МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный техническийуниверситет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №2-1

«Вычисление интерполяционного полинома Лагранжа»

Группа: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2022

ЗАДАНИЕ *(N – номер фамилии студента в журнале, n – номер группы)*

Для гладкой на отрезке $[0;2]$ функции $f(\tau)=\dfrac{10+0.5\cdot N}{1+(20+0,25\cdot N)\cdot(1+0.05(n-53))\cdot(\tau-1)^2}$, используя равномерную сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяции.

Для гладкой на отрезке $[0;2]$ функции f, используя чебышевскую сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.

Прокомментировать результаты интерполяций с равномерными и чебышевскими узлами.

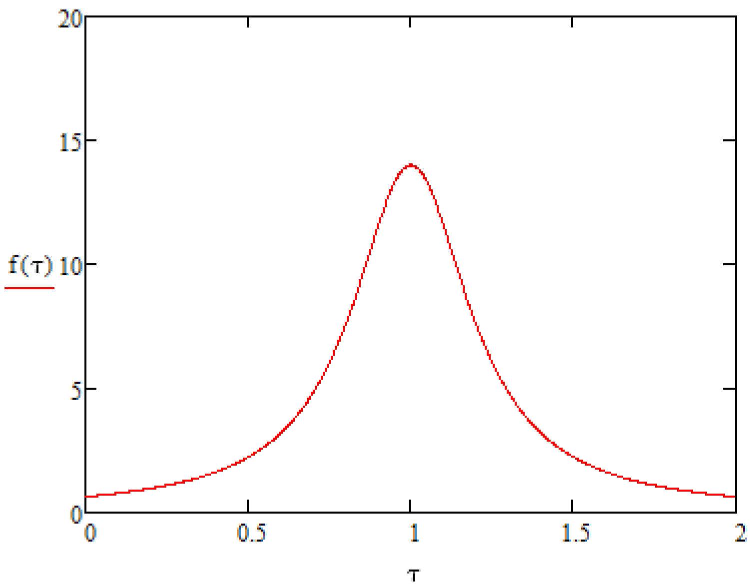
Замечание: коэффициенты интерполяционных полиномов определять с помощью решения соответствующей СЛАУ.►

Решение:

Для данного варианта N = 8. Тогда функция $f(\tau)$ принимает вид:

$$f(\tau)=\frac{14.0}{1+20.9\cdot(\tau-1)^2}.$$

График функции $f(\tau)$:



