

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №2-2

«Интерполяционные сплайны 3-ей степени единичного дефекта»

Группа: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2022

ЗАДАНИЕ

На отрезке $[0;2]$ задана равномерная сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$, где $k=10$, с шагом $h=0,2 = \text{stp}(A)$ и определена функция $f(\tau) = 2 \sin(\frac{\pi \tau}{2}) \sqrt{2(58-n) + N\tau^2 \sqrt{23-N}}$, где n – номер группы и N – номер студента в журнале группы. Для A -сеточной функции ${}^>y = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in {}^>\mathbb{R}^{|A|}(A)$, где $y_i = f(\tau_i)$ для $i = \overline{0, k}$, решить задачу A -интерполяции сеточной функции ${}^>y$ с помощью сплайна $\text{spl}_3(A; {}^>y)$ 3-ей степени дефекта 1. Затем сравнить в узлах равномерной сетки $B = \langle \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2k} \rangle$ ($\text{stp}(B) = 0,1$) отрезка $[0;2]$ значения функции $f(\tau)$ и сплайна $\text{spl}_3(A; {}^>y)$ и, кроме того, значения их производных, т.е. значения функций $\frac{df}{d\tau}$ и $\frac{d \text{spl}_3(A; {}^>y)}{d\tau}$. Результаты проиллюстрировать графически. ►

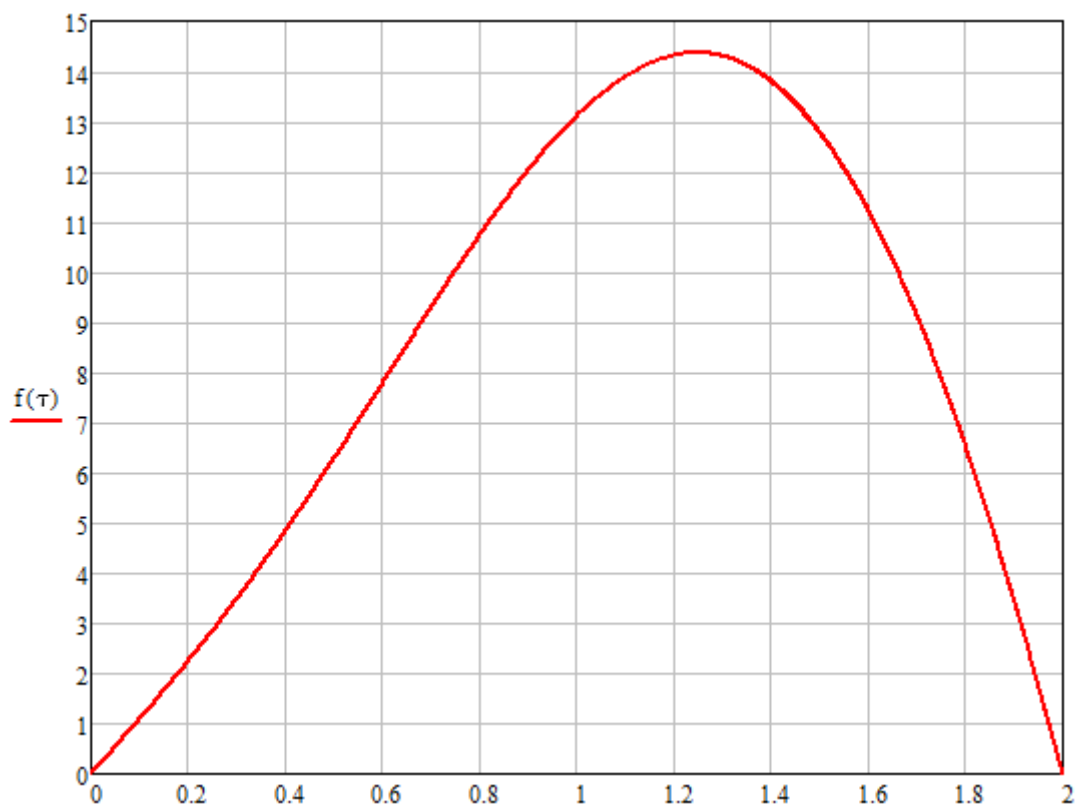
Решение:

Для $N = 8$; $n = 52$

Функция $f(\tau)$ имеет вид:

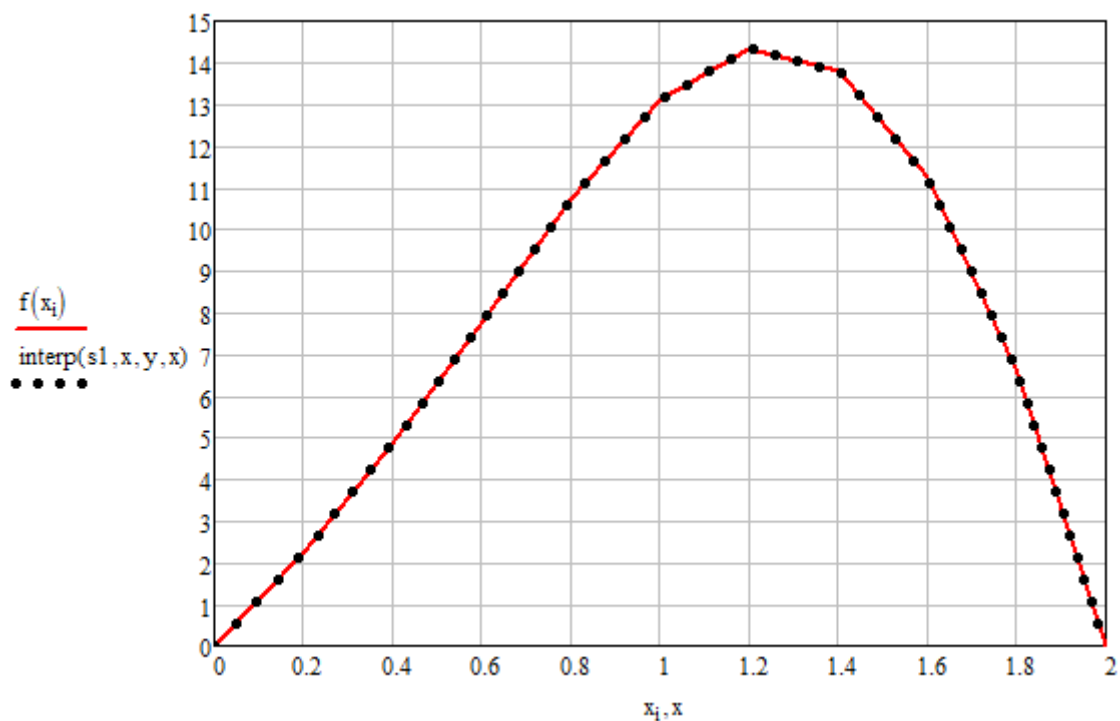
$$f(\tau) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \tau}{2}\right) \cdot \sqrt{12 + 8 \cdot \tau^2 \cdot \sqrt{15}} \quad (1)$$

График $f(\tau)$:



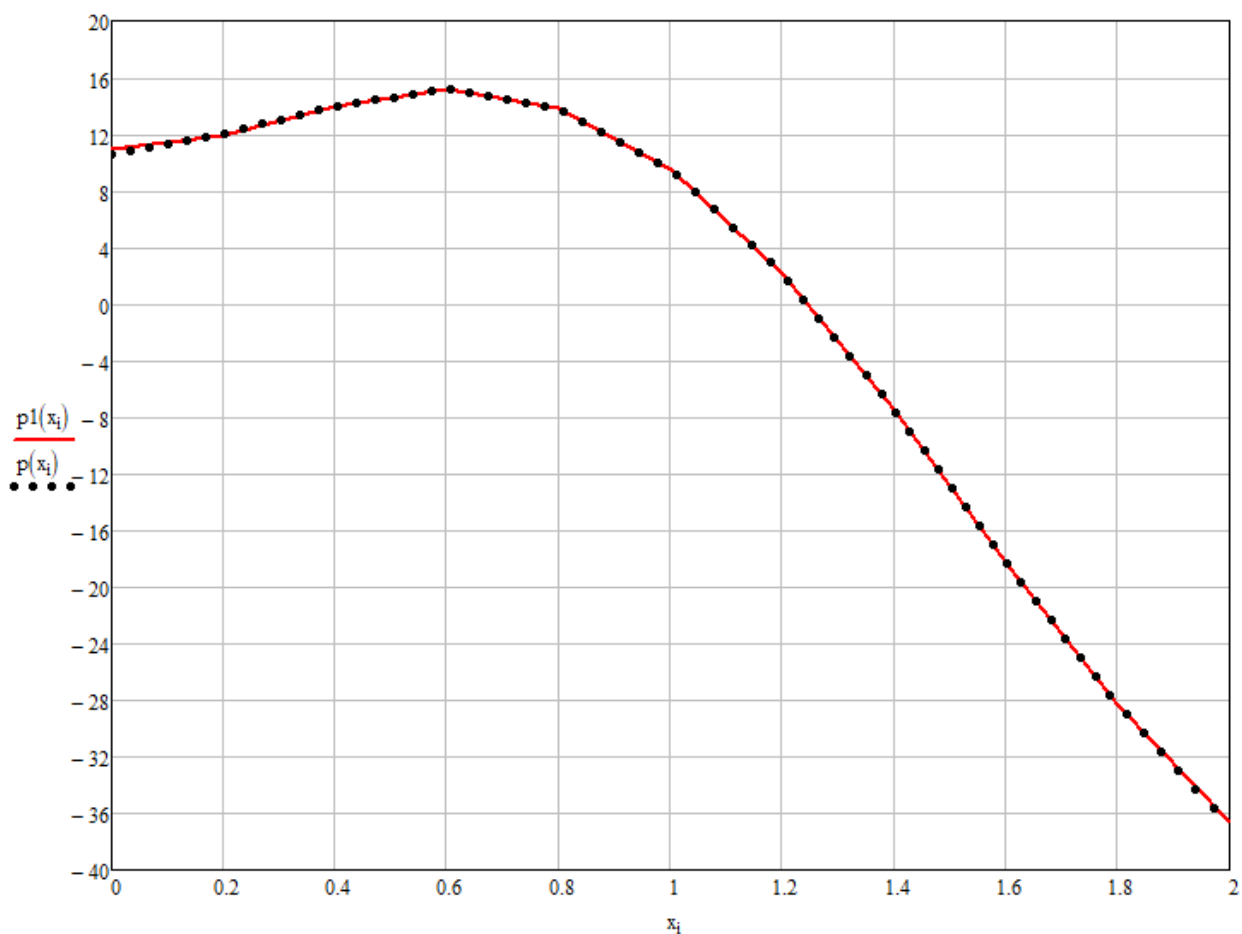
Интерполяционный сплайн определяется как кусочно-заданная функция, которая на отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ определяется функцией $\phi(\tau) = a_i + b_i \cdot (\tau - \tau_{i-1}) + c_i \cdot (\tau - \tau_{i-1})^2 + d_i \cdot (\tau - \tau_{i-1})^3$, $i = 0 \dots 40$, а на остальной области по умолчанию доопределяется нулем.

Построим совмещенные графики интерполяции сплайном третьей степени единичного дефекта для функции $f(\tau)$ (черная линия точками), построенного на равномерной сетке из 11 узлов, с графиком функции $f(\tau)$ (красная линия)



Как можно видеть, на отрезке $[0;2]$ интерполяционный сплайн точно воспроизводит функцию - отклонения значений функции и ее интерполяции невелики.

Построим совмещенные графики производных интерполяции сплайном третьей степени единичного дефекта для функции (черная линия точками), построенного на равномерной сетке из 11 узлов, с графиком функции (красная линия):



На совмещенном графике видно, что на отрезке $[0; 2]$ графики производных функции $f(\tau)$ и ее интерполяции сплайном третьей степени единичного дефекта практически полностью совпадают: отклонения наблюдаются лишь на концах рассматриваемого отрезка.

Вычисленные в точках значения производной для интерполяции сплайнами:

τ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$p(\tau)$	10.539	12.026	13.973	15.139	13.828	9.449	2.09	-7.514	-18.21	-28.34	-36.91

Вычисленные в точках τ_i значения производной для функции $f(\tau)$:

τ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$p1(\tau)$	10.883	11.924	14.004	15.137	13.834	9.452	2.094	-7.518	-18.189	-28.42	-36.63

Результаты:

Сплайн 3-ей степени единичного дефекта хорошо приближает значения исходной функции, как в узлах сетки, так и в их окрестностях. Производные сплайна также принимают значения, близкие к значениям производных исходной функции, однако в узлах существуют небольшие отклонения, увеличивающиеся при приближении к концам отрезка интерполяции.