

# **1 Введение в цифровую обработку сигналов**

## **1.1 Задачи, решаемые с применением ЦОС**

Физические величины макромира, как основного объекта наших измерений и источника информационных сигналов, как правило, имеют непрерывную природу и отображаются непрерывными (аналоговыми) сигналами. Цифровая обработка сигналов (ЦОС или DSP - digital signal processing) работает исключительно с дискретными величинами, причем с дискретизацией или квантованием как по координатам динамики своих изменений (по времени, в пространстве, и любым другим изменяемым параметрам), так и по амплитудным значениям физических величин. Математика дискретных преобразований зародилась еще в 18 веке в рамках теории рядов и их применения для интерполяции и аппроксимации функций, однако ускоренное развитие она получила в 20 веке после появления первых вычислительных машин. В принципе, в своих основных положениях математический аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных требует учета этого фактора, а его игнорирование может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

Фактором быстрого развития дискретной математики является и то, что стоимость цифровой обработки данных ниже аналоговой и продолжает снижаться, даже при очень сложных ее видах, а производительность вычислительных операций непрерывно возрастает. Немаловажным является также и то, что системы ЦОС отличаются высокой гибкостью. Их можно дополнять новыми программами и перепрограммировать на выполнение различных функций без изменения оборудования.

Применение ЦОС идет наиболее быстрыми темпами в следующих областях.

### **Разработка и производство процессоров ЦОС.**

Обработка данных в реальном времени обычно выполняется на специальных процессорах (чипах) ЦОС. Они, как правило, имеют:

- встроенные умножители или умножители-накопители, работающие параллельно;
- отдельные шины и области памяти для программ и данных;
- команды организации циклов;
- большие скорости обработки данных и тактовые частоты;
- использование конвейерных методов обработки данных.

### **Запись, воспроизведение, использование звука.**

Цифровое микширование – регулирование и смешивание многоканальных аудиосигналов от различных источников. Оно осуществляется с помощью аудиоэквалайзеров (наборов цифровых полосовых фильтров с регулируемыми характеристиками), смесителей и устройств создания специальных эффектов (реверберация, динамическое выравнивание и т.д.).

Синтезаторы речи представляют собой достаточно сложные устройства генерации голосовых звуков. Микросхемы синтезаторов вместе с процессорами обычно

содержат в ПЗУ словари слов и фраз в форме кадров (25 мс речи) с внешним управлением интонацией, акцентом и диалектом, что позволяет на высоком уровне имитировать человеческую речь.

Распознавание речи активно изучается и развивается, особенно для целей речевого ввода информации в компьютеры. Как правило, в режиме обучения выполняется их настройка на речь пользователя, в процессе которой система оцифровывает и создает в памяти эталоны слов. В режиме распознавания речь также оцифровывается и сравнивается с эталонами в памяти. Системы распознавания речи внедряются и в товары бытового назначения (набор телефонных номеров, включение/выключение телевизора, и пр.).

Аудиосистемы воспроизведения компакт-дисков при плотности записи выше  $10^6$  бит на  $\text{мм}^2$  обеспечивают очень высокую плотность хранения информации. Аналоговый звуковой сигнал в стереоканалах дискретизируется с частотой 44.1 кГц и оцифровывается 16-битным кодом. При записи на диск сигналы модулируются (EFM – преобразование 8-ми разрядного кода в 14-ти разрядный для надежности), при считывании сигналы демодулируются, исправляются и маскируются ошибки (по возможности) и выполняется цифро-аналоговое преобразование.

#### **Применение ЦОС в телекоммуникациях.**

Цифровая сотовая телефонная сеть – двусторонняя телефонная система с мобильными телефонами через радиоканалы и связью через базовые радиостанции. Мировым стандартом цифровой мобильной связи является система GSM. Частотный диапазон связи 890-960 МГц, частотный интервал канала 200 кГц, скорость передачи информации 270 кбит/с. В мобильной связи ЦОС используется для кодирования речи, выравнивания сигналов после многолучевого распространения, измерения силы и качества сигналов, кодирования с исправлением ошибок, модуляции и демодуляции.

Цифровое телевидение дает потребителям интерактивность, большой выбор, лучшее качество изображения и звука, доступ в Интернет. ЦОС в цифровом телевидении играет ключевую роль в обработке сигналов, кодировании, модуляции/демодуляции видео- и аудиосигналов от точки захвата до момента появления на экране. ЦОС лежит в основе алгоритмов кодирования MPEG, которые используются для сжатия сигналов перед их передачей и при декодировании в приемниках.

#### **ЦОС в биомедицине.**

Основное назначение – усиление сигналов, которые обычно не отличаются хорошим качеством, и/или извлечение из них информации, представляющей определенный интерес, на фоне существенного уровня шумов и многочисленных артефактов (ложных изображений как от внешних, так и от внутренних источников). Так, например, при снятии электрокардиограммы плода регистрируется электрическая активность сердца ребенка на поверхности тела матери, где также существует определенная электрическая активность, особенно во время родов. Применение ЦОС во многих областях медицины позволяет переходить от чисто качественных показателей к объективным количественным оценкам, как например, в анестезии к оценке глубины анестетического состояния пациента при операции по электрической активности мозга.

#### **Измерительно-вычислительные комплексы и системы.**

К данному направлению относятся:

- информационно-измерительные (комплексы);
- системы контроля и управления;
- системы испытаний;
- информационно-справочные системы;
- экспертные системы;
- автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП).

В основе любого измерения лежит сравнение исследуемой физической величины с аналогичной величиной определенного размера, принятой за единицу. Суть измерения состоит в определении числового значения физической величины. Этот процесс называют измерительным преобразованием, подчеркивая связь измеряемой физической величины с полученным числом. Можно представить однократное преобразование или цепочку преобразований измеряемой физической величины в иную величину, и конечной целью преобразования является получение числа (рис. 1). Более строго это можно представить как получение информации о физической величине и такое ее преобразование, с помощью которого определяют соотношение измеряемой физической величины и единицы этой величины.

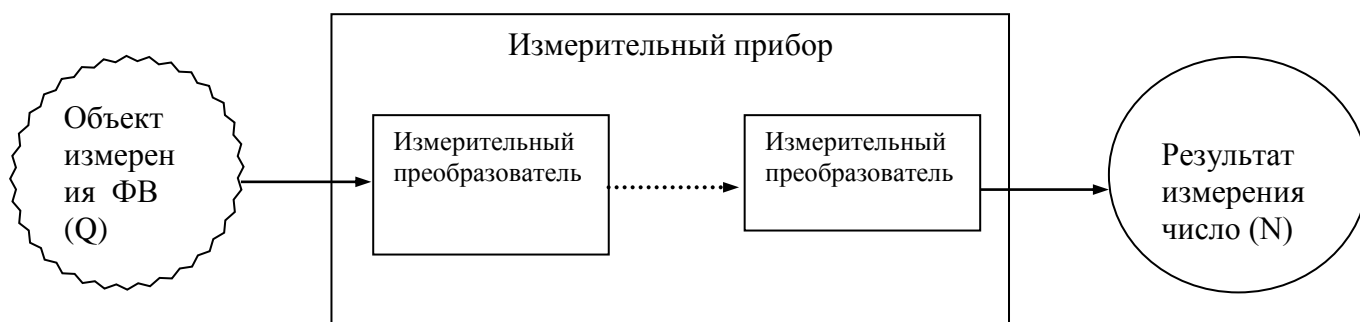


Рисунок 1.1 - Измерение как преобразование измеряемой физической величины в число

Измерительное преобразование всегда осуществляется с использованием некоего физического закона или эффекта, который рассматривают как принцип, являющийся основой измерения.

## 1.2 Понятие сигнала

В XVIII веке в теорию математики вошло понятие функции, как определенной зависимости какой-либо величины  $y$  от другой величины – независимой переменной  $x$ , с математической записью такой зависимости в виде  $y(x)$ . Довольно скоро математика функций стала базовой основой теории всех естественных и технических наук. Особое значение функциональная математика приобрела в технике связи, где

временные функции вида  $s(t)$ ,  $v(f)$  и т.п., используемые для передачи информации, стали называть сигналами.

В технических отраслях знаний термин "сигнал" (signal, от латинского *signum* – знак) очень часто используется в широком смысловом диапазоне, без соблюдения строгой терминологии. Под ним понимают и техническое средство для передачи, обращения и использования информации – электрический, магнитный, оптический сигнал; и физический процесс, представляющий собой материальное воплощение информационного сообщения – изменение какого-либо параметра носителя информации (напряжения, частоты, мощности электромагнитных колебаний, интенсивности светового потока и т.п.) во времени, в пространстве или в зависимости от изменения значений каких-либо других аргументов (независимых переменных); и смысловое содержание определенного физического состояния или процесса, как, например, сигналы светофора, звуковые предупреждающие сигналы и т.п. Все эти понятия объединяет конечное назначение сигналов. Это определенные сведения, сообщения, информация о каких-либо процессах, состояниях или физических величинах объектов материального мира, выраженные в форме, удобной для передачи, обработки, хранения и использования этих сведений.

Термин “сигнал” очень часто отождествляют с понятиями “данные” (data) и “информация” (information). Действительно, эти понятия взаимосвязаны и не существуют одно без другого, но относятся к разным категориям.

Понятие информации имеет много определений, от наиболее широкого (информация есть формализованное отражение реального мира) до практического (сведения и данные, являющиеся объектом хранения, передачи, преобразования, восприятия и управления). В настоящее время мировая наука все больше склоняется к точке зрения, что информация, наряду с материей и энергией, принадлежит к фундаментальным философским категориям естествознания и относится к одному из свойств объективного мира, хотя и несколько специфичному. Что касается “данных” (от латинского *datum* – факт), то это совокупность фактов, результатов наблюдений, измерений о каких-либо объектах, явлениях или процессах материального мира, представленных в формализованном виде, количественном или качественном. Это не информация, а только атрибут информации – сырье для получения информации путем соответствующей обработки и интерпретации (истолкования).

Термин "signal" в мировой практике является общепринятым для характеристики формы представления данных, при которой данные рассматриваются как результат некоторых измерений объекта исследований в виде последовательности значений скалярных величин (аналоговых, числовых, графических и пр.) в зависимости от изменения каких-либо переменных значений (времени, энергии, температуры, пространственных координат, и пр.). С учетом этого, в дальнейшем под термином “сигнал” в узком смысле этого слова будем понимать каким-либо образом упорядоченное *отображение* в изменении физического состояния какого-либо объекта – материального носителя сигнала, определенных данных о характере изменения в пространстве, во времени или по любой другой переменной физических величин, физических свойств или физического состояния объекта исследований. А так как данные содержат информацию, как об основных целевых параметрах объекта исследований, так и о различных сопутствующих и мешающих факторах измерений,

то в широком смысле этого слова можно считать, что сигнал является носителем общей измерительной информации. При этом материальная форма носителей сигналов (механическая, электрическая, магнитная, акустическая, оптическая и любая другая), равно как и форма отображения в каких-либо физических параметрах или процессах носителей, значения не имеет. Информативным параметром сигнала может являться любой параметр носителя сигнала, функционально связанный со значениями информационных данных.

Сигнал, в самом общем смысле, это зависимость одной величины от другой, и с математической точки зрения представляет собой функцию. Наиболее распространенное представление сигналов - в электрической форме в виде зависимости напряжения от времени  $U(t)$ . Так, например, сигнал изменения напряженности магнитного поля по профилю аэросъемки – это и временная последовательность изменения электрического напряжения на выходе датчика аэромагнитометра, и запись этого напряжения на ленте регистратора, и последовательные значения цифровых отсчетов при обработке лент регистратора и вводе сигнала в ЭВМ.



Рисунок 1.2 - Сигнал

*Сигнал - это информационная функция, несущая сообщение о физических свойствах, состоянии или поведении какой-либо физической системы, объекта или среды, а целью обработки сигналов можно считать извлечение определенных информационных сведений, которые отображены в этих сигналах (кратко - полезная или целевая информация) и преобразование этих сведений в форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования.*

Под "анализом" сигналов (analysis) имеется в виду не только их чисто математические преобразования, но и получение на основе этих преобразований выводов о специфических особенностях соответствующих процессов и объектов. Целями анализа сигналов обычно являются:

- определение или оценка числовых параметров сигналов (энергия, средняя мощность, среднее квадратическое значение и пр.);

- разложение сигналов на элементарные составляющие для сравнения свойств различных сигналов;

- сравнение степени близости, "похожести", "родственности" различных сигналов, в том числе с определенными количественными оценками.

Математический аппарат анализа сигналов весьма обширен, и широко применяется на практике во всех без исключения областях науки и техники.

С понятием сигнала неразрывно связан термин *регистрации* сигналов, использование которого также широко и неоднозначно, как и самого термина сигнал. В наиболее общем смысле под этим термином можно понимать операцию выделения сигнала и его преобразования в форму, удобную для дальнейшего использования. Так, при получении информации о физических свойствах каких-либо объектов, под регистрацией сигнала понимают процесс измерения физических свойств объекта и перенос результатов измерения на материальный носитель сигнала или непосредственное энергетическое преобразование каких-либо свойств объекта в информационные параметры материального носителя сигнала (как правило - электрического). Но так же широко термин регистрации сигналов используют и для процессов выделения уже сформированных сигналов, несущих определенную информацию, из суммы других сигналов (радиосвязь, телеметрия и пр.), и для процессов фиксирования сигналов на носителях долговременной памяти, и для многих других процессов, связанных с обработкой сигналов.

Применительно к настоящему курсу под термином регистрации (сохранения, архивирования) будем понимать *регистрацию данных* (data logging) которые проходят через конкретную систему или точку системы и определенным образом фиксируются на каком-либо материальном носителе или в памяти системы. Что касается процесса получения информации при помощи технических средств, обеспечивающих опытным путем нахождение соотношения измеряемой величины с принятой по определению образцовой единицей этой величины, и представление измеренного соотношения в какой-либо физической или числовой форме информационного сигнала, то для этого процесса будем применять, в основном, термин определения или измерения (*детектирования*).

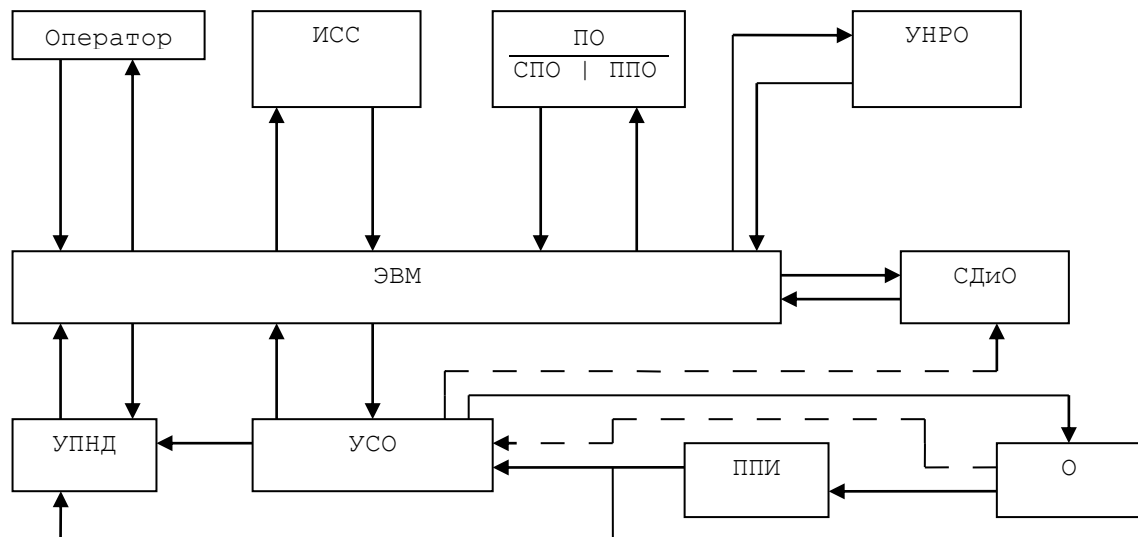
Аналоговый сигнал (analog signal) является непрерывной функцией непрерывного аргумента, т.е. определен для любого значения аргументов. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени, в пространстве или по любой другой независимой переменной, при этом регистрируемый сигнал подобен ("аналогичен") порождающему его процессу.

Дискретный сигнал (discrete signal) по своим значениям также является непрерывной функцией, но определенной только по дискретным значениям аргумента.

### 1.3 Структурная организация системы цифровой обработки сигналов

Обобщенная структурная схема системы цифровой обработки сигналов (СЦОС) приведена на рисунке 1.3.

СЦОС характеризуется наличием специальных аппаратных, алгоритмических, программных и информационных средств. В зависимости от числа Входов и выходов различают одноканальные и многоканальные СЦОС.



- О - объект исследования;
- ППИ - предварительный преобразователь информации;
- УСО - устройство связи с объектом;
- УПНД - устройство предварительного накопления данных;
- СДиО - средства документирования и отображения;
- ИСС - информационно-справочная система;
- ПО - программное обеспечение, системное (СПО) и прикладное (ППО);
- УНРО - устройство накопления результатов обработки.

Рисунок 1.3 - Обобщенная структурная схема системы цифровой обработки сигналов

Первичные преобразователи информации осуществляют преобразование физической величины (температура, давление, перемещение и т.д.) в электрический сигнал (ток, заряд, напряжение). В большинстве случаев объект исследований предполагает выбор типа ППИ, однако при выборе конкретного ППИ следует обратить внимание на его устойчивость к воздействию возмущающих факторов, помех и согласование с устройством связи и объектом (УСО).

УСО предназначено для преобразователя электрической величины в число или числовую последовательность и их ввода в ЭВМ.

Устройство предварительного накопления данных используется, если это допускается решаемой задачей, для предварительной записи и сохранения данных о поведении объекта на протяжении некоторого интервала времени с целью их после-

дующей, возможно, внимательной и тщательной обработки. Наиболее показательным примером такого устройства является "черный ящик", устанавливаемый на самолетах. В качестве носителя информации чаще всего используется магнитная лента.

Устройство накопления результатов обработки применяется для оперативного сохранения обработанных данных и протоколов, чтобы не замедлять ход вычислительного процесса; для этого можно использовать магнитные диски или ленты.

Средства документирования и отображения осуществляют вывод данных в форме, удобной для восприятия человеком. Это могут быть принтеры, графопостроители, видеосистемы.

Во многих случаях работа СЦОС должна поддерживаться информационно-справочными системами (ИСС) или базами данных, которые могут пополняться как извне, так и в ходе работы СОД.

Электронная вычислительная машина является вычислительным ядром СЦОС. Она решает задачи, необходимые при обработке данных для конкретных целей. В СЦОС могут использоваться универсальные специализированные или универсальные машины, дополненные специализированными устройствами или процессорами. Например, сопроцессор для выполнения операций над числами, представленными в форме с плавающей запятой; матричный умножитель; векторный сопроцессор; сопроцессор БПФ и т.п. Выбор той или иной конфигурации СОД определяется технико-экономическими показателями, предъявленными к системе.

#### 1.4 Первичные преобразователи информации

Назначение первичных преобразователей информации заключается в осуществлении преобразования исследуемой физической величины в электрический сигнал. Датчики работают в более тяжелых условиях эксплуатации чем электронные устройства обработки, и могут подвергаться температурным и атмосферным воздействиям, электромагнитным излучениям, деформации и т.п. По принципу действия датчики разделяются на две группы: параметрические и генераторные.

Параметрические датчики преобразуют физическую величину в параметры электрической цепи: сопротивление, емкость, индуктивность и поэтому для их работы необходимы вспомогательные источники электрической энергии.

Генераторные датчики преобразуют неэлектрическую энергию входного сигнала пропорционально значению физической величины в электрическую энергию и не нуждаются в вспомогательных источниках.

По виду, входного воздействия, датчики подразделяются на датчики перемещения, скорости, ускорения, температуры, давления, расхода, состава вещества и т.п.

По виду выходного сигнала различают датчики сопротивления, емкостные и индуктивные, датчики постоянного или переменного тока или напряжения, датчики частоты, длительности импульсов и т.п.



#### 1.4.1 Параметрические датчики

Патенциометрические датчики применяются для преобразования угловых или линейных перемещений в электрический сигнал. Этот датчик представляет собой переменный резистор, который может включаться по схеме реостата или по схеме патенциометра.

Тензометрические датчики применяются для преобразования механических деформаций в электрический сигнал. Наиболее распространены, тензорезисторы, у которых при внешних воздействиях изменяется активное сопротивление чувствительного сопротивления.

Индуктивные датчики применяются для преобразования в электрический сигнал небольших линейных и угловых перемещений. Простейший датчик- катушка индуктивности и подвижный железный сердечник. Когда сердечник перемещается, внутри катушки изменяется сопротивление магнитной цепи датчика, в следствии изменения величины воздушного зазора.

