МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Основы сеточных методов

Домашняя работа №2-1
Группа ФН11-62Б

Вариант 6

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Используя метод Рунге-Кутта порядка $m = 4$, четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) найти численные решения задачи Коши (шаг сетки $h = 0.05$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2N+3}{N+2}(n-58)\sin\left(\dfrac{3N+3}{(2N+n-58)\cdot t}x\right), \qquad t \in [0.5; 2.5]; \\ x(0.5) = \dfrac{N}{2}. \end{cases}$$

Графически проиллюстрировать сравнение приближённых решений. Используя практическое правило Рунге, оценить погрешность приближённого решения, используя метод Рунге-Кутта порядка $m = 4$.

Входные данные:

<table>
<tr><td colspan="3">Группа, вариант
$N := 6 \quad n := 62$</td><td colspan="3">Границы интервала:
$a := 0.5 \quad b := 2.5$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Правая часть уравнения:
$f(t,x) := \dfrac{2\cdot N+3}{N+2}\cdot(n-58)\cdot\sin\left[\dfrac{3\cdot N+3}{(2\cdot N+n-58)\cdot t}\cdot x\right]$
$f(t,x) \rightarrow \dfrac{15\cdot\sin\left(\dfrac{21\cdot x}{16\cdot t}\right)}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Граничное условие:
$c0 := \dfrac{N}{2}$</td><td colspan="2">Шаг сетки:
$h := 0.05$</td><td colspan="2">Порядок точности:
$m := 4$</td></tr>
</table>

Решение

0. Введение сеточных аналогов

Посчитаем количество узлов:

$$k := \frac{b-a}{h} = 40$$

Введём равномерную сетку $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k = b \rangle$ шага $h = 0.05$:

$$\tau_0 := a$$

$$i := 1..k$$

$$\tau_i := \tau_{i-1} + h$$

Для приближённого A-сеточного решения задачи используем обозначения:

$$^{>}u = [u_0, u_1, \dots, u_k\rangle \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{|A|}(A),$$

$$f_0 = f(\tau_0, u_0), \qquad f_0 = f(\tau_1, u_1), \qquad \dots, \qquad f_k = f(\tau_k, u_k).$$

1. Численное решение методом Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта m-ого порядка определяется так называемой матрицей Бутчера $\boldsymbol{B} \in L(\mathbb{R}, m)$ вида:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \cdots & \gamma_m \\ \alpha_2 & \beta_2^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3^1 & \beta_3^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-1} & \beta_{m-1}^1 & \beta_{m-1}^2 & \dots & \dots & \beta_{m-1}^{m-2} & 0 \\ \alpha_m & \beta_m^1 & \beta_m^2 & \dots & \dots & \beta_m^{m-2} & \beta_m^{m-1} \end{pmatrix},$$

где ковектор $^{<}\gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m] \in {}^{<}\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию:

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 1.$$

Компоненты матрицы Бутчера при малых h определяют гладкое отображение $^{>}\omega = \langle \omega_1, \dots, \omega_m] \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, {}^{>}\mathbb{R}^m)$, которое имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_1(\tau, u, h) = f(\tau, u); \\ \omega_2(\tau, u, h) = f(\tau + h\alpha_2, u + h\beta_2^1\omega_1); \\ \omega_3(\tau, u, h) = f\big(\tau + h\alpha_3, u + h(\beta_3^1\omega_1 + \beta_3^2\omega_1)\big); \\ \dots \\ \omega_m(\tau, u, h) = f\left(\tau + h\alpha_m, u + h\sum_{i=1}^{m-1} \beta_m^i \omega_i\right). \end{cases}$$

Матрица Бутчера подбирается таким образом, чтобы для $\tau \in [a; b)$ и решения u^* задачи выполнялась рабочая формула метода Рунге-Кутта m-го порядка вида:

$$u^*(\tau + h) = u^*(\tau) + h \cdot {}^{<}\gamma \cdot {}^{>}\omega(\tau, u^*(\tau), h) + O(h^{m+1}), \qquad \text{при } h \to 0.$$

