МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный техническийуниверситет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1-3

«Методы простой итерации и Зейделя. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам»

Группа: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2022

ЗАДАНИЕ 1.1

(N – номер фамилии студента в журнале, β = 1-0,02(49-n), n – номер группы)

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot {}^{>}x = {}^{>}b,$ с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. Таблицу 1). Кроме того, используя неравенство (3), найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность.►

Таблица 1

8	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

Решение:

Исходные данные: N=8; n=52; β=1,06. Матрица A для 8 варианта задания, вектор истинных решений $x,$ вектор b:

$$A = \begin{bmatrix} 10.6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10.6 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10.6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10.6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16.6 \\ 16.6 \\ 12.6 \\ 16.6 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Матрица F и векторы g и *x_0* – начальный вектор итераций:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}09434 & -0{,}18868 & -0{,}28302 \\ -0{,}09434 & 0 & -0{,}28302 & -0{,}18868 \\ 0{,}18868 & -0{,}28302 & 0 & -0{,}09434 \\ -0{,}28302 & -0{,}18868 & -0{,}09434 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1{,}56604 \\ 1{,}56604 \\ 1{,}18868 \\ 1{,}56604 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Рабочая формула метода простых итераций:

$$x_{(k+1)} = F \cdot x_{(k)} + g \tag{3}$$

Получающаяся последовательность приближенных решений представлена в следующей таблице для каждой итерации:

№ итерации	1	2	3	4	5	6	7
Компоненты приближенного решения x_i	1,56604	0,75080	1,12091	0,94804	1,02439	0,98926	1,00493
	1,56604	0,78640	1,10747	0,95438	1,02128	0,99053	1,00430
	1,18868	0,89320	1,04030	0,98099	1,00861	0,99621	1,00176
	1,56604	0,71520	1,12091	0,94170	1,02511	0,98827	1,00518
Погрешность на каждой итерации	0,56604	0,28480	0,12091	0,05830	0,02511	0,01173	0,00518

Таким образом, на 6 итерации последовательность сходится к решению с точностью 0,01. Найдем оценку числа итераций для достижения точности решения более чем 0.01 с помощью формулы:

$$||x_{(k)} - x_*|| \leq \frac{||F||^k}{1 - \left||F|\right|} \cdot ||g|| + ||F||^k \cdot \left||x_{(0)}|\right| \quad (4)$$

$\left||F|\right| = 0{,}566038$, $\left||g|\right| = 16{,}6$, $\left||x_{(0)}|\right| = 0$, поэтому для данного варианта k = 15.

Результаты:

Методом простых итераций было получено решение данной СЛАУ на 7 итерации с точностью 0.01.

По формуле оценки точность решения более чем 0.01 достигается на 15 итерации.

ЗАДАНИЕ 1.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ранее. Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,01.►

Решение:

Матрица F:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}09434 & -0{,}18868 & -0{,}28302 \\ -0{,}09434 & 0 & -0{,}28302 & -0{,}18868 \\ 0{,}18868 & -0{,}28302 & 0 & -0{,}09434 \\ -0{,}28302 & -0{,}18868 & -0{,}09434 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Матрица B и матрица D:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}09434 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}18868 & -0{,}28302 & 0 & 0 \\ -0{,}28302 & -0{,}18868 & -0{,}09434 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Матрица Q:

$$Q = B - D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}09434 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}18868 & -0{,}28302 & 0 & 0 \\ -0{,}28302 & -0{,}18868 & -0{,}09434 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Матрица P:

$$P = F - Q = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}09434 & -0{,}18868 & -0{,}28302 \\ 0 & 0 & -0{,}28302 & -0{,}18868 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}09434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Матрица $(E - Q)^{-1}$:

$$(E - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}09434 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}21538 & -0{,}28302 & 1 & 0 \\ -0{,}28554 & -0{,}16198 & -0{,}09434 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Рабочая формула метода Зейделя:

$$y_{(k)} = (E - Q)^{-1} \cdot P \cdot y_{(k-1)} + (E - Q)^{-1} \cdot g \tag{10}$$

Получающаяся последовательность приближенных решений представлена в следующей таблице для каждой итерации:

№ итерации	0	1	2	3
Компоненты приближенного решения x_i	0	1,566038	1,01481	0,997067
	0	1,418298	1,021773	0,996557
	0	1,082753	1,019928	1,001381
	0	0,75307	0,98982	1,001349
Погрешность на каждой итерации	-	0,56604	0,02177	0,00344

Таким образом на 3 итерации последовательность сходится к решению с точностью 0,01

Результаты

Методом Зейделя было получено решение данной СЛАУ на 3 итерации с точностью 0.01. Приближенное решение сходится к истинному быстрее, нежели методом простых итераций.