Фотоэлектрические датчики преобразуют в электрический сигнал различные физические параметры(перемещение, скорость, размер движущихся деталей). Принцип действия состоит в преобразовании одного из параметров светового потока неэлектрической величины, а затем изменение светового потока в электрический сигнал.

#### 1.4.2 Генераторные датчики

К ним относятся:

- термоэлектрические (термопары);
- пьезоэлектрические датчики, действие которых основано на свойстве пьезоэффекта (формирование на обкладках пьезокристалла заряда при деформациях);
- тахометрические, преобразующие в электрический сигнал частоту обращения подвижных частей.

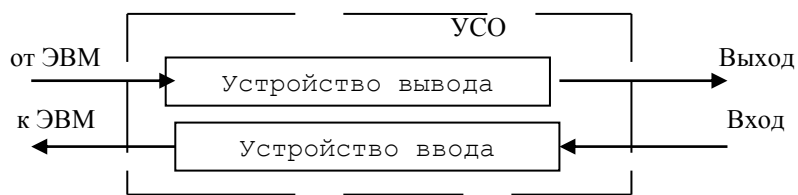
Коэффициент преобразования – основная характеристика датчика. Она показывает, сколько единиц электрической величины на выходе датчика соответствует единице физической величины.

Датчики также имеют амплитудно-частотную и амплитудную характеристики.

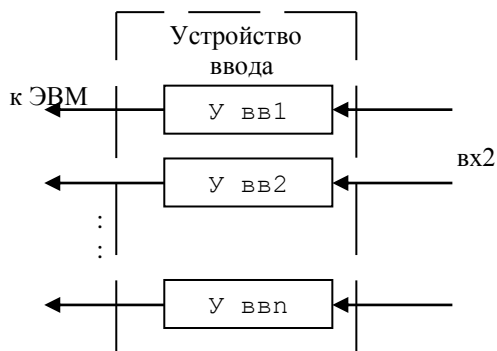
#### 1.5 Устройства ввода данных

В тех случаях, когда СЦОС обрабатывает данные, поступающие непосредственно от объекта, важную роль играет устройство связи с объектом (УСО). УСО может состоять из устройства ввода данных (УВв) или из УВв и устройства вывода (УВыв), если система замкнутая. В свою очередь устройства ввода и вывода подразделяются на одноканальные и многоканальные. Некоторые примеры структур УСО приведены на рисунке 1.4.

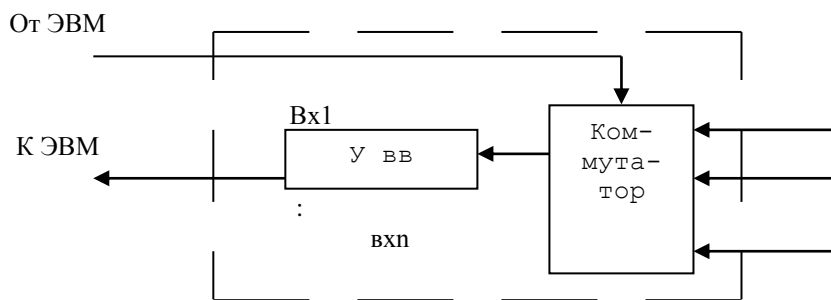
Устройство ввода предназначено для преобразования непрерывных входных сигналов в последовательность цифровых кодов, вводимых в ЭВМ. Структурная схема УВв изображена на рисунке 1.5. Все блоки, входящие в состав УВв, могут быть программно-доступными или программно-управляемыми со стороны ЭВМ, что обеспечивает возможность автоматической подстройки их режимов работы в ходе обработки данных.



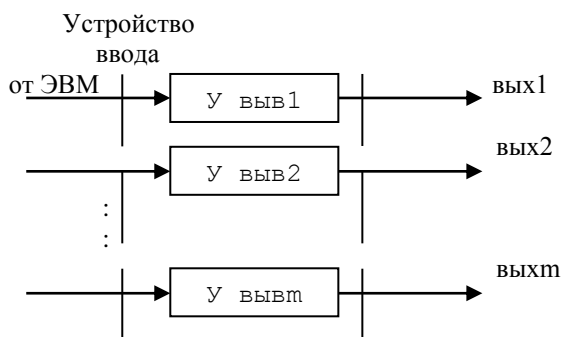
а) Устройство связи с объектом и одноканальным входом и выходом



б) Многоканальное устройство ввода с параллельными каналами

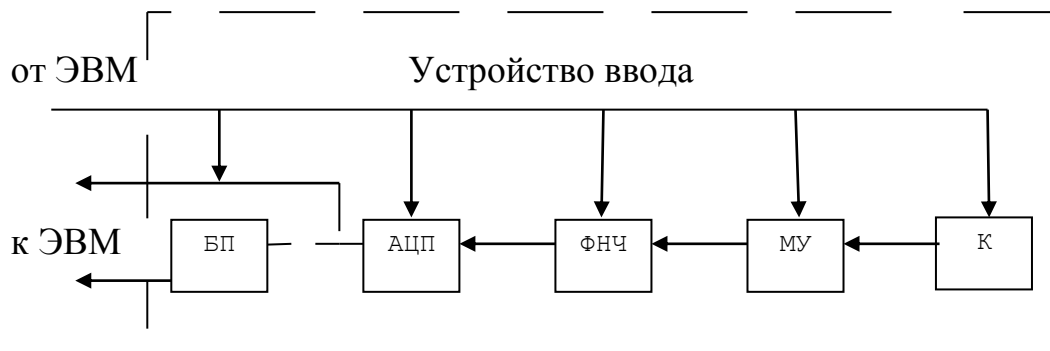


в) Многоканальное устройство ввода с коммутацией каналов на входе



в) Многоканальное устройство вывода с параллельными каналами

Рисунок 1.4 - Конфигурация УСО



К - коммутатор; МУ - масштабный усилитель; ФНЧ - фильтр нижних частот; АЦП - аналого-цифровой преобразователь; БП - буферная память

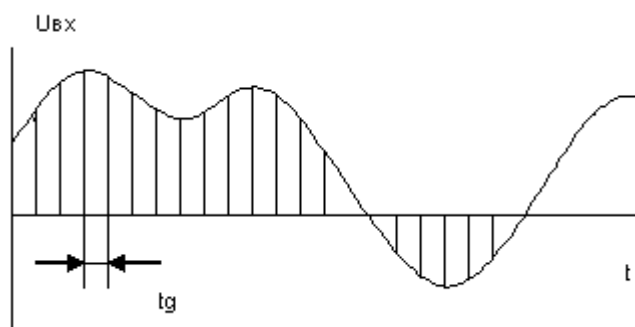
Рисунок 1.5 - Структурная схема устройства ввода

Коммутатор используется для многовходового УВв, если возможен поочередный ввод данных с различных входов. С его помощью осуществляется выбор требуемого входа. В одноканальных УВв он отсутствует. Переключение каналов желательно осуществлять программно.

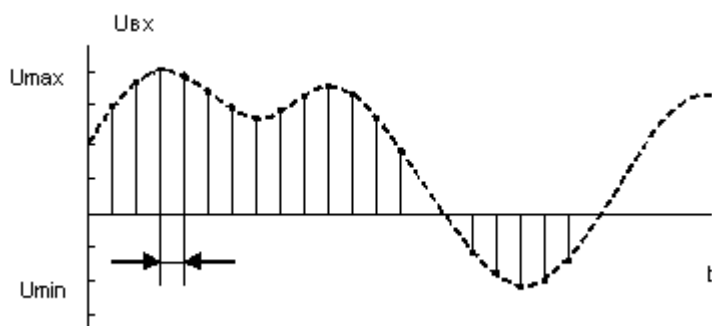
Масштабный усилитель предназначен для усиления или ослабления входного сигнала. Управлять уровнем входного сигнала необходимо потому, что АЦП накладывает ограничения на диапазон изменения входного сигнала, и требуется, чтобы входной сигнал попадал в этот диапазон.

Фильтр нижних частот (ФНЧ) осуществляет подавление высокочастотных помех и шумовых составляющих, которые, возможно, присутствуют в сигнале. Частота среза ( $f_{ср}$ ) ФНЧ должна быть выбрана такой, чтобы не произошло подавления информативной части сигнала. Желательно иметь возможность программно управлять частотой среза или осуществлять подключение того или иного фильтра, если их в УВв несколько.

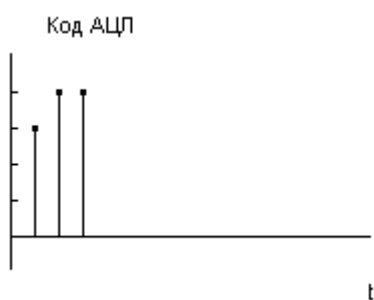
Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) производит дискретизацию сигнала и его преобразование в цифровые коды. Работа АЦП проиллюстрирована на рисунке 1.6.



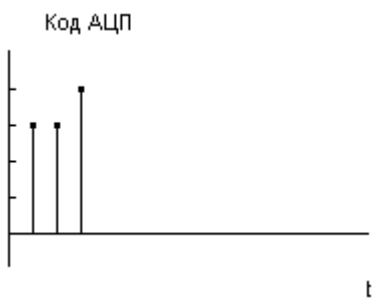
а) входной сигнал



б) дискретизованный сигнал



в) аналого-цифровое преобразование с округлением



г) аналого-цифровое преобразование с усечением

Рисунок 1.6 - Иллюстрация работы АЦП

При дискретизации осуществляется фиксация значений входного сигнала в определенные моменты времени, обычно следующие через постоянный интервал, называемый интервалом дискретизации.

Основными характеристиками непосредственно АЦП являются диапазон изменения входного сигнала (динамический диапазон) и разрядность АЦП.

Динамический диапазон входного сигнала определяется в соответствии с выражением:

$$U_{\text{д.АЦП}} = U_{\text{Вх,макс}} - U_{\text{Вх,мин}},$$

где  $U_{\text{Вх,макс}}$  - максимально-допустимый уровень на входе АЦП;

$U_{\text{Вх,мин}}$  - минимальный уровень на входе АЦП.

Разрядность АЦП - это число двоичных разрядов в коде, формируемом на выходе АЦП. Определяют также величину кванта АЦП, который показывает величину входного напряжения, соответствующего одной двоичной единице:

$$\Delta U = \frac{U_{\text{ДиапазонАЦП}}}{2^m - 1},$$

где  $\Delta U$  - квант АЦП;

$m$  - число двоичных разрядов.

Тогда код, соответствующий уровню входного сигнала  $U_{\text{Вх}}$ , такому, что  $U_{\text{Вх,мин}} \leq U_{\text{Вх}} \leq U_{\text{Вх,макс}}$ , определяется согласно формуле:

$$KOD_{\text{АЦП}} = \text{int} \left( \frac{U_{\text{Вх}} - U_{\text{Вх,мин}}}{\Delta U} + p_{\text{окр}} \right)$$

где  $\text{int}$  - обозначение операции взятия целой части;

$\Delta U$  - квант АЦП;

$p_{\text{окр}}$  - параметр округления. Если АЦП осуществляет преобразование в режиме округления  $p_{\text{окр}} = 0.5$ , если же в режиме усечения -  $p_{\text{окр}} = 0$ .

Минимальное время дискретизации  $t_{\text{д,мин}}$  АЦП определяет с какой максимальной частотой дискретизации можно получать цифровые коды на выходе АЦП:

$$F_{\text{д,макс}} = \frac{1}{t_{\text{д,мин}}}.$$

Коды с выхода АЦП принимаются для обработки в ЭВМ либо непосредственно, либо вначале накапливаются в буферной памяти (БП), из которой затем передаются в ЭВМ в удобное, с точки зрения вычислительного процесса, время.

## 1.6 Ввод данных в ЭВМ

Для осуществления ввода данных от устройств ввода в ЭВМ или, другими словами, организации интерфейса необходима аппаратная и программная поддержка.

Известны три основных способа передачи данных в ЭВМ.

1. Ввод данных по готовности. В этом случае со стороны ЭВМ осуществляется периодический опрос устройства ввода, и когда УВв устанавливает сигнал, означающий готовность к передаче, производится считывание данных из устройства ввода и их передача в ЭВМ. Этот способ хорош тогда, когда вычислительный процесс можно разбить на примерно одинаковые по времени интервалы, равные интервалу дискретизации. Если же такую разбивку сделать трудно, то возможны довольно значительные потери времени на ожидание ввода следующей порции данных,

### 2. Ввод данных по прерываниям

Здесь инициатором обмена является устройство ввода. После завершения процедуры преобразования УВв выставляет запрос на прерывание, поступающий в ЭВМ. И если прерывания для данного устройства в этот момент разрешены, осуществляет прерывание текущего вычислительного процесса, запускается процедура чтения данных и после ее завершения выполняется возврат в прерванный процесс. При таком подходе отсутствуют проблемы с разбивкой основного вычислительного процесса, однако возникают потери времени, связанные с сохранением и восстановлением состояния вычислительного процесса перед началом и после завершения процедуры обработки прерывания.

При организации ввода данных обоими способами имеет место опасность потери одного или нескольких отчетов, что особенно недопустимо в системах управления и реального времени. Если нет возможности бороться с такими потерями, например, путём инициирования повторного ввода данных, желательно иметь хотя бы средства (аппаратные или программные) обнаружения таких случаев с целью предупреждения конфликтных или аварийных ситуаций.

### 3. Прямой доступ в память

При этом способе большой блок данных пересылается из внешнего устройства (буферной памяти) в ОЗУ ЭВМ под управлением устройства прямого доступа. Инициатором такого обмена может быть как основной вычислительный процесс, так и УВв.

На время пересылки данных работа центрального процессора ЭВМ приостанавливается, однако выигрыш достаётся за счет того, что обмен путем прямого доступа выполняется значительно быстрее по сравнению с обычным.

Выбор того или иного способа ввода во многом диктуется характером решаемой задачи.

## 2 Сигналы и их свойства

### 2.1 Общие сведения о сигналах

#### 2.1.1 Шумы и помехи

При исследовании сигналов, несущих целевую для данного вида измерений информацию, в сумме с основным сигналом одновременно регистрируются и мешающие сигналы - шумы и помехи самой различной природы (рисунок 2.1). К помехам относят также искажения полезных сигналов при влиянии различных дестабилизирующих факторов на процессы измерений, как, например, влияние сетевой наводки. Выделение полезных составляющих из общей суммы зарегистрированных сигналов или максимальное подавление шумов и помех в информационном сигнале при сохранении его полезных составляющих является одной из основных задач первичной обработки сигналов (результатов наблюдений).

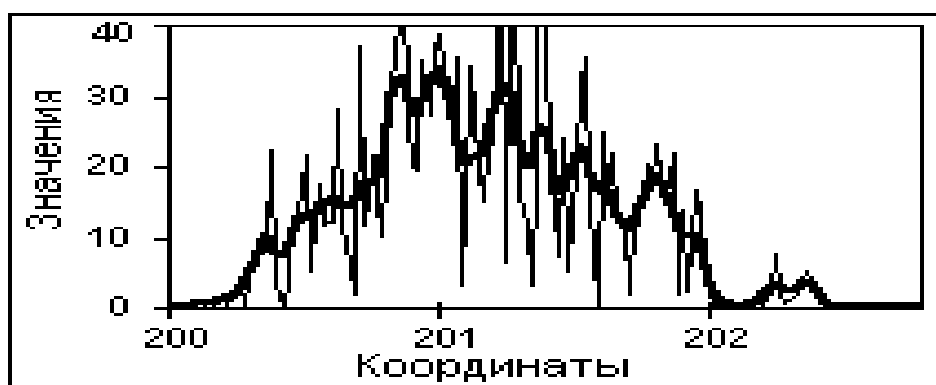


Рисунок 2.1 - Сигнал с помехами

Типы помех разделяют по источникам их возникновения, по энергетическому спектру, по характеру воздействия на сигнал, по вероятностным характеристикам и другим признакам.

Источники помех бывают внутренние и внешние.

Внутренние шумы могут быть присущи физической природе источников сигналов, как, например, тепловые шумы электронных потоков в электрических цепях или дробовые эффекты в электронных приборах, или возникают в измерительных устройствах и системах передачи и обработки сигналов от влияния различных дестабилизирующих факторов - температуры, повышенной влажности, нестабильно-



сти источников питания, влияния механических вибраций на гальванические соединения, и т.п.

Внешние источники шумов бывают искусственного и естественного происхождения. К искусственным источникам помех относятся промышленные помехи - двигатели, переключатели, генераторы сигналов различной формы и т.д. Естественными источниками помех являются молнии, флуктуации магнитных полей, всплески солнечной энергии, и т.д.

Электрические и магнитные поля различных источников помех вследствие наличия индуктивных, емкостных и резистивных связей создают на различных участках и цепях сигнальных систем паразитные разности потенциалов и токи, накладывающиеся на полезные сигналы.

Помехи подразделяются на флуктуационные, импульсные и периодические. Флуктуационные или шумовые помехи представляют хаотический и беспорядочный во времени процесс в виде нерегулярных случайных всплесков различной амплитуды. Как правило, флуктуационные помехи распределены по нормальному закону с нулевым средним и оказывают существенное влияние только на сигналы низкого уровня.

Импульсные помехи во многом похожи на шумовые помехи и проявляются как в виде отдельных импульсов, так и в виде последовательности импульсов, форма и параметры которых имеют случайный характер. Причинами импульсных помех являются резкие броски тока и напряжения в промышленных установках, транспортных средствах, а также природные электрические явления. Распределение импульсных помех симметричное с произвольной плотностью распределения.

Периодические помехи вызываются периодическими низкочастотными или высокочастотными полями линий электропередач, силовых электроустановок и др. Если основная мощность помех сосредоточена на отдельных участках диапазона частот, например, на частоте напряжения промышленной сети или кратна этой частоте, то такие помехи называют сосредоточенными.

В зависимости от характера воздействия на сигнал помехи разделяют на аддитивные и мультипликативные. Аддитивные (налагающиеся) помехи суммируются с сигналом, не зависят от его значений и формы и не изменяют информативной составляющей самого сигнала. Мультипликативные или деформирующие помехи могут изменять форму информационной части сигнала, иметь зависимость от его значений и от определенных особенностей в сигнале и т.п. При известном характере мультипликативных помех возможна коррекция сигнала на их влияние.

Следует заметить, что деление сигналов на полезные и мешающие (шумовые) является достаточно условным. Источниками мешающих сигналов также являются определенные физические процессы, явления или объекты. При выяснении природы мешающих сигналов они могут переводиться в разряд информационных. Так, например, вариации диаметра скважин является мешающим фактором практически для всех ядерно-физических методов каротажа. Вместе с тем этот же фактор, при соответствующем методическом и аппаратном обеспечении, может дать возможность бесконтактного определения диаметра скважин в качестве дополнительного информационного параметра.

### 2.1.2 Размерность сигналов

Простейшими сигналами являются одномерные сигналы, как, например, изменение температуры воздуха на протяжении суток. Значения одномерных сигналов зависят только от одной независимой переменной.

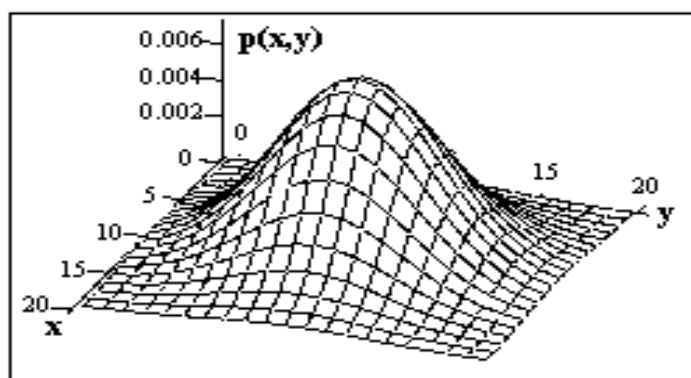


Рисунок 2.2 - Двумерный сигнал

В общем случае сигналы являются многомерными функциями пространственных, временных и прочих независимых переменных, например изменение спектра сигнала с течением времени. Все большее применение находят также многомерные сигналы, образованные некоторым множеством одномерных сигналов, как, например, комплексные каротажные измерения нескольких физических параметров горных пород по стволу скважины одновременно.

Многомерные сигналы могут иметь различное представление по своим аргументам. Так, полный акустический сигнал сейсмического профиля дискретен по пространству (точкам расположения приемников) и непрерывен по времени.

Многомерный сигнал может рассматриваться, как упорядоченная совокупность одномерных сигналов. С учетом этого при анализе и обработке сигналов многие принципы и практические методы обработки одномерных сигналов, математический аппарат которых развит достаточно глубоко, распространяются и на многомерные сигналы. Физическая природа сигналов для математического аппарата их обработки значения не имеет.

