МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Основы сеточных методов

Домашнее задание №1-1
«Метод коллокаций»
Группа: ФН11-62Б

Вариант №6

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Используя дискретный аналог интегрального уравнения, индуцированный методом коллокаций (узлы коллокации – центрально равномерная сетка, количество этих узлов не менее 40), найти приближённое решение этого уравнения, которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-59}\int_0^{\frac{N+3}{N}} K(s,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{N+3}{N}(2s^3 - s^2 + n - 67),\ s \in [0; \frac{N+3}{N}],$$

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(2\frac{N+3}{N} - \tau),\ 0 \le s \le \tau\ ; \\ \tau(2\frac{N+3}{N} - s),\ \tau \le s \le \frac{N+3}{N}. \end{cases}$$

Для компонент матрицы дискретного аналога уравнения написать формулы в зависимости только от узлов коллокации и шага сетки. Эти формулы и использовать при составлении матрицы дискретного аналога для получения численного решения в виде сеточной функции на узлах коллокации.

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением интегрального уравнения к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Краевые условия должны быть 1-го или второго рода.

На заданной сетке узлов коллокаций графически проиллюстрировать сравнение численного решения с аналитическим решением уравнения.

Решение:

$\mathrm{N} = 6, \mathrm{n} = 62$

Уравнение примет вид:

$$x(s) - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{3}{2}(2s^3 - s^2 - 5), \qquad s \in \left[0;\frac{3}{2}\right]$$

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(3-\tau), & 0 \le s \le \tau \\ \tau(3-s), & \tau \le s \le 3 \end{cases}$$

1. **Найдем приближенное решение**

Возьмем количество узлов коллокации = 100.

Зададим равномерную сетку A и индуцированную ей центрально равномерную сетку B (шаг сетки h = 0.015):

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.015 \\ \cdots \\ 1.485 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.0075 \\ 0.0225 \\ \cdots \\ 1.4775 \\ 1.4925 \end{pmatrix}$$

Решим СЛАУ $F_n \cdot {}^{>}x = {}^{>}y$, где:

$${}^{>}x = [x^1, \dots x^n\rangle, \quad {}^{>}y = [y^1, \dots y^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n, \quad F = (\delta_j^i - \lambda K_j^i)_n^n = \left(f_j^i\right)_n^n \in L(\mathbb{R}, n).$$

$$K_j^i = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} K(s_j;\tau)d\tau = \begin{cases} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} s_i(3-\tau)d\tau, 0 \le s_i \le \tau \\ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \tau(3-s_i)d\tau, 0 \le s_i \le 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} s_i\left(3(\tau_j - \tau_{j-1}) - \frac{\tau_j^2 - \tau_{j-1}^2}{2}\right), 0 \le s_i \le \tau \\ (3-s_i)\frac{\tau_j^2 - \tau_{j-1}^2}{2}, \tau \le s_i \le 3 \end{cases} = \begin{cases} s_i(3h - s_j h), i < j \\ (3-s_i)s_j h, i > j \end{cases}, \text{для } i \ne j$$

$$K_i^i = \int_{\tau_{i-1}}^{s_i} K(s_i;\tau)d\tau + \int_{s_i}^{\tau_i} K(s_i;\tau)d\tau = \int_{\tau_{i-1}}^{s_i} s_i(3-\tau)d\tau + \int_{s_i}^{\tau_i} \tau(3-s_i)d\tau =$$

$$= s_i\left(3(\tau_j - \tau_{j-1}) - \frac{s_j^2 - \tau_{j-1}^2}{2}\right) + (3-s_i)\frac{{\tau_i}^2 - {s_i}^2}{2} =$$

$$= s_i\left(1.5h - \frac{s_i h}{2} + \frac{h^2}{8}\right) + (3-s_i)\left(\frac{s_i h}{2} + \frac{h^2}{8}\right), \text{для } i = j$$

