Элементы вейвлет-анализа

Одним из активно применяемых в настоящее время способов исследования сигналов является вейвлет-анализ. Он предоставляет возможность оценить частотно-временные параметры сигналов. Применительно к анализу вибрационных сигналов откликов конструкций при динамическом воздействии этот способ может быть использован для локализации во времени на длинной временной реализации момента динамического воздействия.

Рассмотрим сущность вейвлет-анализа и возможный подход для его численной реализации.

Коэффициенты вейвлет-преобразования функции $s(t)$ вычисляются в соответствии с выражением:

$$C(a,b)=\int_R s(t)\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\ , \qquad (7.1)$$

где $\psi(t)$ - вейвлет функция или просто вейвлет;

a - масштабный коэффициент, определяющий ширину вейвлета, и являющийся аналогом частоты в Фурье-анализе;

b - временной сдвиг.

Если предположить, что b изменяется от 0 до T, то получим функцию вейвлет-коэффицинента $C(a,b)$, определенную на отрезке [0; T].

Широко распространенными являются гауссовы вейвлеты:

- первого порядка (антисимметричная волна):

$$wave\ (t)=t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (7.2)$$

- второго порядка (мексиканская шляпа):

$$mhat\ (t)=\left(1-t^2\right)e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (7.3)$$

- третьего порядка:

$$gaus\ 3p(t)=\left(t^3-3t\right)e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (7.4)$$

- четвертого порядка:

$$gaus\ 4p(t)=\left(t^4-6t^2+3\right)e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (7.5)$$

а также вейвлет Морле:

$$mor\left(t\right)=\cos\left(2\pi t\right)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} . \qquad (7.6)$$

Для примера форма вейвлета ««мексиканская шляпа» показана на рисунке 7.1.

Вейвлеты определены на интервале от -∞ до +∞, однако его основная часть располагается на отрезке от -4 до +4.

Если провести дискретизацию времени (аргумент t) в предположении, что изменение аргумента вейвлета на отрезке -4 до +4 будет соответствовать изменению дискретного аргумента n от 0 до N, то тогда в выражения вейвлетов (7.3)-(7.5) вместо t следует подставить

$$t=\frac{8\left(n-b\right)-4aN}{aN} .$$

(7.7)