Вместе с тем обработка многомерных сигналов имеет свои особенности, и может существенно отличаться от одномерных сигналов в силу большего числа степеней свободы. Так, при дискретизации многомерных сигналов имеет значение не только частотный спектр сигналов, но и форма раstra дискретизации. Пример не очень полезной особенности - многомерные полиномы сигнальных функций, в отличие от одномерных, не разлагаются на простые множители. Что касается порядка размерности многомерных сигналов, то ее увеличение выше двух практически не

изменяет принципы и методы анализа данных, и сказывается, в основном, только на степени громоздкости формул и чисто техническом усложнении вычислений.

## 2.2 Математическое описание сигналов

Сигналы могут быть объектами теоретических исследований и практического анализа только в том случае, если указан способ их математического описания - математическая модель сигнала. Математическое описание позволяет абстрагироваться от физической природы сигнала и материальной формы его носителя, проводить классификацию сигналов, выполнять их сравнение, устанавливать степень тождества, моделировать системы обработки сигналов. Как правило, описание сигнала задается функциональной зависимостью определенного информационного параметра сигнала от независимой переменной (аргумента) –  $s(x)$ ,  $y(t)$  и т.п. Такая форма описания и графического представления сигналов называется динамической (сигнал в реальной динамике его поведения по аргументам). Функции математического описания сигналов могут быть как вещественными, так и комплексными. Выбор математического аппарата описания определяется простотой и удобством его использования при анализе и обработке сигналов.

Существует некоторая двойственность применения описания сигналов функциями типа  $s(t)$  и т.п. С одной стороны  $s(t)$  – это величина, равная значению функции в момент времени  $t$ . С другой стороны через  $s(t)$  обозначают и саму функцию, т.е. то правило, по которому каждому значению  $t$  ставится в соответствие определенная величина  $s$ . В большинстве аналитических выражений это не вызывает недоразумений и при однозначном соответствии значений сигналов их аналитическим выражениям принимается по умолчанию.

## 2.3 Спектральное представление сигналов

Кроме привычного динамического представления сигналов и функций в виде зависимости их значений от определенных аргументов (времени, линейной или пространственной координаты и т.п.) при анализе и обработке данных широко используется математическое описание сигналов по аргументам, обратным аргументам динамического представления. Так, например, для времени обратным аргументом является частота. Возможность такого описания определяется тем, что любой сколь угодно сложный по своей форме сигнал, не имеющий разрывов второго рода (бесконечных значений на интервале своего задания), можно представить в виде суммы более простых сигналов, и, в частности, в виде суммы простейших гармонических колебаний, что выполняется при помощи преобразования Фурье. Соответственно, математически разложение сигнала на гармонические составляющие описывается функциями значений амплитуд и начальных фаз колебаний по непрерывному или дискретному аргументу – частоте изменения функций на определенных интервалах аргументов их динамического представления. Совокупность амплитуд гармонических колебаний разложения называют *амплитудным спектром* сигнала, а совокупность начальных фаз – *фазовым спектром*. Оба спектра вместе образуют полный частотный спектр сигнала, который по точности математического представления

тождественен динамической форме описания сигнала.

Линейные системы преобразования сигналов описываются дифференциальными уравнениями, причем для них верен принцип суперпозиции, согласно которому реакция систем на сложный сигнал, состоящий из суммы простых сигналов, равна сумме реакций от каждого составляющего сигнала в отдельности. Это позволяет при известной реакции системы на гармоническое колебание с определенной частотой определить реакцию системы на любой сложный сигнал, разложив его в ряд гармоник по частотному спектру сигнала. Широкое использование гармонических функций при анализе сигналов объясняется тем, что они являются достаточно простыми ортогональными функциями и определены при всех значениях непрерывных переменных. Кроме того, они являются собственными функциями времени, сохраняющими свою форму при прохождении колебаний через любые линейные системы и системы обработки данных с постоянными параметрами (изменяются только амплитуда и фаза колебаний). Немаловажное значение имеет и то обстоятельство, что для гармонических функций и их комплексного анализа разработан мощный математический аппарат.

Кроме гармонического ряда Фурье применяются и другие виды разложения сигналов: по функциям Уолша, Бесселя, Хаара, полиномам Чебышева, Лаггера, Лежандра и др. Главное условие однозначности и математической идентичности отображения сигналов - ортогональность функций разложения. Но при качественном анализе сигналов могут применяться и неортогональные функции, выявляющие какие-либо характерные особенности сигналов, полезные для интерпретации физических данных.

## 2.4 Математические модели сигналов

Теория анализа и обработки физических данных базируется на математических моделях соответствующих физических полей и физических процессов, на основе которых создаются математические модели сигналов. Математические модели сигналов дают возможность обобщенно, абстрагируясь от физической природы, судить о свойствах сигналов, предсказывать изменения сигналов в изменяющихся условиях, заменять физическое моделирование процессов математическим. С помощью математических моделей имеется возможность описывать свойства сигналов, которые являются главными, определяющими в изучаемых процессах, и игнорировать большое число второстепенных признаков. Знание математических моделей сигналов дает возможность классифицировать их по различным признакам, характерным для того или иного типа моделей. Так, сигналы разделяются на неслучайные и случайные в зависимости от возможности точного предсказания их значений в любые моменты времени. Сигнал является неслучайным и называется *детерминированным*, если математическая модель позволяет осуществлять такое предсказание. Детерминированный сигнал задается, как правило, математической функцией или вычислительным алгоритмом, а математическая модель сигнала может быть представлена в виде

$$s = F(t, z, w, \dots; A, B, C, \dots),$$

где  $s$  – информативный параметр сигнала;

$t, z, w, \dots$  – независимые аргументы (время, пространственная координата, частота и др.);

$A, B, C, \dots$  – параметры сигналов.

Модель должна быть, по возможности, проще, минимизирована по количеству независимых аргументов и адекватна изучаемому процессу, что во многом предопределяет результаты измерений.

Математическое описание не может быть всеобъемлющим и идеально точным и, по существу, всегда отображает не реальные объекты, а их упрощенные модели. Модели могут задаваться таблицами, графиками, функциональными зависимостями, уравнениями состояний и переходов из одного состояния в другое и т.п. Формализованное описание может считаться математической моделью оригинала, если оно позволяет с определенной точностью прогнозировать состояние и поведение изучаемых объектов путем формальных процедур над их описанием.

Неотъемлемой частью любой математической модели сигнала является область определения сигнала, которая устанавливается интервалом задания независимой переменной. Примеры задания интервала для переменных:

$$a \leq x \leq b, \quad x \in [a, b];$$

$$a < y \leq b, \quad y \in (a, b];$$

$$a < z < b, \quad z \in (a, b).$$

Пространство значений независимой переменной обычно обозначается через индекс  $R$ . Так, например,  $R := (-\infty, +\infty)$ ,  $x \in R$ .

Кроме задания области определения сигнала могут быть также заданы виды численных значений переменных (целые, рациональные, вещественные, комплексные).

Математические модели сигналов на первом этапе обработки и анализа результатов наблюдений должны позволять в какой-то мере игнорировать их физическую природу и возвращать ее в модель только на заключительном этапе интерпретации данных.

## 2.5 Виды моделей сигналов

При анализе физических данных используются два основных подхода к созданию математических моделей сигналов.

Первый подход оперирует с *детерминированными* сигналами, значения которых в любой момент времени или в произвольной точке пространства (а равно и в зависимости от любых других аргументов) являются априорно известными или могут быть достаточно точно определены (вычислены). Для описания неслучайных сигналов используются также *квазидетерминированные* модели, в которых значения одного или нескольких параметров априорно неизвестны, и считаются случайными величинами с малой случайной компонентой, влиянием которой можно пренебречь.

Второй подход предполагает случайный характер сигналов, закон изменения которых во времени (или в пространстве) носит случайный характер, и которые принимают конкретные значения с некоторой вероятностью. Модель такого сигнала представляет собой описание статистических характеристик случайного процесса путем задания законов распределения вероятностей, корреляционной функции, спектральной плотности энергии и др.

Случайность может быть обусловлена как собственной физической природой сигналов, так и вероятностным характером регистрируемых сигналов как по времени или месту их появления, так и по содержанию. С этих позиций случайный сигнал может рассматриваться как отображение случайного по своей природе процесса или физических свойств объекта (процесса), которые определяются случайными параметрами или сложным строением геологической среды, результаты измерений в которой трудно предсказуемы.

Между этими двумя видами сигналов нет резкой границы. Строго говоря, детерминированных процессов и отвечающих им детерминированных сигналов в природе не существует. Даже сигналы, хорошо известные на входе в среду (при внешнем воздействии на нее), по месту их регистрации всегда осложнены случайными помехами, влиянием дестабилизирующих факторов и априорно неизвестными параметрами и строением самой среды. С другой стороны, модель случайного поля часто аппроксимируется методом суперпозиции (сложения) сигналов известной формы. Детерминированные модели могут использоваться и для изучения чисто случайных процессов, если уровень полезного сигнала в этом процессе значительно выше уровня статистических флуктуаций.

На выбор математической модели в немалой степени влияет также сложность математического аппарата обработки сигналов. Не исключается и изменение модели, как правило, с переводом из вероятностной в детерминированную, в процессе накопления информации об изучаемом явлении или объекте.

## 2.6 Классификация сигналов

Классификация сигналов осуществляется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей сигналов. Все сигналы разделяют на две крупных группы: детерминированные и случайные (рисунок 2.3).

### 2.6.1 Детерминированные сигналы

Обычно выделяют два класса детерминированных сигналов: периодические и непериодические.

К периодическим относят гармонические и полигармонические сигналы. Для периодических сигналов выполняется общее условие

$$s(t) = s(t + kT), \quad (2.1)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  - любое целое число;

$T$  - период, являющийся конечным отрезком независимой переменной.

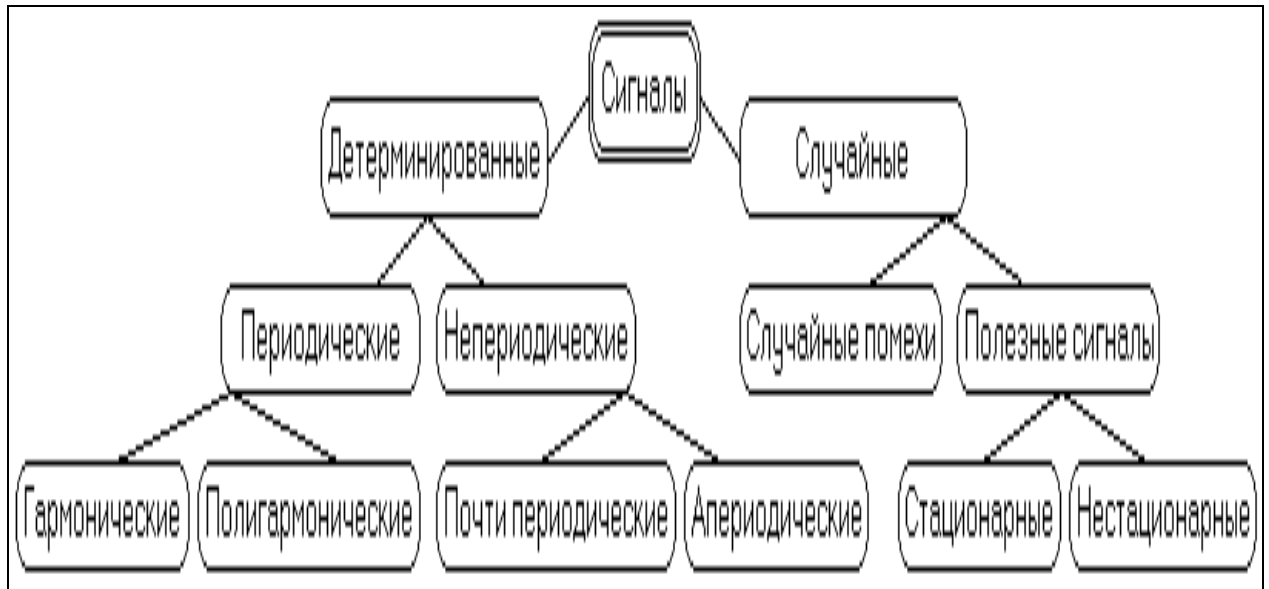


Рисунок 2.3 - Классификация сигналов

Гармонические сигналы (рисунок 2.4) описываются следующими формулами:

$$x(t) = a \cos(2\pi f t) + b \sin(2\pi f t) = A \cos(2\pi f t - \varphi) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.2)$$

где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  - амплитуда гармонической составляющей;

$f$  - частота колебаний;

$\omega = 2\pi f$  - угловая (циклическая) частота колебаний;

$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$  - начальная фаза колебаний;

$T = \frac{1}{f}$  - период колебаний.

Полигармонические сигналы составляют наиболее широко распространенную группу периодических сигналов и описываются суммой гармонических колебаний:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N [a_i \cos(2\pi f_i t) + b_i \sin(2\pi f_i t)] = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t - \varphi_i). \quad (2.3)$$

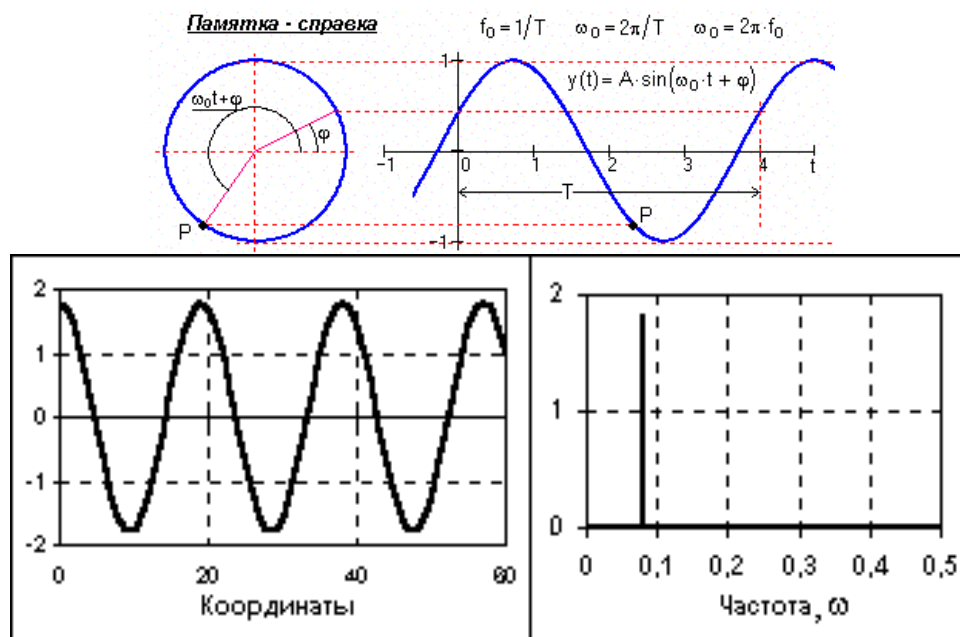


Рисунок 2.4 - Гармонический сигнал и спектр его амплитуд

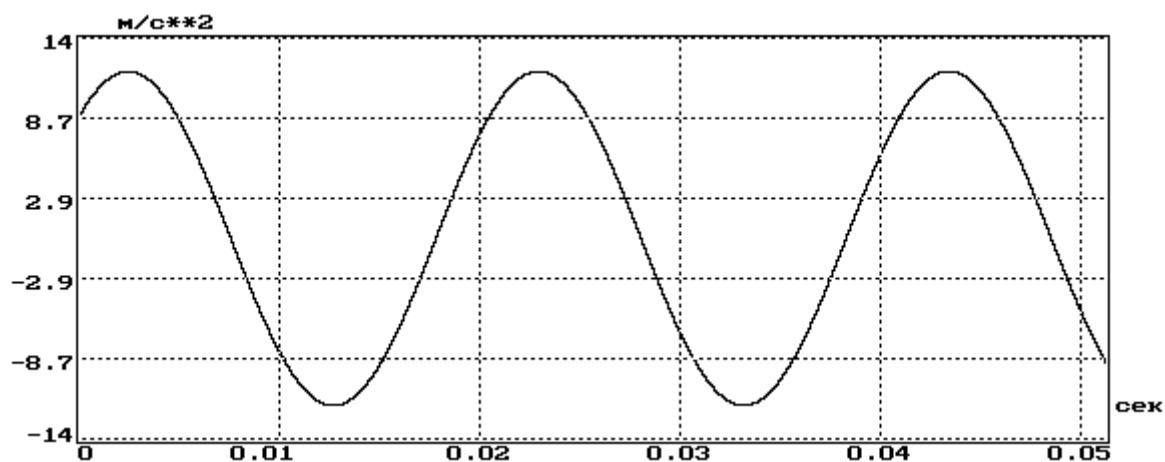


Рисунок 2.5 - Вибрационный гармонический сигнал

или непосредственно функцией  $x(t) = y(t + kT_p)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , где  $T_p$  - период одного полного колебания сигнала  $y(t)$ , заданного на одном периоде.

Значение

$$f_p = \frac{1}{T_p} \quad (2.4)$$



называют фундаментальной частотой колебаний.

Полигармонические сигналы представляют собой сумму определенной постоянной составляющей ( $f_0 = 0$ ) и произвольного (в пределе - бесконечного) числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд  $A_i$  и фаз  $\varphi_i$ , с периодами, кратными периоду фундаментальной частоты  $f_p$ . Другими словами, на периоде фундаментальной частоты  $f_p$ , которая равна или кратно меньше минимальной частоты гармоник, укладывается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала. Частотный спектр полигармонических сигналов дискретен, в связи с чем распространено математическое представление сигналов - в виде спектров (рядов Фурье).

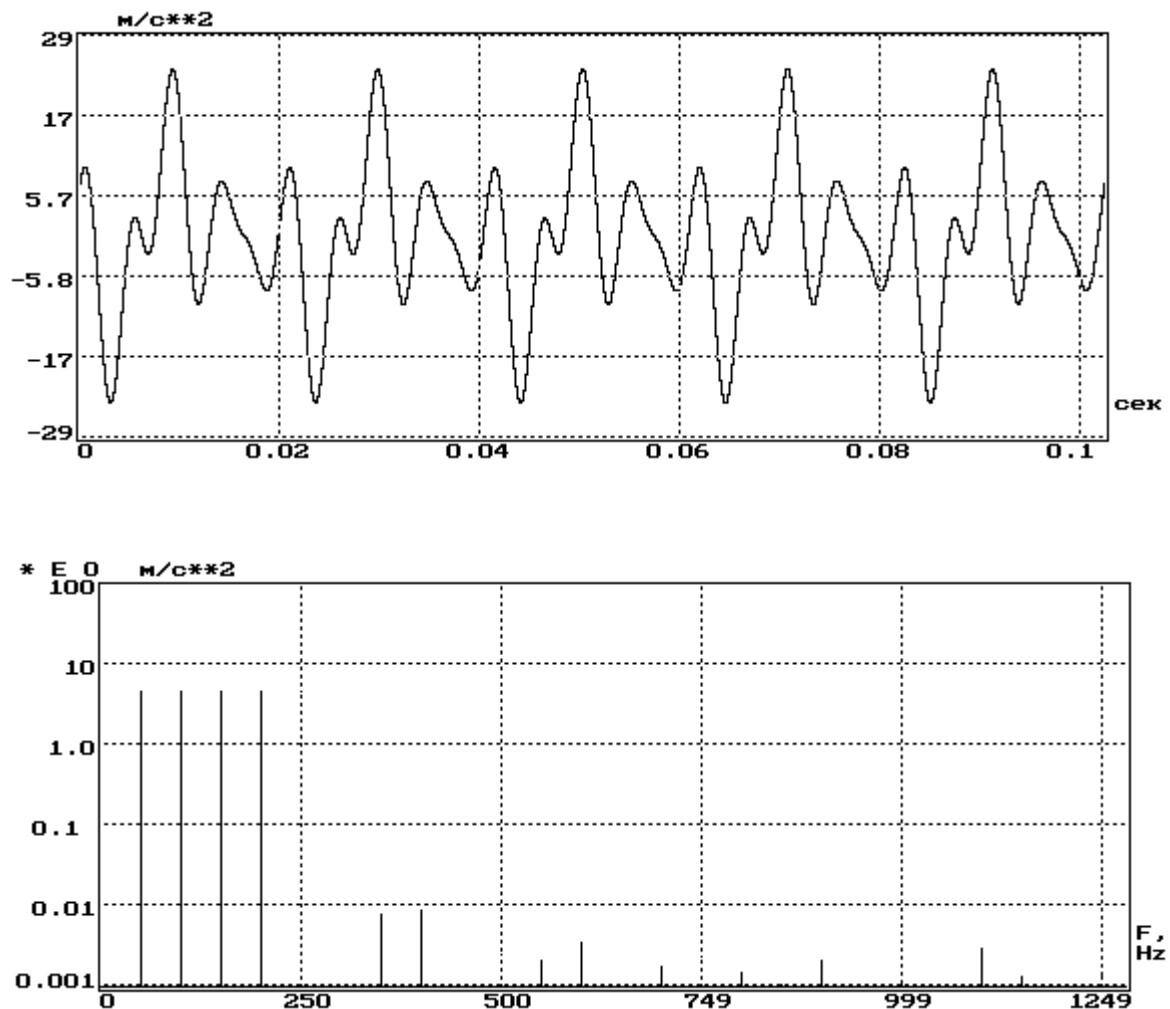


Рисунок 2.6 - Форма и спектр вибрационного полигармонического сигнала

Информационными параметрами полигармонического сигнала могут быть как определенные особенности формы сигнала (размах от минимума до максимума, экстремальное отклонение от среднего значения, и т.п.), так и параметры определенных гармоник в этом сигнале. Так, например, для прямоугольных импульсов информационными параметрами могут быть период повторения импульсов, длительность импульсов, скважность импульсов (отношение периода к длительности). При анализе сложных периодических сигналов информационными параметрами могут также быть:

- текущее среднее значение за определенное время, например, за время периода:

$$X_{\text{ср.т}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t) dt ; \quad (2.5)$$

- постоянная составляющая одного периода:

$$X_{\text{п}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt ; \quad (2.6)$$

- среднее выпрямленное значение:

$$X_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt ; \quad (2.7)$$

- среднее квадратическое значение:

$$CKЗ = \frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt . \quad (2.8)$$

**К непериодическим** сигналам относят почти периодические и аperiodические сигналы. Основным инструментом их анализа также является частотное представление.

