Bài 3.

Chéo hóa trực giao các ma trận sau:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài 3.a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 9\lambda.$
Khi đó $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3; 0; 3\}.$

- Với $\lambda = -3$:
  Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$. Ta có các vectơ riêng của A ứng với $\lambda = -3$ có dạng $x_1 = t. \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0.$
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \dfrac{3}{2}$, ta được $v_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$

- Với $\lambda = 0$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_2 = t. \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = 3$, ta được $v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$

- Với $\lambda = 3$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_3 = t. \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \dfrac{3}{2}$, ta được $v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$

Ta thu được ma trận chéo hóa của A: $P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Thực hiện chéo hóa trực giao, ta được:

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài 3.b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda)$.
Khi đó $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$

- Với $\lambda = 2 - \sqrt{2}$:
  Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$. Ta có các vectơ riêng của A ứng với $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ có dạng $x_1 = t.\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$.
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| = 2$, ta được $v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
- Với $\lambda = 2$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_2 = t.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \sqrt{2}$, ta được $v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
- Với $\lambda = 2 + \sqrt{2}$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_3 = t.\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$
  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| = 2$, ta được $v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Ta thu được ma trận chéo hóa của A: $P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$

Thực hiện chéo hóa trực giao, ta được:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$