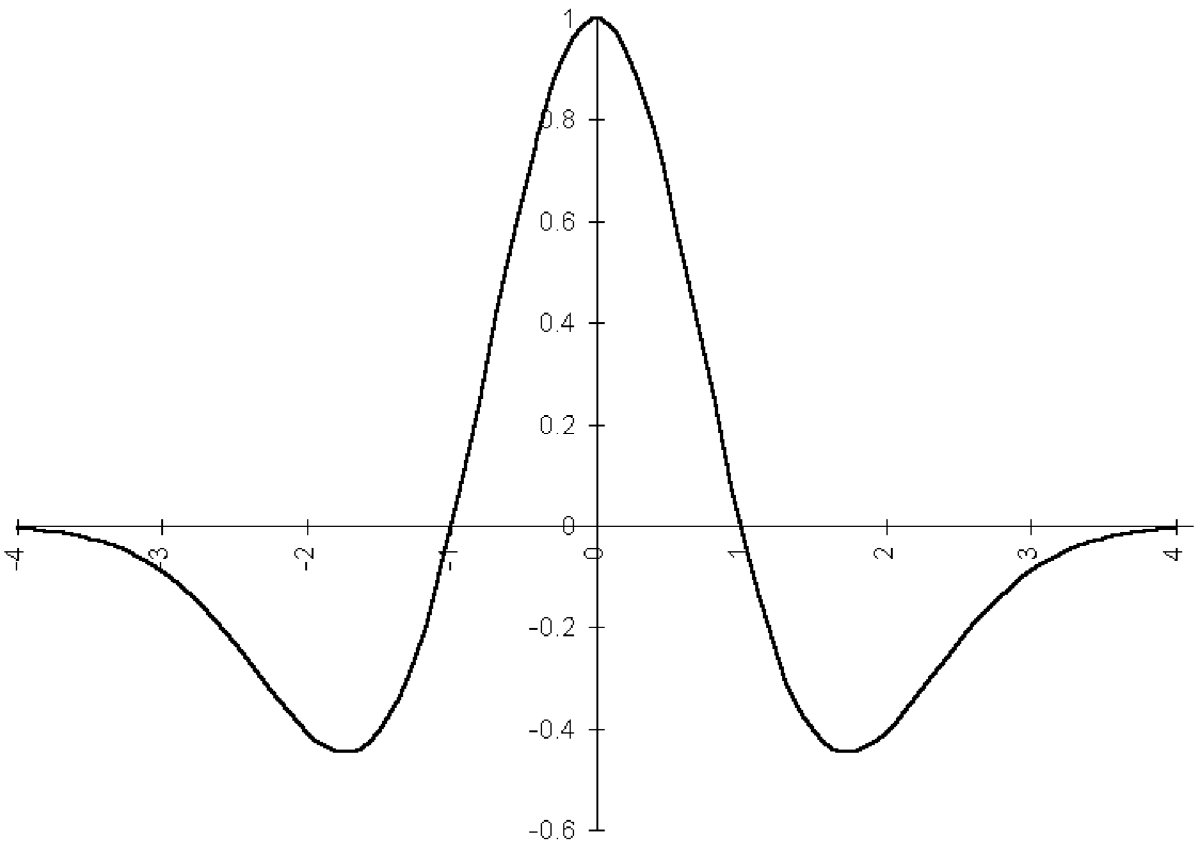


Рисунок 7.1 - Вейвлет «мексиканская шляпа»

Когда a=1, b=0 и вейвлеты будут определены выражениями:

$$mhat\left(n\right)=\left(1-\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2\right)\cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2}{2}}, \qquad (7.8)$$

$$wav\left(n\right)=\left(\frac{8n-4N}{N}\right)\cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2}{2}}, \qquad (7.9)$$

$$gaus\,3p\left(n\right)=\left(\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^3-3\left(\frac{8n-4N}{N}\right)\right)\cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2}{2}}, \qquad (7.10)$$

$$gaus\,4p\left(n\right)=\left(\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^4-6\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2+3\right)\cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2}{2}}, \qquad (7.11)$$

$$mor\left(n\right)=\cos\left(2\pi\cdot\left(\frac{8n-4N}{N}\right)\right)\cdot e^{-\frac{\left(\frac{8n-4N}{N}\right)^2}{2}}, \qquad (7.12)$$

$n=0\div N$.

Тогда в дискретном виде вейвлет-преобразование можно представить выражением:

$$C\left(N,m\right)=\sum_{n=0}^{N}s\left(n+m\right)\cdot\psi\left(\frac{8\left(n-m\right)-4N}{N}\right),\ m=0\div L-1, \qquad (7.13)$$

где L, число дискретных отсчетов в анализируемой временной реализации исследуемого сигнала.

Вейвлет-преобразование представляет собой вариант цифровой полосовой фильтрации. В связи с этим возникает необходимость определения ширины вейвлета N, которая будет соответствовать полосовому фильтру с центральной частотой f_W (частота, на которой цифровой полосовой фильтр имеет максимальный коэффициент передачи).

Экспериментально получены выражения для определения ширины N для некоторых типов вейвлетов:

- «мексиканская шляпа»:

$$N_{mhat} = round\left(1.816 \cdot \frac{f_Д}{f_W}\right); \tag{7.14}$$

- симметричная волна:

$$N_{wave} = round\left(1.275 \cdot \frac{f_Д}{f_W}\right); \tag{7.15}$$

- гауссовый 3-го порядка:

$$N_{gaus\,3\,p} = round\left(2.22 \cdot \frac{f_Д}{f_W}\right); \tag{7.16}$$

- гауссовый 4-го порядка:

$$N_{gaus\,4\,p} = round\left(2.55 \cdot \frac{f_Д}{f_W}\right); \tag{7.17}$$

- Морле (действительная часть):