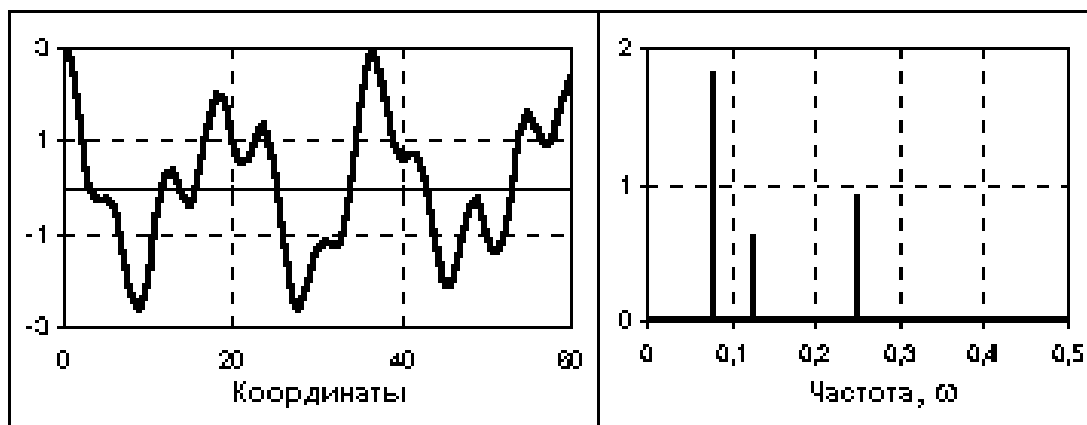


Рисунок 2.7 - Почти периодический сигнал и его амплитудный спектр

Почти периодические сигналы близки по своей форме к полигармоническим. Они также представляют собой сумму двух и более гармонических сигналов (в пределе – до бесконечности), но не с кратными, а с произвольными частотами, отношения которых (хотя бы двух частот минимум) не относятся к рациональным числам, вследствие чего фундаментальный период суммарных колебаний бесконечно велик. Так, например, сумма двух гармоник с частотами  $2f_0$  и  $3.5f_0$  дает периодический сигнал ( $2/3.5$  – рациональное число) с фундаментальной частотой  $0.5f_0$ , на одном периоде которой будут укладываться 4 периода первой гармоники и 7 периодов второй. Но если значение частоты второй гармоники заменить близким значением  $\sqrt{12}f_0$ , то сигнал перейдет в разряд непериодических, поскольку отношение  $2/\sqrt{12}$  не относится к числу рациональных чисел. Как правило, почти периодические сигналы порождаются физическими процессами, не связанными между собой. Математическое отображение сигналов тождественно полигармоническим сигналам (сумма гармоник), а частотный спектр также дискретен.

Аperiodические сигналы составляют основную группу непериодических сигналов и задаются произвольными функциями времени. На рисунке 2.8 показан пример аperiodического сигнала, заданного формулой на интервале  $(0, \infty)$ :

$$s(t) = \exp(-at) - \exp(-bt), \quad (2.9)$$

где  $a$  и  $b$  – константы, в данном случае  $a = 0.15$ ,  $b = 0.17$ .

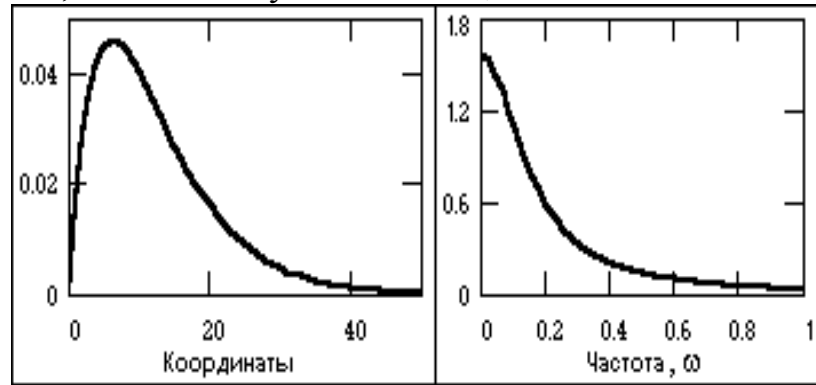


Рисунок 2.8 - Аперiodический сигнал и модуль его спектра

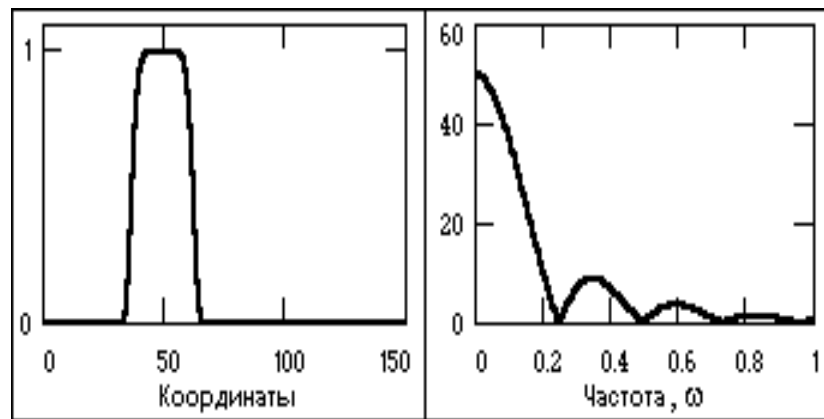


Рисунок 2.9 - Импульсный сигнал и модуль его спектра

К аперiodическим сигналам относятся также импульсные сигналы, которые в радиотехнике и в отраслях, широко ее использующих, часто рассматривают в виде отдельного класса сигналов. Импульсы представляют собой сигналы, как правило, определенной и достаточно простой формы, существующие в пределах конечных временных интервалов. Сигнал, приведенный на рисунке 2.9, относится к числу импульсных.

Частотный спектр аперiodических сигналов непрерывен и может содержать любые гармоники в частотном интервале  $[0, \infty]$ . Для его вычисления используется интегральное преобразование Фурье:

$$s(t) = \int_0^{\infty} [a(f) \cos(2\pi ft) + b(f) \sin(2\pi ft)] df = \int_0^{\infty} [S(f) \cos(2\pi ft - \phi(f))] df ; \quad (2.9)$$

$$a(f) = \int_0^T s(t) \cos(2\pi ft) dt; \quad b(f) = \int_0^T s(t) \sin(2\pi ft) dt; \quad (2.10)$$

$$S(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)}; \quad \varphi(f) = \arctg\left(\frac{b(f)}{a(f)}\right). \quad (2.11)$$

Частотные функции  $a(f)$ ,  $b(f)$  и  $S(f)$  представляют собой не амплитудные значения соответствующих гармоник на определенных частотах, а распределения спектральной плотности амплитуд этих гармоник по частотной шкале. Формулы (2.10 -2.11) обычно называют формулами прямого преобразования Фурье, формулы (2.9) – обратного преобразования.

Если нас не интересует поведение сигнала за пределами области его задания  $[0, T]$ , то эта область может восприниматься, как один период периодического сигнала, т.е. значение  $1/T$  принимается за фундаментальную частоту периодический колебаний, при этом для частотной модели сигнала может применяться разложение в ряды Фурье по области его задания (2.2-2.3).

В классе импульсных сигналов выделяют подкласс радиоимпульсов. Пример радиоимпульса приведен на рисунке 2. 10.

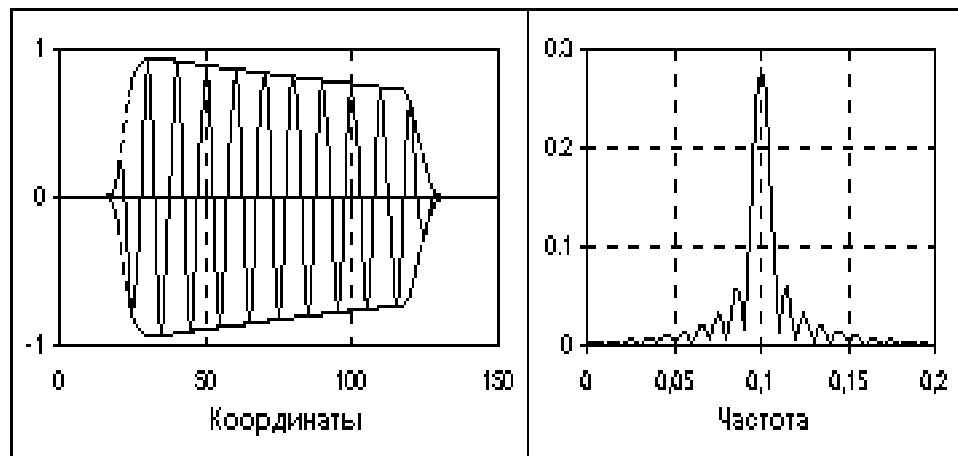


Рисунок 2.10 - Радиоимпульс и модуль его спектра

Уравнение радиоимпульса имеет вид:

$$s(t) = u(t) \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0), \quad (2.12)$$

где  $\cos(2\pi f_0 t - \varphi_0)$  – гармоническое колебание заполнения радиоимпульса,  $u(t)$  – огибающая радиоимпульса. Положение главного пика спектра радиоимпульса на частотной шкале соответствует частоте заполнения  $f_0$ , а его ширина определяется длительностью радиоимпульса. Чем больше длительность радиоимпульса, тем меньше ширина главного частотного пика.

С энергетических позиций сигналы разделяют на два класса: с ограниченной (конечной) энергией и с бесконечной энергией.

Для сигналов с ограниченной энергией (иначе – *сигналов с интегрируемым квадратом*) должно выполняться соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.13)$$

Как правило, к этому классу сигналов относятся аperiodические и импульсные сигналы, не имеющие разрывов 2-го рода при ограниченном количестве разрывов 1-го рода. Любые периодические, полигармонические и почти периодические сигналы, а также сигналы с разрывами и особыми точками 2-го рода, уходящими в бесконечность, относятся к сигналам с бесконечной энергией. Для их анализа применяются специальные методы.

Иногда в отдельный класс выделяют сигналы конечной длительности, отличные от нуля только на ограниченном интервале аргументов (независимых переменных). Такие сигналы обычно называют *финитными*.

## 2.6.2 Случайные сигналы

Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой заранее неизвестны, и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Случайный сигнал отображает случайное физическое явление или физический процесс, причем зарегистрированный в единичном наблюдении сигнал не воспроизводится при повторных наблюдениях и не может быть описан явной математической зависимостью. При регистрации случайного сигнала реализуется только один из возможных вариантов (исходов) случайного процесса, а достаточно полное и точное описание процесса в целом можно произвести только после многократного повторения наблюдений и вычисления определенных статистических характеристик ансамбля реализаций сигнала. В качестве основных статистических характеристик случайных сигналов принимают:

- а) закон распределения вероятности нахождения величины сигнала в определенном интервале значений;
- б) спектральное распределение мощности сигнала.

Конкретная реализация процесса, описывающего случайное явление, называется выборочной функцией или реализацией если речь идет о наблюдениях в конечной длительности, а совокупность всех возможных выборочных функций, которые могут дать случайное явление называется случайным или стохастическим процессом. Таким образом, под реализацией случайного физического явления понимается один из возможных исходов случайного процесса.

Случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные.

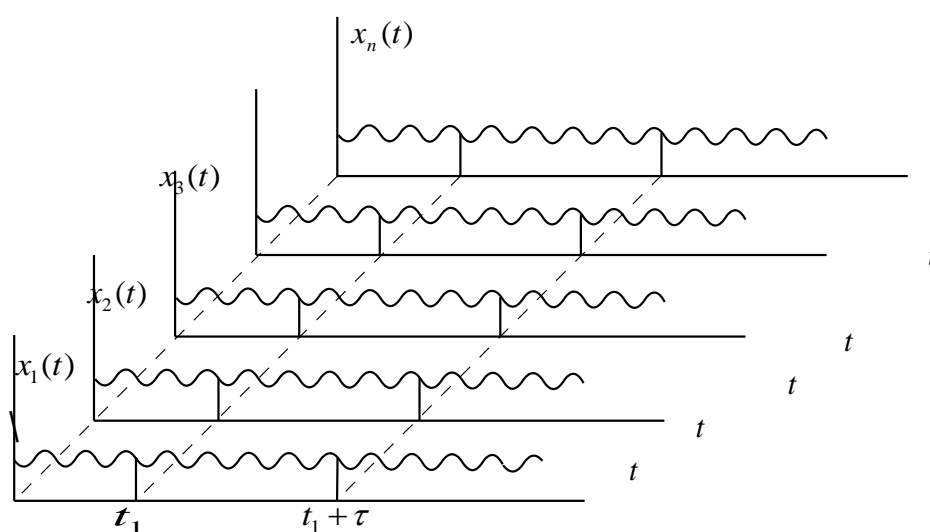


Рисунок 2.11 – Реализации случайного процесса

Если физическое явление описывается случайным процессом, то свойства этого явления можно оценить в любой момент времени путем усреднения по совокупности выборочных функций с помощью среднего значения или первого начального момента:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (2.14)$$

и ковариационной функции:

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau). \quad (2.15)$$

Если значения моментных характеристик не зависят от момента времени  $t_1$ , то такой процесс называется стационарным. Различают стационарность в широком и узком смысле.

Процесс стационарный в широком смысле, когда только первые начальный и центральные моменты не зависят от времени  $t_1$ .

Стационарный в узком смысле процесс это тот, у которого все моменты не зависят от времени  $t_1$ .

Стационарные процессы подразделяются на *эргодические и неэргодические*.

В большинстве случаев, характеристики случайного стационарного процесса можно вычислить проводя усреднение по времени, а не по реализации в пределах отдельных выборочных функций, входящих в ансамбль реализаций.

$$\mu_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt; \quad (2.16)$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Если оказывается, что среднее значение и ковариационная функции, полученные усреднением по времени равны характеристикам найденным усреднением по ансамблю, то такой процесс называется эргодическим.

Все остальные случайные процессы, не удовлетворяющие указанным условиям называются нестационарными.

Что касается случайных нестационарных сигналов, то их общепринятой классификации не существует. Как правило, из них выделяют различные группы сигналов по особенностям их нестационарности.

## 2.7 Типы сигналов

Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания.

**Аналоговый сигнал** (analog signal) является непрерывной функцией непрерывного аргумента, т.е. определен для любого значения аргументов. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени, в пространстве или по любой другой независимой переменной, при этом регистрируемый сигнал подобен (“аналогичен”) порождающему его процессу. Пример математической записи сигнала:

$$y(t) = 4.8 \exp\left(-\frac{(t-4)^2}{2.8}\right).$$

Графическое отображение данного сигнала приведено на рисунке 2.12. При этом как сама функция, так и ее аргументы, могут принимать любые значения в пределах некоторых интервалов  $y_1 \leq y \leq y_2, t_1 \leq t \leq t_2$ . Если интервалы значений сигнала или его независимых переменных не ограничиваются, то по умолчанию они принимаются равными от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Множество возможных значений сигнала образует континуум - непрерывное пространство, в котором любая сигнальная точка



может быть определена с точностью до бесконечности. Примеры сигналов, аналоговых по своей природе - изменение напряженности электрического, магнитного, электромагнитного поля во времени и в пространстве.

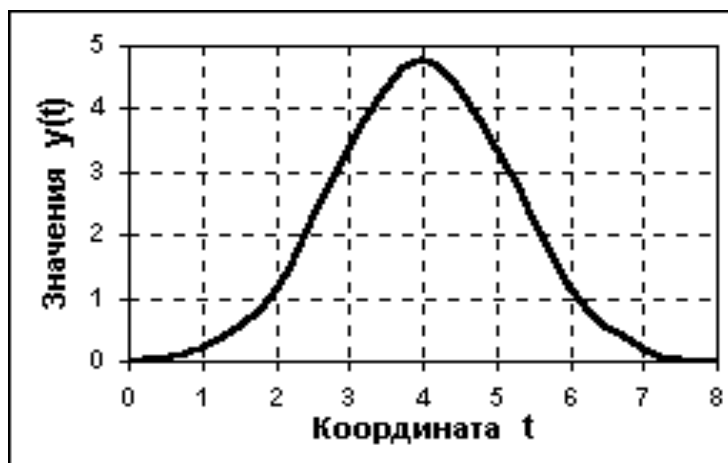


Рисунок 2.12 - Аналоговый сигнал

**Дискретный сигнал** (discrete signal) по своим значениям также является непрерывной функцией, но определенной только по дискретным значениям аргумента. По множеству своих значений он является конечным (счетным) и описывается дискретной последовательностью отсчетов (samples)  $y(n\Delta t)$ , где  $y_1 \leq y \leq y_2$ ,  $\Delta t$  - интервал между отсчетами (интервал или шаг дискретизации, sample time),  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Величина, обратная шагу дискретизации:  $f = \frac{1}{\Delta t} \Delta t$ , называется частотой дискретизации (sampling frequency). Если дискретный сигнал получен дискретизацией (sampling) аналогового сигнала, то он представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного сигнала по координатам  $n\Delta t$ .

Пример дискретизации аналогового сигнала, приведенного на рисунке 2.12, представлен на рисунке 2.13. При  $\Delta t = \text{const}$  (равномерная дискретизация данных) дискретный сигнал можно описывать сокращенным обозначением  $y(n)$ . В технической литературе в обозначениях дискретизированных функций иногда оставляют прежние индексы аргументов аналоговых функций, заключая последние в квадратные скобки -  $y[t]$ .

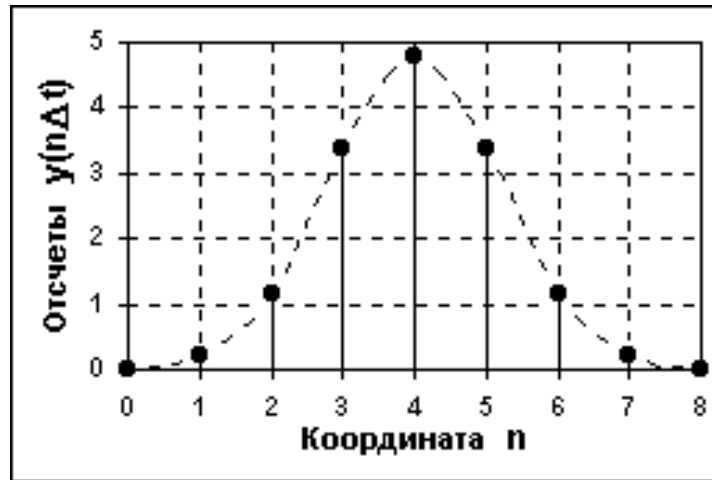


Рисунок 2.13 - Дискретный сигнал

При неравномерной дискретизации сигнала обозначения дискретных последовательностей (в текстовых описаниях) обычно заключаются в фигурные скобки -  $\{s(t_i)\}$ , а значения отсчетов приводятся в виде таблиц с указанием значений координат  $t_i$ . Для числовых последовательностей (равномерных и неравномерных) применяется и следующее числовое описание:  $s(t_i) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ ,  $t = t_1, t_2, \dots, t_N$ . Пример дискретного сигнала – показания прибора фиксируемые оператором через минуту.

**Цифровой сигнал** (digital signal) квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Он описывается квантованной решетчатой функцией  $y_n = Q_k[(n\Delta t)](n\Delta t)$ , где  $Q_k$  - функция квантования с числом уровней квантования  $k$ , при этом интервалы квантования могут быть как с равномерным распределением, так и с неравномерным, например - логарифмическим. Задается цифровой сигнал, как правило, в виде дискретного ряда (discrete series) числовых данных - числового массива по последовательным значениям аргумента при  $\Delta t = \text{const}$ , но в общем случае сигнал может задаваться и в виде таблицы для произвольных значений аргумента.