Для $m = 4$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \omega_1(\tau, u, h) = f(\tau, u); \\ \omega_2(\tau, u, h) = f\left(\tau + \frac{1}{2}h, u + \frac{1}{2}h\omega_1\right); \\ \omega_3(\tau, u, h) = f\left(\tau + \frac{1}{2}h, u + \frac{1}{2}h\omega_2\right); \\ \omega_4(\tau, u, h) = f(\tau + h, u + h\omega_3); \end{cases}$$

$$u^*(\tau + h) = u^*(\tau) + \frac{h}{6}(\omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 + \omega_4)$$

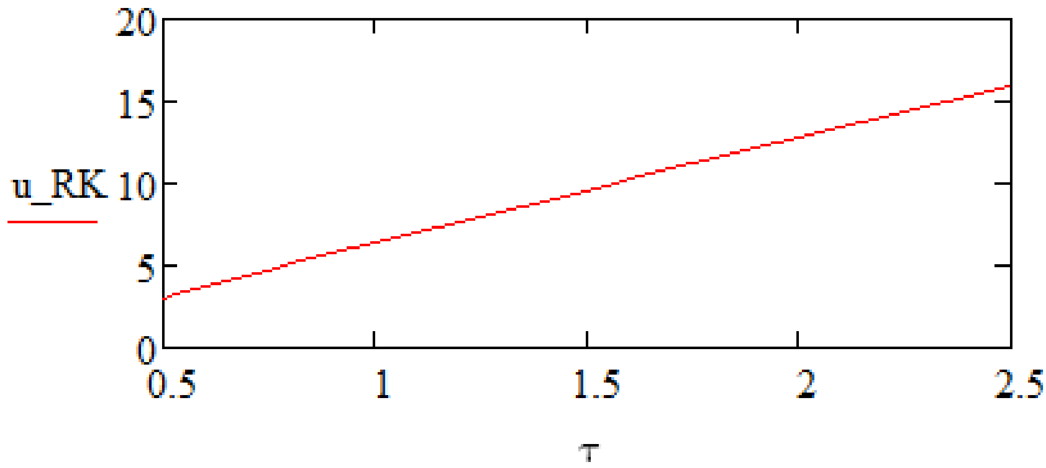
Вычисление приближенного сеточного решения:

```
u_RK := | u_0 ← c0
        | for i ∈ 1..k
        |   | ω_1 ← ω1(τ_{i-1}, u_{i-1})
        |   | ω_2 ← ω2(τ_{i-1}, u_{i-1})
        |   | ω_3 ← ω3(τ_{i-1}, u_{i-1})
        |   | ω_4 ← ω4(τ_{i-1}, u_{i-1})
        |   | u_i ← u_{i-1} + h/6·(ω_1 + 2·ω_2 + 2·ω_3 + ω_4)
        | return u
```

$u\_RK^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	3.372	3.735	4.086	4.427	4.763	5.093	5.42	5.746	...

График численного решения:



2. Численное решение методом Адамса-Башфорта

Расчетная формула четырёхшагового метода Адамса-Башфорта:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

