

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

Отчет

по лабораторной работе

по теме

**«Численное решение начально-краевой задачи для
интегро-дифференциального уравнения в частных
производных»**

Выполнила:

Хрулева Анастасия

Группа 381796-2

Преподаватель:

Кандидат ф.м. наук

Эгамов А.И.

Нижний Новгород

2020 г.

Оглавление

Введение	2
Постановка задачи	4
Методика выполнения работы (часть В).....	5
Метод прогонки.....	7
Руководство пользователя	11
Результаты экспериментов	12
Заключение	14
Список литературы	15

Введение

Математическое моделирование задач механики, физики и других отраслей науки и техники сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники. Прежде чем обсуждать методы решения дифференциальных уравнений, напомним некоторые сведения и в особенности те, которые понадобятся при дальнейшем изложении.

Дифференциальные уравнения делятся на две категории в зависимости от числа переменных: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных. Именно второй тип уравнений, к которому прибавляется ещё и интегральная часть.

В данной работе рассмотрим управляемый процесс нагревания стержня: дан тонкий однородный стержень с теплоизолированными концами длины l . На процесс изменения температуры стержня осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей, например, через стержень пропускается электрический ток или он помещается в электромагнитное поле (индукционный нагрев) и т. п. Построим математическую модель этого процесса.

На множестве $Q = [0, l] \times [0, T]$, $l > 0$, $T > 0$; найти функцию $y(x, t)$ – температуру стержня – непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x – решение уравнения

$$y_t'(x, t) = a^2 y_{xx}''(x, t) + u(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее (концы теплоизолированы) однородным граничным условиям второго рода

$$y_x'(0, t) = y_x'(l, t) = 0 \quad (2)$$

и начальному условию

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где a – константа, функция $\varphi(x) > 0$ задает начальное распределение температуры, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$ и удовлетворяет условиям согласования (3) и условию

l
Непрерывная функция $u(x, t)$

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 1.$$

– управление (4) обратной связью, которое

представляется в одном из вариантов:

$$u(x, t) = b(x)y(x, t), \quad (5)$$

$$u(x, t) = b(x)y(x, t) - y(x, t) \int_0^l b(x)y(x, t) dx, \quad (6)$$

где $b(x)$ – управляющая функция, непрерывная на отрезке $[0, l]$.

Управление вида (5) рассматривается при выполнении части А лабораторной работы, а управление вида (6) рассматривается при выполнении части В лабораторной работы. В конечном итоге, показана будет только В часть всей работы.

Наложение условия дважды непрерывной дифференцируемости на отрезке $[0, l]$ объясняется следующим.

Во-первых, чтобы решать поставленную задачу одним из самых известных методов – методом Фурье и, чтоб полученный ряд – решение задачи – можно было дифференцировать по t и дважды дифференцировать по x . А во-вторых, как правило, те элементарные функции, которые задаются написанной учащимся программой (и те, которые требуются и в задании), обладают свойством бесконечного дифференцирования, хотя, конечно, для существования решения исходных задач условия на функцию $\varphi(x)$ можно ослабить.

Постановка задачи

Нужно разработать программу, которая графически строит конечное ($t=T$) распределение температуры в стержне. Описание задачи и некоторые ее свойства есть во введении. Наша задача – аппроксимировать данную задачу неявной разностной схемой (порядок 2 по координате, порядок 1 по времени) с учетом граничных и начальных условий. В результате аппроксимации мы получим систему линейных уравнений относительно значений функции в узлах сетки на следующем слое, которую удобно решать методом прогонки. Переходя таким образом от слоя к слою, нужно получить конечное распределение температуры, которое затем следует вывести на экран. Также нужно вывести и начальное распределение. В введении указано, какие функции следует брать в качестве коэффициента обратной связи и в качестве начального распределения. В программе требуется предусмотреть

- 1) Длину стержня можно фиксировать равной единице.
- 2) Время интегрирования, шаг по t и по x должны быть доступны к изменению с помощью UI.
- 3) Должна быть возможность изменить параметры коэф. ОС и нач. распред.
- 4) Нужно вывести проверочный (см. методичку) график другим цветом.
- 5) Предусмотреть кнопки для построения графиков и очистки.