По существу, цифровой сигнал по своим значениям (отсчетам) является формализованной разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр, как это показано на рисунке 2.14. Цифровой сигнал конечен по множеству своих значений. Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число цифровых значений называется квантованием по уровню, а возникающие при квантовании ошибки округления отсчетов (отбрасываемые значения) – шумами (noise) или ошибками

(error) квантования (quantization).



Рисунок 2.14 - Цифровой сигнал

В системах цифровой обработки данных и в ЭВМ сигнал всегда представлен с точностью до определенного количества разрядов, а, следовательно, всегда является цифровым. С учетом этих факторов при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов. Что касается формы обращения цифровых сигналов в системах хранения, передачи и обработки, то, как правило, они представляет собой комбинации коротких одно- или двуполярных импульсов одинаковой амплитуды, которыми в двоичном коде с определенным количеством числовых разрядов кодируются числовые последовательности сигналов (массивов данных).

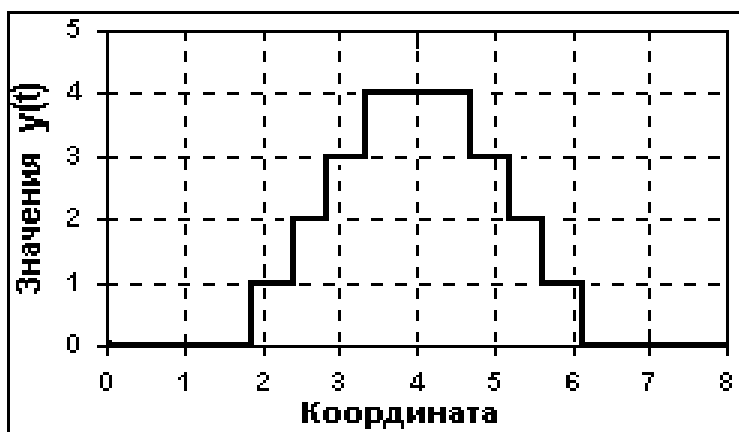


Рисунок 2.15 - Дискретно-аналоговый сигнал

Квантованными по своим значениям могут быть и аналоговые сигналы, зарегистрированные соответствующей аппаратурой (рисунок 2.15), которые принято называть дискретно-аналоговыми. Но выделять эти сигналы в отдельный тип не имеет смысла - они остаются аналоговыми кусочно-непрерывными сигналами с шагом квантования, который определяется допустимой погрешностью измерений.

Большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело при обработке геофизических данных, являются аналоговыми по своей природе, дискретизированными и квантованными в силу методических особенностей измерений или технических особенностей регистрации, т.е. преобразованными в цифровые сигналы. Но существуют и сигналы, которые изначально относятся к классу цифровых, как, например отсчеты количества гамма-квантов, зарегистрированных по последовательным интервалам времени.

**Преобразования типа сигналов.** Формы математического отображения сигналов, особенно на этапах их первичной регистрации и в прямых задачах описания физических процессов, как правило, отражают их физическую природу. Однако последнее не является обязательным и зависит от методики измерений и технических средств преобразования, передачи, хранения и обработки сигналов. На разных этапах процессов получения и обработки информации как материальное представление сигналов в устройствах регистрации и обработки, так и формы их математического описания при анализе данных, могут изменяться путем соответствующих операций преобразования типа сигналов.

**Операция дискретизации** (discretization) осуществляет преобразование аналоговых сигналов (функций), непрерывных по аргументу, в функции мгновенных значений сигналов по дискретному аргументу. Дискретизация обычно производится с постоянным шагом по аргументу (*равномерная дискретизация*), при этом  $s(t) \Rightarrow s(n\Delta t)$ , где значения  $s(n\Delta t)$  представляют собой отсчеты функции  $s(t)$  в моменты времени  $t = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Частота, с которой выполняются замеры аналогового сигнала, называется *частотой дискретизации*. В общем случае, сетка отсчетов по аргументу может быть произвольной, как, например,  $s(t) \Rightarrow s(t_k), k = 1, 2, \dots, K$ , или задаваться по определенному закону. В результате дискретизации непрерывный (*аналоговый*) сигнал переводится в последовательность чисел.

**Операция восстановления аналогового сигнала** из его дискретного представления обратная операции дискретизации и представляет, по существу, интерполяцию данных.

Дискретизация сигналов может приводить к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами. Однако существуют условия, определенные теоремой Котельникова, согласно которой аналоговый сигнал с ограниченным частотным спектром может быть без потерь информации преобразован в дискретный сигнал, и затем абсолютно точно восстановлен по значениям своих дискретных отсчетов.

Как известно, любая непрерывная функция может быть разложена на конечном отрезке в ряд Фурье, т.е. представлена в спектральной форме - в виде суммы ряда синусоид с кратными (нумерованными) частотами с определенными амплитудами и

фазами. У относительно гладких функций спектр быстро убывает (коэффициенты модуля спектра быстро стремятся к нулю). Для представления "изрезанных" функций, с разрывами и "изломами", нужны синусоиды с большими частотами. Говорят, что сигнал имеет *ограниченный спектр*, если после определенной частоты  $F$  все коэффициенты спектра равны нулю, т.е. сигнал представляется в виде конечной суммы ряда Фурье.

Теоремой Котельникова устанавливается, что если спектр сигнала ограничен частотой  $F$ , то после дискретизации сигнала с частотой не менее  $2F$  можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно выполнить интерполяцию цифрового сигнала "между отсчетами" специальной функцией.

На практике эта теорема имеет огромное значение. Например, известно, что диапазон звуковых сигналов, воспринимаемых человеком, не превышает 20 кГц. Следовательно, при дискретизации записанных звуковых сигналов с частотой не менее 40 кГц мы можем точно восстановить исходный аналоговый сигнал по его цифровым отсчетам, что и выполняется в проигрывателях компакт-дисков для восстановления звука. Частота дискретизации звукового сигнала при записи на компакт-диск составляет 44000 Гц.

**Операция квантования** или аналого-цифрового преобразования (АЦП; английский термин Analog-to-Digital Converter, ADC) заключается в преобразовании дискретного сигнала  $s(t_n)$  в цифровой сигнал  $s(n) = s_n \approx s(t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , как правило, кодированный в двоичной системе счисления. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню (quantization), а возникающие при этом потери информации за счет округления – ошибками или шумами квантования (quantization error, quantization noise).

При преобразовании аналогового сигнала непосредственно в цифровой сигнал операции дискретизации и квантования совмещаются.

**Операция цифро-аналогового преобразования** (ЦАП; Digital-to-Analog Converter, DAC) обратна операции квантования, при этом на выходе регистрируется либо дискретно-аналоговый сигнал  $s(t_n)$ , который имеет ступенчатую форму (рисунок 2.15), либо непосредственно аналоговый сигнал  $s(t)$ , который восстанавливается из  $s(t_n)$ , например, путем сглаживания.

Так как квантование сигналов всегда выполняется с определенной и неустранимой погрешностью (максимум - до половины интервала квантования), то операции АЦП и ЦАП не являются взаимно обратными с абсолютной точностью.

**Алиасинг.** Что произойдет, если спектр аналогового сигнала был неограниченным или имел частоту, выше частоты дискретизации?

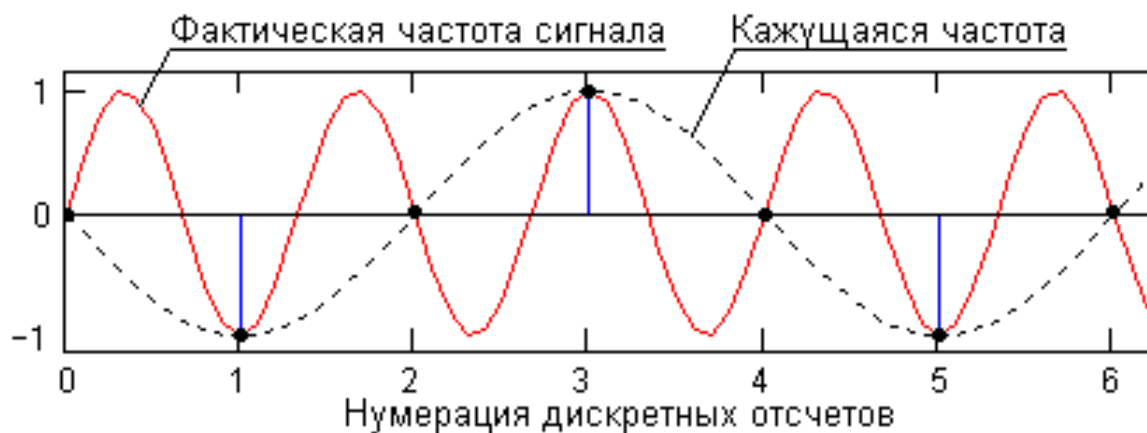


Рисунок 2.16 - Появление кажущейся частоты при дискретизации.

Предположим, что при записи акустического сигнала оркестра в помещении от какого-то устройства присутствует ультразвуковой сигнал с частотой 30 кГц. Запись выполняется с дискретизацией сигнала на выходе микрофона с типовой частотой 44.1 кГц. При прослушивании такой записи с использованием ЦАП мы услышим шумовой сигнал на частоте  $30 - 44.1/2 \approx 8$  кГц. Восстановленный сигнал будет выглядеть так, как если бы частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации, "зеркально" от нее отразились в нижнюю часть спектра и сложились с присутствующими там гармониками. Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот* (aliasing). Эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров. Природу эффекта можно наглядно видеть на рисунке 2.16. Аналогично в главный частотный диапазон дискретных сигналов "отражаются" от частоты дискретизации и все высокочастотные шумы, присутствующие в исходном аналоговом сигнале.

Для предотвращения алиасинга следует повышать частоту дискретизации или ограничить спектр сигнала перед оцифровкой *фильтрами низких частот (НЧ-фильтры, low-pass filters)*, которые пропускают без изменения все частоты, ниже заданной, и подавляют в сигнале частоты, выше заданной. Эта граничная частота называется *частотой среза (cutoff frequency)* фильтра. Частота среза анти-алиасинговых фильтров устанавливается равной половине частоты дискретизации. В реальные АЦП почти всегда встраивается анти-алиасинговый фильтр.

**Тестовые сигналы** (test signal). В качестве тестовых сигналов, которые применяются при моделировании и исследовании систем обработки данных, обычно используются сигналы простейшего типа: гармонические синус-косинусные функции, дельта-функция и функция единичного скачка.

**Дельта-функция** или функция Дирака. По определению, дельта-функция описывается следующими математическими выражениями (в совокупности):

$$\delta(t - \tau) = 0, \text{ при } t \neq \tau; \quad (2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (2.19)$$

Функция  $\delta(t - \tau)$  не является дифференцируемой, и имеет размерность, обратную размерности ее аргумента, что непосредственно следует из безразмерности результата интегрирования. Значение дельта-функции равно нулю везде за исключением точки  $\tau$ , где она представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечно большой амплитудой, при этом площадь импульса равна 1.

Дельта-функция является полезной математической абстракцией. На практике такие функции не могут быть реализованы с абсолютной точностью, так как невозможно реализовать значение, равное бесконечности, в точке  $t = \tau$  на аналоговой временной шкале, т.е. определенной по времени также с бесконечной точностью. Но во всех случаях, когда площадь импульса равна 1, длительность импульса достаточно мала, а за время его действия на входе какой-либо системы сигнал на ее выходе практически не изменяется (реакция системы на импульс во много раз больше длительности самого импульса), входной сигнал можно считать *единичной импульсной функцией* со свойствами дельта - функции.

При всей своей абстрактности дельта - функция имеет вполне определенный физический смысл. Представим себе импульсный сигнал прямоугольной формы  $\Pi(t - \tau)$  длительностью  $\theta$ , амплитуда которого равна  $\frac{1}{\theta}$ , а площадь соответственно равна 1. При уменьшении значения длительности  $\theta$  импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, равную 1, и возрастает по амплитуде. Предел такой операции при  $\theta \Rightarrow 0$  и носит название дельта - импульса. Этот сигнал  $\delta(t - \tau)$  сосредоточен в одной координатной точке  $t = \tau$ , конкретное амплитудное значение сигнала не определено, но площадь (интеграл) остается равной 1. Это не мгновенное значение функции в точке  $t = \tau$ , а именно импульс (импульс силы в механике, импульс тока в электротехнике и т.п.) – математическая модель короткого действия, значение которого равно 1.

Дельта-функция обладает *фильтрующим свойством*. Суть его заключается в том, что если дельта-функция  $\delta(t - \tau)$  входит под интеграл какой-либо функции в качестве множителя, то результат интегрирования равен значению подынтегральной функции в точке  $\tau$  расположения дельта-импульса, т.е.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (2.20)$$

Интегрирование в этом выражении может ограничиваться ближайшими окрестностями точки  $\tau$ .

**Функция единичного скачка** или функция Хевисайда иногда называется также функцией включения. Полное математическое выражение функции:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 0.5, & \text{если } t = 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

При моделировании сигналов и систем значение функции скачка в точке  $t = 0$  очень часто принимают равным 1, если это не имеет принципиального значения.

Функция единичного скачка используется при создании математических моделей сигналов конечной длительности. При умножении любой произвольной функции, в том числе периодической, на прямоугольный импульс, сформированный из двух последовательных функций единичного скачка

$$s(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T), \quad (2.22)$$

из нее вырезается участок на интервале  $0 \div T$ , и обнуляются значения функции за пределами этого интервала.

**Функция Кронекера.** Для дискретных и цифровых систем разрешающая способность по аргументу сигнала определяется интервалом его дискретизации  $\Delta t$ . Это позволяет в качестве единичного импульса использовать дискретный интегральный аналог дельта-функции - функцию единичного отсчета  $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$ , которая равна 1 в координатной точке  $k = n$ , и нулю во всех остальных точках. Функция  $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$  может быть определена для любых значений  $\Delta t = \text{const}$ , но только для целых значений координат  $k$  и  $n$ , поскольку других номеров отсчетов в дискретных функциях не существует.

Математические выражения  $\delta(t - \tau)$  и  $\delta(k\Delta t - n\Delta t)$  называют также импульсами Дирака и Кронекера. Однако, применяя такую терминологию, не будем забывать, что это не просто единичные импульсы в координатных точках  $\tau$  и  $n\Delta t$ , а полномасштабные импульсные функции, определяющие как значения импульсов в определенных координатных точках, так и нулевые значения по всем остальным координатам, в пределе от  $-\infty$  до  $\infty$ .

## 2.8 Вычисление числовых характеристик сигналов

### 2.8.1 Параметры количественной оценки

Исходно анализируемый сигнал представляется в цифровом виде (дискретный и квантованный) как массив данных  $x(i), i = 0, 1, 2, \dots$ .



Для количественной оценки сигналов (рисунок 2.17) наиболее часто применяются следующие параметры.

Абсолютные значения максимума и минимума сигнала на рассматриваемом отрезке времени  $T = [0, T]$ , называемые пиковыми значениями:

$$X_+ = \left| \max_{t \in T} x(t) \right|; \quad X_- = \left| \min_{t \in T} x(t) \right|. \quad (2.23)$$

Размах колебаний:

$$X_P = \max_{t \in T} x(t) - \min_{t \in T} x(t). \quad (2.24)$$

Среднее значение (постоянная составляющая):

$$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2.25)$$

$$X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i). \quad (2.26)$$

Мощность сигнала, определяемая с учетом постоянной составляющей:

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (2.27)$$

$$P_X = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i). \quad (2.28)$$

и без учета постоянной составляющей:

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2, \quad (2.29)$$

$$P_X = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left( \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2. \quad (2.30)$$

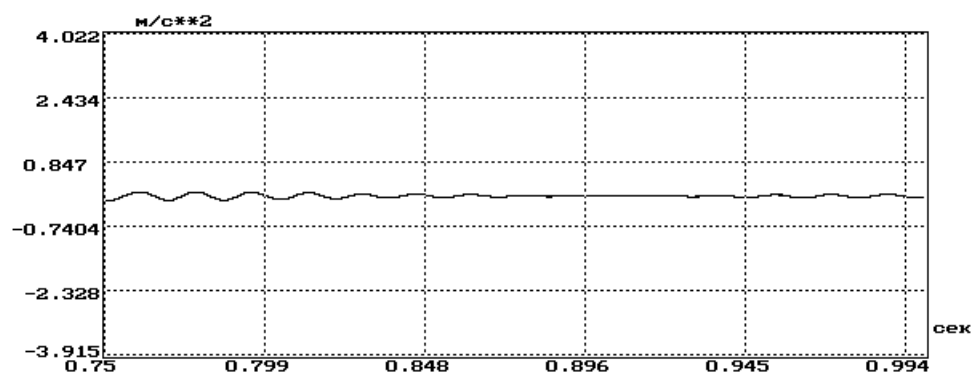
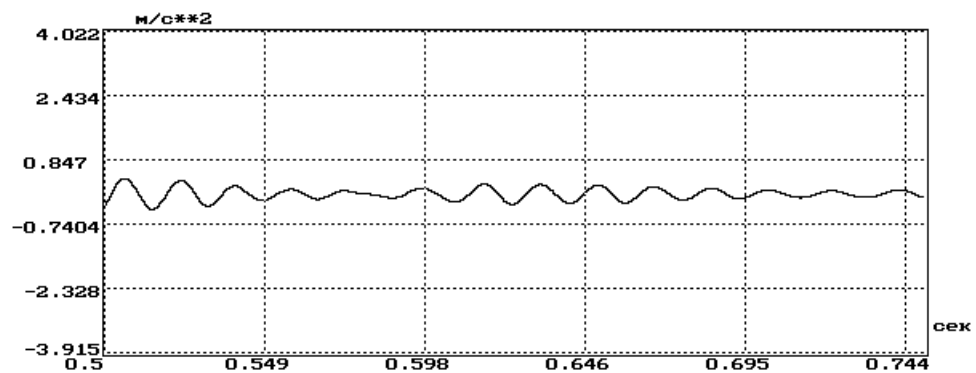
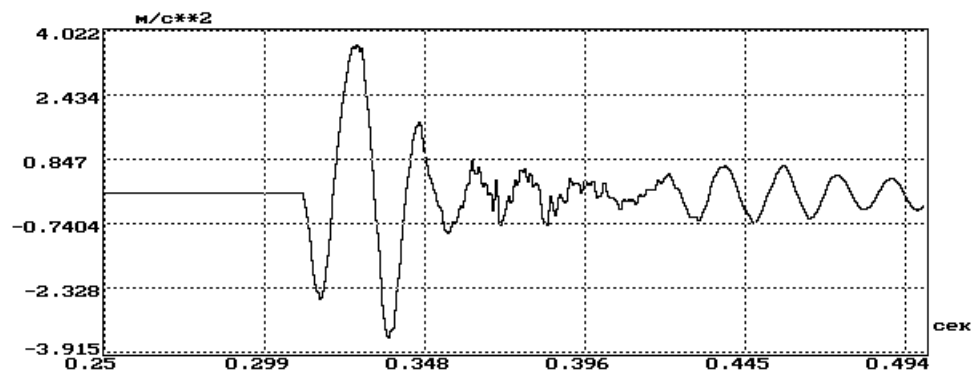
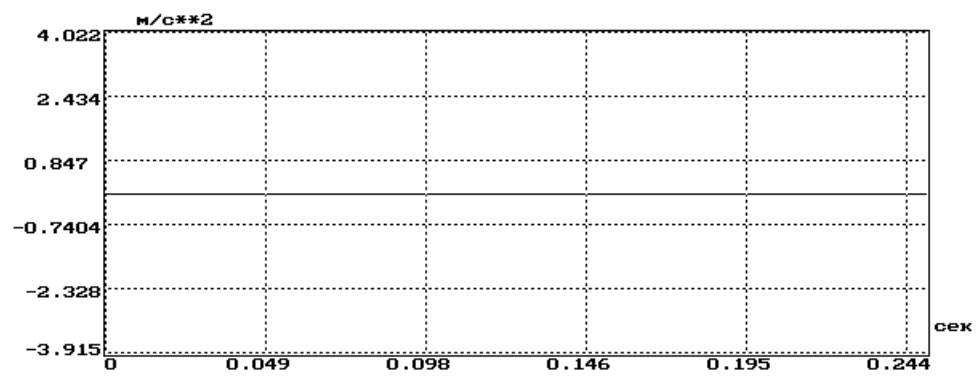


Рисунок 2.17 – Форма вибрационного сигнала при динамическом воздействии на конструкцию

Среднее квадратическое значение или эффективное значение, определяемое с учетом постоянной составляющей:

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad (2.31)$$

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i)}. \quad (2.32)$$

и без учета постоянной составляющей:

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2}, \quad (2.33)$$

$$X_{CKЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left( \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2}. \quad (2.34)$$

Для гармонического сигнала между СКЗ и амплитудой существует однозначная связь:

$$X_{CKЗ} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707A.$$

Если сигнал имеет сложную форму, то однозначной связи между СКЗ и его амплитудой нет.

