Типы сигналов

Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания.

Аналоговый сигнал (analog signal) является непрерывной функцией непрерывного аргумента, т.е. определен для любого значения аргументов. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени, в пространстве или по любой другой независимой переменной, при этом регистрируемый сигнал подобен (“аналогичен”) порождающему его процессу. Пример математической записи сигнала:

$$y(t) = 4.8\exp\left(-\frac{(t-4)^2}{2.8}\right).$$

Графическое отображение данного сигнала приведено на рисунке 2.12. При этом как сама функция, так и ее аргументы, могут принимать любые значения в пределах некоторых интервалов $y_1 \le y \le y_2, t_1 \le t \le t_2$. Если интервалы значений сигнала или его независимых переменных не ограничиваются, то по умолчанию они принимаются равными от $-\infty$ до $+\infty$. Множество возможных значений сигнала образует континуум - непрерывное пространство, в котором любая сигнальная точка может быть определена с точностью до бесконечности. Примеры сигналов, аналоговых по своей природе - изменение напряженности электрического, магнитного, электромагнитного поля во времени и в пространстве.

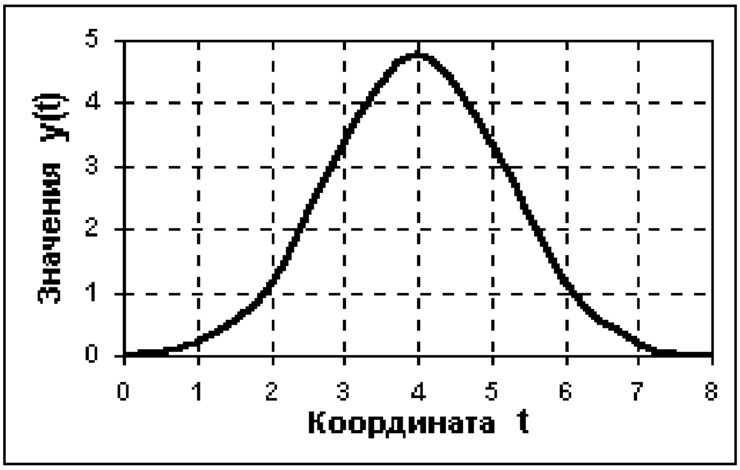

Рисунок 2.12 - Аналоговый сигнал

Дискретный сигнал (discrete signal) по своим значениям также является непрерывной функцией, но определенной только по дискретным значениям аргумента. По множеству своих значений он является конечным (счетным) и описывается дискретной последовательностью отсчетов (samples) $y(n\Delta t)$, где $y_1 \le y \le y_2$, Δt - интервал между отсчетами (интервал или шаг дискретизации, sample time), n = 0, 1, 2,...,N. Величина, обратная шагу дискретизации: $f = \frac{1}{\Delta t}\Delta t$, называется частотой дискретизации (sampling frequency). Если дискретный сигнал получен дискретизацией (sampling) аналогового сигнала, то он представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного сигнала по координатам $n\Delta t$.

Пример дискретизации аналогового сигнала, приведенного на рисунке 2.12, представлен на рисунке 2.13. При Δt = const (равномерная дискретизация данных) дискретный сигнал можно описывать сокращенным обозначением *y(n)*. В технической литературе в обозначениях дискретизированных функций иногда оставляют прежние индексы аргументов аналоговых функций, заключая последние в квадратные скобки - *y[t]*.

