МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный техническийуниверситет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №2-2

Группа: ФН11-62Б

Вариант №6

Студент: Зеликова В. И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2023

Задание:

Используя конечные разностные явную и неявную схемы, индуцированные двумерной равномерной сеткой на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ с шагом $h=\tau=0{,}05$, найти численное решение задачи Коши для одномерного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}=-2\beta+\dfrac{\alpha\beta\pi(x-x^2)}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}t)-2\alpha\beta\sin(\dfrac{\pi}{2}t),\ (t,x)\in(0;1)\times(0,1); \\ \varphi(0,x)=2\beta x(1-x)+2\beta,\ x\in[0;1]\ \text{(начальное условие)}; \\ \varphi(t,0)=2\beta(1-t)=\varphi(t,1),\ t\in[0;1]\ \text{(краевые условия)}; \\ \beta=\dfrac{N}{2},\ \alpha=\dfrac{1}{64-n}. \end{cases}$$

При решении СЛАУ в неявной схеме использовать метод «прогонки». Оценить абсолютные погрешности численных решений. Графически продемонстрировать аналитические и численные решения для моментов времени $t=0{,}5$ и $t=1$ (отдельно для явной схемы, отдельно для неявной схемы). Получившиеся результаты прокомментировать в выводах. Особо объяснить большие погрешности при использовании явной схемы▶

Решение:

Для данного варианта $n = 62$, $N = 6$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}=\dfrac{3\pi}{4}\cos(\dfrac{\pi t}{2})\,(x-x^2)-3\sin(\dfrac{\pi t}{2})-6,(t,x)\in(0;1)\times(0;1); \\ \varphi(0,x)=6-6x(1-x),x\in[0;1]; \\ \varphi(t,0)=6(1-t)=\varphi(t,1),t\in[0;1]; \\ \beta=3,\qquad \alpha=\dfrac{1}{2}=0{,}5. \end{cases}$$

1.1 Приближённое решение по явной схеме

Зададим равномерную на $[0;1]\times[0;1]$ сетку с шагами $h=\tau=0{,}05$. Из $\tau=\dfrac{T}{n}$ и $h=\dfrac{b-a}{m}$ найдём n и m. Получаем, n = m = 20 = k.

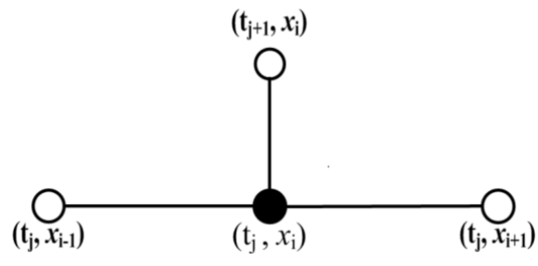

Рис.1

Явная разностная схема для задачи (1), определяет для любых $n,m \in \mathbb{N}$ и равномерной на прямоугольнике $[0;T]\times[a;b]$ сетке $C = A\times B = \langle (t_j, x_i) : j = \overline{0,n},\ i = \overline{0,m}\rangle$, конечно-разностный аналог, индуцированный шаблоном, показанном на *рис.1* для внутреннего узла (t_j, x_i) сетки $C = A\times B$:

$$\begin{cases} u_i^0 = \mu_i,\ i = \overline{0,m} \text{ (сеточное начальное условие)};\\ u_0^j = \beta_0^j \text{ и } u_m^j = \beta_1^j,\ \ j = \overline{0,n} \text{ (сеточные краевые условия)};\\ \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - D\dfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1} + \mathrm{O}(\tau, h^2)\\ \text{при } \tau, h \to 0\,(n,m \to +\infty),\ i = \overline{1,m-1},\ j = \overline{0,n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Проверим, выполняется ли достаточный признак условной корректности явной схемы: $\frac{2D\tau}{h^2} = \frac{2\cdot 1\cdot 0{,}05}{0{,}05^2} = 40 > 1$. Следовательно, достаточный признак условной корректности не выполняется.

