МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный техническийуниверситет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №2-3

«Метод конечных сумм для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром»

Группа: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2022

ЗАДАНИЕ

Используя дискретный аналог уравнения (1), индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет вид:

$$x(s) - \frac{1}{1+\frac{n-45}{2}} \cdot \int_0^{\frac{N+7}{N}} K(s,\tau)x(\tau)dt = \frac{N+3}{N}(s^2 + \frac{n-53}{2}),\ s \in [0;\frac{N+7}{N}],$$

где N − номер фамилии студента в журнале, n − номер группы и

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s \cdot (2\frac{N+7}{N} - \tau),\ 0 \le s \le \tau; \\ \tau \cdot (2\frac{N+7}{N} - s),\ \tau \le s \le \frac{N+7}{N}. \end{cases}$$

Найти ещё одно приближённое решение уравнения, имеющее вид частичной суммы ряда Фурье по ортонормированному базису из собственных функций интегрального оператора уравнения, используя три наименьшие по абсолютной величине характеристических числа интегрального оператора уравнения.

В узлах сетки сравнить значения приближённых решений по абсолютной величине, проиллюстрировав это сравнение на соответствующем графике.▶

Решение:

Для данного варианта n = 52, N = 8. С учетом этих значений исходное интегральное уравнение и его ядро имеют вид:

$$x(s) - \frac{2}{9}\int_0^{\frac{15}{8}} K(s,\tau)x(\tau)dt = \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right), s \in \left[0, \frac{15}{8}\right] \qquad (1)$$

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s \cdot \left(\frac{15}{4} - \tau\right), 0 \le s \le \tau \\ \tau \cdot \left(\frac{15}{4} - s\right), \tau \le s \le \frac{15}{8} \end{cases}$$

Найдем аналитическое решение уравнения (1). Для этого разобьем входящий в него интеграл на два:

$$x(s) - \frac{2}{9} \cdot \left[\left(\frac{15}{4} - s \right) \int_0^s \tau \cdot x(\tau) d\tau + \int_s^{\frac{15}{8}} \left(\frac{15}{4} - \tau \right) \tau \cdot x(\tau) d\tau \right] = \frac{11}{8} s^2 - \frac{11}{16} \qquad (2)$$

Дважды продифференцируем обе части равенства (2):

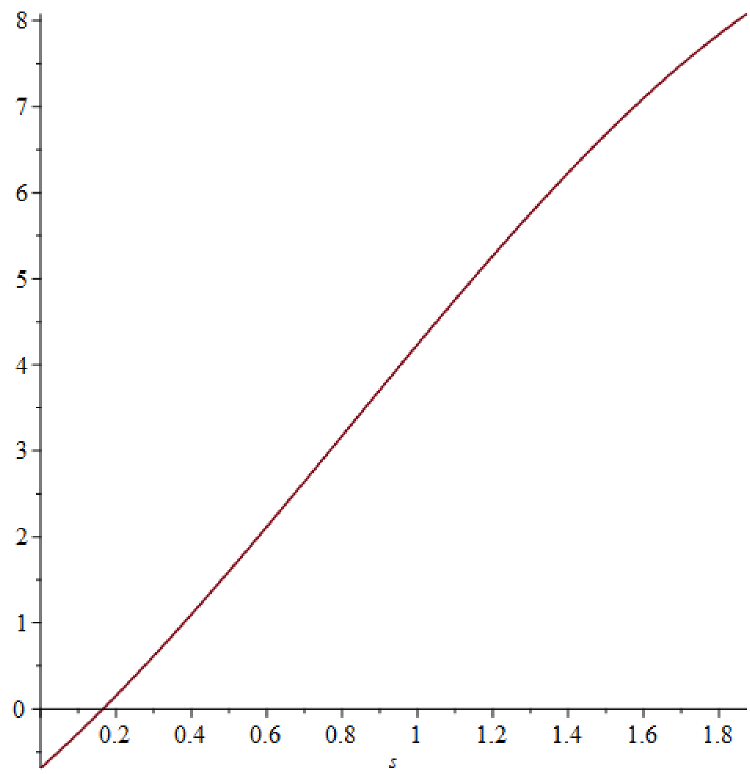
$$x''(s) + \frac{5}{6} \cdot x(s) = \frac{11}{4} \qquad (1)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x(s) = C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{30}}{6} s \right) + C_1 \cdot cos\left(\frac{\sqrt{30}}{6} s \right) + \frac{33}{10} \qquad (2)$$

