МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Основы сеточных методов

Домашняя работа №1-2

Группа: ФН11-62Б

Вариант № 6

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2023

Задание:

ДЗ №1-2 (n – номер группы, N – номер фамилии студента в журнале)
Используя равномерную сетку отрезка $[-1;1]$ с 41 узлом, составить конечно-разностную схему для решения краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \tau\dfrac{d\varphi(\tau)}{d\tau} - 4\varphi(\tau) = (-\tau^3 + 12\tau^2 + 6\tau - 4)\alpha + (-2\tau^2 - 3\tau + 2)\beta, \tau \in (-1;1) \\ \varphi(-1) = \alpha, \quad \varphi(1) = 3\alpha + 2\beta \text{ (краевые условия)}, \alpha = n - 64, \ \beta = \dfrac{N}{4}. \end{cases}$$

Получить приближённое сеточное решение задачи, используя метод прогонки.

Оценить погрешность относительно аналитического решения в узлах сетки, сравнив её с оценкой, полученной из практического правила Рунге; таблично и графически сравнить полученные приближённое и аналитическое решения задачи.▶

Решение:

$$N = 6, \qquad n = 62, \qquad \alpha = -2, \qquad \beta = \frac{3}{2}.$$

Представим задачу в виде линейного уравнения $\widehat{\boldsymbol{F}}(\varphi) = \upsilon$, где $\widehat{\boldsymbol{F}}$ – линейный дифференциальный оператор в нормированном (чебышёвском) пространстве достаточно гладких на отрезке $[a;b]$ функций, для которого:

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{F}}(\varphi)\big|_{-1} = \varphi(-1) = \alpha; \\ \widehat{\boldsymbol{F}}(\varphi)\big|_{\tau} = \dfrac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \tau\dfrac{d\varphi(\tau)}{d\tau} - 4\varphi(\tau) = \upsilon(\tau), \ \ \tau \in (-1;1); \\ \widehat{\boldsymbol{F}}(\varphi)\big|_{1} = \varphi(1) = 3\alpha + 2\beta, \end{cases}$$

где $\upsilon(\tau) = (-\tau^3 + 12\tau^2 + 6\tau - 4)\alpha + (-2\tau^2 - 3\tau + 2)\beta$.

Зададим на отрезке [-1;1] равномерную сетку с 41 узлом и шагом
$h = \frac{1-(-1)}{40} = \frac{1}{20}$.

$$A = \langle -1, -\frac{19}{20}, -\frac{18}{20}, \dots, \frac{18}{20}, \frac{19}{20}, 1 \rangle.$$

Тогда, используя разностные производные, получим следующую схему:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \alpha; \\ \dfrac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + p_j \cdot \dfrac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} - q_j \cdot \varphi_j = \nu_j, \quad j = \overline{1, k-1}; \\ \varphi_k = 3\alpha + 2\beta; \\ k \to +\infty, \end{cases}$$

где $p_j = \tau_j$,

$q_j = 4$,

$\varphi_j = \varphi(\tau_j)$,

$\nu_j = \left(-\tau_j{}^3 + 12\tau_j{}^2 + 6\tau_j - 4\right)\alpha + \left(-2\tau_j{}^2 - 3\tau_j + 2\right)\beta.$

Обозначим решение задачи как Ф и получим:

$$\begin{cases} \Phi_0 = \alpha; \\ \dfrac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}}{h^2} + p_j \cdot \dfrac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2h} - q_j \cdot \Phi_j = \nu_j + O(h^2) \text{ при } h \to 0, j = \overline{1, k-1}; \\ \Phi_k = 3\alpha + 2\beta; \\ k \to +\infty, \end{cases}$$

Распишем подробнее второе уравнение системы и получим СЛАУ:

$$\begin{cases} \Phi_0 = \alpha = \nu_0; \\ \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_1}{2h}\right)\alpha + \left(-\dfrac{2}{h^2} - q_1\right)\Phi_1 + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_1}{2h}\right)\Phi_2 = \nu_1; \\ \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_2}{2h}\right)\Phi_1 + \left(-\dfrac{2}{h^2} - q_2\right)\Phi_2 + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_2}{2h}\right)\Phi_3 = \nu_2; \\ \dots \\ \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_{k-1}}{2h}\right)\Phi_{k-2} + \left(-\dfrac{2}{h^2} - q_{k-1}\right)\Phi_{k-1} + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_{k-1}}{2h}\right)3\alpha + 2\beta = \nu_{k-1}; \\ \Phi_k = 3\alpha + 2\beta = \nu_k; \end{cases}$$

В матричном виде СЛАУ имеет вид:

$$F\,{}^{>}\Phi = {}^{>}\nu,$$

Где матрица F:

F =

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	409.5	-804	390.5	0	0
2	0	409	-804	391	0
3	0	0	408.5	-804	391.5
4	0	0	0	408	-804
5	0	0	0	0	407.5
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	...

