

Отчет о выполненной лабораторной работе 1.3.2

Воронин Денис, Б04-403

October 28, 2024

Определение модуля кручения статистическим и динамическим методами

1 Аннотация

Цель работы: измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, определение модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника

Оборудование: проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

2 Теоретические сведения

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние называется чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

Если к стержню приложить закручивающий момент M , то конец стержня повернется на угол φ , причем, согласно закону Гука

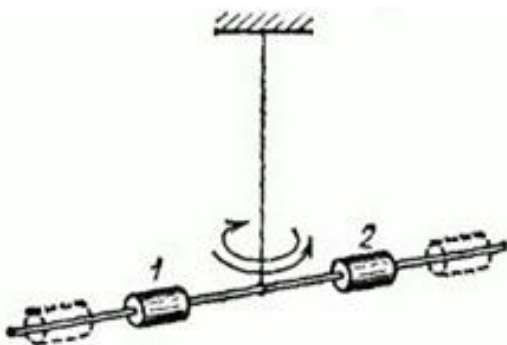
$$M = f\varphi(1)$$

Постоянная величина f носит название модуля кручения. Модуль кручения связан с модулем сдвига материала стержня G соотношением

$$f = \frac{\pi G \rho^4}{2L}(2)$$

где ρ - радиус, а L - длина стержня

3 Установка



Верхний конец проволоки зажат в цангу и при помощи специального приспособления поворачивается вместе с цангой вокруг вертикальной оси. Запишем для этого случая уравнение движения:

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}(3)$$

Здесь M - момент сил, I - момент инерции стержня с грузами, φ - угол поворота стержня.

После подстановки (1) формула (3) приобретает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \omega^2 = \frac{f}{I}(4)$$

Отсюда

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta)(5)$$

где амплитуда φ_0 и начальная фаза θ определяются начальными условиями.

Период крутильных колебаний стержня равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{I}{f}$$

4 Ход работы

Установим диапазон амплитуд при котором $T = \text{const}$

Установив грузы так, чтобы их центры масс находились на некотором расстоянии L_1 от оси системы измерим период. Если I - момент инерции без грузов, а I_1 - момент инерции груза, то очевидно,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{f}} \quad (6)$$

Изменив расстояние грузов до величины L_2 получим

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_2}{f}} \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует

$$f = \frac{4\pi^2(I_1 - I_2)}{T_1^2 - T_2^2} = \frac{8\pi^2 m(L_1^2 - L_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}$$

По результатам измерений имеем

L_1 cm	L_2 cm	T_1	T_2	f
13,5	6,75	39,5	22,1	$7,5 * 10^{-4}$
12,5	6,25	37,1	21,4	$7,54 * 10^{-4}$
11,5	5,75	34,5	20,0	$7,51 * 10^{-4}$
10,5	5,25	32,0	19,0	$7,53 * 10^{-4}$

Таблица 1: Результаты измерений

Отсюда среднее значение f будет равно $f = 7,52 * 10^{-4} \frac{\text{кг} * \text{м}^2}{\text{с}^2}$

Найдем модуль сдвига G по формуле

$$G = \frac{2l_0 f}{\pi R^4} \quad (8) = \frac{2 * 17,50 * 7,52 * 10^{-4}}{\pi * 0,001^4} = 8,4 * 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Для оценок погрешностей воспользуемся формулами

$$\sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} = 0,033 * 10^{-2}$$

$$\sigma_G = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_{l_0}}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{4\sigma_R}{R}\right)^2} = 0,15 * 10^9$$

В конечном итоге имеем $G = 42 * 10^9 \pm 0,15 * 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

5 Вычисление G статическим методом

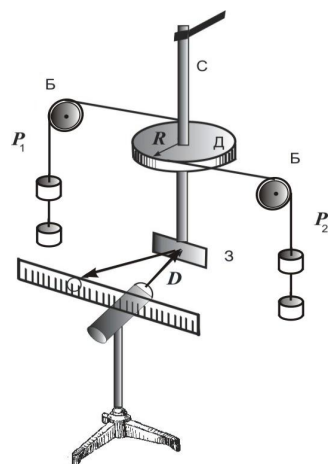


Схема экспериментальной установки для статического закручивания стержня изображена на рис. 2. Верхний конец вертикально расположенного стержня жестко закреплен на стойке, а нижний соединен с диском. Момент М, закручивающий стержень, создают две навитые на диск и перекинутые через блоки Б нити, к концам которых подвешиваются одинаковые грузы Г. Диск снабжен зеркальцем 3. Для определения угла закручивания стержня надо зрительную трубу направить на зеркальце и добиться того, чтобы в нее было четко видно отражение шкалы, укрепленной на том же штативе, что и труба. Измерение смещения изображения шкалы в трубе позволяет определить угол закручивания стержня.