Коэффициенты C_1, C_2 найдем из граничных условий – подставим (4) в (2) при s = 0, s = $\frac{15}{8}$. Получаем: C_1 = -3.9875, C_2 = 4.263823709.

График аналитического решения:



Определим численное решение исходного уравнения. Для этого воспользуемся его дискретным аналогом:

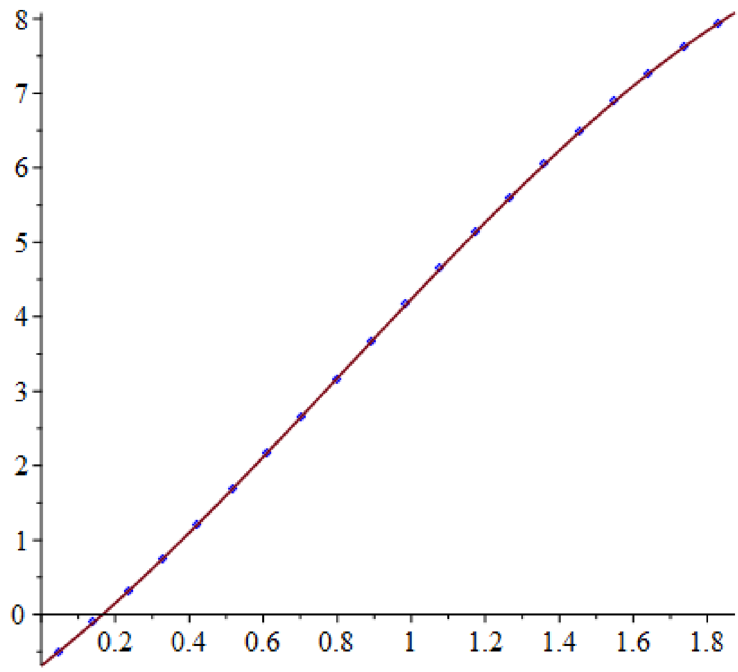
$$x_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} h \cdot K_j^i \cdot x_j = y_i, \quad i = 1 \ldots n \tag{3}$$

В матричном виде:

$$F_j^i = \delta_j^i - \lambda \sum_{j=1}^{n} h \cdot K_j^i$$
$$F \cdot \vec{x} = \vec{y} \tag{4}$$

Для нахождения численного решения была использована центрально-равномерная сетка, состоящая из 20 узлов: шаги сетки составили $h = \tau = \frac{3}{32}$.

Совмещенные графики аналитического решения уравнения (1) (красная линия) и численного, определенно согласно формуле (7) (синие точки):



Максимум абсолютного отклонения численного решения от аналитического в узлах использованной сетки составил 0.013636496.

Найдём ещё одно приближённое решение этого интегрального уравнения. Оно имеет вид частичной суммы ряда Фурье по ортонормированному базису из собственных функций интегрального оператора уравнения и использует 3 (наименьшие по абсолютной величине) характеристических числа интегрального оператора уравнения. Сначала будем искать решение уравнения в виде:

$$x = f + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda \alpha_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda} \varphi_{n-1},$$

где $f = \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right)$ – правая часть уравнения, $\lambda = \frac{2}{9}$, λ_{n-1} – (n – 1)-ое характеристическое число интегрального оператора Гильберта-Шмидта $\hat{A}$ ($\hat{A}(x)|s = \int_0^{\frac{15}{8}} K(s,\tau)x(\tau)dt\, , s \in [0, \frac{15}{8}]$).