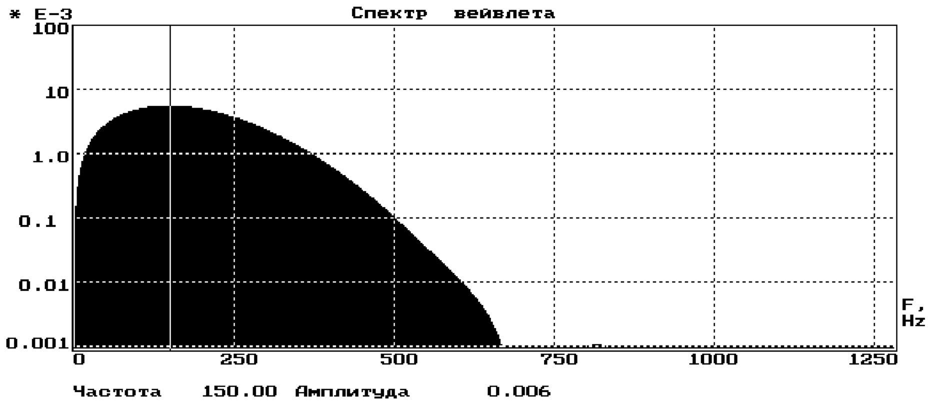
$$N_{mor} = round\left(8 \cdot \frac{f_Д}{f_W}\right), \tag{7.18}$$

где $f_Д$ - частота дискретизации аналогового сигнала;

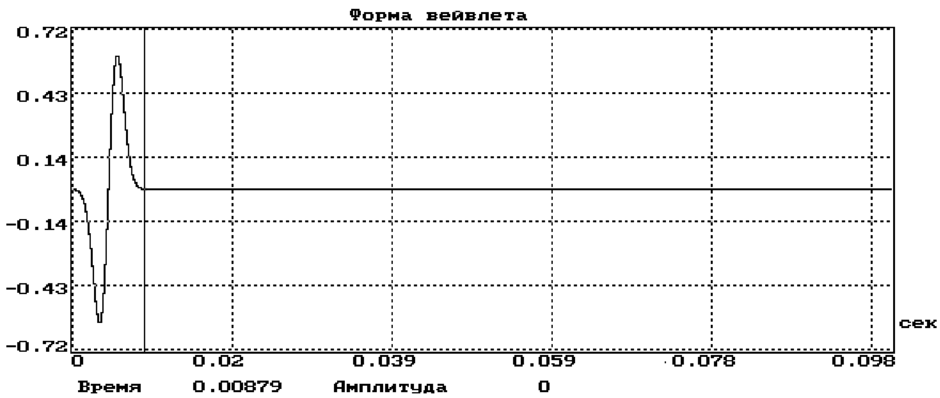
f_W - частота, на которой цифровой полосовой фильтр, реализуемый вейвлетом, имеет максимальный коэффициент передачи;

round - операция округления.

На рисунках 7.2-7.7 показаны форма и частотная характеристика вейвлетов при частоте дискретизации 5120 Гц.