Найдем $^{>}y$ из изначального уравнения:

```
[-7.50008311, -7.5007252 , -7.50195117, -7.50370027, -7.50591173,
 -7.50852483, -7.5114788 , -7.51471289, -7.51816636, -7.52177845,
 -7.52548842, -7.52923552, -7.53295898, -7.53659808, -7.54009205,
 -7.54338014, -7.54640161, -7.5490957 , -7.55140167, -7.55325877,
 -7.55460623, -7.55538333, -7.5555293 , -7.55498339, -7.55368486,
 -7.55157295, -7.54858692, -7.54466602, -7.53974948, -7.53377658,
 -7.52668655, -7.51841864, -7.50891211, -7.4981062 , -7.48594017,
 -7.47235327, -7.45728473, -7.44067383, -7.4224598 , -7.40258189,
 -7.38097936, -7.35759145, -7.33235742, -7.30521652, -7.27610798,
 -7.24497108, -7.21174505, -7.17636914, -7.13878261, -7.0989247 ,
 -7.05673467, -7.01215177, -6.96511523, -6.91556433, -6.8634383 ,
 -6.80867639, -6.75121786, -6.69100195, -6.62796792, -6.56205502,
 -6.49320248, -6.42134958, -6.34643555, -6.26839964, -6.18718111,
 -6.1027192 , -6.01495317, -5.92382227, -5.82926573, -5.73122283,
 -5.6296328 , -5.52443489, -5.41556836, -5.30297245, -5.18658642,
 -5.06634952, -4.94220098, -4.81408008, -4.68192605, -4.54567814,
 -4.40527561, -4.2606577 , -4.11176367, -3.95853277, -3.80090423,
 -3.63881733, -3.4722113 , -3.30102539, -3.12519886, -2.94467095,
 -2.75938092, -2.56926802, -2.37427148, -2.17433058, -1.96938455,
 -1.75937264, -1.54423411, -1.3239082 , -1.09833417, -0.86745127]
```

Получим решение $^{>}x$ интегрального уравнения:

```
[ -7.60004031,  -7.79846488,  -7.99571864,  -8.19169645,
  -8.38629346,  -8.57940514,  -8.77092729,  -8.96075605,
  -9.14878797,  -9.33491998,  -9.51904945,  -9.70107421,
  -9.88089253, -10.05840322, -10.23350557, -10.40609943,
 -10.57608523, -10.74336395, -10.90783722, -11.06940726,
 -11.22797698, -11.38344994, -11.53573041, -11.68472338,
 -11.83033456, -11.97247044, -12.11103829, -12.24594618,
 -12.377103  , -12.50441849, -12.62780326, -12.74716877,
 -12.86242744, -12.97349256, -13.0802784 , -13.18270019,
 -13.28067411, -13.37411738, -13.46294822, -13.54708589,
 -13.62645071, -13.70096406, -13.77054843, -13.83512742,
 -13.89462573, -13.94896923, -13.99808494, -14.04190106,
 -14.08034697, -14.11335328, -14.14085181, -14.16277561,
 -14.179059  , -14.18963757, -14.19444818, -14.193429  ,
 -14.18651951, -14.17366051, -14.15479415, -14.12986391,
 -14.09881465, -14.06159261, -14.01814541, -13.96842208,
 -13.91237305, -13.84995019, -13.78110677, -13.70579756,
 -13.62397873, -13.53560794, -13.44064433, -13.33904852,
 -13.23078261, -13.11581021, -12.99409643, -12.86560792,
 -12.73031283, -12.58818086, -12.43918322, -12.2832927 ,
 -12.12048362, -11.95073186, -11.77401486, -11.59031164,
 -11.39960278, -11.20187044, -10.99709835, -10.78527184,
 -10.56637782, -10.34040479, -10.10734284,  -9.86718367,
  -9.61992056,  -9.36554839,  -9.10406364,  -8.83546441,
  -8.55975037,  -8.27692282,  -7.98698463,  -7.6899403 ]
```

2. Найдем аналитическое решение

Распишем уравнение:

$$x(s) - \frac{1}{3}\int_0^s \tau(3-s)x(\tau)d\tau - \frac{1}{3}\int_s^{\frac{3}{2}} s(3-\tau)x(\tau)d\tau = \frac{3}{2}(2s^3 - s^2 - 5). \qquad (1)$$

Продифференцируем это уравнение 2 раза:

$$x'(s) = -\frac{1}{3}\int_0^s \tau x(\tau)d\tau + \frac{1}{3}\int_s^{\frac{3}{2}} (3-\tau)x(\tau)d\tau + 9s^2 - 3s. \qquad (2)$$

$$x''(s) = 18s - 3 - x(s)$$

Подставим краевые значения a = 0, b = 1.5 в получившиеся уравнения:

$$x(0) = -\frac{15}{2}$$

$$x(1.5) = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}\tau\, x(\tau)d\tau - \frac{3}{4} \qquad (3)$$

$$x'(1.5) = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \tau\, x(\tau)d\tau - \frac{63}{4} \qquad (4)$$