Найдем характеристические числа и собственные функции интегрального оператора Гильберта-Шмидта $\hat{A}$, решив однородное уравнение:

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^{\frac{15}{8}} K(s,\tau)\varphi(\tau)dt = 0$$

или

$$\varphi(s) - \lambda \cdot \left[\left(\frac{15}{4} - s\right)\int_0^s \tau \cdot \varphi(\tau)d\tau + \int_s^{\frac{15}{8}} \left(\frac{15}{4} - \tau\right)\tau \cdot \varphi(\tau)d\tau\right] = 0$$

Дважды продифференцируем обе части равенства, получим:

$$\varphi''(s) = \lambda \cdot \left(-\frac{15}{4}\varphi(s)\right)$$

Поскольку

$$\varphi\left(\frac{15}{4}\right) = \lambda \int_0^{\frac{15}{8}} \frac{15}{8} \cdot \tau \cdot \varphi(\tau) d\tau,$$

$$\varphi'\left(\frac{15}{4}\right) = -\lambda \int_0^{\frac{15}{8}} \tau \cdot \varphi(\tau) d\tau.$$

Получаем следующие граничные условия:

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\frac{8}{15}\varphi\left(\frac{15}{8}\right) + \varphi'\left(\frac{15}{8}\right) = 0.$$

При λ ≤ 0 $\varphi(S) \equiv 0$. Следовательно, будем рассматривать только λ > 0. Общее решение будет иметь вид:

$$\varphi(s) = C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{15 \cdot \lambda}}{2} s\right) + C_1 \cdot cos\left(\frac{\sqrt{15 \cdot \lambda}}{2} s\right).$$

Из граничного условия получаем, что коэффициент $C_1 = 0$.

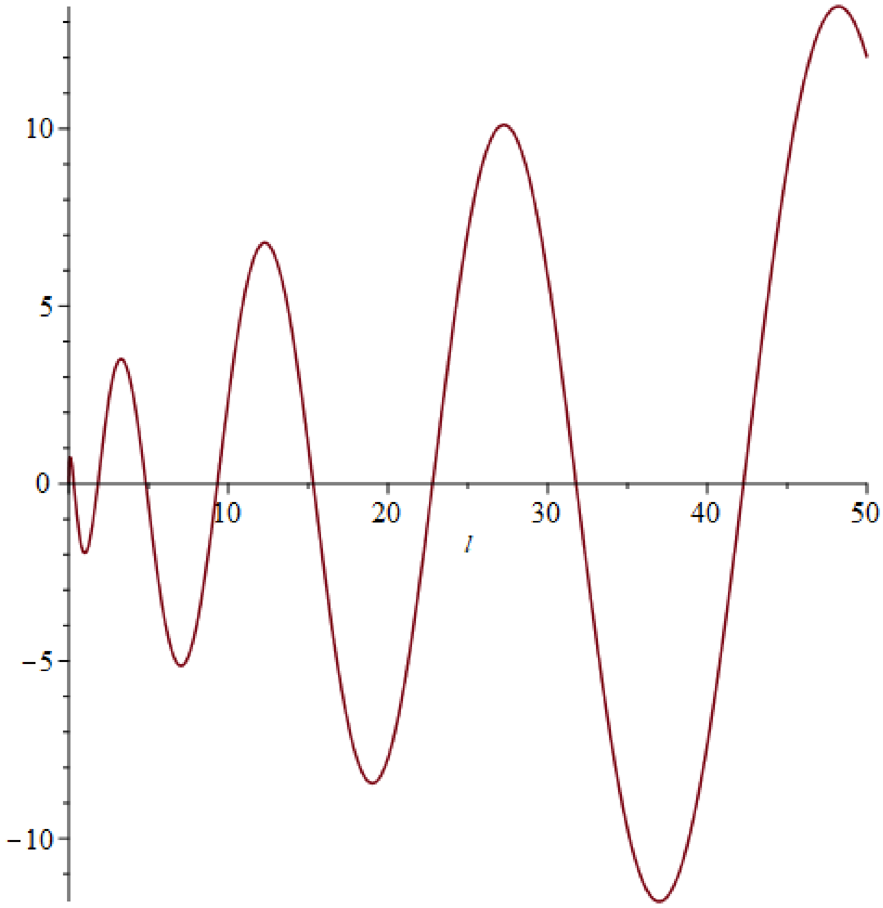
$$\frac{8}{15}\varphi\left(\frac{15}{8}\right) + \varphi'\left(\frac{15}{8}\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{15} \cdot \sin\left(\frac{15\sqrt{15 \cdot \lambda}}{16}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15 \cdot \lambda} \cdot cos\left(\frac{15\sqrt{15 \cdot \lambda}}{16}\right)\right) \cdot C_2 = 0.$$