	36	37	38	39	40
31	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0
35	407.5	0	0	0	0
36	-804	408	0	0	0
37	391.5	-804	408.5	0	0
38	0	391	-804	409	0
39	0	0	390.5	-804	409.5
40	0	0	0	0	1

v^T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-2	0.593	2.522	4.289	5.896	7.344	8.634	9.768	10.748	...

Матрица F имеет диагональное преобладание. Применим метод прогонки. Рабочие формулы прямого хода метода прогонки для данной задачи будут иметь вид:

$$x_n = L_n x_{n+1} + M_n,\ \ k = \overline{0, k-1};$$
$$x_k = M_k,$$

$$L_0 = -\frac{c_0}{b_0},\ M_0 = \frac{f_0}{b_0};$$
$$L_n = -\frac{c_n}{L_{n-1}a_n + b_n},\ M_n = \frac{f_n - M_{n-1}a_n}{L_{n-1}a_n + b_n},\ n = \overline{1, k-1};$$
$$M_k = \frac{f_k - M_{k-1}a_k}{L_{k-1}a_k + b_k} = x_k.$$

Вычислив L, M, применяем обратных ход прогонки, формулы для которого имеют вид:

$$x_{k-1} = L_{k-1}x_k + M_{k-1};$$
$$x_{k-2} = L_{k-2}x_{k-1} + M_{k-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$x_0 = L_0x_1 + M_0.$$

$M^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-2	-1.019	-0.693	-0.532	-0.439	-0.38	-0.342	-0.317	-0.3	-0.29	...

$L^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0.486	0.646	0.725	0.771	0.801	0.823	0.838	0.849	0.858	0.866	...

Из данных формул вычисляем сеточное приближенное решение.

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-2	-1.986	-1.99	-2.008	-2.036	-2.072	-2.111	-2.151	-2.189	...

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\varphi(\tau) = -2\tau^4 - 2\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 + \frac{3}{2}\tau - 2.$$

$\tau^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-2	-1.986	-1.989	-2.007	-2.035	-2.07	-2.109	-2.149	-2.187	...

Сравним значения приближенного и аналитического решения в узлах сетки:

$x - \tau =$

	0
0	0
1	$-3.178 \cdot 10^{-4}$
2	$-5.946 \cdot 10^{-4}$
3	$-8.347 \cdot 10^{-4}$
4	$-1.042 \cdot 10^{-3}$
5	$-1.221 \cdot 10^{-3}$
6	$-1.374 \cdot 10^{-3}$
7	$-1.506 \cdot 10^{-3}$
8	$-1.618 \cdot 10^{-3}$
9	...

Максимальная по модулю разность = $2.346 \cdot 10^{-3}$.

Оценим погрешность с помощью практического правила Рунге. Для этого получим аналогичным образом второе сеточное решение $^{>}\Phi^*$ на равномерной сетке шага $\frac{h}{2}$ и сравним значение сеточных функций в одних и тех же узлах сетки.

$xx^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-2	-1.99	-1.986	-1.985	-1.989	-1.997	-2.007	...

$\tau^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-2	-1.99	-1.986	-1.985	-1.989	-1.997	-2.007	...

$xx - \tau =$

	0
0	0
1	$-4.11 \cdot 10^{-5}$
2	$-7.95 \cdot 10^{-5}$
3	$-1.153 \cdot 10^{-4}$
4	$-1.488 \cdot 10^{-4}$
5	$-1.799 \cdot 10^{-4}$
6	$-2.088 \cdot 10^{-4}$
7	$-2.357 \cdot 10^{-4}$
8	...

