Metodi Numerici per il Calcolo

Esercitazione 7: Equazioni non lineari

A.A.2022/23

Scaricare dalla pagina web del corso l'archivio matlab_mnc2223_7.zip e scompattarlo nella propria home directory. Verrà creata una cartella con lo stesso nome contenente alcuni semplici script e function Matlab/Octave. Si svolga la seguente esercitazione che ha come obiettivo quella di sperimentare metodi per determinare le radici di equazioni non lineari.

Si considerino le seguenti funzioni test di cui si vogliono determinare gli zeri o radici dell'equazione associata (nella cartella sono presenti le function che le implementano insieme alle funzioni delle derivate prime e seconde):

`zfun01` $f(x) = (4x-7)/(x-2) \quad x \in [1, 1.9]$
`zfun02` $f(x) = 1 + 3/x^2 - 4/x^3 \quad x \in [0.5, 6]$
`zfun03` $f(x) = 1 - 2.5x + 3x^2 - 3x^3 + 2x^4 - 0.5x^5 \quad x \in [0, 3]$
`zfun04` $f(x) = x^n - 2 \quad x \in [0, 2] \quad n = 2, 3, 4$
`zfun05` $f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad x \in [-2.5, 2]$
`zfun06` $f(x) = 1/x - 2 \quad x \in (0, 4]$
`zfun07` $f(x) = (1-x)^3 - 13/3(1-x)^2x + 25/4(1-x)x^2 - 3x^3 \quad x \in [0, 1]$
`zfun08` $f(x) = x - 2^{-x} \quad x \in [0, 1]$
`zfun09` $f(x) = (1 + (1+n)^2)x - (1-nx)^2 \quad x \in [0, 1] \quad n = 1, 5, 10$
`zfun10` $f(x) = x^3 - 8 \quad x \in [0, 1]$
`zfun11` $f(x) = x^2 - (1-x)^n \quad x \in [0, 1] \quad n = 1, 5, 10$
`zfun12` $f(x) = (x-1)e^{-nx} + x^n \quad x \in [0, 1] \quad n = 1, 5, 10$
`zfun13` $f(x) = 1 + 2(xe^{-n} - e^{-nx}) \quad x \in [0, 1] \quad n = 1, 5, 10$
`zfun14` $f(x) = e^x - x^2 \quad x \in [-2, 2]$
`zfun15` $f(x) = \tanh(x-1) \quad x \in [-1, 3]$
`zfun16` $f(x) = x^{11} + 4x^2 - 10 \quad x \in [-4, 4]$
`zfun17` $f(x) = \sin(x) - x \quad x \in [-1, 1]$

A. Metodo di bisezione

Le function `main_bisez.m` fa uso della function `bisez.m` che implementa il metodo di bisezione. Viene effettuato il grafico della funzione $f(x)$ così da poter localizzare visivamente gli zeri della funzione nell'intervallo e poter definire l'intervallo di innesco del metodo.

- Analizzare i codici e sperimentare con alcune funzioni test la ricerca degli zeri modificando la tolleranza di arresto e l'intervallo di innesco.
- Modificare le function `main_bisez.m` e `bisez.m` affinché producano in stampa il numero di iterazioni effettuate e la successione degli intervalli determinati dal metodo.

- Rieseguire per alcune funzioni test; mediamente quante iterazioni vengono compiute per la tolleranza 10^{-15}? Dare una spiegazione.

B. Metodi di Newton e delle secanti
Le function `main_stangmet.m` e `main_ssecmet.m` utilizzano le function `stangmet.m` e `ssecmet.m` che implementano rispettivamente i metodi di Newton e delle secanti. Viene effettuato il grafico della funzione $f(x)$ così da poter localizzare visivamente gli zeri della funzione nell'intervallo.

- Analizzare i codici, e sperimentare con alcune funzioni test la ricerca degli zeri modificando la tolleranza di arresto.

- Dopo aver analizzato il grafico di una funzione test stimare possibili iterati iniziali.

C. Metodo di Newton e intervallo di convergenza
La function `fun_plot.m` rappresenta graficamente la funzione test $f(x)$ e le funzioni

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad e \qquad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

L'obiettivo di questo esercizio è, per ogni funzione test, determinare un intervallo di convergenza per ogni suo zero. Si sfruttino i grafici mostrati ricordando che il Teorema di convergenza afferma che se x_0 viene preso in un intervallo in cui $|g'(x)| < 1$ allora il metodo iterativo converge.

Si riesegua il codice `main_stangmet.m` per determinare uno zero di una funzione test, ma a partire da un opportuno iterato iniziale ossia nell'intervallo di convergenza.

D. Metodo di Newton e ordine di convergenza
Chiamando la funzione `main_stangmet.m` con `ftrace` ad 1 si hanno tutti gli iterati calcolati dal metodo di Newton; si modifichi il codice (lo si chiami `main_stangmet_ordconv.m`) affinché produca una tabella con le seguenti informazioni:

k	x_k	$e_k = x_k - x^*$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert^2$

- Si analizzino i risultati delle ultime due colonne nel caso di zeri semplici o multipli della funzione test.

- Per una delle funzioni test date il metodo di Newton determina un suo zero con ordine di convergenza 3; cosa possiamo fare per capire di che funzione si tratta?

E. Function fzero di Matlab
Si consideri uno dei codici dell'esercizio B. e lo si modifichi per determinare gli zeri delle funzioni test richiamando opportunamente la function `fzero` di Matlab (lo script si chiami `main_fzero.m`) (vedere `help fzero` per i parametri di input e per ottenere oltre la soluzione il numero di passi e di valutazioni compiute dal metodo). Confrontare con il metodo di Newton.

F. Esercizio di verifica (Confronto Newton e secanti)
L'obiettivo di questo esercizio è di confrontare, fissata una tolleranza, il costo computazionale del metodo delle secanti rispetto al metodo di Newton per approssimare uno zero alla tolleranza assegnata. Si consideri che secanti ad ogni iterazione valuta la funzione test una volta, Newton valuta la funzione e la sua derivata. Realizzare uno script `main_compare.m` che produca una tabella con il numero di valutazioni effettuate dai due metodi per le seguenti tolleranze: 10^{-n} per $n = 2, 3, \ldots, 11$; provare più funzioni test (il codice produca la stampa richiesta per almeno tre funzioni test).