Так как $C_2 \neq 0$, получаем уравнение для поиска характеристических чисел:

$$\frac{8}{15}\cdot\sin\left(\frac{15\sqrt{15\cdot\lambda}}{16}\right)+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{15\cdot\lambda}\cdot cos\left(\frac{15\sqrt{15\cdot\lambda}}{16}\right)=0.$$

Графическая иллюстрация:



Решив численно это уравнение, получим 3 наименьших по модулю характеристических числа:

$$\lambda_0 = 0.3121954790$$

$$\lambda_1 = 1.831013795$$

$$\lambda_2 = 4.828661119$$

При $\lambda = \lambda_i$, $i = \overline{0,2}$ система краевых условий принимает вид:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 0\cdot C_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = C, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная. Возьмем её равной единице.

Таким образом, собственные функции имеют вид:

$$\varphi_i(\mathrm{s}) = \sin\left(\frac{\sqrt{15\cdot\lambda_i}}{2}s\right).$$

Приступим теперь к поиску α_n в разложении f в ряд Фурье по ортонормированной системе $\varphi_i(\mathrm{s})$:

$$f = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$$

$$f = \alpha_0 \sin(1.42706 \cdot s) + \alpha_1 \sin(3.48016 \cdot s) + \alpha_2 \sin(5.65155 \cdot s).$$

$$\alpha_0 = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} f \cdot \varphi_0 ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \varphi_0 \cdot \varphi_0 \, ds} = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(0.31219 \cdot s) \, ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \sin^2(0.31219 \cdot s) \, ds} = 1.676213094$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} f \cdot \varphi_0 ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \varphi_0 \cdot \varphi_0 \, ds} = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(1.83101 \cdot s) \, ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \sin^2(1.83101 \cdot s) \, ds} = -1.473334020$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} f \cdot \varphi_0 ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \varphi_0 \cdot \varphi_0 \, ds} = \frac{\int_0^{\frac{15}{8}} \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(4.82866 \cdot s) \, ds}{\int_0^{\frac{15}{8}} \sin^2(4.82866 \cdot s) \, ds} = 0.2122237948$$

Таким образом, приближённое решение:

$$x = f + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda\alpha_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda}\varphi_{n-1} \approx f + \lambda\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0 - \lambda}\varphi_0 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 - \lambda}\varphi_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 - \lambda}\varphi_2\right);$$

