Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

Отчет

по лабораторной работе

по теме

«Численное решение задачи Коши для ОДУ»

Выполнила:

Хрулева Анастасия

Группа 381796-2

Преподаватель:

Кандидат ф.м. наук

Эгамов А.И.

Нижний Новгород

2019 г.

Оглавление

Введение

Очень часто в процессе решения задач, возникающих при математическом моделировании многих реальных явлений, приходится узнавать, как поведет себя то или иное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вблизи особых точек. Но поскольку точные решения систем ОДУ могут быть получены лишь для небольшого числа задач, требуется применение приближенных (аналитических, численных) методов решения подобных задач. Например, оценить поведение системы, не решая ее, помогает построение фазового портрета данной системы.

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

$P(x,y), Q(x,y)$ – непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости и имеющие в этой области непрерывные производные порядка не ниже первого. Переменные x,y во времени изменяются в соответствие с системой уравнений, так что каждому состоянию системы соответствует пара значений переменных (x,y) Обратно, каждой паре переменных (x,y) соответствует определенное состояние системы.

Рассмотрим плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных x,y. Каждая точка M этой плоскости соответствует определенному состоянию системы. *Такая плоскость носит название фазовой плоскости и изображает совокупность всех состояний системы. Точка M(x,y) называется изображающей или представляющей точкой.*

Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ координаты изображающей точки $M_0(x(t_0), y(t_0))$. В каждый следующий момент времени t изображающая точка будет смещаться в соответствии с изменениями значений переменных $x(t), y(t)$. Совокупность точек $M(x(t), y(t))$ на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных $x(t), y(t)$ согласно уравнениям системы, называется *фазовой траекторией.*

Совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных дает легко обозримый "портрет" системы. Построение *фазового портрета* позволяет сделать выводы о характере изменений переменных x, y без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Для изображения фазового портрета необходимо построить векторное поле направлений траекторий системы в каждой точке фазовой плоскости. Задавая приращение $Dt > 0$, получим соответствующие приращения Dx и Dy из выражений:

$$Dx=P(x,y)\,Dt,$$

$$Dy=Q(x,y)\,Dt.$$

Направление вектора dy/dx в точке (x, y) зависит от знака функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Задача построения векторного поля упрощается, если получить выражение для фазовых траекторий в аналитическом виде. Для этого разделим второе уравнение системы на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad (2)$$

Решение этого уравнения $y = y(x, c)$ или в неявном виде $F(x, y) = c$, где с – постоянная интегрирования, дает семейство интегральных кривых уравнения – *фазовых траекторий* системы на плоскости х, у.

Постановка задачи

Необходимо написать программу с графическим интерфейсом, которая позволит построить фазовый портрет для уравнения $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \sin x$ второго порядка, задать начальные условия, шаг вычислений, решит это уравнение методом Рунге-Кутта 4 порядка и построит это решение графически.

Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение: $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Классический метод Рунге-Кутта 4-го порядка описывается следующей системой пяти равенств:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2})$$

$$k_4 = f(h_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

где h - величина шага сетки по x.

Этот метод имеет 4-й порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(n^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(n^4)$. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка является одним из наиболее применяемых на практике, так как обеспечивает высокую точность и в то же время отличается сравнительной простотой.

Руководство пользователя

Программа позволяет задать начальное условие $x = \ldots$, $x' = \ldots$. Также пользователь может задать локальную погрешность, шаг вычислений и отрезок интегрирования. По умолчания шаг вычислений равен 1. Нажимая на клавишу «начать», загорается надпись «остановить», нажав на которую появится надпись «продолжить», что соответствует требованию задания.