Параметры установки: l = 170 см диаметр стержня 2 мм, радиус диска 7 см

m, г	↓, см	↑, см	Δl, см	M, Н*м	2φ
100	3	3,1	3,05	0,14	1,03
200	5,9	5,7	5,8	0,28	1,95
400	11,8	11,9	11,85	0,56	3,98
600	18	18,2	18,1	0,84	6,01
700	19,8	21,0	20,4	0,98	6,84
800	23,9	23,9	23,9	1,12	8,00

Таблица 2: Результаты измерений

Построим график в координатах φ(M): Откуда $f = 3,56 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2}$

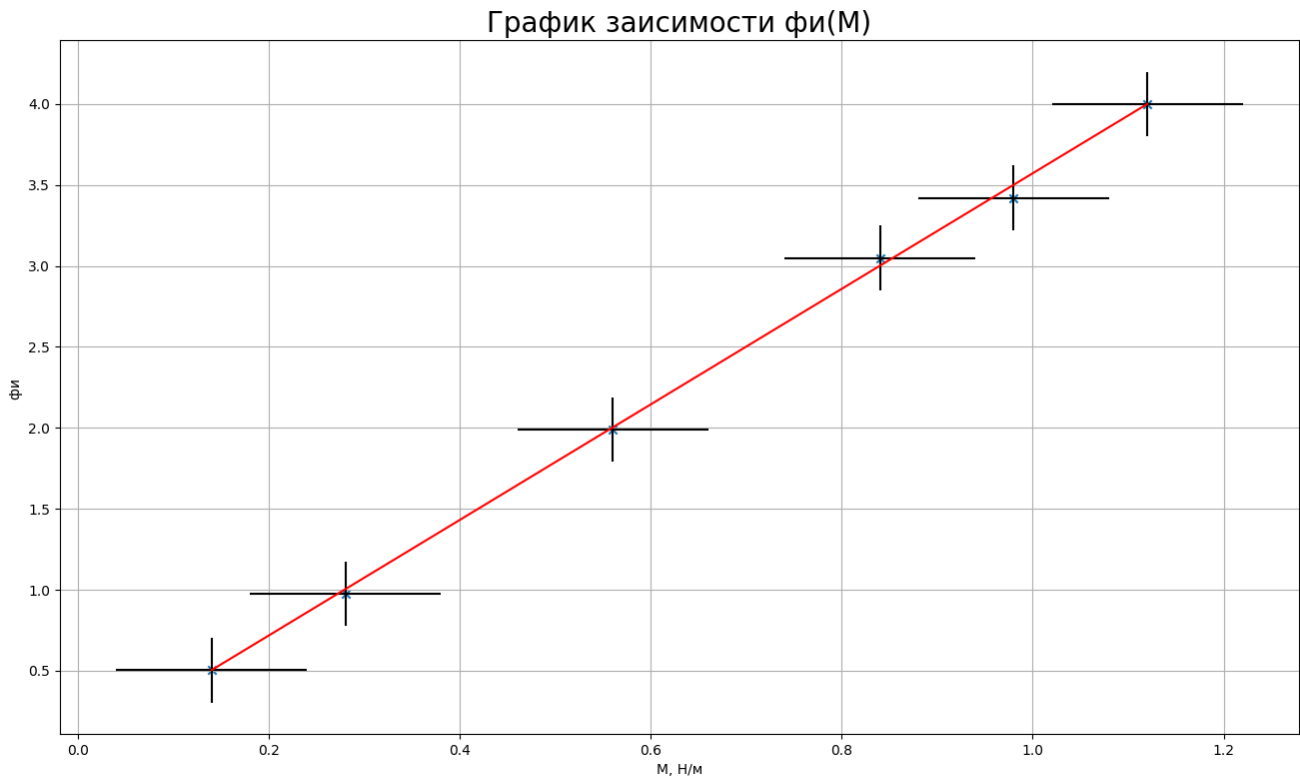


Рисунок 1: График φ(M)

Используя формулу (8) найдем модуль сдвига: $G = 4 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$