ТУБ 7

7.1 Алгоритм классификации объектов на *N* классов методом персептрона

В разделе 2.3 ТУБ 3 был рассмотрен случай разделения объектов на несколько классов, когда количество классов больше двух. В материале данного теоретического учебного блока рассмотрим алгоритм, который можно применить для определения разделяющих функций, когда допускается существование M решающих функций, характеризующихся свойством, что при $x \in \omega_i$, где x – объект, ω_i– класс $d_i(x) > d_j(x)$ для всех $i \neq j$.

Рассмотрим M классов $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_M$. Пусть на $к$-м шаге процедуры обучения системе предъявляется образ *x(к)*, принадлежащий классуω_i. Вычисляются значения M разделяющих функций

$d_j[x(k)] = w_j(k)x(k), j = 1, 2 \dots, M$. Затем, если выполняются условия $d_i[x(k)] > d_j[x(k)],\ j = 1, 2, \dots, M;\ j \neq i,$ то векторы весовых коэффициентов не изменяются, т.е. $w_j(k+1) = w_j(k), j = 1, 2, \dots M$.

С другой стороны, допустим, что для некоторого l $d_i[x(k)] \leq d_l[x(k)]$. В этом случае выполняются следующие коррекции весовых коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
&w_i(k+1) = w_i(k) + cx(k),\\
&w_l(k+1) = w_l(k) - cx(k),\\
&w_j(k+1) = w_j(k), j = 1, 2, \dots M;\ j \neq i, j \neq l,
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

где c – положительная константа. Если заданные классы сепарабельны, то доказано, что этот алгоритм сходится за конечное число итераций при произвольных начальных векторах. Рассмотрим это на примере.

Даны классы, причем каждый из них содержит один образ: ω_1: {(0, 0)}, ω_2: {(1,1}, ω_3: {(-1, 1)}. Дополним заданные образы: (0, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1,1). Выберем в качестве начальных векторов весов $w_1(1) = w_2(1) = w_3(1) = (0, 0, 0)$, положим *c*=1 и, предъявляя образы в указанном порядке, получим следующее:

$$
\begin{aligned}
&d_1[x(1)] = w_1(1)x(1) = 0,\\
&d_2[x(1)] = w_2(1)x(1) = 0,\\
&d_3[x(1)] = w_3(1)x(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Поскольку $x(1) \in \omega_1$ и $d_2[x(1)] = d_3[x(1)] = d_1[x(1)]$, первый весовой вектор увеличивается, а два других уменьшаются в соответствии с соотношениями (7.1), т.е.

$$w_1(2) = w_1(1) + x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2(2) = w_2(1) - x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3(2) = w_3(1) - x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявляемый образ x(2)=(1, 1, 1) принадлежит классу ω_2. Для него получаем $w_1(2)x(2) = 1$, $w_2(2)x(2) = -1, w_3(2)x(2) = -1$. Поскольку все произведения больше либо равны $w_2(2)x(2)$, вводятся коррекции

$$w_1(3) = w_1(2) - x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(3) = w_2(2) + x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3(3) = w_3(2) - x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявленный образ x(3)=(-1, 1, 1) принадлежит классу ω_3. Для него получаем $w_1(3)x(3) = 0$, $w_2(3)x(3) = 0, w_3(3)x(3) = -2$. Все эти произведения опять требуют корректировки

$$w_1(4) = w_1(3) - x(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_2(4) = w_2(3) - x(3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3(4) = w_3(3) + x(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном цикле итерации присутствовали ошибки, следует провести новый цикл. Положив x(4)=x(1), x(5)=x(2), x(6)=x(3), получим $w_1(4)x(4) = -1$, $w_2(4)x(4) = -1, w_3(4)x(4) = -1$. Так как образ x(4) принадлежит классу ω_1, то все произведения «неверны». Поэтому

$$w_1(5) = w_1(4) + x(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(5) = w_2(4) - x(4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(5) = w_3(4) - x(4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявленный образ x(5)=(1, 1, 1) принадлежит классу ω_2. Соответствующие скалярные произведения равны $w_1(5)x(5) = -2$, $w_2(5)x(5) = 0, w_3(5)x(5) = -4$. Образ x(5) классифицирован правильно. Поэтому

$$w_1(6) = w_1(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(6) = w_2(5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(6) = w_3(5) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий образ x(6)=(-1, 1, 1) принадлежит классу ω_3, для него получаем $w_1(6)x(6) = -2$, $w_2(6)x(6) = -4, w_3(6)x(6) = -0$. Этот образ также классифицирован правильно, так что коррекции не нужны, т.е.

$$w_1(7) = w_1(6) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(7) = w_2(6) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(7) = w_3(6) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Если продолжить процедуру обучения, рассматривая образы x(7), x(8), x(9), можно убедиться, что в следующем полном цикле никакие коррекции не производятся. Поэтому искомые разделяющие функции имеют следующий вид:

$$d_1(x) = 0 \cdot x_1 - 2x_2 + 0 = -2x_2,$$
$$d_2(x) = 2x_1 - 0 \cdot x_2 - 2 = 2x_1 - 2,$$
$$d_3(x) = -2x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 = -2x_1 - 2.$$

На следующем этапе решения задачи распознавания образов работают с тестовыми объектами. Каждый из них подставляют в разделяющие функции, вычисляют значения и относят к тому классу, чья разделяющая функция показала максимальное значение. Если на нескольких функциях были получены одинаковые значения и нет дополнительной информации для классификации, объект может быть отнесен произвольно в один из таких классов.