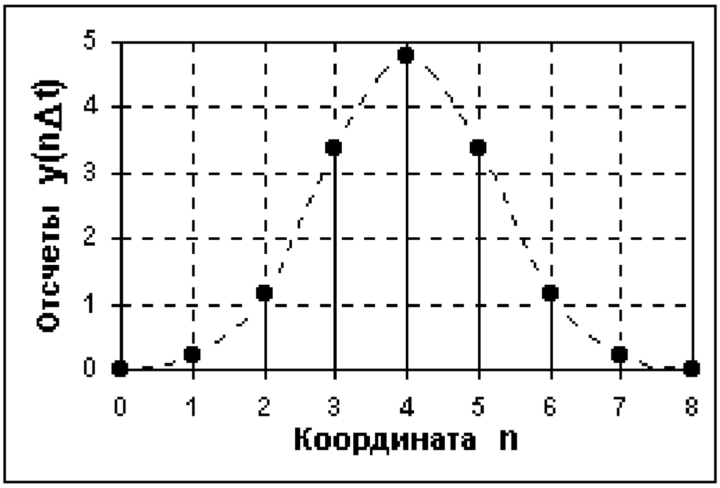

Рисунок 2.13 - Дискретный сигнал

При неравномерной дискретизации сигнала обозначения дискретных последовательностей (в текстовых описаниях) обычно заключаются в фигурные скобки - $\{s(t_i)\}$, а значения отсчетов приводятся в виде таблиц с указанием значений координат t_i. Для числовых последовательностей (равномерных и неравномерных) применяется и следующее числовое описание:

$s(t_i)=\{a_1,a_2,......a_N\}$, $t=t_1,t_2,......t_N$. Пример дискретного сигнала – показания прибора фиксируемые оператором через минуту.

Цифровой сигнал (digital signal) квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Он описывается квантованной решетчатой функцией $y_n = Q_k[(n\Delta t)](n\Delta t)$, где Q_k - функция квантования с числом уровней квантования k, при этом интервалы квантования могут быть как с равномерным распределением, так и с неравномерным, например - логарифмическим. Задается цифровой сигнал, как правило, в виде дискретного ряда (discrete series) числовых данных - числового массива по последовательным значениям аргумента при Δt = cons, но в общем случае сигнал может задаваться и в виде таблицы для произвольных значений аргумента.

По существу, цифровой сигнал по своим значениям (отсчетам) является формализованной разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр, как это показано на рисунке 2.14. Цифровой сигнал конечен по множеству своих значений. Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число цифровых значений называется квантованием по уровню, а возникающие при квантовании ошибки округления отсчетов (отбрасываемые значения) – шумами (noise) или ошибками (error) квантования (quantization).

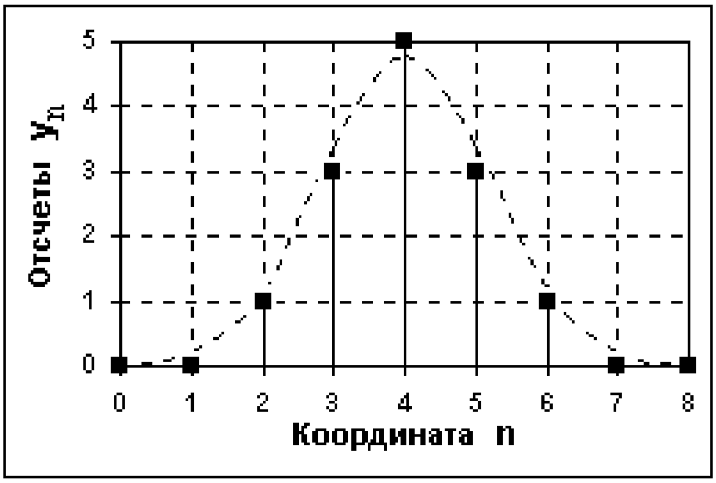

Рисунок 2.14 - Цифровой сигнал

В системах цифровой обработки данных и в ЭВМ сигнал всегда представлен с точностью до определенного количества разрядов, а, следовательно, всегда является цифровым. С учетом этих факторов при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов. Что касается формы обращения цифровых сигналов в системах хранения, передачи и обработки, то, как правило, они представляет собой комбинации коротких одно- или двуполярных импульсов одинаковой амплитуды, которыми в двоичном коде с определенным количеством числовых разрядов кодируются числовые последовательности сигналов (массивов данных).