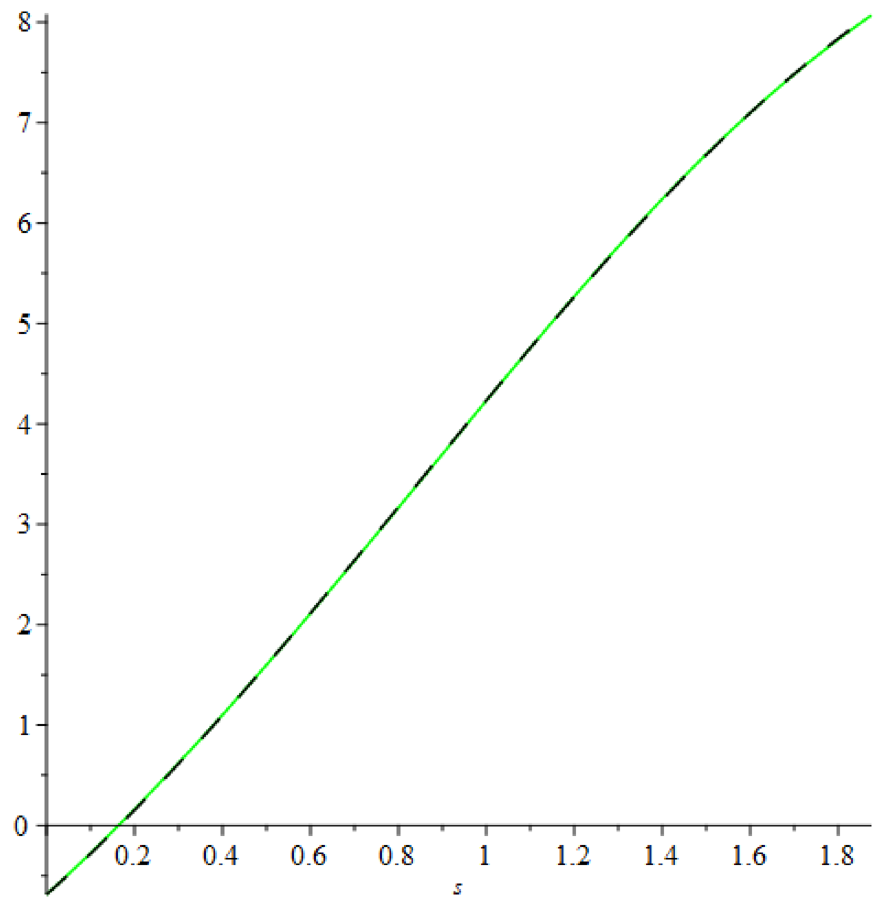
$$\mathrm{x} = \frac{11}{8}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{2}{9}\left(\frac{1.676213094}{0.3121954790 - \frac{2}{9}}\sin(1.082004180 \cdot s)\right.$$

$$+ \frac{-1.473334020}{1.831013795 - \frac{2}{9}}\sin(2.620362900 \cdot s)$$

$$\left.+ \frac{0.2122237948}{4.828661119 - \frac{2}{9}}\sin(4.255288379 \cdot s)\right).$$

Совмещенные графики аналитического решения уравнения (1) (черная линия) и решения в виде частичной суммы (зеленая линия):



Оценим абсолютные погрешности:

Узел сетки	**Значение приближённого решения**	**Значение аналитического решения**	**Абсолютная погрешность**
$\frac{3}{64}$	-0.57755	-0.57910	0.001553675
$\frac{9}{64}$	-0.54023	-0.54294	0.002714614
$\frac{15}{64}$	-0.48102	-0.48313	0.002109046
$\frac{21}{64}$	-0.39929	-0.39997	0.000679798
$\frac{27}{64}$	-0.29473	-0.29395	0.000782298
$\frac{33}{64}$	-0.16735	-0.16563	0.001719936
$\frac{39}{64}$	-0.01758	-0.01572	0.001858586
$\frac{45}{64}$	0.1537192872	0.154934926	0.001215639
$\frac{51}{64}$	0.3453466955	0.345411041	0.000064346
$\frac{57}{64}$	0.5558018269	0.554653837	0.001147990
$\frac{63}{64}$	0.7834325292	0.781509930	0.001922599
$\frac{69}{64}$	1.026590287	1.024728851	0.001861436
$\frac{75}{64}$	1.283802280	1.282969935	0.000832345
$\frac{81}{64}$	1.553936630	1.554809712	0.000873082
$\frac{87}{64}$	1.836339596	1.838749762	0.002410166
$\frac{93}{64}$	2.130925960	2.133224944	0.002298984
$\frac{99}{64}$	2.438209336	2.436612072	0.001597264
$\frac{105}{64}$	2.759267186	2.747238816	0.0120283694
$\frac{111}{64}$	3.095644182	3.063392957	0.0322512248
$\frac{117}{64}$	3.449206222	3.383331790	0.0658744330

Максимальное значение абсолютной погрешности составляет 0.0658744330

Вывод:

Для интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром и правой частью квадратичного вида численное решение является достаточно точным даже при небольшом количестве узлов сетки (n = 20).