Схему (1) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \underline{u}_i^{\,0} = \mu_i,\ \ i = \overline{0,m}\ ;\\ \underline{u}_i^{\,j+1} = \dfrac{D\tau}{h^2}\underline{u}_{i-1}^{\,j} + (1 - 2\dfrac{D\tau}{h^2})\underline{u}_i^{\,j} + \dfrac{D\tau}{h^2}\underline{u}_{i+1}^{\,j} + \tau f_i^j,\quad i = \overline{1,m-1}, j = \overline{0,n-1};\\ \underline{u}_0^{\,j} = \beta_0^j \text{ и } \underline{u}_m^{\,j} = \beta_1^j,\quad j = \overline{0,n} \text{ (сеточные краевые условия)};\\ n,m \to +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Более наглядно, в матрично-векторном представлении, схема (2) имеет вид:

$$\begin{cases} {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{\mu}\ ;\\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = \boldsymbol{G}\cdot {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \tau\cdot {}^{>}\boldsymbol{f}^{(0)};\\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} = \boldsymbol{G}\cdot {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + \tau\cdot {}^{>}\boldsymbol{f}^{(1)};\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n)} = \boldsymbol{G}\cdot {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n)} + \tau\cdot {}^{>}\boldsymbol{f}^{(n-1)},\\ n,m \to +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

$$p = \frac{D\tau}{h^2},\quad q = 1 - \frac{2D\tau}{h^2},\quad r = \frac{D\tau}{h^2};$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ p & q & r & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & p & q & r\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; m+1);$$

Тогда получаем:

G =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-20	41	-20	0	0	0	0
2	0	-20	41	-20	0	0	0
3	0	0	-20	41	-20	0	0
4	0	0	0	-20	41	-20	0
5	0	0	0	0	-20	41	...

Сеточные решения для моментов времени *t = 0,5* и *t = 1:*

$\underline{\vec{u}_1} =$	3	1.729e15	-2.501e15	2.168e15	…	2.168e15	-2.501e15	1.729e15	3
$\underline{\vec{u}_2} =$	0	7.272e33	-1.244e34	1.436e34	…	1.436e34	-1.244e34	7.272e33	0

1.2 Приближённое решение по неявной схеме

Неявная конечно-разностная схема:

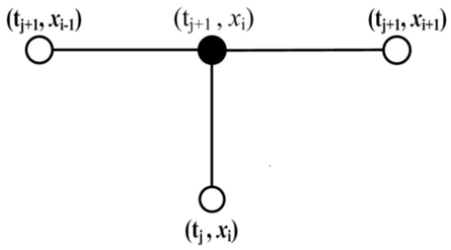

Рис.2

Неявная разностная схема для задачи (1), использующая обозначения предыдущго раздела и индуцированная для внутреннего узла (t_{j+1}, x_i) равномерной сетки $C = A \times B$ шаблоном, показанным на *рис.2*, имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{u}_i^0 = \mu_i, \ \ i = \overline{0,m} \text{ (сеточное начальное условие);} \\ \underline{u}_0^j = \beta_0^j \ \text{ и } \ \underline{u}_m^j = \beta_1^j, \ \ \ j = \overline{0,n} \text{ (сеточные граничные условия);} \\ \dfrac{\underline{u}_i^{j+1} - \underline{u}_i^j}{\tau} - D\dfrac{\underline{u}_{i+1}^{j+1} - 2\underline{u}_i^{j+1} + \underline{u}_{i-1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1}, \ \ \ i = \overline{1, m-1}, j = \overline{0, n-1}, \end{cases} \tag{4}$$

Неявная конечно-разностная схема является корректной по теореме о корректности неявной схемы.

Неявная схема в матричном виде:

$$\begin{cases} {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{\mu}; \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(1)}; \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n-1)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(n)}. \end{cases} \qquad (5)$$

$$p = -\frac{D\tau}{h^2}, \quad q = 1 + \frac{2D\tau}{h^2}, \quad r = -\frac{D\tau}{h^2};$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & q & r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & p & q & r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; m+1);$$

Тогда получаем:

H =

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	-20	41	-20	0	0	0	0
2	0	-20	41	-20	0	0	0
3	0	0	-20	41	-20	0	0
4	0	0	0	-20	41	-20	0
5	0	0	0	0	-20	41	-20
6	0	0	0	0	0	-20	...