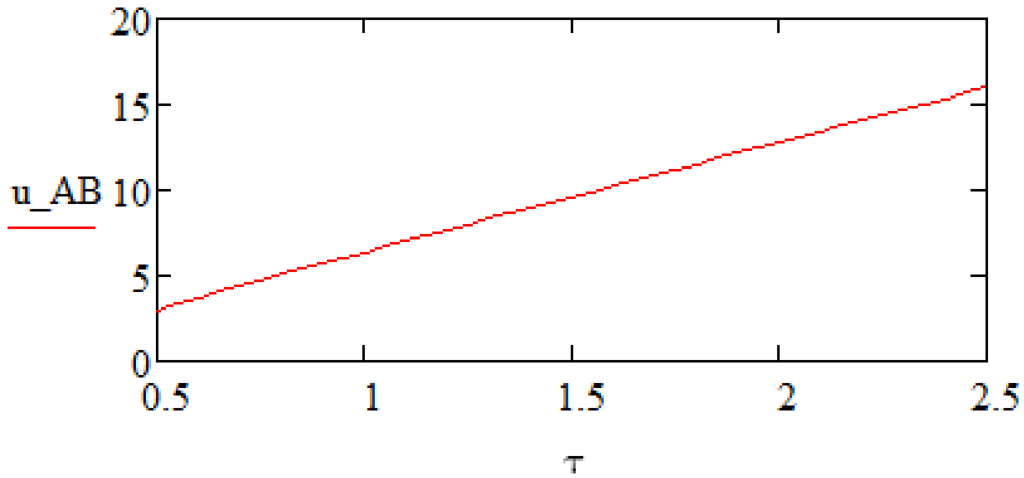
Для численного решения требуется первые 4 узла, возьмём их из предыдущего решения методом Рунге-Кутта.

$$u\_AB := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad u_i \leftarrow u\_RK_i \\ \text{for } i \in m-1..k-1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} f1 \leftarrow f(\tau_i, u_i) \\ f2 \leftarrow f(\tau_{i-1}, u_{i-1}) \\ f3 \leftarrow f(\tau_{i-2}, u_{i-2}) \\ f4 \leftarrow f(\tau_{i-3}, u_{i-3}) \\ u_{i+1} \leftarrow u_i + \dfrac{h}{24}\cdot(55\cdot f1 - 59\cdot f2 + 37\cdot f3 - 9\cdot f4) \end{array}\right. \\ \text{return } u \end{array}\right.$$

$u\_AB^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	3.372	3.735	4.086	4.429	4.764	5.095	5.421	5.747	...

График численного решения:



3. Численное решение методом прогноза и коррекции

Один из широко используемых методов прогноза и коррекции получается при совместном использовании методов Адамса-Башфорта и Адамса-Моултона четвертого порядка точности:

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(0)} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}); \\ f_{n+1}^{(0)} = f\left(\tau_{n+1}, u_{n+1}^{(0)}\right); \end{cases}$$

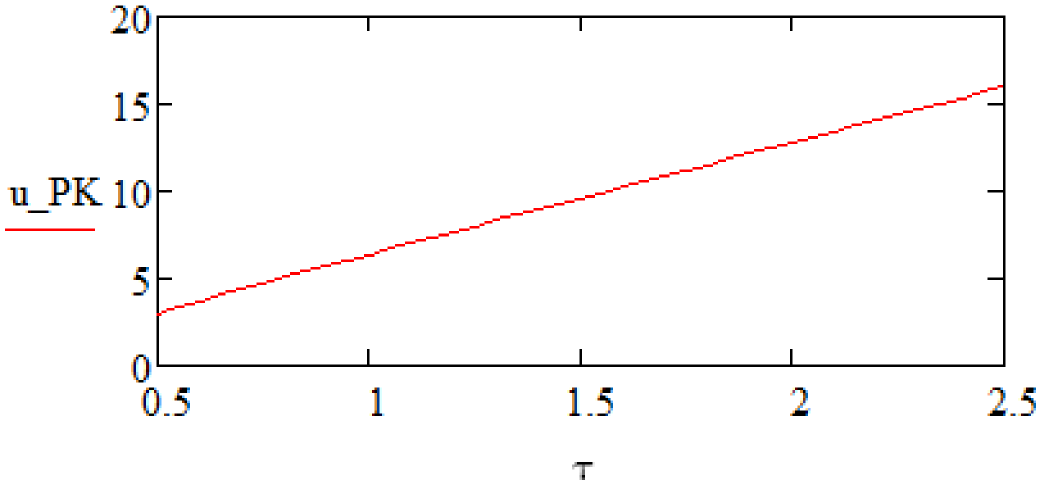
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1}^{(0)} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