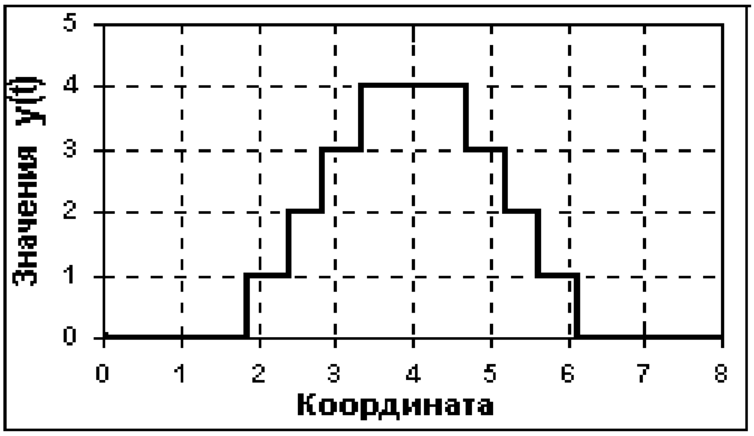

Рисунок 2.15 - Дискретно-аналоговый сигнал

Квантованными по своим значениям могут быть и аналоговые сигналы, зарегистрированные соответствующей аппаратурой (рисунок 2.15), которые принято называть дискретно-аналоговыми. Но выделять эти сигналы в отдельный тип не имеет смысла - они остаются аналоговыми кусочно-непрерывными сигналами с шагом квантования, который определяется допустимой погрешностью измерений.

Большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело при обработке геофизических данных, являются аналоговыми по своей природе, дискретизированными и квантованными в силу методических особенностей измерений или технических особенностей регистрации, т.е. преобразованными в цифровые сигналы. Но существуют и сигналы, которые изначально относятся к классу цифровых, как, например отсчеты количества гамма-квантов, зарегистрированных по последовательным интервалам времени.

Преобразования типа сигналов. Формы математического отображения сигналов, особенно на этапах их первичной регистрации и в прямых задачах описания физических процессов, как правило, отражают их физическую природу. Однако последнее не является обязательным и зависит от методики измерений и технических средств преобразования, передачи, хранения и обработки сигналов. На разных этапах процессов получения и обработки информации как материальное представление сигналов в устройствах регистрации и обработки, так и формы их математического описания при анализе данных, могут изменяться путем соответствующих операций преобразования типа сигналов.

Операция дискретизации (discretization) осуществляет преобразование аналоговых сигналов (функций), непрерывных по аргументу, в функции мгновенных значений сигналов по дискретному аргументу. Дискретизация обычно производится с постоянным шагом по аргументу (*равномерная дискретизация*), при этом $s(t) \Rightarrow s(n\Delta t)$, где значения $s(n\Delta t)$ представляют собой отсчеты функции $s(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t, n = 0,1,2.......N$. Частота, с которой выполняются замеры аналогового сигнала, называется *частотой дискретизации*. В общем случае, сетка отсчетов по аргументу может быть произвольной, как, например, $s(t) \Rightarrow s(t_k),\ k = 1,2,....K$, или задаваться по определенному закону. В результате дискретизации непрерывный (*аналоговый*) сигнал переводится в последовательность чисел.

Операция восстановления аналогового сигнала из его дискретного представления обратная операции дискретизации и представляет, по существу, интерполяцию данных.

Дискретизация сигналов может приводить к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами. Однако существуют условия, определенные теоремой Котельникова, согласно которой аналоговый сигнал с ограниченным частотным спектром может быть без потерь информации преобразован в дискретный сигнал, и затем абсолютно точно восстановлен по значениям своих дискретных отсчетов.

Как известно, любая непрерывная функция может быть разложена на конечном отрезке в ряд Фурье, т.е. представлена в спектральной форме - в виде суммы ряда синусоид с кратными (нумерованными) частотами с определенными амплитудами и фазами. У относительно гладких функций спектр быстро убывает (коэффициенты модуля спектра быстро стремятся к нулю). Для представления "изрезанных" функций, с разрывами и "изломами", нужны синусоиды с большими частотами. Говорят, что сигнал имеет *ограниченный спектр*, если после определенной частоты F все коэффициенты спектра равны нулю, т.е. сигнал представляется в виде конечной суммы ряда Фурье.

Теоремой Котельникова устанавливается, что если спектр сигнала ограниченный частотой F, то после дискретизации сигнала с частотой не менее 2 F можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно выполнить интерполяцию цифрового сигнала "между отсчетами" специальной функцией .

На практике эта теорема имеет огромное значение. Например, известно, что диапазон звуковых сигналов, воспринимаемых человеком, не превышает 20 кГц. Следовательно, при дискретизации записанных звуковых сигналов с частотой не менее 40 кГц мы можем точно восстановить исходный аналоговый сигнал по его цифровым отсчетам, что и выполняется в проигрывателях компакт-дисков для восстановления звука. Частота дискретизации звукового сигнала при записи на компакт-диск составляет 44000 Гц.