Матрица H является трёхдиагональной и имеет диагональное преобладание. Для решения СЛАУ (5) применим метод прогонки. Рабочие формулы метода прогонки для данной задачи будут иметь вид:

$$u^i{}_n = L_n u^i{}_{n+1} + M_n, \qquad n = \overline{1,k}, \qquad i = \overline{2,k+1};$$

$$u^i{}_{k+1} = M_{k+1};$$

где

$$L_1 = -\frac{H_2^1}{H_1^1}, \quad M_1 = \frac{\nu_1{}^i}{H_1^1};$$

$$L_n = -\frac{H_{n+1}^n}{L_{n-1}H_{n-1}^n + H_n^n}, \quad M_n = \frac{\nu_n{}^i - M_{n-1}H_{n-1}^n}{L_{n-1}H_{n-1}^n + H_n^n}, \quad n = \overline{2,k};$$

$$M_{k+1} = \frac{\nu_{k+1}{}^i - M_k H_k^{k+1}}{L_k H_k^{k+1} + H_{k+1}^{k+1}}.$$

$$\vec{v}^i = u^{i-1} - \beta^{i-1} + \beta^i + \tau\cdot f^i$$

Сеточные решения для моментов времени *t = 0,5* и *1:*

$\vec{u}_1 =$	3	2.969	2.944	2.922	…	2.922	2.944	2.969	3
$\vec{u}_2 =$	0	-0.068	-0.128	-0.181	…	-0.181	-0.128	-0.068	0

2. Аналитическое решение

Представим решение $u(t,x)$ в виде $u(t,x) = \varphi(t,x) + 2\beta(1-t)$, где $\varphi(t,x)$ – решение неоднородного уравнения диффузии с однородными граничными и начальными условиями и правой частью вида:

$$\frac{3\pi}{4}\cos(\frac{\pi t}{2})\,(x-x^2) - 3\sin(\frac{\pi t}{2}) - 6.$$

Тогда найдём $\varphi(t,x)$, которая является решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} = \dfrac{3\pi}{4}\cos(\dfrac{\pi t}{2})\,(x-x^2) - 3\sin(\dfrac{\pi t}{2}) - 6, (t,x) \in (0;1)\times(0;1); \\ \varphi(0,x) = 6 - 6x(1-x), x \in [0;1]; \\ \varphi(t,0) = 6(1-t) = \varphi(t,1), t \in [0;1]; \\ \beta = 3, \qquad \alpha = \dfrac{1}{2} = 0{,}5. \end{cases}$$

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2\cdot\beta + \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\pi\cdot\left(x-x^2\right)}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$u(0,t) = 2\cdot\beta\cdot(1-t)$$

$$u(1,t) = 2\cdot\beta\cdot(1-t)$$

$$u(x,0) = 2\cdot\beta\cdot x\cdot(1-x) + 2\cdot\beta$$

$$\varphi\_analit := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, 100, 100\right]$$

В качестве аналитического решения будем брать частичную сумму этого ряда до 100-го слагаемого.

3. Сравнение решений

Сравним аналитическое и приближённые решения. Построим вектора $\left|\vec{u}_{\text{ан}} - \vec{u}_{\text{прибл}}\right|$: для явной и неявной схем в моменты времени $t = 0{,}5$ и 1.

Для явной схемы:

$$\left\|\vec{u}_{\text{ан}} - \vec{u}_{\text{прибл}}\right\|_{t=0,5} = 2.501 \cdot 10^{15}$$

$$\left\|\vec{u}_{\text{ан}} - \vec{u}_{\text{прибл}}\right\|_{t=1} = 1.436 \cdot 10^{34}$$

Для неявной схемы:

$$\left\|\vec{u}_{\text{ан}} - \vec{u}_{\text{прибл}}\right\|_{t=0,5} = 0.376$$

$$\left\|\vec{u}_{\text{ан}} - \vec{u}_{\text{прибл}}\right\|_{t=1} = 2.521 \cdot 10^{-3}$$

Сравним графики решений:

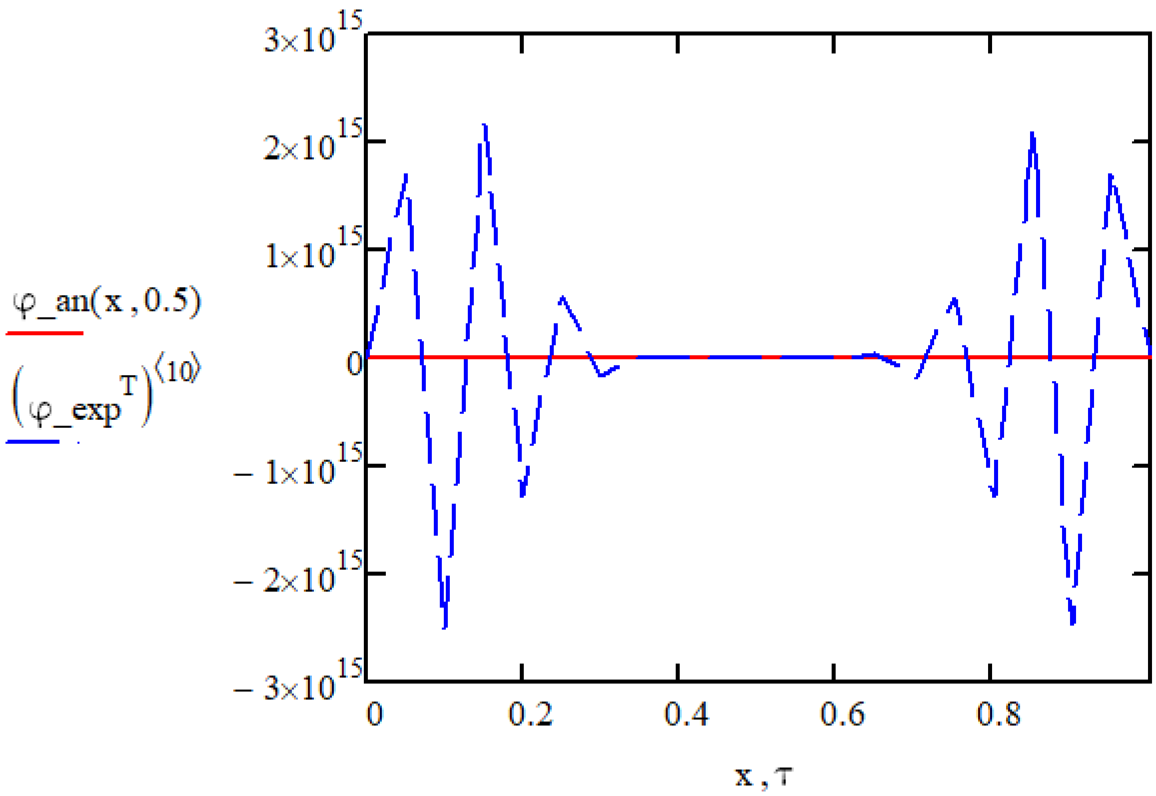

Рисунок 1 — Сравнение аналитического (красная линия) и приближённого (синяя линия) решений для $t = 0.5$ для явной схемы