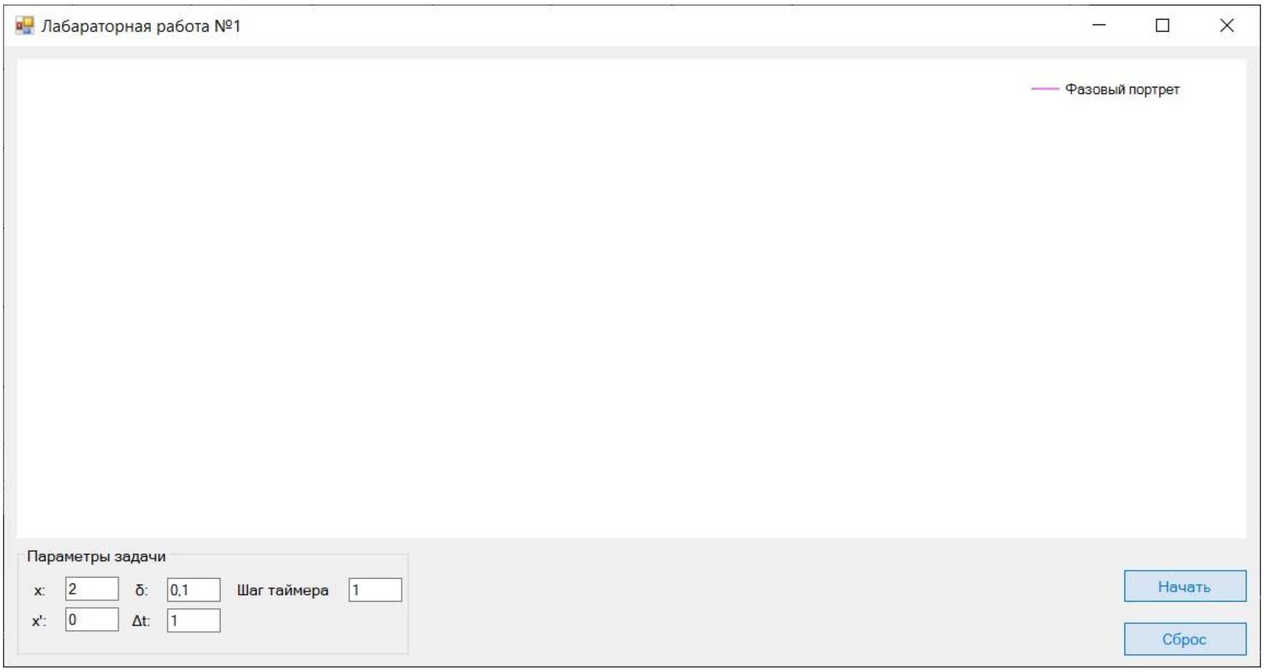

Рис 1. Графический вид программы

Результаты экспериментов

Полученный фазовый портрет для уравнения маятника с диссипацией $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \sin x$ похож на фазовый портрет, построенный вручную. Делаем вывод о том, что программа работает успешно, что и предполагалось.

Ниже приведены несколько примеров работы программы на разных значениях.

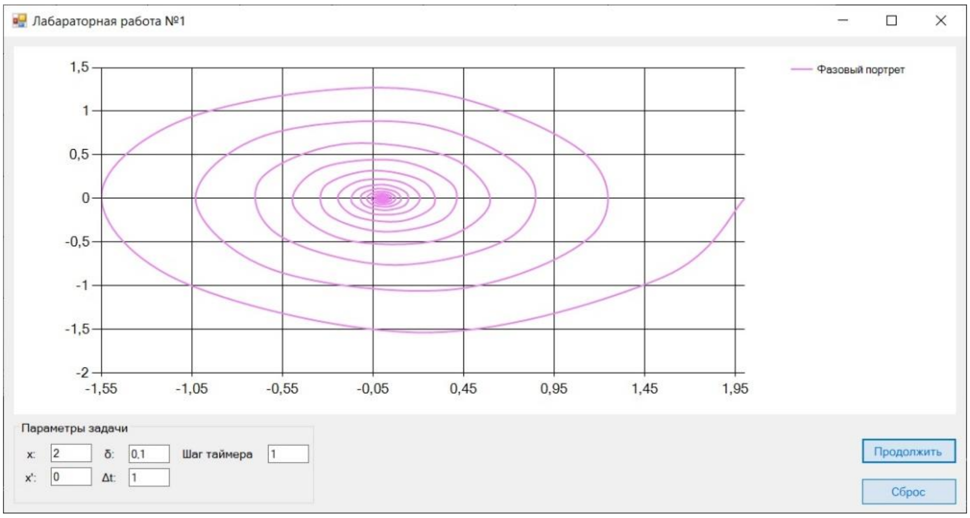

Рис 2. Работа программы при x=2

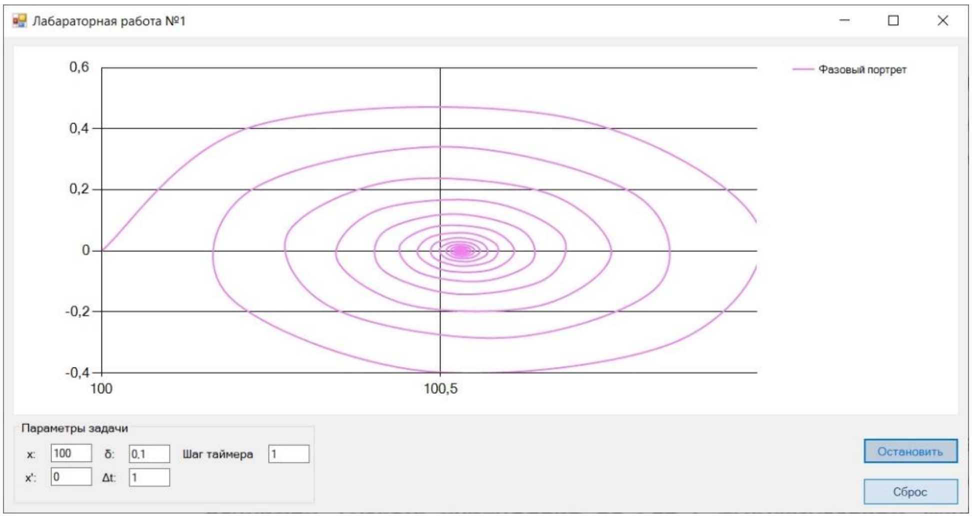

Рис 3. Работа программы при x=100

Заключение

В результате работы была написана программа на языке C# с графическим интерфейсом, которая позволила построить фазовый портрет для уравнения $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \sin x$ второго порядка, задать начальные условия, шаг вычислений, решить это уравнение методом Рунге-Кутта 4 порядка. Программа строит график решения введенного дифференциального уравнения.

Также был проведен следующий эксперимент: Был построен фазовый портрет для уравнения маятника с диссипацией $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \sin x$, который оказался похож на фазовый портрет, построенный вручную. Это же уравнение было решено с помощью программы. Графики решений совпали.

Так же программа была проверена на нескольких входных данных при x=2 и x=100.

Это говорит о том, что программа работает корректно.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков М.Н. Численные методы/ Н.С. Бахвалов – Бином, 2011. – 640 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы/ А.А. Самарский – М.:Наука, 1989. – 432 с.
3. Яцек Галовиц C++. Стандартная библиотека шаблонов – Питер.2018. – 432 с.
4. URL: http://itnovella.ru/itnovella/2016/06/01/rungekuttacpp.html - Метод Рунге-Кутта