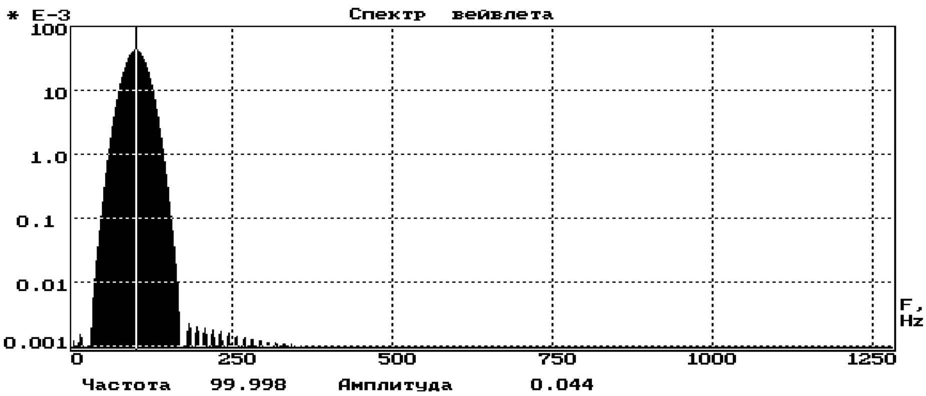


а) частотная характеристика вейвлета

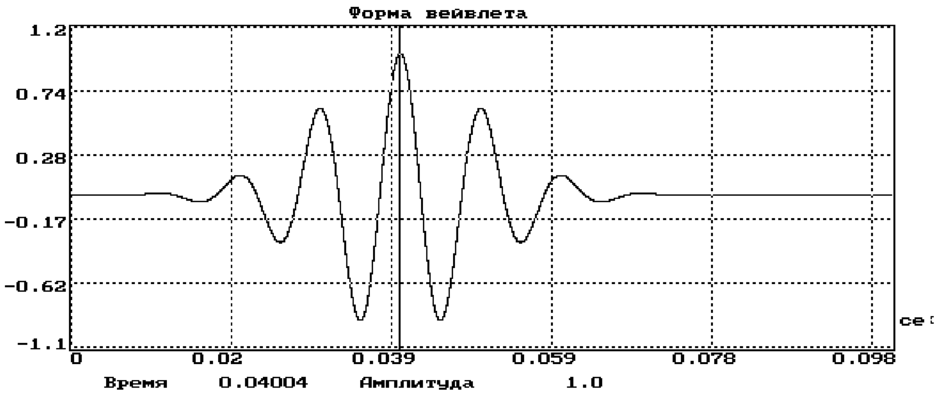


б) форма вейвлета

Рисунок 7.2 - Частотная характеристика и форма вейвлета типа «антисимметричная волна» с центральной частотой 150 Гц

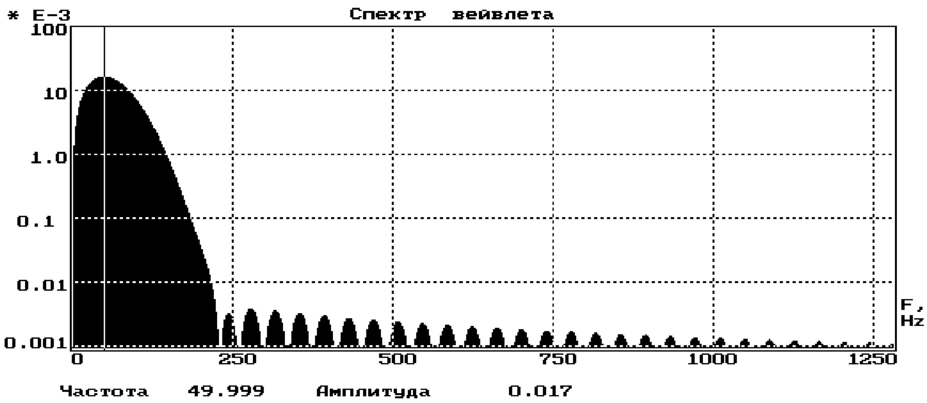


а) частотная характеристика вейвлета

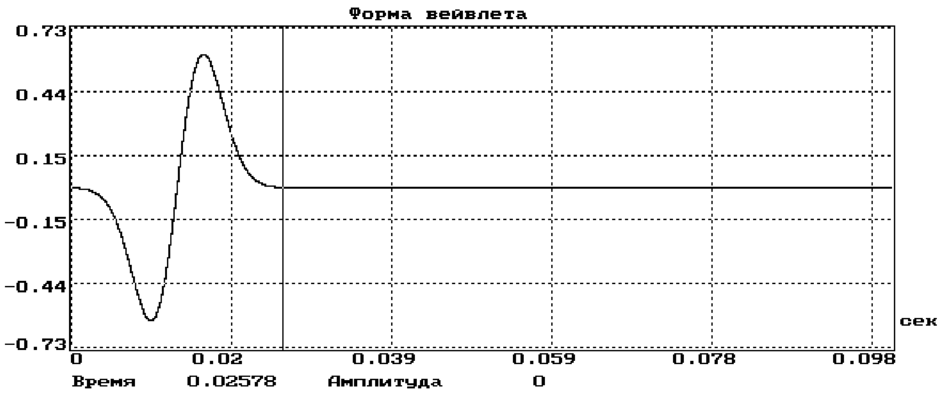


б) форма вейвлета

Рисунок 7.3 - Частотная характеристика и форма вейвлета Морле с центральной частотой 100 Гц