Методика выполнения работы (часть В)

В этом разделе будет рассмотрена методика выполнения части В. Часть А подробно приведена в методичке А.И. Эгамова «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ».

Ход работы:

1. Подставили (3) в (1).
2. А) Посчитали интеграл в уравнении (6) для значений последнего известного j-слоя:

$$I_j = \frac{h}{6} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-4} + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \text{ где } n = \frac{l}{h}, n - \text{четное.}$$

Б) Вычислили каждый следующий слой по формуле Симпсона.

В) После каждого (А) делали каждый (Б), т.е.: (А)•(Б), (А1)•(Б1), (А2)•(Б2) и т.д..

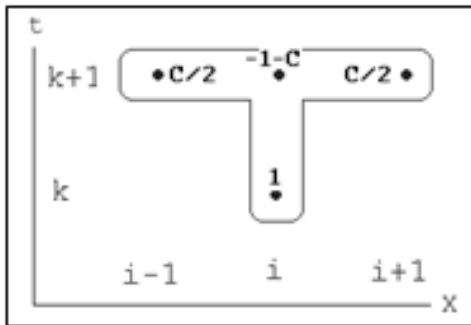
3. Составили неявную разностную схему с погрешностью $O(\tau + h^2)$ для (1) учитывая $u(x, t)$ (6) и I_j .
4. Учитываем, что в данном случае условие устойчивости не доказано. Параметр a берём, как и в части А: $a=1$.
5. Применяем (2) и (3) для (1), получили y'_0, y'_n с погрешностью $O(\tau + h^2)$.
6. Разработали алгоритм получения численного решения задачи (1)-(3).

7. Полученные уравнения решили методом прогонки.
8. Численно решили (1)-(3)(т.е. подставили краевые условия), вывели $y(x,t)$,
где $\varphi(x) = \frac{1}{l} + \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos \frac{2\pi x}{l}$, $b(x) = b_0 + b_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_2 \cos \frac{2\pi x}{l}$,
где $\varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2 - \text{const}$.
9. Вывели графики функции $y(x,t)$ - синим цветом, $\varphi(x)$ – красным цветом,
на декартовой системе координат.
10. Учли выбор l , T , h (шаг по координате x), τ (шаг по координате t) и
 $\text{const} - \varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$.
11. Посчитали интеграл $\int_0^l w(x,t)dx$, по формуле Симпсона, при ($t=T$) и
вывели полученный график функции $\frac{w(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx}$ зелёным цветом на
экран, где $w(x,t)$ – решение части А(решение задачи (1)-(5)).
12. Поскольку в идеале синий и зелёный график должны совпадать,
сделали так, чтобы зелёный график выводится на экран только при
дополнительном нажатии клавиши.

Метод прогонки

Реализация неявной схемы Эйлера требует решения на каждом временном слое системы уравнений (линейных, если исходное уравнение в частных производных линейно, и нелинейных, если оно нелинейно). Обычно неявные схемы устойчивее явных, поэтому часто идут на существенное усложнение при их реализации, связанное с необходимостью решать систему алгебраических уравнений на каждом слое.

Перепишем неявную разностную схему Эйлера для уравнения теплопроводности



$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{\Delta^2} \quad (7)$$

в следующем виде:

$$A_i u_{i-1} - B_i u_i + C_i u_{i+1} = F_i \quad (8)$$

Рис.1 Шаблон неявной схемы

Мы сняли верхний индекс, который относится к $(j=1)$ -му, т.е. верхнему, временному слою, оставив в качестве u_i неизвестные значения сеточной функции с верхнего слоя. Значения с нижнего слоя, которые известны, мы заключили в коэффициент F_i . Остальные коэффициенты очевидным образом выражаются через шаги по времени и пространству и коэффициент диффузии D . Их явный вид, выраженный через число Куранта, приведен на рис.1 в виде соответствующих меток узлов шаблона.

Мы получили разностные уравнения, которые связаны системой линейных алгебраических уравнений (8). Повторимся, что для завершения формирования замкнутой системы линейных уравнений достаточно дополнить ее соответствующим представлением начальных и граничных условий.