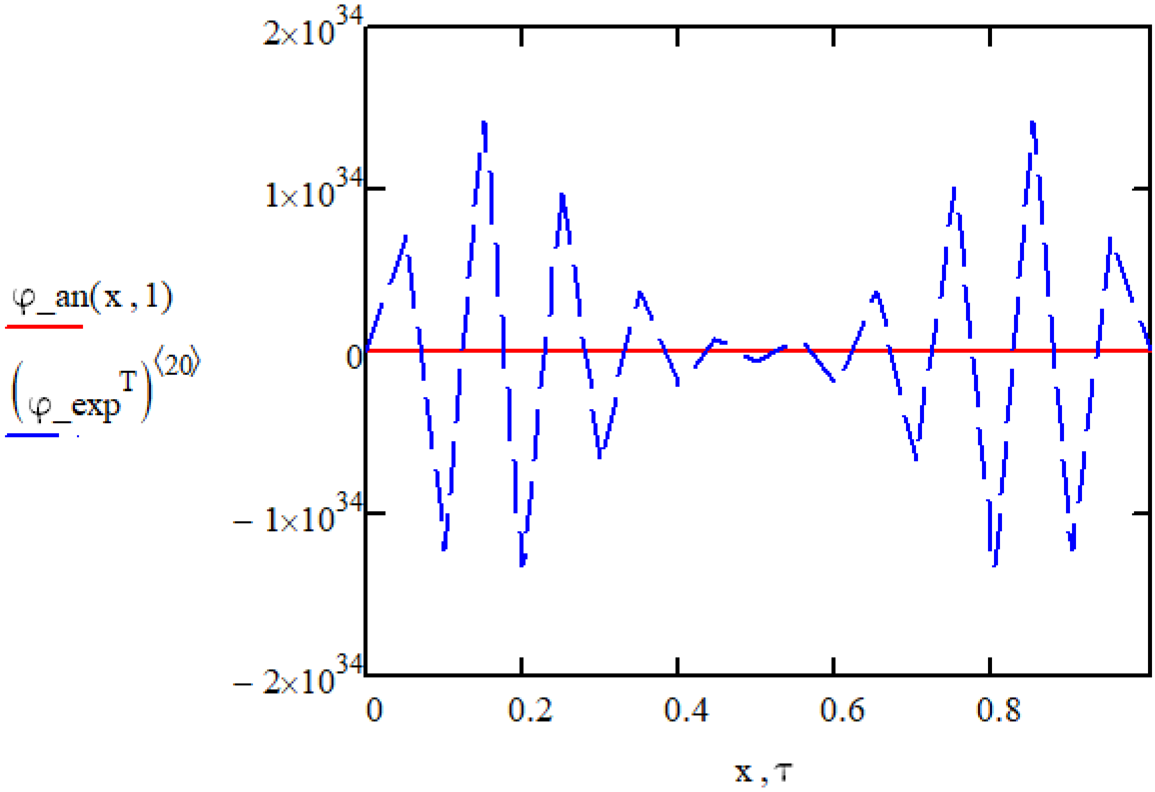

Рисунок 2 — Сравнение аналитического (красная линия) и приближённого (синяя линия) решений для *t = 1* для явной схемы