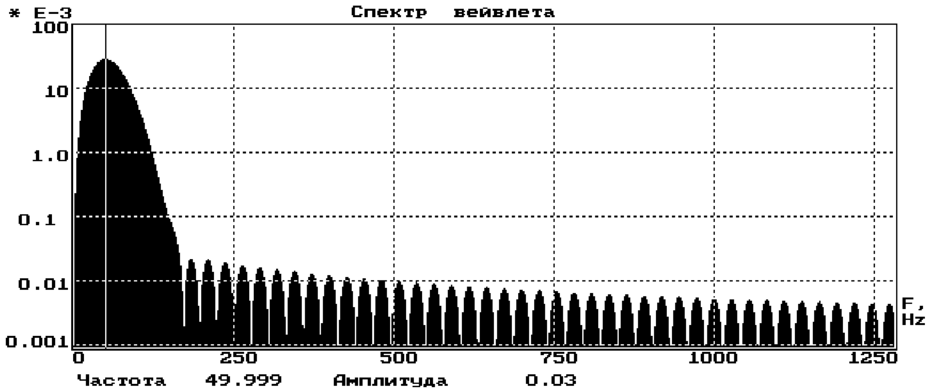


а) частотная характеристика вейвлета

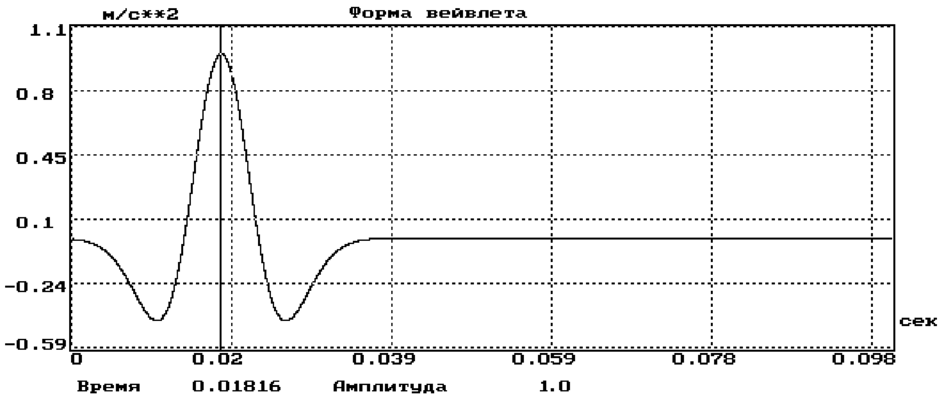


б) форма вейвлета

Рисунок 7.4 - Частотная характеристика и форма вейвлета типа «антисимметричная волна» с центральной частотой 50 Гц

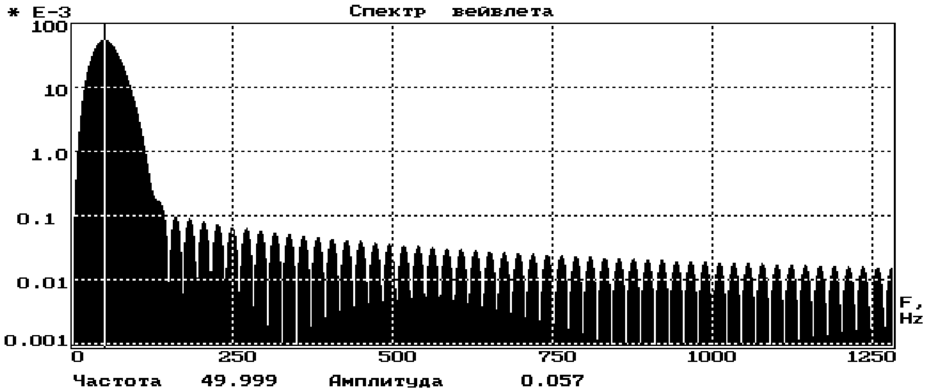


а) частотная характеристика вейвлета

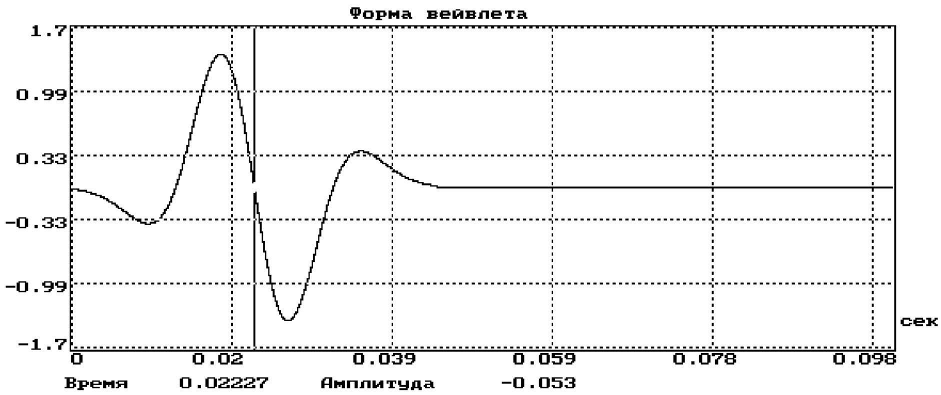


б) форма вейвлета

Рисунок 7.5 - Частотная характеристика и форма вейвлета Морле с центральной частотой 50 Гц

