МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный техническийуниверситет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1-4

«Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы»

Группа: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2022

ЗАДАНИЕ

(N – номер фамилии студента в журнале, β = 1-0,1(50-n), n – номер группы)

Используя метод Якоби, найти приближённое полное решение спектральной задачи для матрицы A , приведённой в таблицах ниже. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальная по модулю внедиагональная компонента преобразованной матрицы станет меньше ε = 0.01. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы A , проверив соответствующие приближённые равенства ($A * {}^{>}\tilde{q}_i \approx \tilde{\lambda}_i * {}^{>}\tilde{q}_i$ для любого i∈1, 4) с указанием погрешности.

8	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$

Решение:

Для N = 8; β = 1,2

Матрица A[0] имеет вид:

$$A[0] = \begin{bmatrix} 12.0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 12.0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 12.0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 12.0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Поворотные индексы α, β выбираются в соответствии с положением максимального недиагонального элемента матрицы A[i].

Угол поворота φ вычисляется по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{2} arcctg\left(\frac{a_\alpha^\alpha[k] - a_\beta^\beta[k]}{2a_\beta^\alpha[k]}\right) \quad (2)$$

Первая итерация: $\alpha = 1, \beta = 4$. Угол поворота $\varphi[1] = 0.78539$.
Матрица Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.7071067811 & 0 & 0 & -0.7071067813 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7071067813 & 0 & 0 & 0.7071067811 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Матрица A[1]:

$$A[1] = \begin{bmatrix} 15 & 2{,}121320344 & -2{,}121320344 & 8{,}88178 \cdot 10^{-16} \\ 2{,}121320344 & 12 & -3 & 0{,}707106781 \\ -2{,}121320344 & -3 & 12 & 0{,}707106781 \\ 8{,}88178 \cdot 10^{-16} & 0{,}707106781 & 0{,}707106781 & 9 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Вторая итерация: $\alpha = 2, \beta = 3$. Угол поворота $\varphi[2] = 0.78539$.
Матрица Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071067811 & -0.7071067811 & 0 \\ 0 & 0.7071067811 & 0.7071067811 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Матрица A[2]:

$$A[2] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -3 & 8{,}88178 \cdot 10^{-16} \\ 0 & 15 & 8{,}88178 \cdot 10^{-16} & 1 \\ -3 & 8{,}88178 \cdot 10^{-16} & 9 & -2{,}22045 \cdot 10^{-16} \\ 8{,}88178 \cdot 10^{-16} & 1 & -2{,}22045 \cdot 10^{-16} & 9 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Третья итерация: $\alpha = 1, \beta = 3$. Угол поворота $\varphi[3] = 1{,}178097$.
Матрица Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}382683432 & 0 & -0{,}923879533 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}923879533 & 0 & 0{,}382683432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Матрица A[3]:

$$A[3] = \begin{bmatrix} 7{,}757359313 & 8{,}2057 \cdot 10^{-16} & -1{,}3322710^{-15} & 1{,}34749 \cdot 10^{-16} \\ 8{,}2057 \cdot 10^{-16} & 15 & 3{,}39891 \cdot 10^{-16} & 1 \\ -1{,}3322710^{-15} & 3{,}39891 \cdot 10^{-16} & 16{,}24264069 & -9{,}05543 \cdot 10^{-16} \\ 1{,}34749 \cdot 10^{-16} & 1 & -9{,}05543 \cdot 10^{-16} & 9 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Четвертая итерация: $\alpha = 2, \beta = 4$. Угол поворота $\varphi[4] = 0{,}160875$.
Матрица Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}987087458 & 0 & -0{,}160182243 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}160182243 & 0 & 0{,}987087458 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Матрица A[4]:

$$A[4]=\begin{bmatrix} 7{,}757359313 & 8{,}31559\cdot10^{-16} & -1{,}33227\cdot10^{-15} & 1{,}56803\cdot10^{-18} \\ 8{,}31559\cdot10^{-16} & 15{,}16227766 & 1{,}9045\cdot10^{-16} & 4{,}44089\cdot10^{-16} \\ -1{,}33227\cdot10^{-15} & 1{,}9045\cdot10^{-16} & 16{,}24264069 & -9{,}48294\cdot10^{-16} \\ 1{,}56803\cdot10^{-18} & 4{,}44089\cdot10^{-16} & -9{,}48294\cdot10^{-16} & 8{,}83772234 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Все элементы матрицы по модулю меньше ε = 0.01. Тогда собственные значения: $\lambda_1 = 7{,}757359313$, $\lambda_2 = 15{,}16227766$, $\lambda_3 = 16{,}24264069$, $\lambda_4 = 8{,}83772234$. Собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям:

$$e_1=\begin{bmatrix} 0{,}27059805 \\ -0{,}653281482 \\ 0{,}653281482 \\ 0{,}27059805 \end{bmatrix};\ e_2=\begin{bmatrix} -0{,}11326595 \\ 0{,}697976235 \\ 0{,}697976235 \\ -0{,}11326595 \end{bmatrix};\ e_3=\begin{bmatrix} -0{,}653281482 \\ -0{,}27059805 \\ 0{,}27059805 \\ -0{,}653281482 \end{bmatrix};\ e_4=\begin{bmatrix} -0{,}697976235 \\ -0{,}11326595 \\ -0{,}11326595 \\ 0{,}697976235 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Проверка:

$$\begin{gathered}
A[0]\cdot e_1=\begin{bmatrix} 2{,}099126304 \\ -5{,}067739192 \\ 5{,}067739192 \\ 2{,}099126304 \end{bmatrix};\ \lambda_1\cdot e_1=\begin{bmatrix} 2{,}099126304 \\ -5{,}067739192 \\ 5{,}067739192 \\ 2{,}099126304 \end{bmatrix}; \\
A[0]\cdot e_2=\begin{bmatrix} -1{,}717369787 \\ 10{,}58290947 \\ 10{,}58290947 \\ 1{,}717369787 \end{bmatrix};\ \lambda_2\cdot e_2=\begin{bmatrix} -1{,}717369787 \\ 10{,}58290947 \\ 10{,}58290947 \\ 1{,}717369787 \end{bmatrix}; \\
A[0]\cdot e_3=\begin{bmatrix} -10{,}61101639 \\ -4{,}395226898 \\ 4{,}395226898 \\ -10{,}61101639 \end{bmatrix};\ \lambda_3\cdot e_3=\begin{bmatrix} -10{,}61101639 \\ -4{,}395226898 \\ 4{,}395226898 \\ -10{,}61101639 \end{bmatrix}; \\
A[0]\cdot e_4=\begin{bmatrix} -6{,}168520164 \\ -1{,}001013019 \\ -1{,}001013019 \\ 6{,}168520164 \end{bmatrix};\ \lambda_4\cdot e_4=\begin{bmatrix} -6{,}168520164 \\ -1{,}001013019 \\ -1{,}001013019 \\ 6{,}168520164 \end{bmatrix};
\end{gathered} \tag{12}$$

Результаты

Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы позволяет получить точные величины собственных значений матрицы. Для данной матрицы количество итераций составило 4. После получения собственных значений была проведена проверка правильности вычислений: были найдены собственные векторы, после чего были вычислены произведения исходной матрицы $A[0]$ на эти векторы и произведения собственных значений на соответствующие им собственные векторы. Получившиеся результаты полностью совпали друг с другом.