PHƯƠNG PHÁP TOÁN CHO TRÍ TUỆ NHÂN TẠO
Bài thực hành 4

22120128 - Bùi Quốc Huy - TNT2022

Ngày 15 tháng 5 năm 2024

Bài 1.

Sử dụng vector gradient và ma trận Hesse để tìm các điểm cực đại, cực tiểu của các hàm bậc hai sau và cho biết giá trị của hàm số tại các điểm đó.
a) $f(x,y,z) = 4x^2 + 10y^2 + 17z^2 - 12yz - 12xz$
b) $f(x,y,z) = 9x^2 + 16y^2 + 3z^2 - 12xy + 12yz$
c) $f(x,y,z) = x^2 - 19y^2 + 24xy - 12yz + 12xz$
d) $f(x,y) = x + y^2$

Bài 2.

Hãy viết chương trình áp dụng thuật giải gradient với thủ tục quay lui để tìm điểm dừng và giá trị nhỏ nhất. Hãy thử với các tùy chọn với các tham số m_1 và α như sau, sau đó hãy đánh giá tốc độ trong mỗi trường hợp:
a) $m_1 = 0.01$ và $\alpha = 0.5$
b) $m_1 = 0.03$ và $\alpha = 0.6$
Hãy thử với các test là các hàm sau:

- $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12$
- $f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + 2(x_2 - 3)^2$

Bài Làm

Câu 1. a

Khảo sát: $f(x,y,z) = 4x^2 + 10y^2 + 17z^2 - 12yz - 12xz$
Ta có: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x - 12z; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 20y - 12z; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = -12x - 12y + 34z$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 8x - 12z \\ 20y - 12z \\ -12x - 12y + 34z \end{bmatrix}; \quad \nabla f(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mặt khác:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -12$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -12$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 34$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & -12 \\ -12 & -12 & 34 \end{bmatrix}$$

Ta có: $D_1 = \begin{vmatrix} 8 \end{vmatrix} = 8; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = 160; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & -12 \\ -12 & -12 & 34 \end{vmatrix} = 1408$

Các định thức của $\nabla^2 f(x, y, z) > 0$ nên hàm f lồi trên R, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ là điểm cực tiểu của f. $f(0, 0, 0) = 0$

Câu 1. b

Khảo sát: $f(x, y, z) = 9x^2 + 16y^2 + 3z^2 - 12xy + 12yz$

Ta có: $\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 18x - 12y \\ -12x + 32y + 12z \\ 12y + 6z \end{bmatrix}; \quad \nabla f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-t}{3} \\ \dfrac{-t}{2} \\ t \end{bmatrix}; \quad \forall t \in R$

Mặt khác:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 32; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 12$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 18 & -12 & 0 \\ -12 & 32 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Xét phương trình đặc trưng: $det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 18 - \lambda & -12 & 0 \\ -12 & 32 - \lambda & 12 \\ 0 & 12 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 14 \\ \lambda_3 = 42 \end{cases}$$

Các trị riêng của $\nabla^2 f(x, y, z) \geq 0$ nên nửa xác định dương, hàm f lồi trên R.

Các điểm $\begin{bmatrix} \dfrac{-t}{3} \\ \dfrac{-t}{2} \\ t \end{bmatrix}; \quad \forall t \in R$ là các điểm cực tiểu của f. $f(\dfrac{-t}{3}, \dfrac{-t}{2}, t) = 0$

Câu 1. c

Khảo sát: $f(x,y,z) = x^2 - 19y^2 + 24xy - 12yz + 12xz$

Ta có: $\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x + 24y + 12z \\ 14x - 38y - 12z \\ 12x - 12yz \end{bmatrix}$; $\quad \nabla f(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mặt khác:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 24; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 12$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -38; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -12$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -12; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

$\Leftrightarrow \nabla^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 24 & 12 \\ 24 & -38 & -12 \\ 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$

Xét phương trình đặc trưng: $det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 24 & 12 \\ 24 & -38-\lambda & -12 \\ 12 & -12 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -54 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 16 \end{cases}$

Các trị riêng của $\nabla^2 f(x,y,z)$ không ≤ 0 và ≥ 0 nên không có kết luận về sự lồi (lõm) của hàm f.

Hàm f không có điểm cực đại và cực tiểu. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ là điểm yên ngựa của hàm f.

Câu 1. d

Khảo sát: $f(x,y) = x + y^2$

Ta có: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\Leftrightarrow \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \end{bmatrix}; \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$D1 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0; \quad D2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x,y)$ nửa xác định dương, hàm f lồi trên R.

Bên cạnh đó: $\nabla f(x,y) = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ f không có cực trị

Bài 2.

Bài giải trong file assignment4-task2.ipynb trong cùng folder.