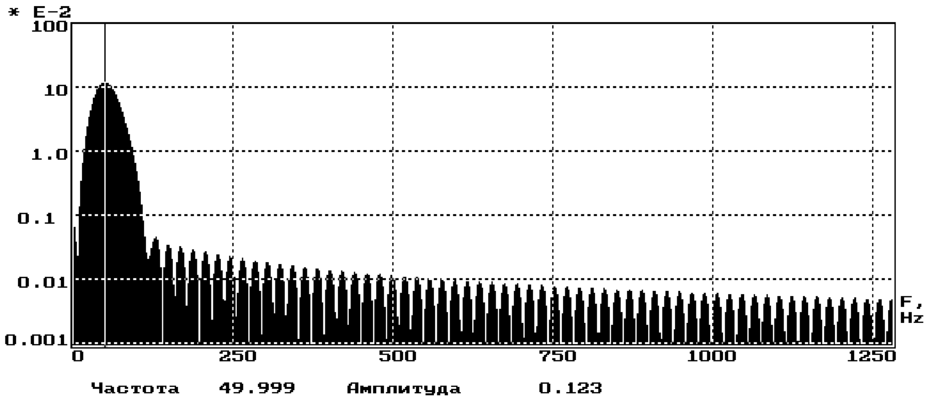


а) частотная характеристика вейвлета

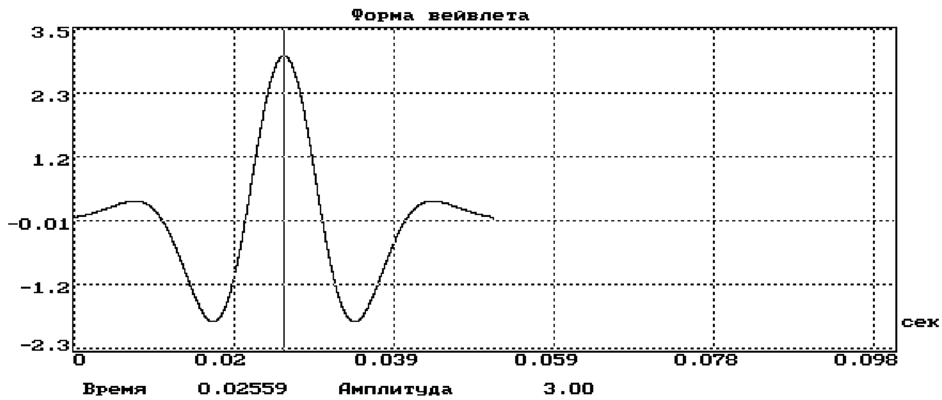


б) форма вейвлета

Рисунок 7.6 - Частотная характеристика и форма
гауссова вейвлета 3-го порядка с центральной частотой 50 Гц



а) частотная характеристика вейвлета



б) форма вейвлета

Рисунок 7.7 - Частотная характеристика и форма
гауссова вейвлета 4-го порядка с центральной частотой 50 Гц

Для обеспечения единичного коэффициента передачи на центральной частоте следует нормализовать вейвлет по амплитуде. Это можно реализовать следующим образом:

$$mhat_{норм.}(n)=\frac{mhat(n)}{1.32\sum_{i=0}^{N}\left|mhat(i)\right|}; \qquad (7.19)$$

$$wave_{норм.}(n)=\frac{wave(n)}{1.32\sum_{i=0}^{N}|wave(i)|}; \qquad (7.20)$$

$$gaus3p_{норм.}(n)=\frac{gaus3p(n)}{1.3\sum_{i=0}^{N}|gaus3p(i)|}; \qquad (7.21)$$

$$gaus4p_{норм.}(n)=\frac{gaus4p(n)}{1.287\sum_{i=0}^{N}|gaus4p(i)|}; \qquad (7.22)$$

$$mor_{норм.}(n)=\frac{mor(n)}{1.287\sum_{i=0}^{N}|mor(i)|}, \qquad (7.23)$$

$n=0 \div N$.

Нормализованные вейвлеты подставляются в выражение (7.13) для вычисления вейвлет-коэффициентов исследуемого сигнала.

Полученные вейвлет функции не содержат постоянной составляющей, являются более гладкими и удобными для дальнейшей обработки.