Иногда в качестве параметра, характеризующего количественное значение сигналов, применяется уровень интенсивности колебаний, определяемый соотношением между измеренным значением параметра сигнала и некоторым стандартным значением, которое соответствует нулевому уровню. Если, например, измеряется виброускорение, виброскорость, виброперемещение то логарифмический уровень

$$L = 20 \lg \frac{a}{a_0}, \quad (2.35)$$

где  $a_0$  - начальное значение параметра  $a$ , соответствующее нулевому уровню. За начальное значение, согласно ГОСТ 30296-95, для виброускорения принимается уровень  $10^{-6} \text{ м/с}^2$ , для виброскорости - уровень  $5 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$ .

## 2.8.2 Параметры, характеризующие форму вибросигнала

Пик-фактор - параметр, характеризующий наличие амплитудных выбросов в сигнале:

$$PF = \frac{\max(|X_+|, |X_-|)}{X_{CKЗ}}. \quad (2.36)$$

Для гармонического сигнала пик-фактор равен 1.414. Чем больше пик-фактор, тем более выраженные импульсные эффекты присутствуют в сигнале. Для гармонического сигнала пик-фактор равен 1.414.

Распределение сигнала по амплитудным зонам характеризуется коэффициентами асимметрии (от английского skew -«косой»):

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} (x(i) - X_{cp})^3}{\left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - (X_{cp})^2} \right)^3} \quad (2.37)$$

и эксцессом:

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} (x(i) - X_{cp})^4}{\left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - (X_{cp})^2} \right)^4} - 3. \quad (2.38)$$

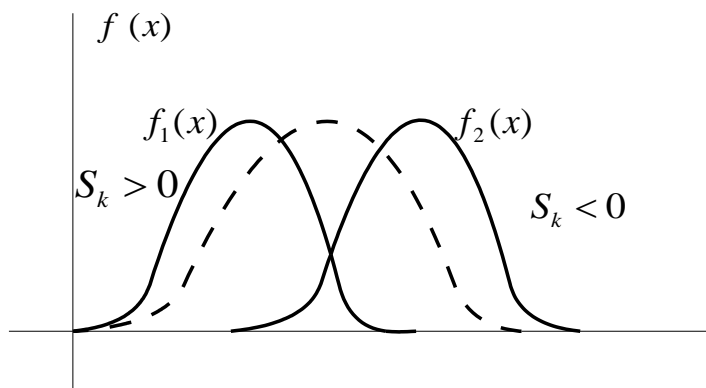


Рисунок 2.18 – Иллюстрация изменения коэффициента асимметрии в зависимости от вида функции плотности вероятностей исследуемого сигнала по отношению к нормальному закону распределения

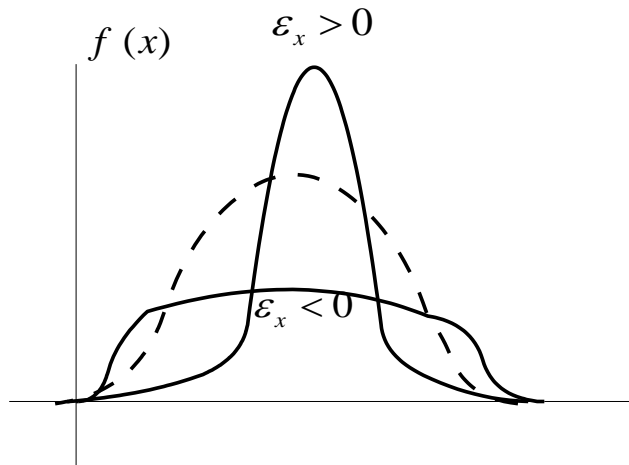


Рисунок 2.19 – Иллюстрация изменения эксцесса в зависимости от вида функции плотности вероятностей исследуемого сигнала по отношению к нормальному закону распределения

## 2.9 Интегрирование полигармонических сигналов в частотной области на примере обработки вибрационных сигналов

В большинстве приборов и систем, решающих задачи определения параметров вибрационных сигналов, первичным виброизмерительным преобразователем (ВИП) является пьезоэлектрический акселерометр, который отдает электрический заряд, пропорциональный виброускорению. При оснащении такого ВИП усилителем (заряда или напряжения) на его выходе можно получить изменение напряжения, пропорциональное изменению виброускорения. Следовательно, если  $x(t)$  представляет собой виброускорение, то для перехода к единицам виброскорости выполняется интегрирование:

$$\begin{aligned}
 x_{ck}(t) &= \int_0^t x_{yck}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_k A_{k,yck} \cos(2\pi \cdot f_k \cdot \tau - \varphi_{k,yck}) d\tau = \\
 &= \sum_k \frac{A_{k,yck}}{2\pi \cdot f_k} \sin(2\pi \cdot f_k \cdot \tau - \varphi_{k,yck}) \Big|_0^t = \\
 &= \sum_k \frac{A_{k,yck}}{2\pi \cdot f_k} \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,yck}) - \sum_k \frac{A_{k,yck}}{2\pi \cdot f_k} \sin(-\varphi_k) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k A_{k,ck} \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,уск}) - \sum_k A_{k,ck} \sin(-\varphi_{k,уск}) = \\
&= \sum_k A_{k,ck} \cos\left(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,уск} - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_k A_{k,ck} \sin(\varphi_{k,уск}) = \\
&= \sum_k A_{k,ck} \cos(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,ck}) + C_{инт,ck},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

где  $A_{k,ck} = \frac{A_{k,уск}}{2\pi \cdot f_k}$  - амплитуда виброскорости гармонической составляющей частоты  $f_k$  в единицах измерения  $\frac{м}{с}$ , для перехода к единицам измерения  $\frac{мм}{с}$   $A_{k,ck}$  следует умножить на 1000, т.е.

$$A_{k,ck} = \frac{A_{k,уск} \cdot 1000}{2\pi \cdot f_k}; \tag{2.40}$$

$\varphi_{k,ck} = \varphi_{k,уск} - \frac{\pi}{2}$  - фаза виброскорости гармонической составляющей частоты  $f_k$ ;  
 $C_{инт,ck} = \sum_k A_{k,ck} \sin(\varphi_{k,уск})$  - постоянная интегрирования, величина которой зависит от начальных фаз гармонических составляющих. На практике предпринимают действия, чтобы приравнять  $C_{инт,ck}$  нулю.

Выполнив интегрирование по отношению к сигналу, представленному в единицах виброскорости, получим сигнал в единицах виброперемещения:

$$\begin{aligned}
x_{неп}(t) &= \int_0^t x_{ck}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_k A_{k,ck} \cos(2\pi \cdot f_k \cdot \tau - \varphi_{k,ck}) d\tau = \\
&= \sum_k \frac{A_{k,ck}}{2\pi \cdot f_k} \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,ck}) - \sum_k \frac{A_{k,ck}}{2\pi \cdot f_k} \sin(-\varphi_{k,ck}) = \\
&= \sum_k A_{k,неп} \cos(2\pi \cdot f_k \cdot t - \varphi_{k,неп}) + C_{инт,неп},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

где  $A_{k,неп} = \frac{A_{k,ck}}{2\pi \cdot f_k} = \frac{A_{k,уск}}{4\pi^2 \cdot f_k^2}$  - амплитуда виброскорости гармонической составляющей частоты  $f_k$  в единицах измерения  $м$ , если  $A_{k,ck}$  имеет единицы измерения  $\frac{м}{с}$ , а  $A_{k,уск}$  -  $\frac{м}{с^2}$ . При переходе к единицам измерения  $мм$

$$A_{k,неп} = \frac{A_{k,ck} \cdot 1000}{2\pi \cdot f_k} = \frac{A_{k,уск} \cdot 1000000}{4\pi^2 \cdot f_k^2}; \tag{2.42}$$

$\varphi_{k,неп} = \varphi_{k,ck} - \frac{\pi}{2} = \varphi_{k,уск} - \pi$  - фаза виброскорости гармонической составляющей частоты  $f_k$ ;

$C_{инт,неп} = \sum_k A_{k,неп} \sin(\varphi_{k,ck})$  - постоянная интегрирования.

В качестве иллюстрации выражений (2.39 - 2.42) можно привести временные реализации и спектры в единицах виброускорения, виброкорости и виброперемещения, изображенные на рисунках 2.20, 2.21, 2.22.

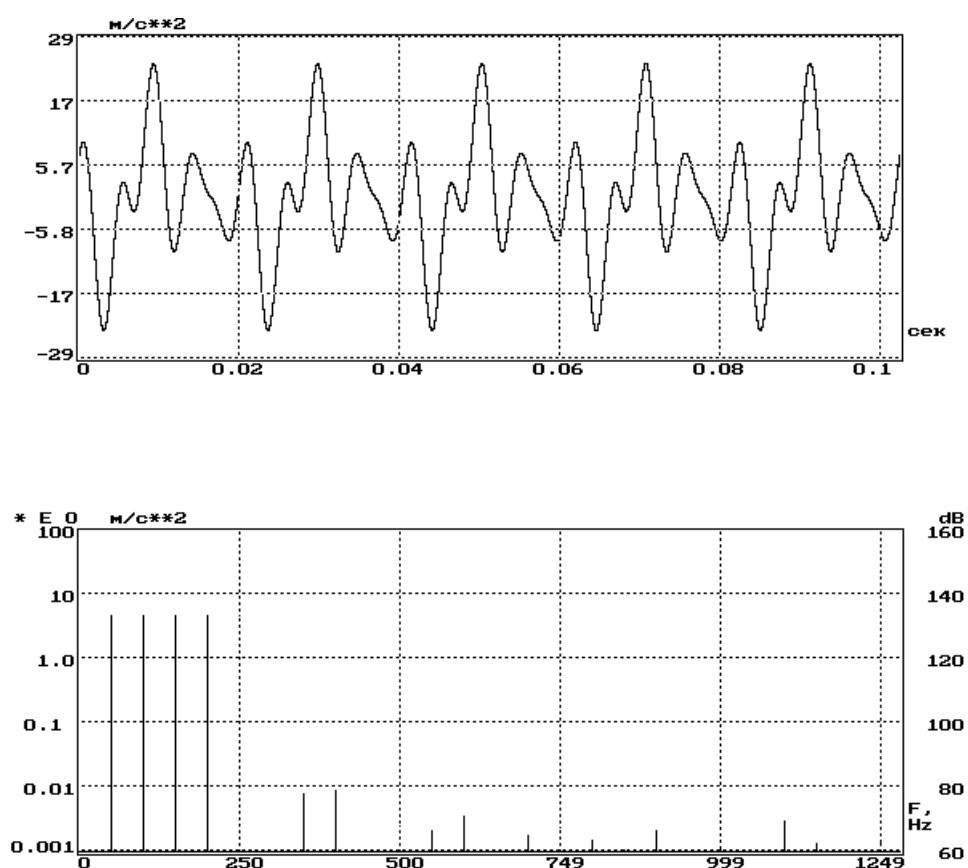


Рисунок 2.20 - Временная реализация и спектр вибросигнала в единицах виброускорения

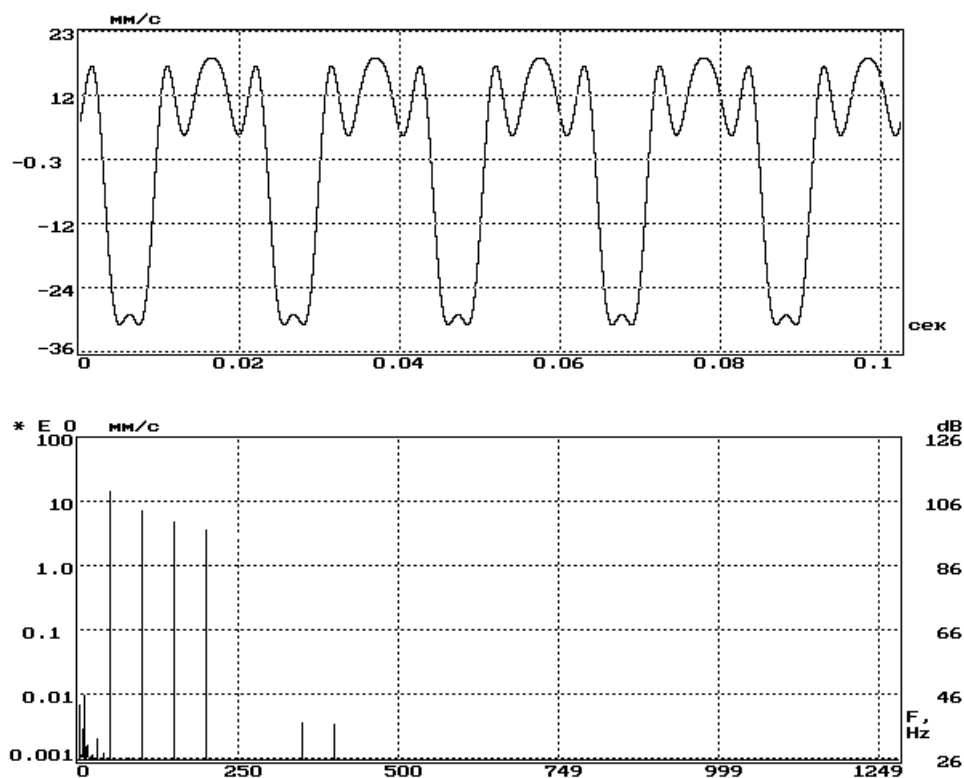


Рисунок 2.21 - Временная реализация и спектр вибросигнала в единицах виброскорости

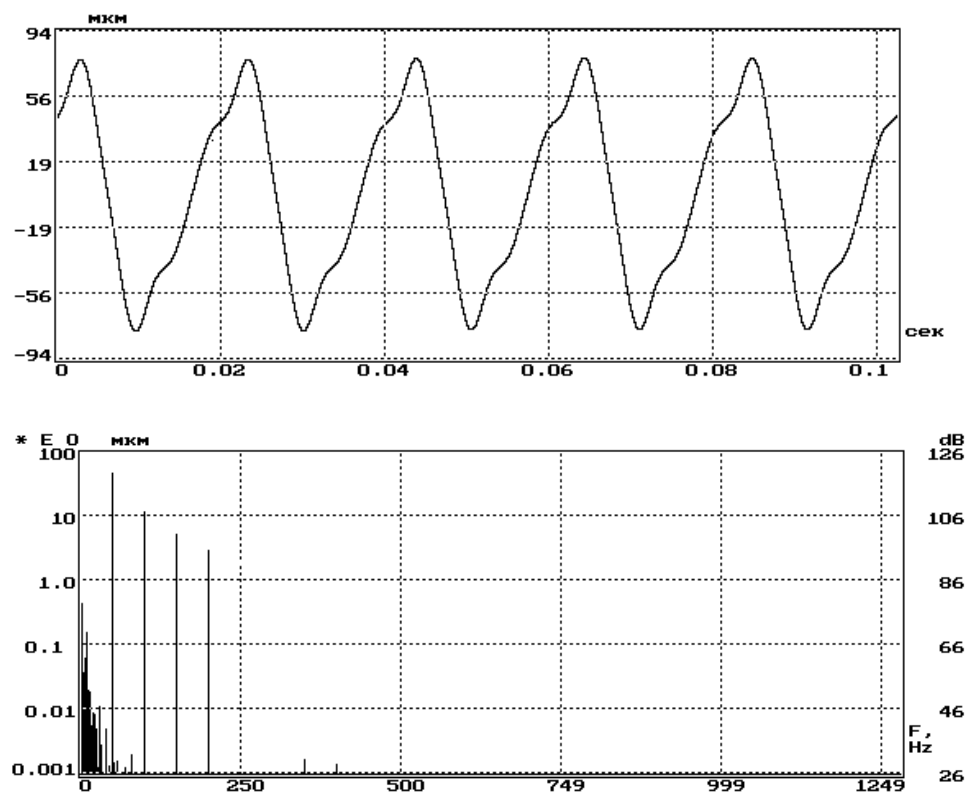


Рисунок 2.22 - Временная реализация и спектр вибросигнала в единицах виброперемещения



## 2.10 Формирование периодических сигналов

Физические процессы, протекающие в природе обычно являются непрерывными, а когда они обрабатываются цифровыми вычислительными машинами, то осуществляется переход от непрерывного времени к дискретному.

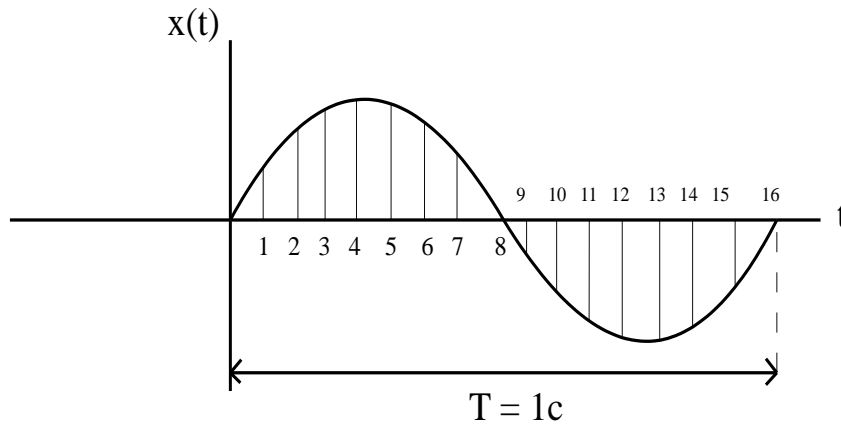


Рисунок 2.21 – Гармонический сигнал с периодом 1 секунда

$x(t) = A \sin(2\pi t)$  - непрерывный (аналоговый) гармонический сигнал;

$x(n) = A \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$  - дискретный гармонический сигнал,

где  $n$  – номер элемента массива,

$N$  – число дискретных точек на одном периоде.

В большинстве случаев при переходе от непрерывного к дискретному, время, через которое фиксируют дискретные точки остается постоянным.

Вычисление гармонического сигнала с помощью аналитического выражения:

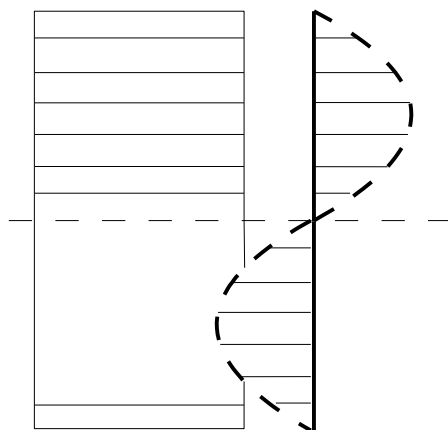
$$x(n) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi\right)$$

трудоёмко, что особенно это заметно для алгоритмов спектральной обработки.

Поэтому для формирования гармонических сигналов широко используется табличный способ.

Исходно рассчитывается массив данных, в который записывается один период сигнала:

$$TAB[n] = \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right), n = 0 \div N - 1.$$



$N$  - число точек на котором укладывается период. Чем больше  $N$ , тем точнее будет представлен сигнал.

Если необходимо сформировать гармонический сигнал из  $M$  отсчетов с частотой  $F$  и амплитудой  $A$ , то алгоритм формирования выглядит следующим образом:

$j := 0;$

$i := 0;$

*Начало:*

$x[j] = A * TAB[i];$

$i := (i + F) \bmod N;$

$j := j + 1;$

*if* ( $j > M$ ) *goto* *Выход*;

*goto* *Начало*;

*Выход*;

$x[M]$  – массив, в котором формируется сигнал.

Формирование дискретного сигнала заключается в выборке из таблицы нужного элемента. Если начальная фаза отлична от 0, то в этом случае нужно начать движение по таблице с элемента, отличного от нулевого.

При начальной фазе  $\varphi$  номер элемента в таблице, начиная с которого, осуществляется выбор из неё данных, вычисляется по формуле:

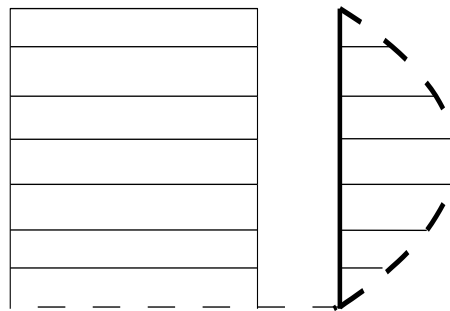
$$i = \text{round}\left(\frac{\varphi}{360} * N\right), \text{ если фаза задана в градусах;}$$

$$i = \text{round}\left(\frac{\varphi}{2\pi} * N\right), \text{ если фаза задана в радианах.}$$

Однако в этом случае может появиться погрешность задания начальной фазы так как :

$$\text{round}\left(\frac{\varphi}{360} * N\right) \neq \frac{\varphi}{360} * N, \quad \Delta\varphi = \varphi_m - \varphi_p;$$

Но  $\sin$  имеет свойство симметрии и поэтому для формирования гармонических сигналов можно использовать таблицу, в которой хранится половина периода или четверть периода синусной функции.



