунок 2: Зависимость  $\nu_{real}(n)$  реальной частоты от номера  $n$  гармоники с аппроксимирующими прямыми для 5 разных натяжений

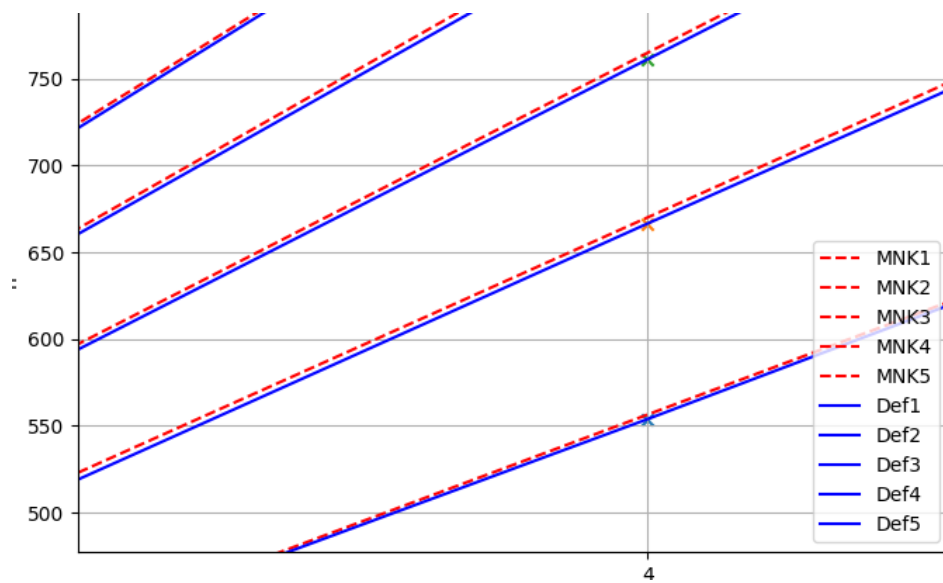


Рисунок 3: Попадание мнк на прямую

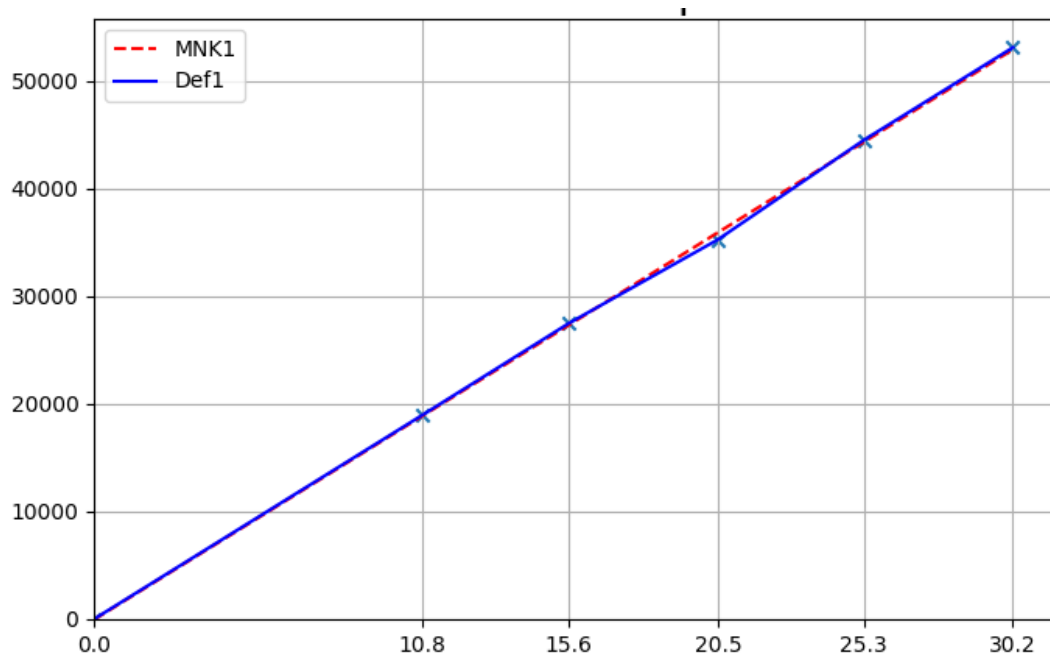


Рисунок 4: Зависимость  $u^2(T)$  и расчет погонной плотности  $\rho_l$

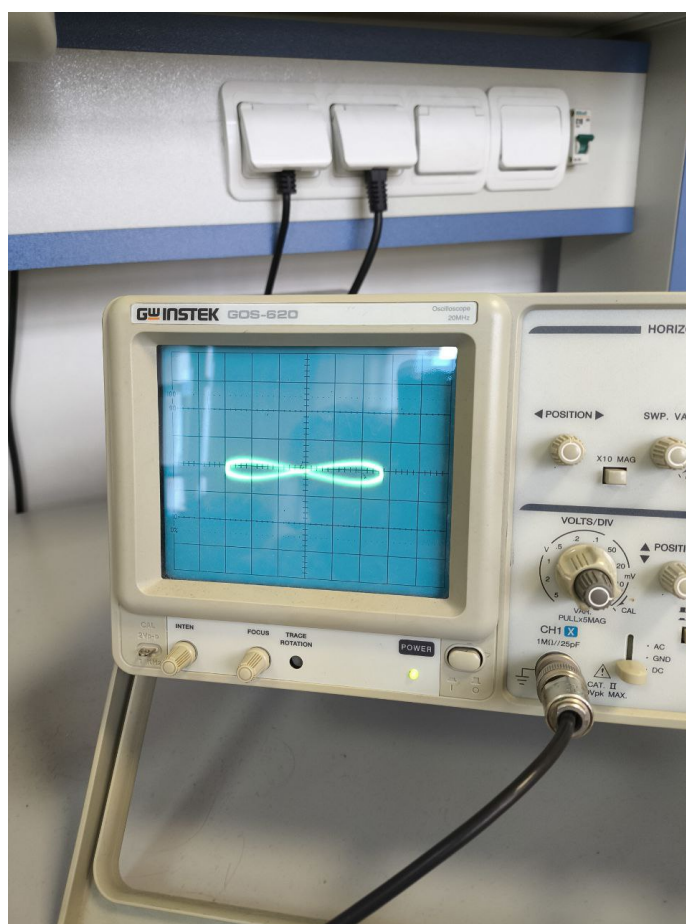


Рисунок 5: Нахождение частоты с помощью фигур Лиссажу