Выпишем теперь матрицу, соответствующую данной системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{M-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Легко заметить, что эта матрица является трехдиагональной. Каждое из линейных уравнений содержит коэффициент B_i , находящийся на диагонали, и два элемента по бокам от диагонального элемента – A_i и C_i . Все остальные коэффициенты этой матрицы равны нулю. Как известно, для численного решения систем линейных алгебраических уравнений применяется метод исключения Гаусса.

Важно, что система линейных уравнений (8), аппроксимирующая уравнение в частных производных, является хорошо обусловленной. Для хорошо обусловленных линейных систем метод исключения Гаусса является оптимальным, а специальные алгоритмы нужны для плохо обусловленных систем.

Алгоритм исключения Гаусса, как известно, приводит к необходимости проведения порядка N^2 арифметических операций. Между тем, в данном случае при реализации неявной разностной схемы его можно модифицировать таким образом, чтобы существенно сократить количество арифметических операций. Такая возможность появляется из-за того, что матрица систем уравнений является трехдиагональной, и большинство ее элементов – это нули. В этом случае метод Гаусса можно модифицировать таким образом, чтобы количество арифметических операций составляло величину не порядка N^2 , а порядка $3N$.

Экономичный вариант метода Гаусса можно получить, исключив из него шаги, содержащие умножение на ноль. Однако, мы продемонстрируем вывод данного метода, который называется методом прогонки, в несколько другом виде. Алгоритм прогонки был предложен во времена «холодной войны» независимо российскими и американскими учеными.

Предположим, что значения u_{i+1} выражается через u_i следующим образом:

$$u_{i+1} = \alpha_i u_i + \beta_i \quad (10)$$

и подставим его в канонический вид системы линейного уравнения (8). Такая подстановка уберет из уравнения (8) упоминание о u_{i+1} и получит соотношение, связывающее u_{i-1} и u_i . Теперь перепишем получившееся соотношение, как функцию пересчета u_i через u_{i-1} :

$$u_i = \gamma_i A_i u_{i-1} + \gamma_i (C_i \beta_i - D_i) \quad (11)$$

,где

$$\gamma_i \equiv 1/(B_i + C_i \alpha_i) \quad (12)$$

Если повторить те же самые выкладки уже не для i -й, а для $(i-1)$ -й точки, то получим следующие выражения для α_{i-1} и β_{i-1} :

$$\alpha_{i-1} = A_i \gamma_i \quad (13)$$

$$\beta_{i-1} = \gamma_i (C_i \beta_i - D_i) \quad (14)$$

Эти два соотношения (13-14) являются основными формулами алгоритма прогонки. Пользуясь (11), мы получим очень простой рецепт разрешения всей системы линейных уравнений. Будем исходить из того, что для индекса $i=N$ значение сеточной функции u_N известно. Значение сеточной функции на правой границе интервала даст нам коэффициент $\alpha_{N-1} \equiv 0$, а также коэффициент β_{N-1} , равный граничному условию u_N , что следует непосредственно из основного предположения

$$u_{N+1} = \alpha_N u_N + \beta_N \quad (15)$$

Значение u_N равно правому граничному условию и не зависит от u_{N-1} . Естественно, в этом случае $\alpha_{N-1} = 0$, а $\beta_{N-1} = u_N$. Таким образом, все искомые α_{N-1} , β_{N-1} и γ_{N-1} мы знаем. Коэффициенты α_{N-1} , β_{N-1} мы только что обсудили, а γ_{N-1} пересчитывается через них. В то же время, основные формулы метода прогонки выражают α_{i-1} , β_{i-1} через, соответственно, через α_i , β_i . В итоге, зная α_{N-1} , β_{N-1} , мы по этим соотношениям сразу же пересчитаем α_{N-2} , β_{N-2} .

Далее, зная коэффициенты для $(N-2)$ -й точки мы можем по тем же самым соотношением пересчитать их для $(N-3)$ -й точки, и так далее, двигаясь по рекуррентным соотношениям, дойти до $i=1$. Всего нам придется сделать порядка $2N$ арифметических операций. Этот шаг рекуррентного пересчета коэффициентов α и β через соответствующие коэффициенты для более высоких индексов называется обратным ходом прогонки.