Максимальная по модулю разность = $5.84 \cdot 10^{-4}$

Практическая оценка приближенного решения $^{>}\Phi$ имеет вид:

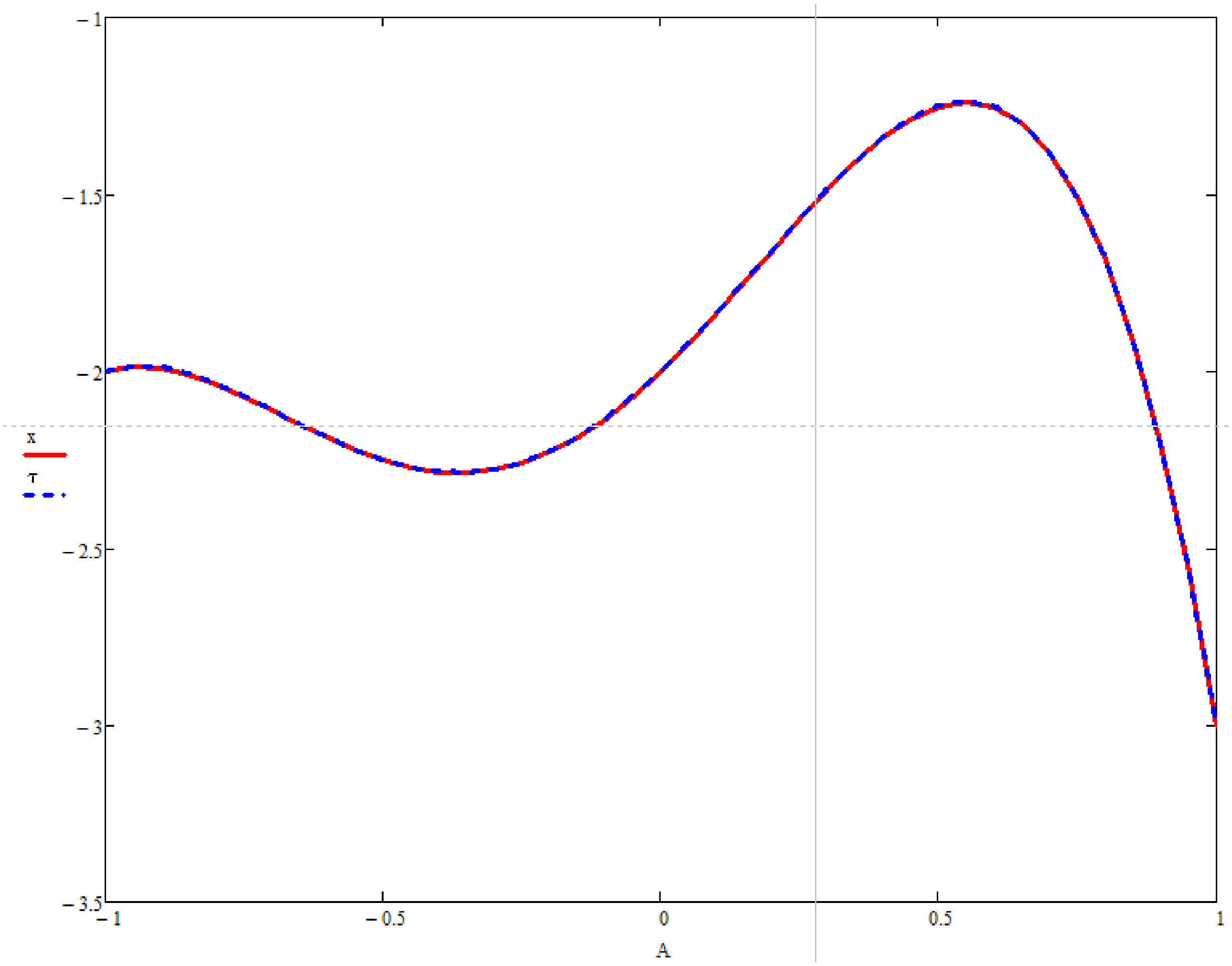
$$\varepsilon = \frac{\left\| {}^{>}\Phi - {}^{>}\Phi^* \right\|}{2^{m-1} - 1},$$

где $m = 2$ – порядок аппроксимации схемой.

Получаем:

$$\varepsilon = \frac{5.84 \cdot 10^{-4}}{2 - 1} = 5.84 \cdot 10^{-4}.$$

Графики приближенного и аналитического решений:



Вывод: с помощью конечно-разностной схемы было получено приближенное сеточное решение краевой задачи. Максимальная абсолютная погрешность приближенного решения в узлах сетки составила $2.346 \cdot 10^{-3}$. Оценка по правилу Рунге оказалась близка к этому значению: $5.84 \cdot 10^{-4}$. Графики аналитического и численного решений очень близки.