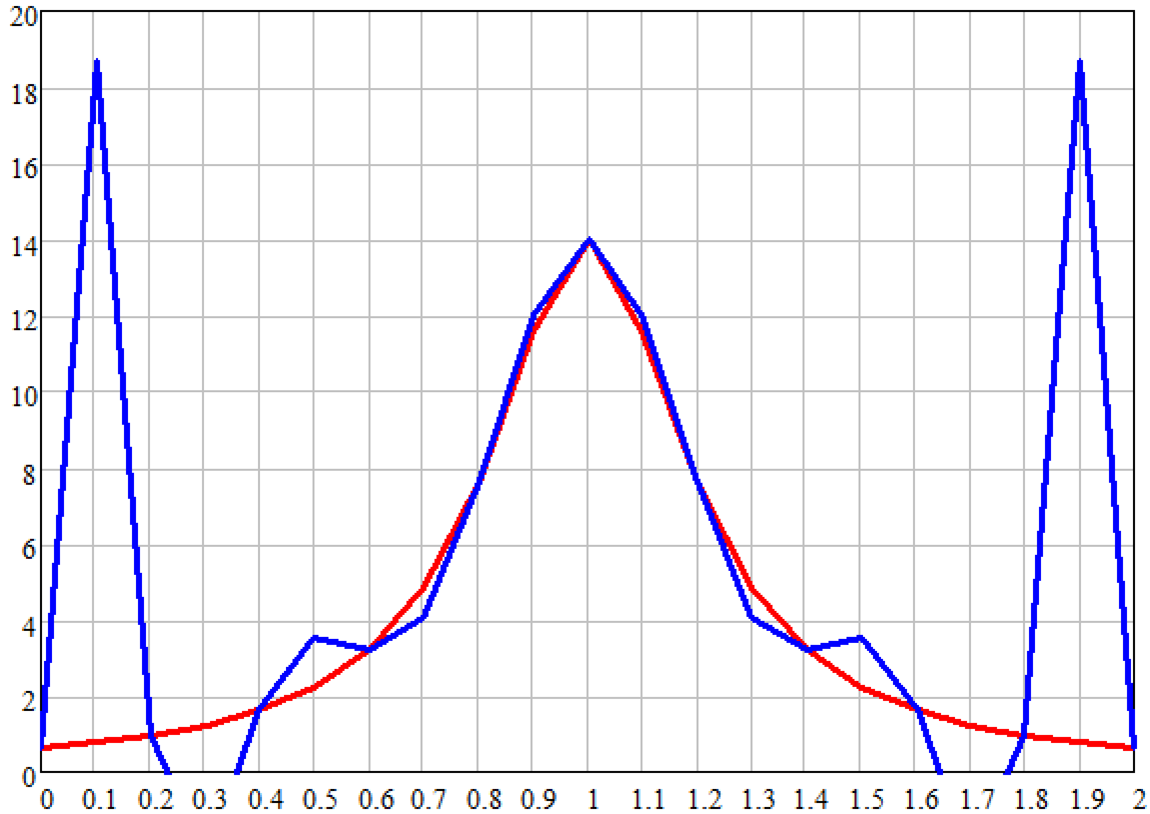
Вычисляется интерполяционный полином Лагранжа $L(\tau)$ по сетке $A = [\tau_0 \dots \tau_{10} >$:

$$L(\tau) = \sum_{i=0}^{10} \frac{(\tau - \tau_0) \dots (\tau - \tau_{i-1})(\tau - \tau_{i+1}) \dots (\tau - \tau_{10})}{(\tau_i - \tau_0) \dots (\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau_{i+1})(\tau_i - \tau_{10})} f(\tau_i)$$

Рассмотрим случай, когда $A = [\tau_0 \dots \tau_{10} >$ – равномерная сетка. На отрезке [0;2] она будет иметь вид:

$$\mathrm{A} = [0; \tfrac{1}{5}; \tfrac{2}{5}; \tfrac{3}{5}; \tfrac{4}{5}; 1; \tfrac{6}{5}; \tfrac{7}{5}; \tfrac{8}{5}; \tfrac{9}{5}; 2]$$

Используя равномерную сетку с 21 узлом, нарисуем графики функции f(τ) (красная линия) и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа (синяя линия):



На совмещенном графике видно, что на отрезке [0.7, 1.3] интерполяция практически полностью совпадает с графиком функции $f(\tau)$. На отрезках

[0, 0.7] и [1.3, 2] возникают сильные отклонения интерполяционного полинома от графика $f(\tau)$.