Второй, и заключительный, шаг заключается в прямом ходе прогонки. Естественно, если мы теперь знаем все α и β для любого индекса i , мы можем, по-просту, пересчитать все искомые значения сеточной функции, двигаясь уже по индексу i от 0 до N . Значения сеточной функции на левой границе интервала мы знаем, т.к. u_0 берется из граничного условия. Согласно (10), мы сразу пересчитаем следующее u_1 . Затем, двигаясь вверх по индексу, мы таким простым способом узнаем все искомые значения сеточной функции на следующем слое: все u_{i+1} через u_i .

В результате, при реализации неявной разностной схемы нам придется затратить порядка $3N$ арифметических действий, вместо N^2 действий, как в обычном алгоритме Гаусса. Для сетки, состоящей из 100 узлов по пространственной координате, нам придется затратить 300 арифметических операций, вместо более 10^4 операций, необходимых для использования метода Гаусса.

Руководство пользователя

Программа позволяет задать l , T , h (шаг по координате x), τ (шаг по координате t) и $\text{const} - \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$. По умолчанию зададим $l=7, T=1, h=0,2, \tau=0,01$. Нажимая на клавишу «начать», загорается надпись «остановить», нажав на которую появится надпись «продолжить», что соответствует требованию задания. Красной линией будет выводиться конечная температура, синей линией – начальная температура. Отдельно нажав на кнопку «добавить», будет выводиться график $\frac{w(x,t)}{\int_0^l w(x,t) dx}$, который будет показан зелёным цветом.

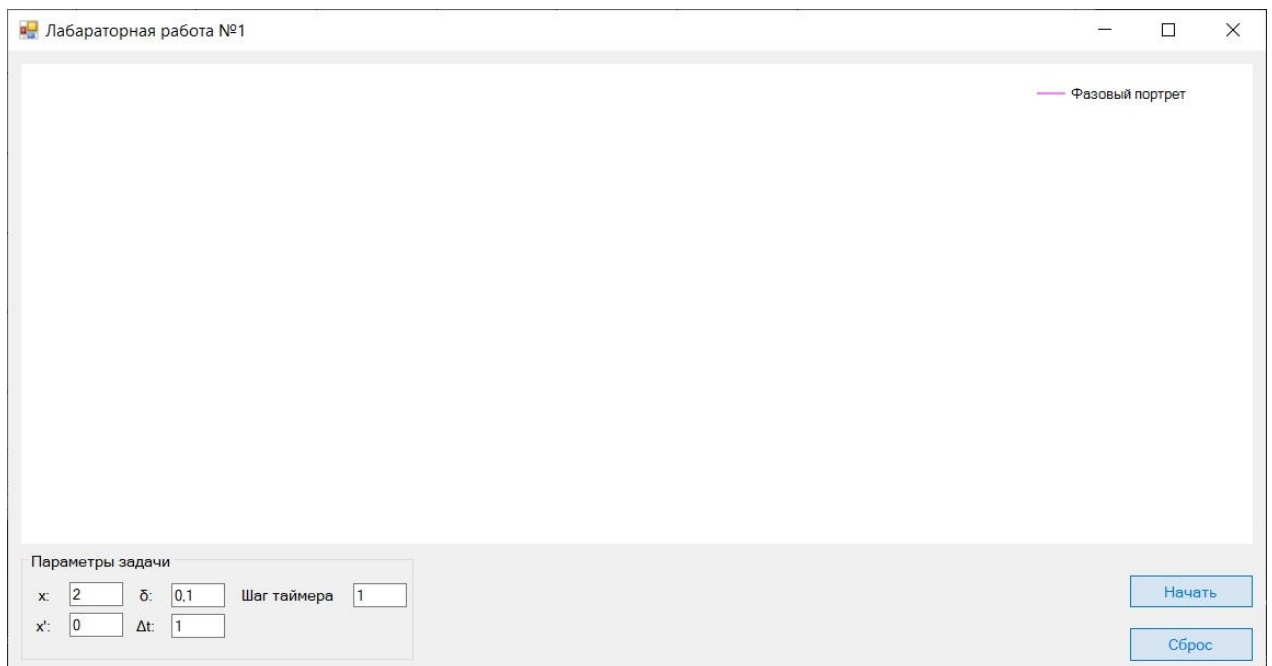


Рис 1. Графический вид программы

Результаты экспериментов

Ниже приводятся свойства решения части Б поставленной задачи, которая является более трудной нежели часть А.