Сложим уравнения (3) и $\frac{3}{2}\cdot$ (4):

$$x(1.5) + \frac{3}{2}x'(1.5) = -\frac{195}{8}$$

Получим краевую задачу:

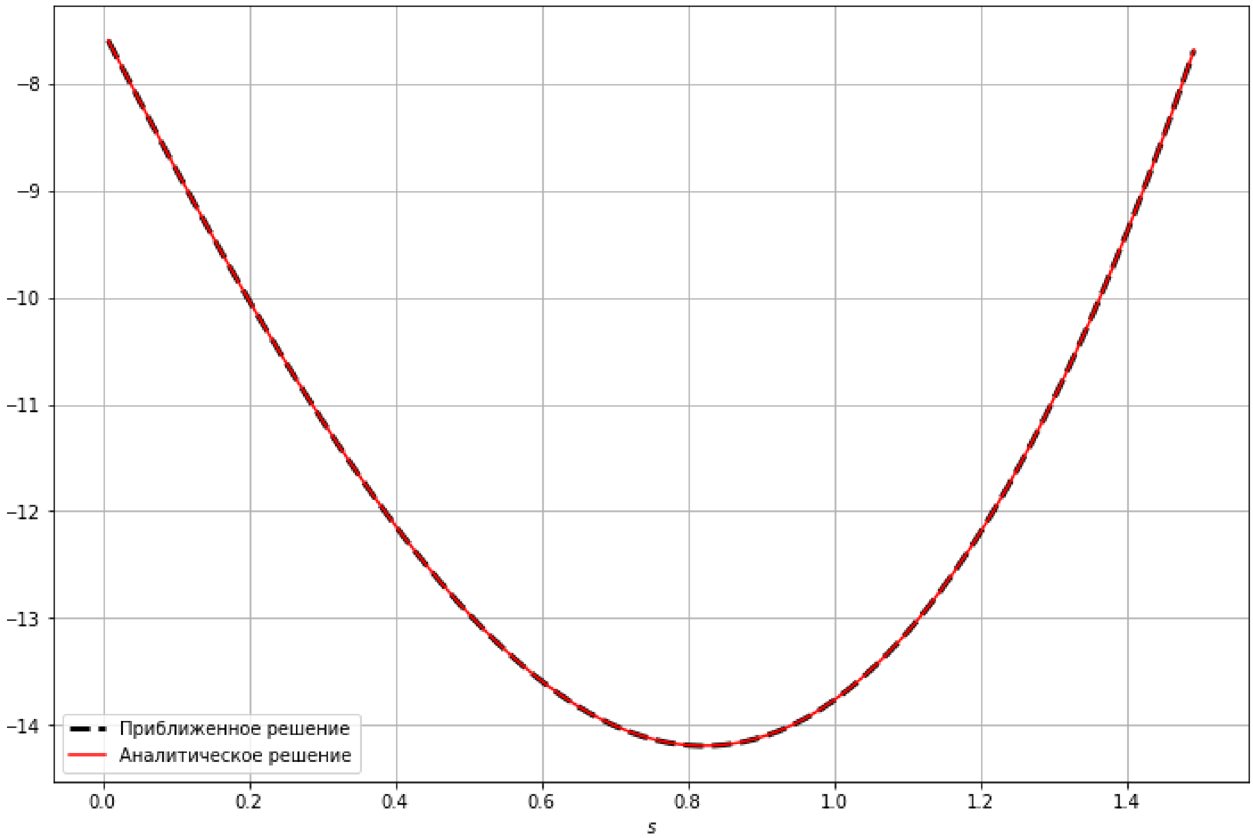
$$\begin{cases} x''(s) = 18s - 3 - x(s) \\ x(0) = -\dfrac{15}{2} \\ x(1.5) + \dfrac{3}{2}x'(1.5) = -\dfrac{195}{8} \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$x(s) = -31.29734419sin(s) - 4.5cos(s) + 18s - 3$$

Абсолютная погрешность численного и аналитического решений составляет 0.00184

Построим совмещенный график решений:



Результаты:

Используя дискретный аналог интегрального уравнения, индуцированный методом коллокаций с 100 узлов, распределенных по центрально равномерной сетке мы нашли приближённое решение уравнения Фредгольма 2-го рода. Абсолютная погрешность приближённого решения составила 0.00184. Как можно заметить по графику, это очень мало.