Операция квантования или аналого-цифрового преобразования (АЦП; английский термин Analog-to-Digital Converter, ADC) заключается в преобразовании дискретного сигнала $s(t_n)$ в цифровой сигнал $s(n) = s_n \approx s(t_n),\ n = 1,2,....N$, как правило, кодированный в двоичной системе счисления. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню (quantization), а возникающие при этом потери информации за счет округления – ошибками или шумами квантования (quantization error, quantization noise).

При преобразовании аналогового сигнала непосредственно в цифровой сигнал операции дискретизации и квантования совмещаются.

Операция цифро-аналогового преобразования (ЦАП; Digital-to-Analog

Converter, DAC) обратна операции квантования, при этом на выходе регистрируется либо дискретно-аналоговый сигнал $s(t_n)$, который имеет ступенчатую форму (рисунок 2.15), либо непосредственно аналоговый сигнал $s(t)$, который восстанавливается из $s(t_n)$, например, путем сглаживания.

Так как квантование сигналов всегда выполняется с определенной и неустранимой погрешностью (максимум - до половины интервала квантования), то операции АЦП и ЦАП не являются взаимно обратными с абсолютной точностью.

Алиасинг. Что произойдет, если спектр аналогового сигнала был неограниченным или имел частоту, выше частоты дискретизации?

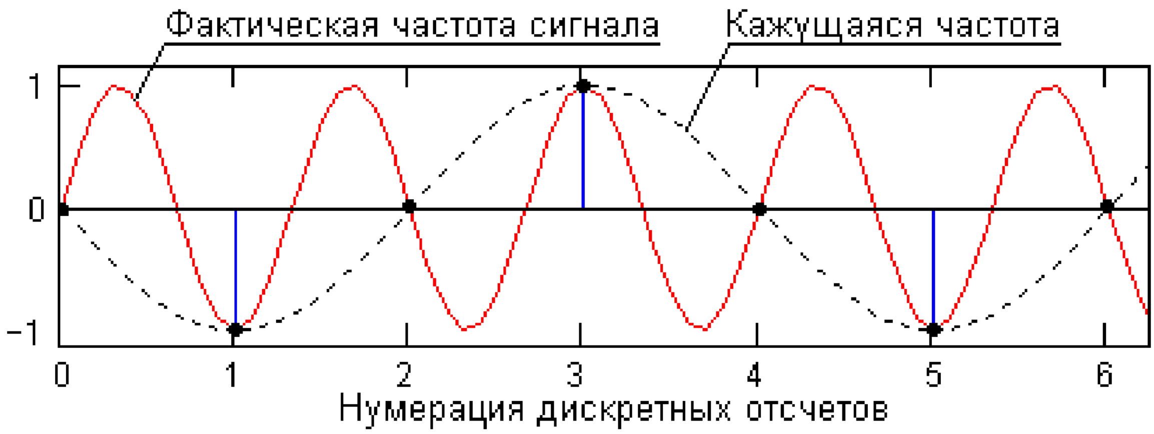

Рисунок 2.16 - Появление кажущейся частоты при дискретизации.

Предположим, что при записи акустического сигнала оркестра в помещении от какого-то устройства присутствует ультразвуковой сигнал с частотой 30 кГц. Запись выполняется с дискретизацией сигнала на выходе микрофона с типовой частотой 44.1 кГц. При прослушивании такой записи с использованием ЦАП мы услышим шумовой сигнал на частоте $30 - 44.1/2 \approx 8$ кГц. Восстановленный сигнал будет выглядеть так, как если бы частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации, "зеркально" от нее отразились в нижнюю часть спектра и сложились с присутствующими там гармониками. Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот* (aliasing). Эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров. Природу эффекта можно наглядно видеть на рисунке 2.16. Аналогично в главный частотный диапазон дискретных сигналов "отражаются" от частоты дискретизации и все высокочастотные шумы, присутствующие в исходном аналоговом сигнале.

Для предотвращения алиасинга следует повышать частоту дискретизации или ограничить спектр сигнала перед оцифровкой *фильтрами низких частот* (*НЧ-фильтры*, *low-pass filters*), которые пропускают без изменения все частоты, ниже заданной, и подавляют в сигнале частоты, выше заданной. Эта граничная частота называется *частотой среза* (*cutoff frequency*) фильтра. Частота среза анти-алиасинговых фильтров устанавливается равной половине частоты дискретизации. В реальные АЦП почти всегда встраивается анти-алиасинговый фильтр.