На концах отрезка в силу (2) график функции численного решения имеет горизонтальные касательные. Площадь фигуры, где график функции $\varphi(x)$ выше, чем $y(x, T)$ равна площади фигуры, где функция $\varphi(x)$ ниже, чем $y(x, T)$, то есть, $S_1 = S_2$ (рис.2). Так же зелёный график должен находиться близко к синему, либо совпадать. Это доказывает, что наше программное решение, показанное на рис.3 действительно соответствует теоретическим сведениям.

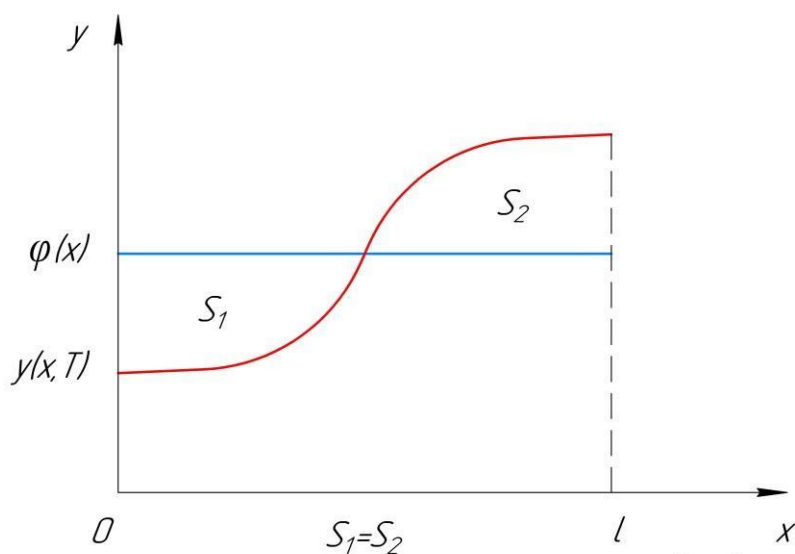


Рисунок 1

Рис 2. Теоретическое обоснование

Далее приводятся скриншоты программы

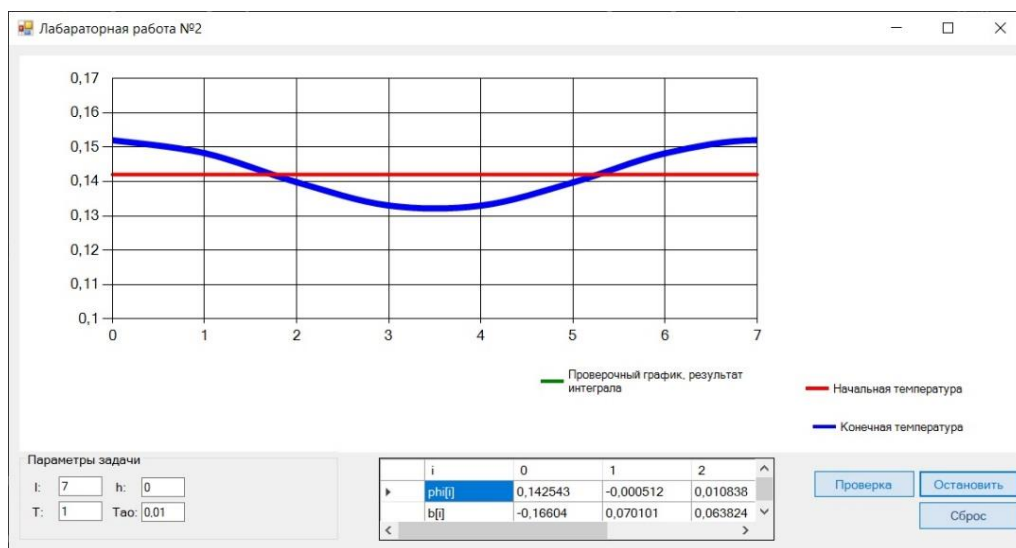


Рис.3 Результаты эксперимента

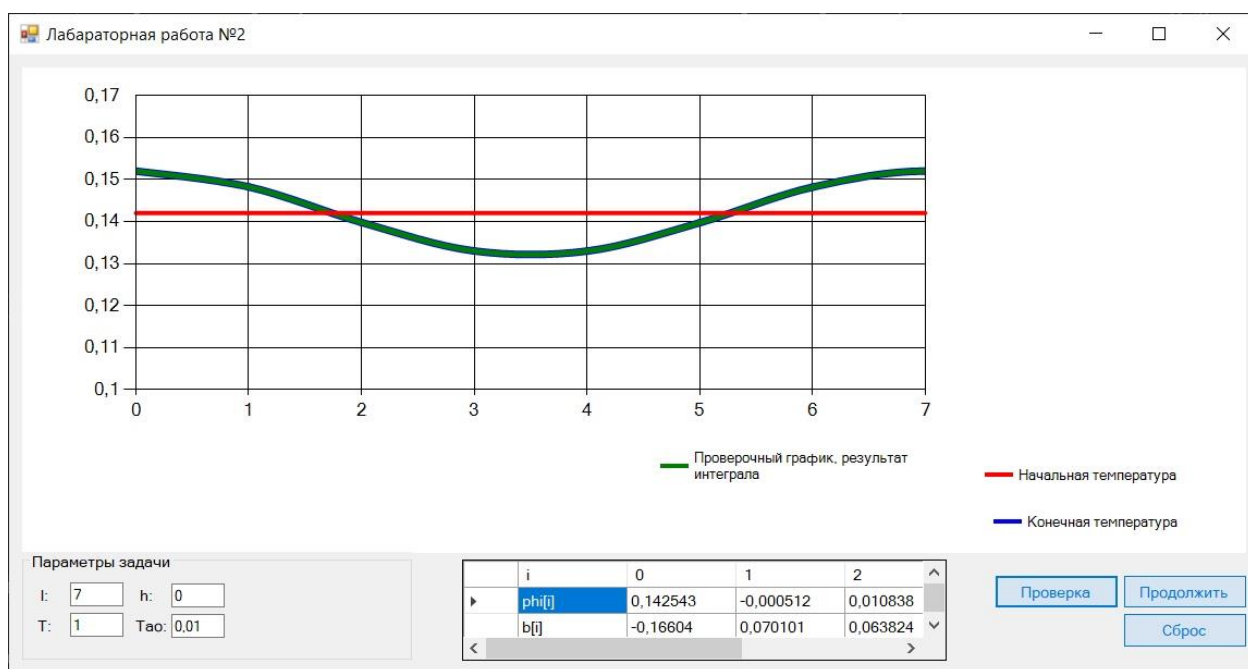


Рис 4. Проверочный график

Заключение

В результате работы была написана программа на языке C# с графическим интерфейсом, которая позволила построить конечное распределение температуры в стержне, в соответствии с граничными условиями. Вывели графики функции $y(x,t)$ - красным цветом, $\varphi(x)$ – синим цветом, на декартовой системе координат. Учли выбор l , T , h (шаг по координате x), τ (шаг по координате t) и const - $\varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$. Посчитали интеграл $\int_0^l w(x,t)dx$, по формуле Симпсона, при ($t=T$) и вывели полученный график функции $\frac{w(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx}$ зелёным цветом на экран, где $w(x,t)$ – решение части A(решение задачи (1)-(5)). Поскольку в идеале синий и зелёный график должны совпадать, сделали так, чтобы зелёный график выводился на экран только при дополнительном нажатии клавиши. В результате увидели, что зелёный график действительно совпадает с красным.

Это говорит о том, что программа работает корректно.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков М.Н. Численные методы/ Н.С. Бахвалов – Бином, 2011. – 640 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы/ А.А. Самарский – М.:Наука, 1989. – 432 с.
3. Яцек Галовиц С++. Стандартная библиотека шаблонов – Питер.2018. – 432 с.
4. Эгамов А.И. Лабораторная работа «Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных: учебно-метод. пособие / А.И. Эгамов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. – 15 с.