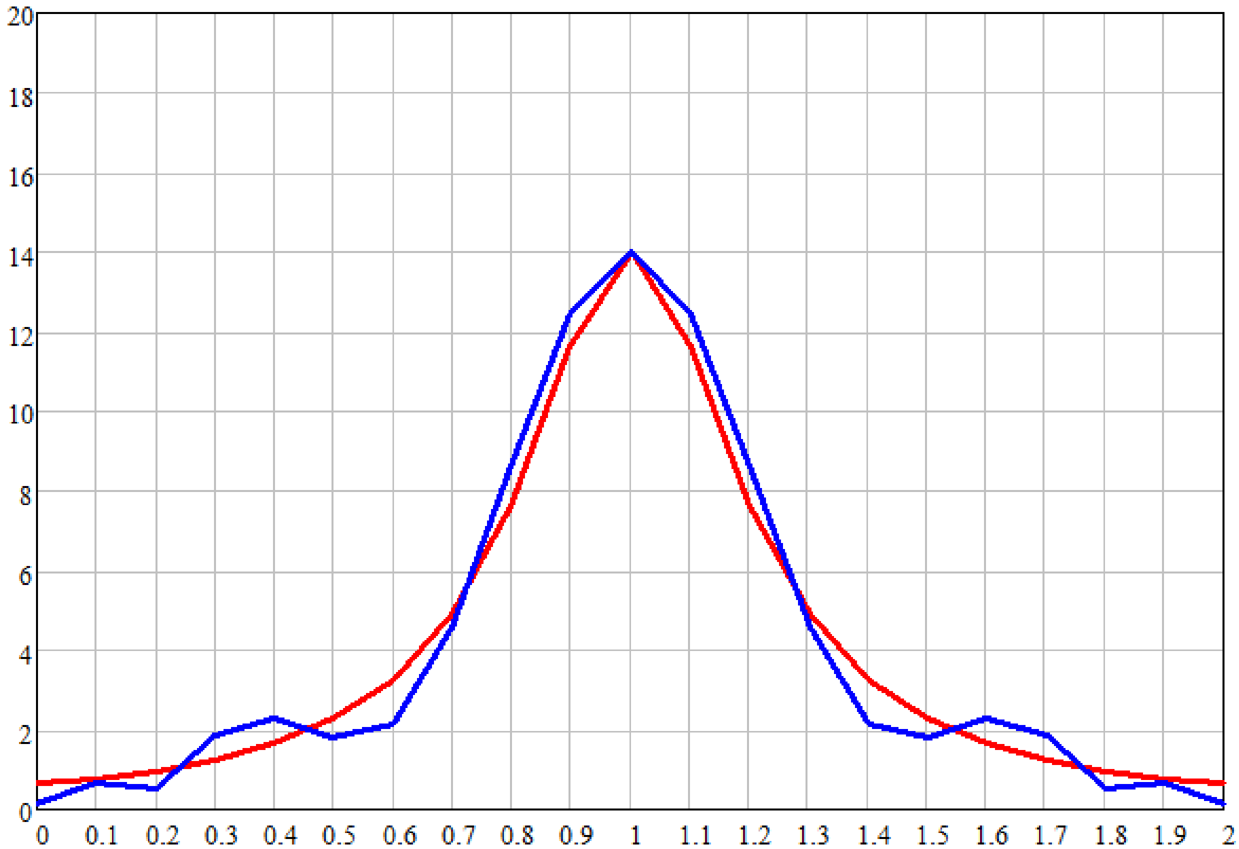
Теперь рассмотрим случай, когда $A = [\tau_0 \dots \tau_{10} >$ − Чебышевская сетка. Узлы ее вычисляются по формуле:

$$\tau_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \cos(\frac{2 \cdot i + 1}{2(k+1)}\pi), \qquad i = 0 \dots k = 10$$

На отрезке [0, 2] сетка будет иметь вид:

A = [0.0102, 0.0904, 0.2443, 0.4594, 0.7183, 1, 1.2817, 1.5406, 1.7557, 1.9096, 1.9898]

Используя равномерную сетку с 21 узлом, построим графики функции f(τ) (красная линия) и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа (синяя линия):



Получили, что практически на всем отрезке интерполяционный полином точно воспроизводит заданную функцию $f(\tau)$ с небольшими погрешностями.

Вывод:

Интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(\tau)$, построенный на сетке Чебышева, более точно воспроизводит $f(\tau)$, в сравнении с полиномом, построенном на равномерной сетке: в последнем случае возникают значительные отклонения интерполяции от исходной функции вблизи концов отрезка. Таким образом, как и предсказывает теоретическая модель, интерполяционный полином Лагранжа, построенный на Чебышевской сетке, дает лучшую интерполяцию по сравнению с полиномом, построенным на равномерной сетке.