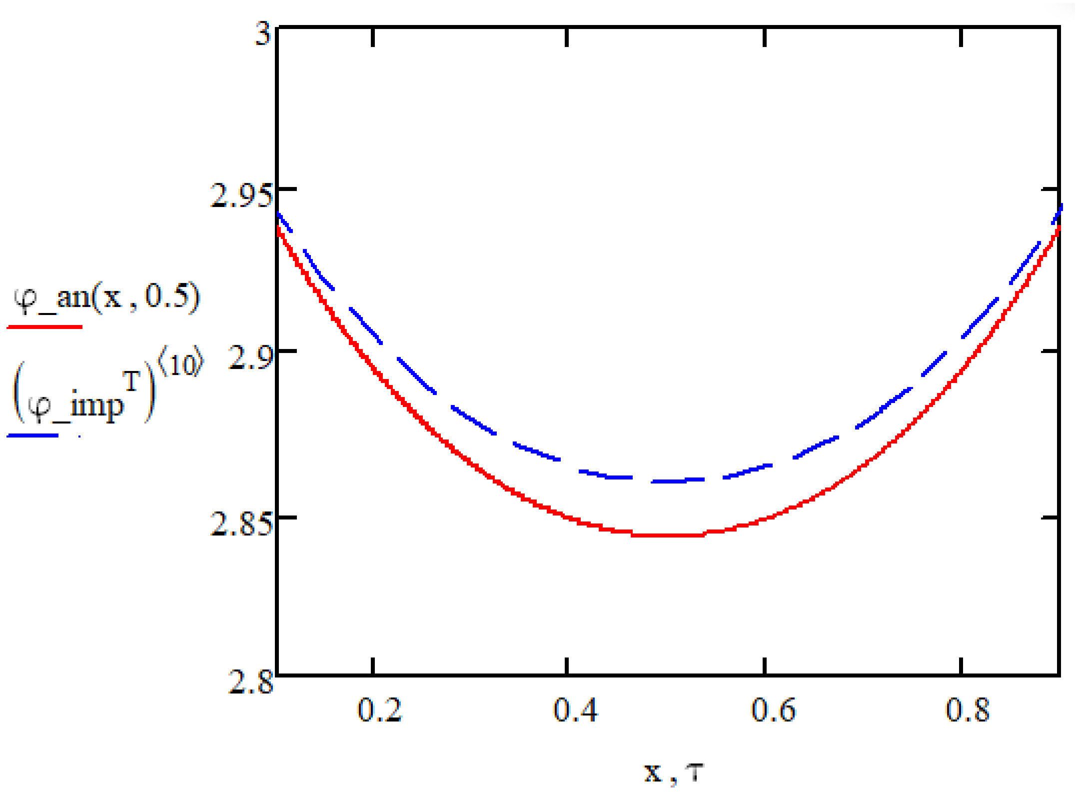

Рисунок 3 — Сравнение аналитического (красная линия) и приближённого (синяя линия) решений для *t = 0.5* для неявной схемы

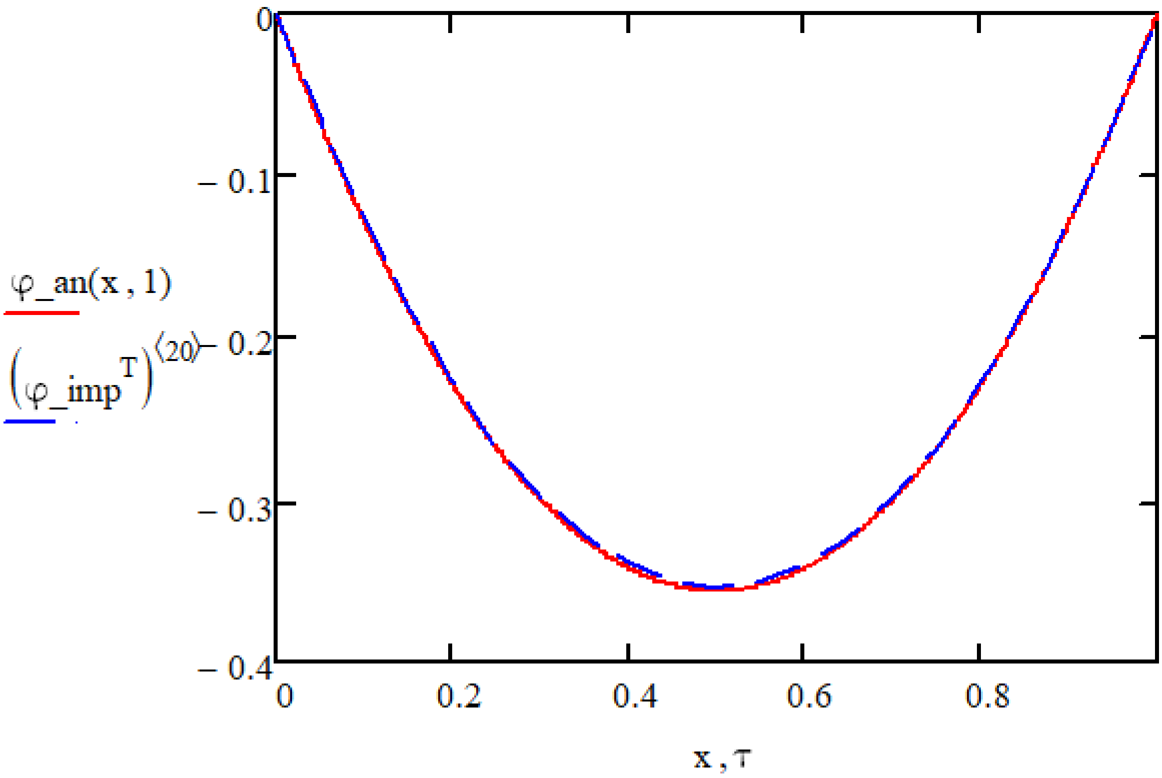

Рисунок 4 — Сравнение аналитического (красная линия) и приближённого (синяя линия) решений для *t = 1* для неявной схемы

Вывод: в результате выполнения работы было найдено аналитическое решение уравнения теплопроводности, а также построены приближенные решения с помощью конечно-разностных схем.

Можно заметить, что неявная схема хорошо приближает решение уравнения. В то время, явная напротив, в силу того, что не является условно корректной, приближает решение с очень большой погрешностью.