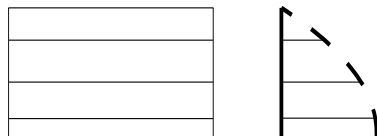
Алгоритм формирования дискретного гармонического сигнала с использованием таблицы, содержащей половину периода синусной функции.

```

i := 0;
j := 0;
zn := 1;
k := 0;
Начало:
  x[j] := zn * A * TAB[k];
  i := (i + F) mod N;
  if (0 ≤ i < N/2) then {zn := 1; k := i }
    иначе {zn := -1; k := i - N/2;}
  j := j + 1;
  if (j > M) goto Выход;
  goto Начало;
Выход;
```

В данном алгоритме переменная  $i$  является индексом элемента, который нужно было бы выбрать, если бы таблица содержала полный период синуса. Анализируя значение  $i$ , можно определить для таблицы, содержащей половину периода синусной функции, знак с которым будет выбираться значение из таблицы и номер элемента из этой половинной таблицы.

Алгоритм формирования дискретного гармонического сигнала с использованием таблицы, содержащей четверть периода синуса.



```

j := 0;
i := 0;
zn := 1;
k := 0;
Начало:
x[j] := zn * A * TAB[k];
i := (i + F) mod N
if (0 <= i <= N/4) то {zn := 1; k := i;}
    иначе {if (N/4 < i < N/2) то {zn := 1; k := N/2 - i}
        иначе if (N/2 <= i <= 3N/4) то {zn := -1; k := i - N/2}
            иначе {zn := -1; k := N - i}
j := j + 1;
if (j >= M) goto Выход;
goto Начало;
Выход;

```

Достаточно просто сформировать полигармонический сигнал, используя таблицу:

$$TAB[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0 \div N - 1$$

Сформировать полигармонический сигнал и сформировать его в массиве X:

В качестве исходных данных заданы;

AMPL[ ] - массив амплитуд;

F[ ] - массив частот;

$\varphi$ [ ] - массив начальных фаз;

k- число элементов в массивах исходных данных;

Алгоритм формирования полигармонического сигнала можно представить следующим образом:

Цикл по k от 0 до k - 1

Начало1

$$IND[k] := \text{round}\left(\frac{\varphi[k]}{360} * N\right);$$

Конец1;

$j:=0; x[j]:=0;$

*Начало 2:*

*Цикл по k от 0 до k – 1*

*Начало 3*

$x[j] := x[j] + AMPL[k]*TAB[IND[k]];$

$IND[k] := (IND[k] + F[k]) \bmod N;$

*Конец 3;*

$j := j + 1;$

*if (j >= M) goto Выход;*

$x[j]:=0;$

*goto Начало2;*

*Выход.*

## 2.11 Корреляция

Корреляция (correlation), и ее частный случай для центрированных сигналов – ковариация, является методом анализа сигналов. Приведем один из вариантов использования метода. Допустим, что имеется сигнал  $s(t)$ , в котором может быть (а может и не быть) некоторая последовательность  $x(t)$  конечной длины  $T$ , временное положение которой нас интересует. Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу  $s(t)$  временном окне длиной  $T$  вычисляются скалярные произведения сигналов  $s(t)$  и  $x(t)$ . Тем самым мы "прикладываем" искомый сигнал  $x(t)$  к сигналу  $s(t)$ , скользя по его аргументу, и по величине скалярного произведения оцениваем степень сходства сигналов в точках сравнения.

Корреляционный анализ дает возможность установить в сигналах (или в рядах цифровых данных сигналов) наличие определенной связи изменения значений сигналов по независимой переменной, то есть, когда большие значения одного сигнала (относительно средних значений сигнала) связаны с большими значениями другого сигнала (положительная корреляция), или, наоборот, малые значения одного сигнала связаны с большими значениями другого (отрицательная корреляция), или данные двух сигналов никак не связаны (нулевая корреляция).

В функциональном пространстве сигналов эта степень связи может выражаться в нормированных единицах коэффициента корреляции, т.е. в косинусе угла между векторами сигналов, и, соответственно, будет принимать значения от 1 (полное совпадение сигналов) до -1 (полная противоположность) и не зависит от значения (масштаба) единиц измерений.

В варианте автокорреляции (autocorrelation) по аналогичной методике производится определение скалярного произведения сигнала  $s(t)$  с собственной копией, скользящей по аргументу. Автокорреляция позволяет оценить среднестатистическую зависимость текущих отсчетов сигнала от своих предыдущих и последующих значений (так называемый радиус корреляции значений сигнала), а также выявить в сигнале наличие периодически повторяющихся элементов.

Особое значение методы корреляции имеют при анализе случайных процессов

для выявления неслучайных составляющих и оценки неслучайных параметров этих процессов.

Заметим, что в терминах "корреляция" и "ковариация" в настоящее время существует изрядная путаница. В иностранной литературе термин "ковариация" применяется к центрированным функциям, а "корреляция" – к произвольным. В отечественной литературе, и особенно в литературе по сигналам и их обработке, довольно часто применяется прямо противоположная терминология. Однако при переводах иностранной литературы терминология, как правило, не изменяется, и начинает все шире проникать в отечественную литературу. Принципиального значения это не имеет, но при знакомстве с литературными источниками стоит обращать внимание на принятое назначение данных терминов.

При разработке настоящих лекций было принято решение использовать общепринятую международную терминологию, как согласованную по понятиям с основными положениями теории вероятностей и математической статистики.

**Понятие автокорреляционных функций (АКФ) сигналов.** АКФ (correlation function, CF) сигнала  $s(t)$ , конечного по энергии, является количественной интегральной характеристикой формы сигнала, и определяется интегралом от произведения двух копий сигнала  $s(t)$ , сдвинутых относительно друг друга на время  $\tau$ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \langle s(t), s(t+\tau) \rangle = \|s(t)\| \cdot \|s(t+\tau)\| \cos(\varphi(\tau)) \quad (2.43)$$

Как следует из этого выражения, АКФ является скалярным произведением сигнала и его копии в функциональной зависимости от переменной величины значения сдвига  $\tau$ . Соответственно, АКФ имеет физическую размерность энергии, а при  $\tau = 0$  значение АКФ непосредственно равно энергии сигнала:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = E_s.$$

АКФ относится к четным функциям, в чем нетрудно убедиться заменой переменной  $t = t - \tau$  в выражении (2.43):

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t)dt = B_s(-\tau).$$

Максимум АКФ, равный энергии сигнала при  $\tau=0$ , всегда положителен, а модуль АКФ при любом значении временного сдвига не превосходит энергии сигнала. Последнее прямо вытекает из свойств скалярного произведения (как и неравенство Коши-Буняковского):

$$\langle s(t), s(t+\tau) \rangle = \|s(t)\| \cdot \|s(t+\tau)\| \cos(\varphi(\tau)) < E_s.$$

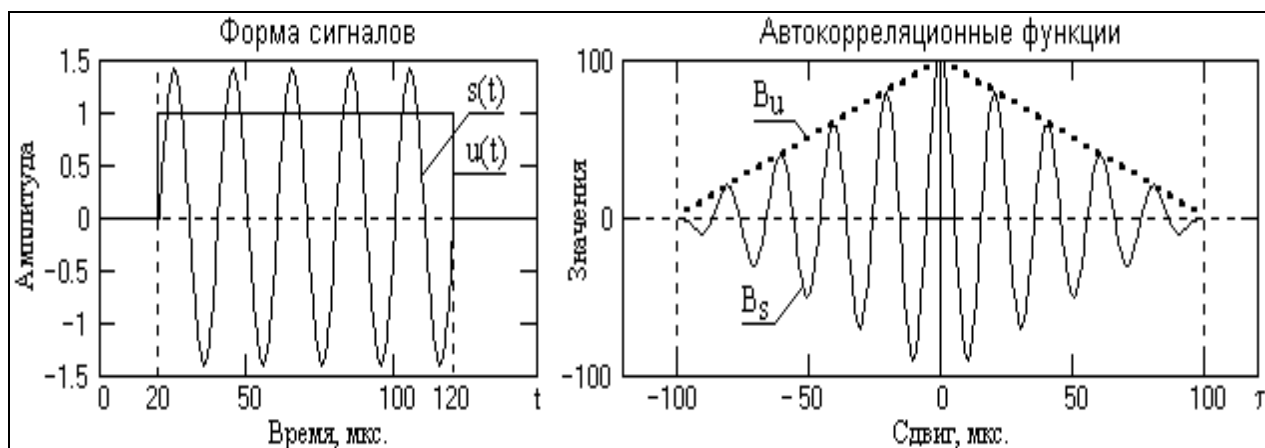


Рисунок 2.22 – Иллюстрация корреляции

В качестве примера на рис. 2.22 приведены два сигнала – прямоугольный импульс и радиоимпульс одинаковой длительности  $T$ , и соответствующие данным сигналам формы их АКФ. Амплитуда колебаний радиоимпульса установлена равной  $\sqrt{T}$  амплитуды прямоугольного импульса, при этом энергии сигналов также будут одинаковыми, что подтверждается равными значениями центральных максимумов АКФ. При конечной длительности импульсов длительности АКФ также конечны, и равны удвоенным значениям длительности импульсов (при сдвиге копии конечного импульса на интервал его длительности как влево, так и вправо, произведение импульса со своей копией становится равным нулю). Частота колебаний АКФ радиоимпульса равна частоте колебаний заполнения радиоимпульса (боковые минимумы и максимумы АКФ возникают каждый раз при последовательных сдвигах копии радиоимпульса на половину периода колебаний его заполнения).

С учетом четности, графическое представление АКФ обычно производится только для положительных значений  $\tau$ . Знак  $+\tau$  в выражении (2.43) означает, что при увеличении значений  $\tau$  от нуля копия сигнала  $s(t + \tau)$  сдвигается влево по оси  $t$ . На практике сигналы обычно задаются на интервале положительных значений аргументов от  $0-T$ , что дает возможность продления интервала нулевыми значениями, если это необходимо для математических операций. В этих границах вычислений более удобным для построения вычислительных алгоритмов является сдвиг копии сигнала вправо по оси аргументов, т.е. применение в выражении (2.43) функции копии  $s(t - \tau)$ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt. \quad (2.44)$$

По мере увеличения значения величины сдвига  $\tau$  для финитных(конечных) сигналов временное перекрытие сигнала с его копией уменьшается, а, соответственно, косинус угла взаимодействия и скалярное произведение в целом стремятся к нулю:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0.$$

АКФ, вычисленная по центрированному значению сигнала  $s(t)$ , представляет собой автоковариационную функцию сигнала:

$$C_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \mu_s][s(t + \tau) - \mu_s] dt \quad (2.45)$$

где  $\mu_s$  – среднее значение сигнала. Ковариационные функции связаны с корреляционными функциями достаточно простым соотношением:

$$C_s(\tau) = B_s(\tau) - \mu_s^2. \quad (2.46)$$

**АКФ сигналов, ограниченных во времени.** На практике обычно исследуются сигналы, заданные на определенном интервале  $[a, b]$ , при этом вычисление АКФ производится с нормировкой на длину интервала  $[a, b]$ :

$$B_s(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b s(t)s(t+\tau) dt. \quad (2.47)$$

АКФ может быть вычислена и для слабозатухающих сигналов с бесконечной энергией, как среднее значение скалярного произведения сигнала и его копии при устремлении интервала задания сигнала к бесконечности:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t+\tau) dt. \quad (2.48)$$

АКФ по данным выражениям имеет физическую размерность мощности, и равна средней взаимной мощности сигнала и его копии в функциональной зависимости от сдвига копии.

**Функции автоковариации (ФАК)** вычисляются аналогично, по центрированным значениям сигнала. Замечательной особенностью этих функций являются их простые соотношения с дисперсией  $\sigma_s^2$  сигналов (квадратом стандарта - среднего квадратического отклонения значений сигнала от среднего значения). Как известно, значение дисперсии равно средней мощности сигналов, откуда следует:

$$|C_s(\tau)| \leq \sigma_s^2, \quad |C_s(\tau=0)| = \sigma_s^2. \quad (2.49)$$

Значения ФАК, нормированные на значение дисперсии, изменяются в интервале от -1 до 1 и представляют собой функцию автокорреляционных коэффициентов:

$$\rho_s(\tau) = \frac{C_s(\tau)}{C_s(0)} = \frac{C_s(\tau)}{\sigma_s^2}. \quad (2.50)$$

Иногда эту функцию называют "истинной" автокорреляционной функцией. В



силу нормировки ее значения не зависят от единиц (масштаба) представления значений сигнала  $s(t)$  и характеризуют степень линейной связи между значениями сигнала в зависимости от величины сдвига  $\tau$  между отсчетами сигнала. Так, например, для шумовых сигналов при полной статистической независимости отсчетов по независимой переменной, значение  $\rho_s(\tau)$  стремится к нулю при  $\tau \neq 0$ , и стремится к 1 при  $\tau \rightarrow 0$ .

**АКФ периодических сигналов.** Энергия периодических сигналов бесконечна, поэтому АКФ периодических сигналов вычисляется по одному периоду  $T$ , с усреднением скалярного произведения сигнала и его сдвинутой копии в пределах этого периода:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt. \quad (2.51)$$

При  $\tau=0$  значение нормированной на период АКФ равно средней мощности сигналов в пределах периода. При этом АКФ периодических сигналов является периодической функцией с тем же периодом  $T$ . Так, для сигнала

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ при } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$B_s(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) A \cos(\omega_0(t-\tau) + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

Полученный результат не зависит от начальной фазы гармонического сигнала, что характерно для любых периодических сигналов и является одним из свойств АКФ. С помощью функций автокорреляции можно проверять наличие периодических свойств в любых произвольных сигналах.

**АКФ дискретных сигналов.** При интервале дискретизации данных  $\Delta t = \text{const}$  вычисление АКФ выполняется по интервалам  $\Delta \tau = \Delta t$  и обычно записывается, как дискретная функция номеров  $n$  сдвига отсчетов  $n \Delta \tau$ :

$$B_s(n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k s_{k-n}. \quad (2.52)$$

Дискретные сигналы обычно задаются в виде числовых массивов определенной длины с нумерацией отсчетов  $k = 0, 1, \dots, N$ , а вычисление дискретной АКФ выполняется в одностороннем варианте с учетом длины массивов по формуле:

$$B_s(n) = \frac{N \cdot \Delta t}{N + 1 - n} \sum_{k=0}^{N-n} s_k s_{k-n}. \quad (2.53)$$

Множитель  $\frac{N}{N+1-n}$  в данной функции является поправочным коэффициентом

на постепенное уменьшение числа перемножаемых и суммируемых значений (от  $N$  до  $N-n$ ) по мере увеличения сдвига  $n$ . Без этой поправки для нецентрированных сигналов в значениях АКФ появляется тренд суммирования средних значений.

Практически, дискретная АКФ имеет такие же свойства, как и непрерывная АКФ. Она также является четной, а ее значение при  $n = 0$  равно мощности дискретного сигнала.

**Взаимная корреляционная функция** (ВКФ) разных сигналов (cross-correlation function, CCF) описывает как степень сходства формы двух сигналов, так и их взаимное расположение друг относительно друга по координате (независимой переменной). Обобщая формулу (2.43) автокорреляционной функции на два различных сигнала  $s(t)$  и  $u(t)$ , получаем следующее скалярное произведение сигналов:

$$B_{su}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)u(t+\tau)dt. \quad (2.54)$$

Взаимная корреляция сигналов характеризует определенную корреляцию явлений и физических процессов, отображаемых данными сигналами, и может служить мерой “устойчивости” данной взаимосвязи при отдельной обработке сигналов в различных устройствах. Для конечных по энергии сигналов ВКФ также конечна, при этом:

$$B_{su}(\tau) \leq \|s(t)\| \cdot \|u(t)\|,$$

что следует из неравенства Коши-Буняковского и независимости норм сигналов от сдвига по координатам.

При замене переменной  $t = t - \tau$  в формуле (2.54), получаем:

$$B_{su}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)u(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)s(t-\tau)dt = B_{us}(-\tau). \quad (2.55)$$

Для периодических сигналов понятие ВКФ обычно не применяется, за исключением сигналов с одинаковым периодом, например, сигналов входа и выхода систем при изучении характеристик систем.

Количественный показатель степени сходства сигналов  $s(t)$  и  $u(t)$  - функция взаимных корреляционных коэффициентов. Аналогично функции автокорреляционных коэффициентов, она вычисляется через центрированные значения функций (для вычисления взаимной ковариации достаточно центрировать только одну из функций), и нормируется на произведение значений стандартов функций  $s(t)$  и  $u(t)$ :

$$\rho_{su}(\tau) = \frac{C_{su}(\tau)}{\sigma_s \sigma_u}. \quad (2.56)$$

Интервал изменения значений корреляционных коэффициентов при сдвигах  $\tau$  может изменяться от  $-1$  (полная обратная корреляция) до  $1$  (полное сходство или стопроцентная корреляция). При сдвигах  $\tau$ , на которых наблюдаются нулевые значения  $\rho_{su}(\tau)$ , сигналы независимы друг от друга (некоррелированы). Коэффициент взаимной корреляции позволяет устанавливать наличие связи между сигналами вне зависимости от физических свойств сигналов и их величины.

**Спектральная плотность АКФ** может быть определена из следующих простых соображений.

В соответствии с выражением (2.43) АКФ представляет собой функцию скалярного произведения сигнала и его копии, сдвинутой на интервал  $\tau$  при  $-\infty < \tau < \infty$ :

$$B_s(\tau) = \langle s(t), s(t - \tau) \rangle.$$

Скалярное произведение может быть определено через спектральные плотности сигнала и его копии, произведение которых представляет собой спектральную плотность взаимной мощности:

$$B_s(\tau) = \langle s(t), s(t - \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S_{\tau}^*(\omega) d\omega$$

Смещение сигнала по оси абсцисс на интервал  $\tau$  отображается в спектральном представлении умножением спектра сигнала на  $\exp(-j\omega\tau)$ , а для сопряженного спектра на множитель  $\exp(j\omega\tau)$ :

$$S_{\tau}^*(\omega) = S^*(\omega) \exp(j\omega\tau).$$

С учетом этого получаем:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.57)$$

Но последнее выражение представляет собой обратное преобразование Фурье энергетического спектра сигнала (спектральной плотности энергии). Следовательно, энергетический спектр сигнала и его автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье:

$$B_s(\tau) \Leftrightarrow |S(\omega)|^2 = W_s(\omega). \quad (2.58)$$

Аналогичный результат может быть получен и прямым преобразованием Фурье автокорреляционной функции:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) \exp(-j\omega\tau) dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) \exp(j\omega(t+\tau)) d(t+\tau) d\tau = S(\omega)S^*(\omega) = W_s(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность АКФ есть не что иное, как спектральная плотность мощности сигнала, которая, в свою очередь, может определяться прямым преобразованием Фурье через АКФ:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (2.59)$$

Последнее выражение накладывает определенные ограничения на форму АКФ и методику их ограничения по длительности.

Энергетический спектр сигналов всегда положителен, мощность сигналов не может быть отрицательной. Следовательно, АКФ не может иметь формы прямоугольного импульса, т.к. преобразование Фурье прямоугольного импульса – знакопеременный интегральный синус. На АКФ не должно быть и разрывов первого рода (скачков), т.к. с учетом четности АКФ любой симметричный скачок по координате  $\pm\tau$  порождает “разделение” АКФ на сумму определенной непрерывной функции и прямоугольного импульса длительностью  $2\tau$  с соответствующим появлением отрицательных значений в энергетическом спектре.

АКФ достаточно протяженных сигналов обычно ограничиваются по размерам (исследуются ограниченные интервалы корреляции данных от  $-T/2$  до  $T/2$ ). Однако усечение АКФ, это умножение АКФ на прямоугольный селектирующий импульс длительностью  $T$ , что в частотной области отображается сверткой фактического спектра мощности со знакопеременной функцией интегрального синуса  $\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ .

С одной стороны, это вызывает определенное сглаживание спектра мощности, что зачастую бывает полезным, например, при исследовании сигналов на значительном уровне шумов. Но, с другой стороны, может происходить и существенное занижение величины энергетических пиков, если в сигнале имеются какие-либо гармонические составляющие, и появление отрицательных значений мощности на краевых частях пиков и скачков.

Как известно, спектры мощности сигналов не имеют фазовой характеристики и по ним невозможно восстановление сигналов. Следовательно, АКФ сигналов, как временное представление спектров мощности, также не имеет информации о фазовых характеристиках сигналов и восстановление сигналов по АКФ невозможно. Сигналы одной формы и сдвинутые во времени имеют одинаковые АКФ. Больше того, сигналы разной формы могут иметь сходные АКФ, если имеют близкие спектры мощности.

