

Metodi Numerici per il Calcolo

Esercitazione 6: Integrazione Numerica

A.A.2022/23

Scaricare dalla pagina web del corso l'archivio matlab_mnc2223_6.zip e scompararlo nella propria home directory. Verrà creata una cartella con lo stesso nome contenente alcuni semplici script e function Matlab/Octave. Si svolga la seguente esercitazione che ha come obiettivo quello di sperimentare l'integrazione numerica di funzioni.

Si considerino le seguenti funzioni test di cui si vuole calcolare l'integrale definito sul loro dominio di definizione (nella cartella alcune di queste funzioni sono già implementate; aggiungere in modo simile le mancanti):

$f_1 = e^{\sqrt{x}} \sin(x) + 2x - 4$	$x \in [0, 12]$	$\int_0^{12} f_1(x) dx$	= 68.3532891202483
$f_2 = \frac{32}{1+1024x^2}$	$x \in [0, 4]$	$\int_0^4 f_2(x) dx$	= 1.56298398573480
$f_3 = \frac{e^{-x}}{x}$	$x \in [1, 2]$	$\int_1^2 f_3(x) dx$	= 0.170483423687459
$f_4 = \frac{4}{1+x^2}$	$x \in [0, 1]$	$\int_0^1 f_4(x) dx$	= 3.14159265358979
$f_5 = \sqrt{1-x^2}e^x$	$x \in [0, 1]$	$\int_0^1 f_5(x) dx$	= 1.24395050141647
$f_6 = \frac{1}{x}$	$x \in [1, 9]$	$\int_1^9 f_6(x) dx$	= 2.19722457733622
$f_7 = \frac{1}{1+x}$	$x \in [0, 1]$	$\int_0^1 f_7(x) dx$	= 0.693147180559945
$f_8 = \sin(x)$	$x \in [0, 1]$	$\int_0^1 f_8(x) dx$	= 0.459697694131860
$f_9 = \frac{\ln x}{1+x}$	$x \in [1, 2]$	$\int_1^2 f_9(x) dx$	= 0.147220676959241
$f_{10} = \frac{1}{1+x^2+x^4}$	$x \in [0, 3]$	$\int_0^3 f_{10}(x) dx$	= 0.895371912332754
$f_{11} = \sin(e^{x/2})$	$x \in [0, 0.5]$	$\int_0^{0.5} f_{11}(x) dx$	= 2.87120836128175
$f_{12} = \sqrt{1+\sqrt{x}}$	$x \in [0, 4]$	$\int_0^4 f_{12}(x) dx$	= 6.07589591755374

A. Formule di Quadrature di Newton-Cotes

Le function `trapezi_comp.m` e `simpson_comp.m` implementano rispettivamente la formula dei trapezi e Simpson composte per l'integrazione numerica di una funzione scalare.

- Si eseguano le function in oggetto su alcune funzioni test analizzando gli output grafici.
- Si analizzino gli script e si osservi la costruzione grafica dei polinomi a tratti.
- Si completi lo script `err_trapezi_comp.m` (`err_simpson_comp.m`) che utilizza la function Matlab `quad` (si dia `help quad` per info sui parametri) con tolleranza 10^{-12} per ottenere un valore "esatto", richiama la

`trapezi_comp.m` (`simpson_comp.m`) per avere un valore approssimato e stampa l'errore di integrazione.

- Ricordando l'espressione dell'errore di integrazione per la formula dei trapezi composta:

$$R_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\eta),$$

(e per la formula di Simpson composta,

$$R_T = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)),$$

si modifichi lo script precedente per stimare sperimentalmente che l'errore è di ordine 2, cioè si riduce come h^2 (4, cioè si riduce come h^4). (I due nuovi script/function si chiamino `err2_trapezi_comp.m`, `err2_simpson_comp.m`). (Sugg. si applichi la formula composta per valori di h che si dimezzano e si stampi il rapporto dei relativi errori; può essere utile conoscere le derivate della funzione integranda?)

B. Errore di Integrazione ed Estrapolazione di Richardson

Si consideri lo script `err2_trapezi_comp.m` dell'esercizio precedente.

- Si modifichi il codice per aggiungere l'estrapolazione di Richardson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3} + O(h^4)$$

e tre nuove colonne di stampa simili a quelle presenti (il nuovo script lo si chiama `err2_trapezi_rich.m`).

- A partire dallo script (`err2_simpson_comp.m`) dell'esercizio precedente si realizzare uno script simile a quanto richiesto al punto precedente per aggiungere l'estrapolazione di Richardson, sapendo che:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{16S(h/2) - S(h)}{15} + O(h^5).$$

Il nuovo script si chiama `err2_simpson_rich.m`.

C. Metodi Adattivi

Le function `main_trapezi_adapt`, `trapezi_adapt` e `trapezi_sing` implementano il metodo dei trapezi composto adattivo in forma ricorsiva.

- Analizzare il codice e confrontarlo con quanto detto a lezione.
- Si realizzi una tabella che riporti il numero di valutazioni di funzioni richieste per fornire un valore approssimato alle tolleranze 10^{-p} con $p = 2, 4, 6, \dots$
- Utilizzando le analoghe function `main_simpson_adapt`, `simpson_adapt` e `simpson_sing` per il metodo di simpson composto adattivo, si completi la tabella precedente aggiungendo il numero di valutazioni richieste per questo metodo e si confrontino.

D. Esercizio di verifica sugli Errori di Integrazione

Si realizzi uno script `plot_error.m` che in una stessa figura disegni i grafici degli errori di integrazione (rispetto al valore esatto determinato con la function `quad` di Matlab) dei metodi dei trapezi e Simpson composti (function `trapezi_comp.m` `simpson_comp.m`) al variare di n , numero di valutazioni della funzione integranda effettuate nelle due formule. Eseguire questo script per gli integrali delle funzioni f_i , $i = 1, \dots, 5$, analizzare i grafici ottenuti e fare delle osservazioni.