Bài 3.

Chéo hóa trực giao các ma trận sau:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài 3.a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 9\lambda.$
Khi đó $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3; 0; 3\}.$

- Với $\lambda = -3$:
  Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$. Ta có các vectơ riêng của A ứng với $\lambda = -3$ có dạng $x_1 = t. \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0.$

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \dfrac{3}{2}$, ta được $v_1 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

- Với $\lambda = 0$:

  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_2 = t. \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0.$

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = 3$, ta được $v_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$

- Với $\lambda = 3$:

  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_3 = t. \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0.$

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \dfrac{3}{2}$, ta được $v_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$

Ta thu được ma trận chéo hóa của A: $P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Thực hiện chéo hóa trực giao, ta được:

$$P^T AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài 3.b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda)$.
Khi đó $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$.

- Với $\lambda = 2 - \sqrt{2}$:
  Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$. Ta có các vectơ riêng của A ứng với $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ có dạng $x_1 = t.\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$.

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| = 2$, ta được $v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}$

- Với $\lambda = 2$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_2 = t.\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$.

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \sqrt{2}$, ta được $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

- Với $\lambda = 2 + \sqrt{2}$:
  Tương tự, ta có các vectơ riêng của A có dạng $x_3 = t.\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$.

  Chọn t = 1 và chuẩn hóa với $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| = 2$, ta được $v_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Ta thu được ma trận chéo hóa của A: $P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$

Thực hiện chéo hóa trực giao, ta được:

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bài 4.

Phân tích kỳ dị các ma trận sau:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 4.a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có: $M = AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng $P_M(\lambda) = |M - \lambda I| = (2-\lambda)^2$.
$P_M(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.
Ta có các vectơ riêng của M ứng với $\lambda = 2$ có dạng $x = a.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall a, b \in R, a^2 + b^2 \neq 0$.
Chọn (a, b) lần lượt = (1, 0) và (0, 1) và chuẩn hóa, ta được:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ U = (u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta đồng thời có các giá trị kỳ dị $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$ (bội đại số của $\lambda = 2$ là 2).

$$\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Với ma trận V, ta có:

- $v_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A^T u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

- $v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^T u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

V $= (v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Ta có phân tích kỳ dị:

$$A = U \sum V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bài 4.b

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có: $M = B^T B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng $P_M(\lambda) = |M - \lambda I| = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4$. $P_M(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{6, 1\}$.

- Ta có các vectơ riêng của M ứng với $\lambda_1 = 6$ có dạng $x = t. \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$. Chọn t = 1 và chuẩn hóa, ta được:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- Ta có các vectơ riêng của M ứng với $\lambda_2 = 1$ có dạng $x = t. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t \in R, t \neq 0$. Chọn t = 1 và chuẩn hóa, ta được:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$V = (v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Ta đồng thời có các giá trị kỳ dị $\sigma_1 = \sqrt{6}, \sigma_2 = 1$.

$$\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với ma trận U, ta có:

- $u_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} B v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$
- $u_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} BT v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\mathrm{U} = (u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3}0 & 0 \\ 2/\sqrt{3}0 & 1\ \sqrt{5} \\ -1/\sqrt{3}0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Ta có phân tích kỳ dị:

$$B = U \sum V^T = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3}0 & 0 \\ 2/\sqrt{3}0 & 1\ \sqrt{5} \\ -1/\sqrt{3}0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$