Преобразование Фурье и спектр вещественных сигналов и переход к комплексному представлению

Спектром аналогового (непрерывного) сигнала называется представление сигнала в частотной области, получаемое с помощью прямого преобразования Фурье :

$$c_{\omega} = \frac{2}{T} \int_{a}^{a+T} x(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt; \quad (4.17)$$

$$s_{\omega} = \frac{2}{T} \int_{a}^{a+T} x(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt; \quad (4.18)$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} x(t) dt, \quad (4.19)$$

где c_{ω}, s_{ω} - амплитуды косинусной и синусной спектральных составляющих частоты ω $рад/с$, ω=1,2,3, ... ;

T - интервал времени, который считается периодом функции $x(t)$.

По спектру можно восстановить исходный сигнал :

$$x(t) = c_0 + \sum_{\omega=1}^{\infty} c_{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sum_{\omega=1}^{\infty} s_{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (4.20)$$

При обработке сигналов с помощью средств вычислительной техники предварительно производится их аналого-цифровое преобразование (дискретизация во времени и квантование по уровню), причем при выборе периода дискретизации следует руководствоваться теоремой Котельникова:

$$t_{д} \le \frac{1}{2 f_{\max}}, \quad (4.21)$$

где $f_{\max}$ - максимальная спектральная составляющая (в Гц) присутствующая в сигнале, спектральные составляющие большие $f_{\max}$ должны быть равны нулю.

Для определения амплитуд спектральных составляющих цифрового сигнала применяется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right); \quad (4.22)$$

$$S_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right), \quad (4.23)$$

где $x(k)$ - k - ое значение сигнала (k - ый элемент массива (последовательности) $\{x(k)\}$, $k = 1 \div N-1.$);

N - число элементов в массиве, обычно выбирается кратным степени 2;

j - номер спектральной составляющей, j изменяется от 0 до $\frac{N}{2}$, нулевая составляющая есть не что иное, как двойная постоянная составляющая, присутствующая в сигнале.

Если при оцифровке сигнала время дискретизации было равно $t_д$, период анализа и частотное разрешение анализа соответственно равны:

$$T = N \cdot t_д; \qquad \Delta f = \frac{1}{N \cdot t_д} = \frac{1}{T}. \tag{4.24}$$

Тогда j - ая составляющая соответствует частоте $j \cdot \Delta f$.

Значение, равное Δf, еще называют фундаментальной частотой спектрального анализа.

Если время дискретизации задано в секундах, то единица измерений частотного разрешения - Гц.

Когда определены все значения C_j и S_j, то сходный массив данных, без учета постоянной составляющей, можно представить как:

$$x(k) = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} \left(C_j \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) + S_j \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right)\right) = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} A_j \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N} - \varphi_j\right), \tag{4.25}$$

где $A_j = \sqrt{C_j^2 + S_j^2}$ - амплитуда j - ой спектральной составляющей;

$\varphi_j = arctg\left(\frac{S_j}{C_j}\right)$ - начальная фаза j - ой спектральной составляющей;

k - номер дискретного отсчета, изменяется от 0 до $N-1$.

В соответствии с формулами Эйлера

$$\cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2}; \tag{4.26}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2i} = -i\,\frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2}, \tag{4.27}$$

где i - мнимая единица, ($i^2 = -1$).

Тогда

$$C_j = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot \frac{e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}}{2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}};$$

$$S_j = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot -i\,\frac{e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}}{2} = \frac{i}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} - \frac{i}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}};$$

$$x(k) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}}\left(C_j\cdot\frac{e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}}{2} + S_j\cdot -i\,\frac{e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}}{2}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}}\left(\frac{C_j - iS_j}{2}\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} + \frac{C_j + iS_j}{2}\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}\right) \qquad (4.28)$$

$$\frac{C_j - iS_j}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) - i\,\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} \qquad (4.29)$$

$$\frac{C_j + iS_j}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) + i\,\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}} \qquad (4.30)$$

