МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория вероятностей и математическая статистика

Домашнее задание №4

«Интервальные оценки для параметра биноминального закона»

*Группа*: ФН11-52Б

Вариант №8

Студент: Зеликова В.И.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2022

**Задание.**

1. Используя выборку, сгенерированную в задаче 2 и считая параметр p неизвестным (k-дано), постройте для уровней , 0.95 и 0.98

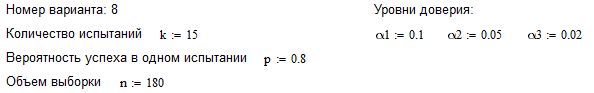
1. симметричные интервальные оценки Клоппера-Пирсона для вероятности успеха в одном испытании p.
2. Для тех же уровней найдите по ЦПТ приближенные доверительные интервалы для p.

2. Сравните полученные результаты и убедитесь, что полученные интервалы содержат истинное значение параметра.

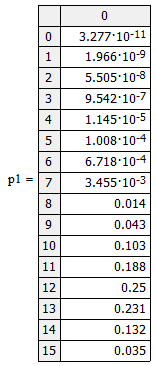
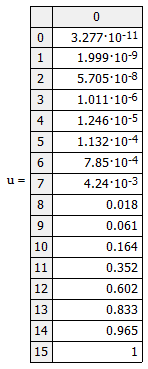
3. Для одного из значений α постройте совмещенные графики функций распределения биномиальных законов , , .

Сформулируйте выводы.

**Исходные данные**:



1. **Находим теоретический закон**

По формуле, указанной выше, формируем биноминальный закон распределения.

p1j - вероятность того, что случайная величина ξ примет значение j



Проверка правильности вычисления вероятностей:



Кумулятивные вероятности:



1. **Моделируем выборку из дискретного распределения.**

Разыграем n случайных чисел на отрезке [0,1]





1. **По вектору y разыгрываем вектор x в соответствии с алгоритмом:**

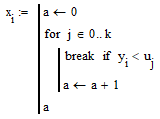
1) Берем - случайную точку на

2) Если , то

Если попадает в интервал , , то

Если , то .

x - выборка из случайной величины ξ



1. **Находим верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала для параметра p для уровней доверия α1, α2, α3**

**b)** центральная предельная теорема



Тогда приближенные доверительные интервалы параметра p:

Верхняя оценка параметра р:

Нижняя оценка параметра р:

Для трех заданных уровней доверия имеем следующие значения оценок:



**a)** статистика Клопера-Пирсона

Теоретическая функция такой статистики биноминальна:

Вычислить верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала можно также двумя способами:

**Способ 1:** воспользоваться тем, что для каждого р существуют такие значения и , что

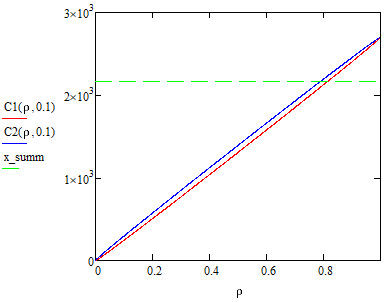
Тогда .

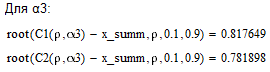
Значения и представляют собой квантили уровней и для биномиального закона .

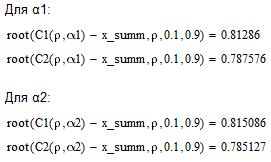


Построим графики границ С1, С2.

Точки пересечения этих линий с линией x\_summ - и есть верхняя и нижняя границы доверительного интервала



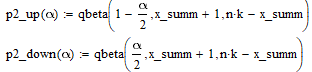
Значения нижней и верхней границы для различных уровней доверия:



**Способ 2:** решить уравнения Клопера-Пирсона для и:

Уравнения можно переписать, используя неполную бета-функцию:

Тогда функции, описывающие нижнюю и верхнюю границы имеют вид:



Значения верхней и нижней границы для различных уровней доверия:



1. **Сравнение значений оценок**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **ЦПТ** | **Статистика Клопера-Пирсона** | |
| **Способ 1** | **Способ 2** |
| 0.1 | 0.812714 | 0.81286 | 0.812964 |
| 0.05 | 0.815011 | 0.815086 | 0.815301 |
| 0.02 | 0.817653 | 0.817649 | 0.817999 |

Для верхней границы:

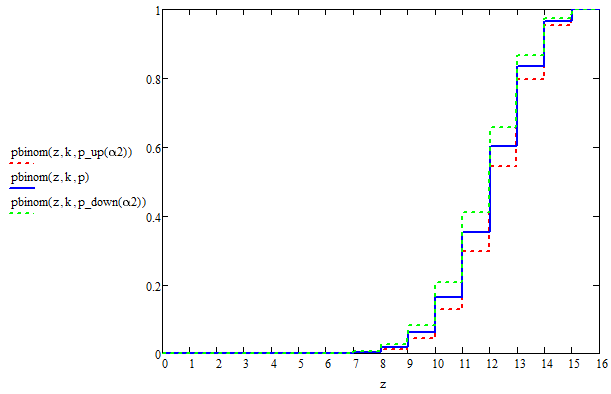
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **ЦПТ** | **Статистика Клопера-Пирсона** | |
| **Способ 1** | **Способ 2** |
| 0.1 | 0.787419 | 0.787576 | 0.787672 |
| 0.05 | 0.784871 | 0.785127 | 0.785166 |
| 0.02 | 0.781882 | 0.781898 | 0.782235 |

Для нижней границы:

Истинное значение p = 0.8, при всех способах вычисления оно оказывается внутри доверительного интервала. Более того все вычисленные оценки очень близки друг к другу и отличаются только в 4 знаке после запятой при одинаковых .

1. **График совмещенных функций**

График совмещенных функций при α = 0.05 при использовании оценок границ доверительных интервалов через статистику К\_n, вычисляемую 2 способом



Как можно видеть, график функции, соответствующий истинному значению параметра p

заключен между графиками, соответствующими верхней и нижней границам

доверительного интервал.

**Вывод:** Для уровней доверия , 0.95 и 0.98 были построены симметричные интервальные оценки Клоппера-Пирсона для вероятности успеха в одном испытании , а также найдены по ЦПТ приближенные доверительные интервалы для . Сравнив полученные результаты, убедились, что полученные интервалы содержат истинное значение параметра. Кроме того, были построены совмещенные графики распределения биномиальных законов , , , которые наглядно показали, что график функции, соответствующий истинному значению параметра p заключен между графиками, соответствующими верхней и нижней границам доверительного интервала.