ЗАДАНИЕ 2

(N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0{,}003\cdot(n-50)$, n – номер группы)

С погрешностью, не превосходящей величину ε = 0,0001, найти все корни уравнения:

$$[N+5{,}2+(-1)^N\alpha]\cdot x^3-[2N^2+10{,}4N+(-1)^{N+1}\alpha]\cdot x^2-N^2(N+5{,}2)(x-2N)+(-1)^N\alpha=0\,.$$

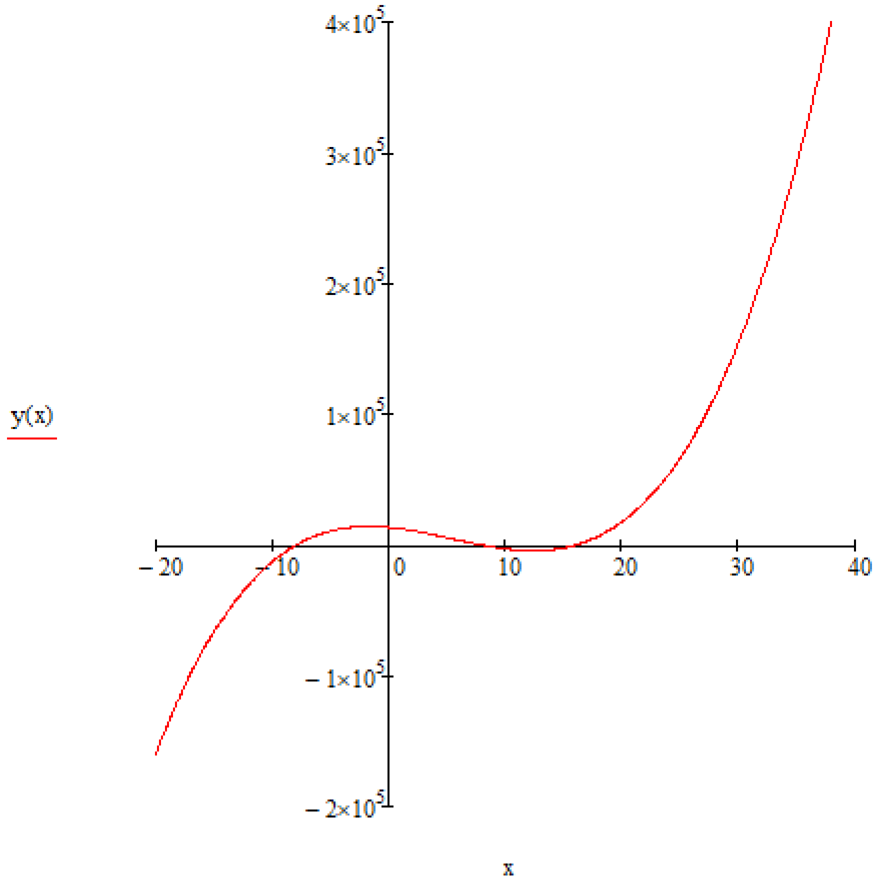
Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.

Решение:

Вычисления производились с помощью математического пакета MathCad. Для данного варианта N = 8, α = 0.006. С этими значениями уравнение примет вид

$$13.206\cdot x^3-211.194\cdot x^2-844.8\cdot x+13516.806=0 \qquad (11)$$

График функции в левой части уравнения:



Найденные методами MathCad корни уравнения: x_1 = -7.99947096, x_2 = 8.00205078, x_3 = 15.98969642.

Метод касательных

Вычислим левый корень методом касательных. Рабочая формула метода:

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - \frac{f(x_{(k-1)})}{f'\left(x_{(k-1)}\right)} \tag{12}$$

Начальное приближение: $x_{(0)}$ = -6

Тогда на 4 итерации получается приближенное решение $x_{(4)}$ = -7.99947096, которое удовлетворяет заданной точности ε = 0.0001

Метод секущих

Для нахождения правого корня используем метод секущих. Исходя из вида графика функции в области поиска решения, выберем следующую рабочую формулу метода:

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - \frac{\left(b - x_{(k-1)}\right) \cdot f\left(x_{(k-1)}\right)}{f(b) - f\left(x_{(k-1)}\right)} \tag{13}$$

Начальное приближение: $x_{(0)}$ = 12, b = 20

Тогда на 14 итерации получается приближенное решение $x_{(14)}$ = 15.98963361, которое удовлетворяет заданной точности ε = 0.0001

Метод деления отрезка пополам

Метод деления отрезка пополам позволяет находить решение уравнения вида $f(x) = 0$. Для этого выбирается некий отрезок $[a, b]$, содержащий в себе это решение – соответственно, функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков. Шаг метода заключается в нахождении середины отрезка $[a, b]$ и вычислении значений $f(a)$, $f(b)$, $f(\frac{a+b}{2})$. Полученные значения функции сравниваются с 0: корень будет принадлежать той части отрезка, на концах которого знаки $f(x)$ различны. Середина отрезка является приближенным решением, значение в середине определяет отклонение от точного решения.

В качестве начального был выбран отрезок $[a, b] = [7.5, 8.5]$. Тогда на 9 итерации получается приближенное решение x = 8.001953125, которое удовлетворяет заданной точности ε = 0.0001

Результаты

Наибольшей скоростью сходимости из трех рассмотренных методов обладает метод касательных, а наименьшей – метод секущих. На время работы алгоритма оказывает влияние выбор начального приближения $x_{(0)}$ а также отрезка $[a, b]$.