Тестовые сигналы (test signal). В качестве тестовых сигналов, которые применяются при моделировании и исследовании систем обработки данных, обычно используются сигналы простейшего типа: гармонические синус-косинусные функции, дельта-функция и функция единичного скачка.

Дельта-функция или функция Дирака. По определению, дельта-функция описывается следующими математическими выражениями (в совокупности):

$$\delta(t-\tau)=0, \text{ при } t \neq \tau; \tag{2.18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = 1. \tag{2.19}$$

Функция $\delta(t-\tau)$ не является дифференцируемой, и имеет размерность, обратную размерности ее аргумента, что непосредственно следует из безразмерности результата интегрирования. Значение дельта-функции равно нулю везде за исключением точки τ, где она представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечно большой амплитудой, при этом площадь импульса равна 1.

Дельта-функция является полезной математической абстракцией. На практике такие функции не могут быть реализованы с абсолютной точностью, так как невозможно реализовать значение, равное бесконечности, в точке $t=\tau$ на аналоговой временной шкале, т.е. определенной по времени также с бесконечной точностью. Но во всех случаях, когда площадь импульса равна 1, длительность импульса достаточно мала, а за время его действия на входе какой-либо системы сигнал на ее выходе практически не изменяется (реакция системы на импульс во много раз больше длительности самого импульса), входной сигнал можно считать *единичной импульсной функцией* со свойствами дельта - функции.

При всей своей абстрактности дельта - функция имеет вполне определенный физический смысл. Представим себе импульсный сигнал прямоугольной формы $\Pi(t-\tau)$ длительностью θ, амплитуда которого равна $\frac{1}{\theta}$, а площадь соответственно равна 1. При уменьшении значения длительности θ импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, равную 1, и возрастает по амплитуде. Предел такой операции при $\theta \Rightarrow 0$ и носит название дельта - импульса. Этот сигнал $\delta(t-\tau)$ сосредоточен в одной координатной точке $t=\tau$, конкретное амплитудное значение сигнала не определено, но площадь (интеграл) остается равной 1. Это не мгновенное значение функции в точке $t=\tau$, а именно импульс (импульс силы в механике, импульс тока в электротехнике и т.п.) – математическая модель короткого действия, значение которого равно 1.

Дельта-функция обладает *фильтрующим свойством*. Суть его заключается в том, что если дельта-функция $\delta(t-\tau)$ входит под интеграл какой-либо функции в качестве множителя, то результат интегрирования равен значению подынтегральной функции в точке τ расположения дельта-импульса, т.е.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau). \tag{2.20}$$

Интегрирование в этом выражении может ограничиваться ближайшими окрестностями точки τ.

Функция единичного скачка или функция Хевисайда иногда называется также функцией включения. Полное математическое выражение функции:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 0.5, & \text{если } t = 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

При моделировании сигналов и систем значение функции скачка в точке $t = 0$ очень часто принимают равным 1, если это не имеет принципиального значения.

Функция единичного скачка используется при создании математических моделей сигналов конечной длительности. При умножении любой произвольной функции, в том числе периодической, на прямоугольный импульс, сформированный из двух последовательных функций единичного скачка

$$s(t) = \sigma(t) - \sigma(t-T), \tag{2.22}$$

из нее вырезается участок на интервале $0 \div T$, и обнуляются значения функции за пределами этого интервала.

Функция Кронекера. Для дискретных и цифровых систем разрешающая способность по аргументу сигнала определяется интервалом его дискретизации Δt. Это позволяет в качестве единичного импульса использовать дискретный интегральный аналог дельта-функции - функцию единичного отсчета $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$, которая равна 1 в координатной точке $k = n$, и нулю во всех остальных точках. Функция $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$ может быть определена для любых значений Δt = const, но только для целых значений координат k и n, поскольку других номеров отсчетов в дискретных функциях не существует.

Математические выражения $\delta(t-\tau)$ и $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$ называют также импульсами Дирака и Кронекера. Однако, применяя такую терминологию, не будем забывать, что это не просто единичные импульсы в координатных точках τ и $n\Delta t$, а полномасштабные импульсные функции, определяющие как значения импульсов в определенных координатных точках, так и нулевые значения по всем остальным координатам, в пределе от -∞ до ∞.