$$\mathrm{u\_PK} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad u_i \leftarrow \mathrm{u\_RK}_i \\ \text{for } i \in m-1..k-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f1 \leftarrow f(\tau_i, u_i) \\ f2 \leftarrow f(\tau_{i-1}, u_{i-1}) \\ f3 \leftarrow f(\tau_{i-2}, u_{i-2}) \\ f4 \leftarrow f(\tau_{i-3}, u_{i-3}) \\ u0 \leftarrow u_i + \frac{h}{24}\cdot(55\cdot f1 - 59\cdot f2 + 37\cdot f3 - 9\cdot f4) \\ f0 \leftarrow f(\tau_{i+1}, u0) \\ u_{i+1} \leftarrow u_i + \frac{h}{24}\cdot(9\cdot f0 + 19\cdot f1 - 5\cdot f2 + f3) \end{array} \right. \\ \text{return } u \end{array} \right.$$

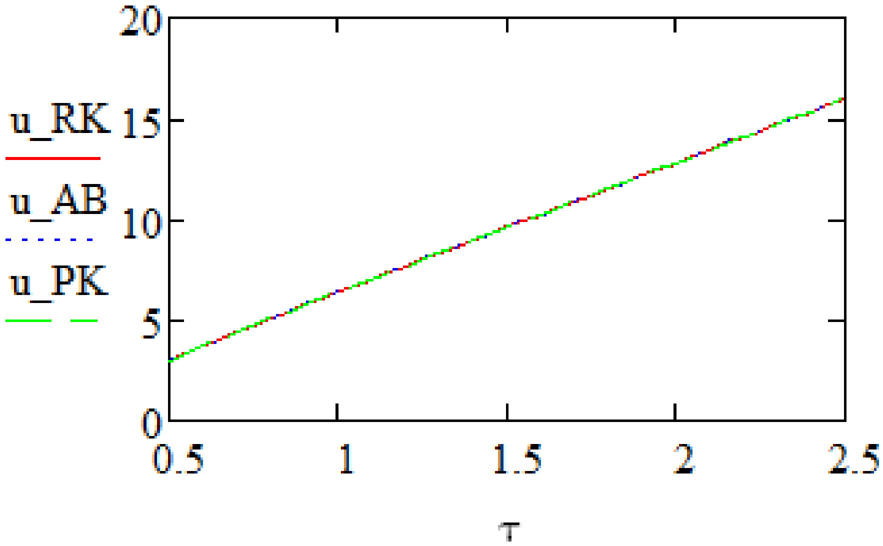
$u\_PK^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	3.372	3.735	4.086	4.427	4.762	5.093	5.42	5.746	...

График численного решения:



Совместим графики трех решений:



Графики практически накладываются друг на друга.

4. Оценка погрешности по правилу Рунге

Получим второе сеточное решение на равномерной сетке шага $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{2k}$ методом Рунге-Кутта и выпишем значения этого решения только в узлах начальной сетки.

$u\_RK2^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	3.37	3.73	4.08	4.421	4.757	5.088	5.416	5.742	...

Тогда, в соответствии с правилом Рунге, практическая оценка погрешности приближённого решения имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\|{}^{>}u - {}^{>}u^{*}\|}{2^{m} - 1},$$

Где m – порядок аппроксимации схемой уравнения. В данной задаче $m = 4$.

$$\delta_i := \left|u\_RK_i - u\_RK2_i\right|$$

$$\varepsilon := \frac{\max(\delta)}{2^{m} - 1} = 4.021 \times 10^{-4}$$

Вывод: в результате данной работы было найдено приближенное решение задачи Коши, полученное тремя разными методами: методом Рунге-Кутта, Адамса-Башфорта, прогноза и коррекции. Все решения очень близки. Оценка, полученная из практического правила Рунге составила 0.0004021, что говорит о довольно точном решении и правильной работе методов.