Передаточные функции цифровых систем

Z-преобразование является удобным методом решения разностных уравнений линейных систем. Применяя z-преобразование к обеим частям равенства (3.13), получаем:

$$Y(z)\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m} = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}, \tag{3.23}$$

где *X(z)*, *Y(z)*- соответствующие z-образы входного и выходного сигнала. Из этого выражения, полагая a_o = 1, получаем в общей форме функцию связи входа и выхода системы - уравнение *передаточной* функции системы (или *системной* функции) в z-области:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^{M} a_m z^{-m}}. \tag{3.24}$$

Для нерекурсивных систем при a_m= 0:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}. \tag{3.25}$$

При подаче на вход системы единичного импульса Кронекера δ_0, имеющего z-образ $\delta(z) = z^{-n} = 1$, сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы *y(k) = h(k)*, при этом:

$$H(z) = Y(z) = \frac{Y(z)}{\delta(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}. \tag{3.26}$$

т.е. передаточная функция системы является z-образом ее импульсной реакции. При обратном z-преобразовании передаточной функции соответственно получаем импульсную характеристику системы:

$$h(k) \Leftrightarrow H(z).$$

Если функция *H(z)* представлена конечным степенным полиномом, как это обычно имеет место для НЦС, то обратное z-преобразование элементарно. Передаточная функция РЦС также может быть представлена степенным полиномом прямым делением числителя на знаменатель правой части выражения (3.23), однако результат при этом может оказаться как конечным, так и бесконечным, т.е. система может иметь либо конечную, либо бесконечную импульсную характеристику. Системы с бесконечной импульсной характеристикой получили название БИХ-систем, с конечной импульсной характеристикой соответственно КИХ-систем. Нерекурсивные системы всегда имеют конечную импульсную характеристику, т.к. длительность импульсной реакции НЦС определяется окном фильтра.

Устойчивость систем. Любая практическая система должна быть *устойчивой*, т.е. для сигналов, конечных по энергии или средней мощности, выходные сигналы также должны быть конечными по этим параметрам. Система называется устойчивой, если при любых начальных условиях реакция системы на любое ограниченное воздействие также ограничена.

Для конечного по энергии входного сигнала, можно записать:

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)| d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau .$$

Отсюда следует условие, при котором выходной сигнал системы также будет ограниченным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty . \qquad (3.27)$$

т.е. необходимым и достаточным условием устойчивости системы является абсолютная сходимость ее импульсной характеристики, или, для цифровых систем, абсолютная суммируемость импульсного отклика:

$$\sum_{n} |h(n)| < \infty . \qquad (3.28)$$

Анализ устойчивости может быть проведен по передаточной функции. В устойчивой системе значение *H(z)* должно быть конечным во всех точках z-плоскости, где $|z| \geq 1$, а, следовательно, передаточная функция не должна иметь особых точек (полюсов) при $z \geq 1$ (вне единичного круга на z-плоскости). Полюсы определяются корнями многочлена знаменателя передаточной функции H(z).

Приведенный критерий устойчивости относится к несократимой дроби, т.к. в противном случае возможна компенсация полюса нулем передаточной функции и следует проверить наличие однозначных нулей и полюсов.

Проверка на устойчивость требуется только для рекурсивных цифровых фильтров (систем с обратной связью), нерекурсивные системы всегда устойчивы.