Определив в выражениях (4.22), (4.23) значения C_{N-j} и S_{N-j}, получим

$$C_{N-j} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot(N-j)\cdot k}{N}\right) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\cos\left(2\pi\cdot k - \frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) =$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) = C_j = C_{-j};$$

$$S_{N-j} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot(N-j)\cdot k}{N}\right) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\sin\left(2\pi\cdot k - \frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) =$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot -\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) = -\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}\right) = -S_j = S_{-j}.$$

Тогда

$$\frac{C_{N-j}-iS_{N-j}}{2}=\frac{C_j+iS_j}{2}=\frac{C_{-j}-iS_{-j}}{2}; \qquad e^{i\frac{2\pi\cdot(N-j)\cdot k}{N}}=e^{i2\pi\cdot k}\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}=e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}.$$

Следовательно выражение (4.28) можно записать как

$$x(k)=\sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}\frac{C_j-iS_j}{2}\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{C_j-iS_j}{2}\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}. \tag{4.31}$$

Если обозначить $X(j)=\dfrac{C_j-iS_j}{2}$, то выражение (4.31) представляется в виде:

$$x(k)=\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\cdot e^{i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}=\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\cdot W_N^{-jk}, \tag{4.32}$$

где

$$X(j)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\cdot e^{-i\frac{2\pi\cdot j\cdot k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\cdot W_N^{jk}. \tag{4.33}$$

$$W_N^r=e^{-i\frac{2\pi}{N}r}.$$

Выражения (4.32), (4.33) представляют N - точечное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в комплексном виде. Выражение (4.33) определяет прямое ДПФ, а выражение (4.32) обратное ДПФ.

Обратное ДПФ можно вычислить сделав перестановку исходного массива данных и введя масштабный коэффициент. Это позволяет использовать один прграммный алгоритм для вычисления обоих преобразований.

Сделав в выражении

$$\begin{aligned}x(k)=\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\cdot W_N^{-jk}&=X(0)\cdot W_N^0+X(1)\cdot W_N^{-1\cdot k}+X(2)\cdot W_N^{-2\cdot k}+\cdots+\\&+X(m)\cdot W_N^{-m\cdot k}+\cdots+X(N-1)\cdot W_N^{-(N-1)\cdot k};\end{aligned} \tag{4.34}$$

перестановку элементов

$$\begin{aligned}x(k)&=X(N-1)\cdot W_N^{-(N-1)\cdot k}+X(N-2)\cdot W_N^{-(N-2)\cdot k}+X(3)\cdot W_N^{-(N-3)\cdot k}+\cdots+\\&+X(N-m)\cdot W_N^{-(N-m)\cdot k}+\cdots+X(1)\cdot W_N^{-1\cdot k}+X(0)\cdot W_N^0=\\&=W_N^{-N\cdot k}\cdot\begin{bmatrix}X(N-1)\cdot W_N^{1\cdot k}+X(N-2)\cdot W_N^{2\cdot k}+X(3)\cdot W_N^{3\cdot k}+\cdots+\\+X(N-m)\cdot W_N^{m\cdot k}+\cdots+X(1)\cdot W_N^{(N-1)\cdot k}+X(0)\cdot W_N^{N\cdot k}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

с учетом того, что $W_N^{-N\cdot k}=1$, получим

$$x(k) = X(0)\cdot W_N^0 + X(N-1)\cdot W_N^{1\cdot k} + X(N-2)\cdot W_N^{2\cdot k} + X(3)\cdot W_N^{3\cdot k} + \dots + \\ + X(N-m)\cdot W_N^{m\cdot k} + \dots + X(1)\cdot W_N^{(N-1)\cdot k}. \tag{4.35}$$

Следовательно после перестановки массива исходных данных таким образом, что первый элемент массива меняется местами с $(N-1)$-ым элементом, второй с $(N-2)$-ым и так далее, обратное ДПФ принимает форму прямого ДПФ.