Можно записать следующее уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega$$

и, подставив в это выражение значение  $\tau=0$ , получим хорошо известное равенство, называемое *равенством Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.60)$$

Оно позволяет вычислять энергию сигнала, как по временной, так и по частотной области.

**Интервал корреляции сигнала** является числовым параметром оценки ширины АКФ и степени значимой корреляции значений сигнала по аргументу.

Если допустить, что сигнал  $s(t)$  имеет примерно равномерный энергетический спектр с верхней граничной частотой до  $\omega_b$  (форма центрированного прямоугольного импульса, как, например, сигнал 1 на рисунке 2.23 с  $f_b=50$  Гц в одностороннем представлении), то АКФ сигнала определится выражением:

$$B_s(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{W_0 \cdot \omega_b}{\pi} \frac{\sin(\omega_b \tau)}{\omega_b \tau}. \quad (2.61)$$

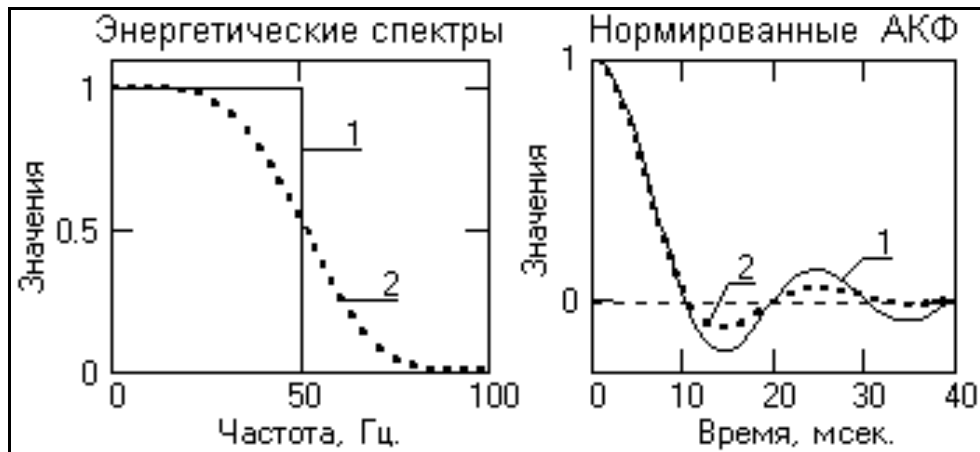


Рисунок 2.23 – Определение интервала корреляции

Интервалом корреляции сигнала  $\tau_k$  считается величина ширины центрального пика АКФ от максимума до первого пересечения нулевой линии. В данном случае для прямоугольного спектра с верхней граничной частотой  $\omega_b$  первое пересечение нуля соответствует  $\sin(\omega_b \tau) = 0$  при  $\omega_b \tau = \pi$ , откуда:

$$\tau_k = \frac{\pi}{\omega_b} = \frac{1}{f_b} \quad (2.62)$$

Интервал корреляции тем меньше, чем выше верхняя граничная частота спектра сигнала. Для сигналов с плавным срезом по верхней граничной частоте роль параметра  $\omega_b$  играет средняя ширина спектра (сигнал 2 на рисунке 2.23).

Спектральная плотность мощности статистических шумов при единичном измерении представляет собой случайную функцию  $W_q(\omega)$  со средним значением  $W_q(\omega) \Rightarrow \sigma_q^2 W_q(\omega)$ , где  $\sigma_q^2$  – дисперсия шумов. В пределе, при равномерном спектральном распределении шумов от 0 до  $\infty$ , АКФ шумов стремится к значению  $B_q(\tau) \Rightarrow \sigma_q^2$  при  $\tau \Rightarrow 0$ ,  $B_q(\tau) \Rightarrow 0$  при  $\tau \neq 0$ , т.е. статистические шумы не коррелированы ( $\tau_k \Rightarrow 0$ ).

**Спектральная плотность ВКФ** может быть получена на основании тех же соображений, что и для АФК, или непосредственно из формулы (2.57) заменой спектральной плотности сигнала  $S^*(\omega)$  на спектральную плотность второго сигнала  $U^*(\omega)$ :

$$B_{su}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) U^*(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.63)$$

Или, при смене порядка сигналов:

$$B_{us}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) S^*(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.64)$$

Произведение  $S(\omega)U^*(\omega)$  представляет собой взаимный энергетический спектр  $W_{su}(\omega)$  сигналов  $s(t)$  и  $u(t)$ . Соответственно,  $U(\omega)S^*(\omega) = W_{us}(\omega)$ . Следовательно, как и АКФ, взаимнокорреляционная функция и спектральная плотность взаимной мощности сигналов связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$B_{su}(\tau) \Leftrightarrow W_{su}(\omega) \equiv W_{us}^*(\omega); \quad (2.65)$$

$$B_{us}(\tau) \Leftrightarrow W_{us}(\omega) \equiv W_{su}^*(\omega). \quad (2.66)$$

В общем случае, за исключением спектров четных функций, из условия несоблюдения четности для функций ВКФ следует, что взаимные энергетические спектры являются комплексными функциями:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= A_u(\omega) + jB_u(\omega), & V(\omega) &= A_v(\omega) + jB_v(\omega). \\ W_{uv}(\omega) &= A_u A_v + B_u B_v + j(B_u A_v - A_u B_v) = \text{Re}(W_{uv}(\omega)) + j \text{Im}(W_{uv}(\omega)) \end{aligned}$$

и содержат определенную фазовую характеристику гармонических составляющих ВКФ, которой и формируется сдвиг максимума ВКФ.

На рисунке 2.24 можно наглядно видеть особенности формирования ВКФ на примере двух одинаковых по форме сигналов, сдвинутых относительно друг друга.

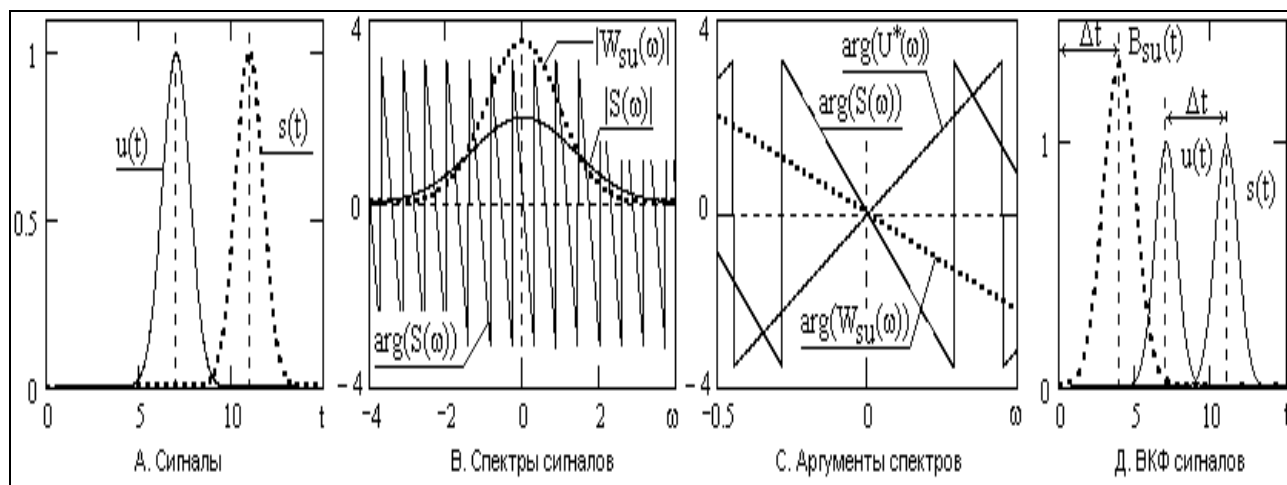


Рисунок 2.24 - Формирование ВКФ

Форма сигналов и их взаимное расположение приведены на виде А. Модуль и аргумент спектра сигнала  $s(t)$  приведены на виде В. Модуль спектра  $u(t)$  тождественен модулю  $S(\omega)$ . На этом же виде приведен модуль спектра взаимной мощности сигналов  $W_{su}(\omega) = S(\omega) \cdot U^*(\omega)$ . Как известно, при перемножении комплексных спектров модули спектров перемножаются, а фазовые углы складываются, при этом для сопряженного спектра  $U^*(\omega)$  фазовый угол меняет знак. Если первым в формуле вычисления ВКФ (8.2.1) стоит сигнал  $s(t)$ , а сигнал  $u(t - \tau)$  на оси ординат стоит впереди  $s(t)$ , то фазовые углы  $S(\omega)$  по мере увеличения частоты нарастают в сторону отрицательных значений углов (без учета периодического сброса значений на  $2\pi$ ), а фазовые углы  $U^*(\omega)$  по абсолютным значениям меньше фазовых углов  $s(t)$  и нарастают (за счет сопряжения) в сторону положительных значений. Результатом умножения спектров (как это видно на рис. 8.3.4, вид С) является вычитание из фазовых углов  $S(\omega)$  значений углов  $U^*(\omega)$ , при этом фазовые углы спектра  $W_{su}(\omega)$  остаются в области отрицательных значений, что обеспечивает сдвиг всей функции ВКФ (и ее пиковых значений) вправо от нуля по оси  $\tau$  на определенную величину (для одинаковых сигналов – на величину разности между сигналами по оси ординат). При смещении начального положения сигнала  $u(t)$  в сторону сигнала  $s(t)$  фазовые углы  $W_{su}(\omega)$  уменьшаются, в пределе до нулевых значений при полном совмещении сигналов, при этом функция  $B_{su}(t)$  смещается к нулевым значениям  $\tau$  в пределе до обращения в АКФ (для одинаковых сигналах  $s(t)$  и  $u(t)$ ).

При анализе дискретных данных и числовых рядов соответственно используется функция взаимной ковариации (ФВК):

$$C_{su}(n) = \frac{N \cdot \Delta t}{N + 1 - n} \sum_{k=0}^{N-n} (s_k - \bar{s})(u_{k+n} - \bar{u}).$$

Как известно для детерминированных сигналов, если спектры двух сигналов не перекрываются и, соответственно, взаимная энергия сигналов равна нулю, такие сигналы ортогональны друг другу. Связь энергетических спектров и корреляционных функций сигналов показывает еще одну сторону взаимодействия сигналов. Если спектры сигналов не перекрываются и их взаимный энергетический спектр равен нулю на всех частотах, то при любых временных сдвигах  $\tau$  друг относительно друга их ВКФ также равна нулю. А это означает, что такие сигналы являются некоррелированными. Это действительно как для детерминированных, так и для случайных сигналов и процессов.





### 3 Дискретные сигналы и системы

#### 3.1 Z – преобразование

##### 3.1.1 Определение

Цифровая обработка сигналов оперирует с дискретными преобразованиями сигналов и обрабатывающих данные сигналы систем. Математика дискретных преобразований зародилась еще в 18 веке в рамках теории рядов и их применения для интерполяции и аппроксимации функций, однако ускоренное развитие она получила в 20 веке после появления первых вычислительных машин. В принципе, в своих основных положениях математический аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных требует учета этого фактора, и его игнорирование может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

Распространенным способом анализа дискретных цифровых последовательностей является z-преобразование (z-transform). Оно играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как для аналоговых – преобразование Лапласа. Большое значение z-преобразование имеет для расчетов рекурсивных цифровых систем обработки сигналов, а потому рассматривается отдельной темой перед началом изучения рекурсивных цифровых фильтров.

Z- преобразование является обобщением дискретного преобразования Фурье. Особенно эффективно оно используется при анализе дискретных систем и, в частности, при проектировании рекурсивных цифровых фильтров.

Впервые z-преобразование введено в употребление П.Лапласом в 1779 и повторно "открыто" В.Гуревичем в 1947 году с изменением символики на  $z^{-k}$ . В настоящее время в технической литературе имеют место оба вида символики. На практическое использование преобразования это не влияет, так как смена знака только зеркально изменяет нумерацию членов полинома (относительно  $z^0$ ), числовое пространство которых в общем случае от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Преобразованием Лапласа функции  $x(t)$  называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt; \quad (3.1)$$

прямое преобразование и обратное

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p)e^{pt} dp, \quad (3.2)$$

где  $X(p)$  –  $L$  –изображение ( $L$  –образ) функции  $x(t)$ , результат преобразования Лапласа;

$p$  – оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega; \quad (3.3)$$

$\sigma_0$  – абсцисса абсолютной сходимости интеграла (3.1).

Преобразование Лапласа справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла (3.1)

$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty,$$

определяемое абсциссой абсолютной сходимости  $\sigma_0$ . На комплексной плоскости  $p$  – плоскости это область, где  $\text{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$ .

Дискретное преобразование Лапласа последовательности  $x(nT)$  получают в результате перехода от непрерывного времени к дискретному

$$t \Rightarrow nT,$$

замены непрерывной функции последовательностью

$$x(t) \Rightarrow x(nT),$$

а интеграл заменяется суммой:

$$X(e^{pt}) = D\{X(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}. \quad (3.4)$$

При исследовании дискретных сигналов и линейных систем вместо дискретного преобразования Лапласа используют  $Z$ -преобразование, которое получается из дискретного преобразования Лапласа в результате замены переменных

$$z = e^{pT}.$$

$Z$ -преобразованием последовательности  $x(nT)$  называется следующий ряд:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \quad (3.5)$$

где  $Z\{x(nT)\}$  – символическое обозначение  $Z$ -преобразования;

$x(nT)$  – оригинал (вещественная или комплексная последовательность);

$X(z)$  –  $z$ -изображение ( $z$ -образ) последовательности  $x(nT)$ , результат  $Z$ -преобразования.

$Z$ -преобразование однозначно связывает последовательность  $x(nT)$  с ее  $z$ -изображением  $X(z)$  и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty. \quad (3.6)$$

Комплексная переменная  $z$  может быть представлена в двух формах:

- в алгебраической

$$z = \xi + j\eta;$$

- в показательной

$$z = re^{j\varphi},$$

где радиус  $r$  является модулем, а угол  $\varphi$  - аргументом переменной  $z$ :

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Соответственно, положение произвольной точки на комплексной  $z$ -плоскости может задаваться:

- координатами  $(\xi; \eta)$  - в декартовой системе координат;
- полярными координатами  $(r; \varphi)$  - в полярной системе координат.

### 3.1.2 Основные свойства $Z$ -преобразования

Одним из важнейших свойств  $Z$ -преобразования является свойство его единственности, в соответствии с которым последовательность  $x(nT)$  однозначно определяется  $z$ -изображением  $X(z)$  в области его сходимости и наоборот,  $z$ -изображение  $X(z)$  однозначно определяет последовательность  $x(nT)$ .

Другие свойства  $Z$ -преобразования:

#### 3. Линейность

Если последовательность  $x(nT)$  равна линейной комбинации последовательностей

$$x(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) + a_3 x_3(nT) + \dots,$$

то её  $z$ -изображение равно линейной комбинации  $z$ -изображений данных последовательностей:

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + a_3 X_3(z) + \dots$$

#### 2. $Z$ –преобразование задержанной последовательности (теорема о задержке)

$Z$  – изображение последовательности  $x[(n-m)T]$ , задержанной на  $m$  ( $m>0$ ) отсчетов, равно  $z$ -изображению незадержанной последовательности  $x(nT)$ , умноженному на  $z^{-m}$ :

$$Z\{x(nT)\} = X(z);$$

$$Z\{x[(n-m)T]\} = X(z)z^{-m}.$$

3.  $Z$  – преобразование свертки последовательностей (теорема о свертке)

Сверткой последовательностей  $x_1(nT)$  и  $x_2(nT)$  называется последовательность  $x(nT)$ , определяемая соотношением

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT)x_2[(n-m)T].$$

$Z$  – изображение свертки равно произведению  $z$ -изображений свертываемых последовательностей

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = X_1(z)X_2(z).$$

### 3.2 Линейные системы, инвариантные к сдвигу

Преобразование и обработка сигналов осуществляется в системах. Понятия сигнала и системы неразрывны, так как любой сигнал существует в какой-либо системе его обращения. Система обработки сигналов может быть реализована как в материальной форме (специальное устройство, измерительный прибор и т.п.), так и программно на ЭВМ или на любом другом вычислительном устройстве. Существуют и комплексные измерительно-вычислительные системы и комплексы (ИВС или ИВК), которые выполняют как ввод и первичную обработку сигналов непосредственно в материальной форме их представления, так и преобразование сигналов в цифровую форму, и последующую программную обработку. Форма реализации систем существенного значения не имеет и определяет только их возможности при анализе и обработке сигналов.

#### 3.2.1 Линейные системы

**Общие понятия систем.** Безотносительно к назначению и исполнению система всегда имеет *вход*, на который подается входной сигнал или входное воздействие, в общем случае многомерное, и *выход*, с которого снимается обработанный выходной сигнал. Если устройство системы и внутренние операции преобразований принципиального значения не имеют, то система в целом может восприниматься как “черный ящик”, в формализованном виде. Формализованная система представляет собой определенный *системный оператор* (алгоритм) преобразования входного сигнала –

воздействия  $s(t)$ , в сигнал на выходе системы  $y(t)$  – отклик или выходную реакцию системы. Символическое обозначение операции преобразования (трансформации):

$$y(t) = T[s(t)].$$

Системный оператор  $T$  – это правило (набор правил, алгоритм) преобразования сигнала  $s(t)$  в сигнал  $y(t)$ . Для общеизвестных операций преобразования сигналов применяются также расширенные символы операторов трансформации, где вторым символом и специальными индексами обозначается конкретный вид операции (как, например,  $TF$  – преобразование Фурье,  $TF^{-1}$  – обратное преобразование Фурье).

Входной сигнал системы может представлять собой  $m$  – мерный вектор ( $m$  входных сигналов), а выходной сигнал  $n$  – мерный вектор, при этом система будет иметь  $m$  входов и  $n$  выходов.

Для детерминированных входных сигналов соотношение между выходными и входными сигналами однозначно задается системным оператором. В случае реализации на входе системы случайного входного процесса также существует однозначное соответствие процессов на выходе и входе системы, однако при этом одновременно происходит изменение статистических характеристик выходного сигнала (математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и пр.), которое также определяется системным оператором.

Для определения системы необходимо задать характер, тип и области допустимых величин входных и выходных сигналов. Как правило, системы выполняются на сигналы одного типа по входу/выходу и подразделяются на системы непрерывного времени (аналоговые или дискретные сигналы на входе и выходе) и цифровые системы. Совокупность системного оператора  $T$  и пространства сигналов образует математическую модель системы.

**Линейные системы.** Любые преобразования сигналов сопровождаются изменением их спектра и по характеру этих изменений разделяются на два вида: линейные и нелинейные. К нелинейным относят изменения, при которых в составе спектра сигналов появляются новые гармонические составляющие. При линейных изменениях сигналов изменяются амплитуды и/или начальные фазы гармонических составляющих спектра. Оба вида изменений могут происходить как с сохранением полезной информации, так и с ее искажением. Это зависит не только от характера изменения спектра сигналов, но и от спектрального состава самой полезной информации.

Линейные системы составляют основной класс систем обработки сигналов. Термин линейности означает, что система преобразования сигналов должна иметь произвольную, но в обязательном порядке линейную связь между входным сигналом (возбуждением) и выходным сигналом (откликом). В нелинейных системах связь между входным и выходным сигналом определяется произвольным нелинейным законом.

Система считается линейной, если в пределах установленной области входных и выходных сигналов ее реакция на входные сигналы аддитивна (выполняется принцип суперпозиции сигналов) и однородна (выполняется принцип пропорцио-

нального подобия).

Принцип *аддитивности* требует, чтобы реакция на сумму двух входных сигналов была равна сумме реакций на каждый сигнал в отдельности:

$$T[a(t) + b(t)] = T[a(t)] + T[b(t)].$$

Принцип *однородности* или пропорционального подобия требует сохранения однозначности масштаба преобразования при любой амплитуде входного сигнала:

$$T[ca(t)] = cT[a(t)].$$

Другими словами, отклик линейной системы на взвешенную сумму входных сигналов должен быть равен взвешенной сумме откликов на отдельные входные сигналы независимо от их количества и для любых весовых коэффициентов, в том числе комплексных.

Примеры.

Система  $y(t) = a^3 t$  линейна.

Система  $y(t) = at^2$  нелинейна.

При программной реализации линейных систем на ЭВМ особых затруднений с обеспечением линейности в разумных пределах значений входных и выходных сигналов, как правило, не возникает. При физической (аппаратной) реализации систем обработки данных диапазон входных и/или выходных сигналов, в котором обеспечивается линейность преобразования сигналов, всегда ограничен и должен быть специально оговорен в технической документации или методической инструкции.

**Основные системные операции.** К базовым линейным операциям, из которых могут быть сформированы любые линейные операторы преобразования, относятся операции скалярного умножения, сдвига и сложения сигналов:

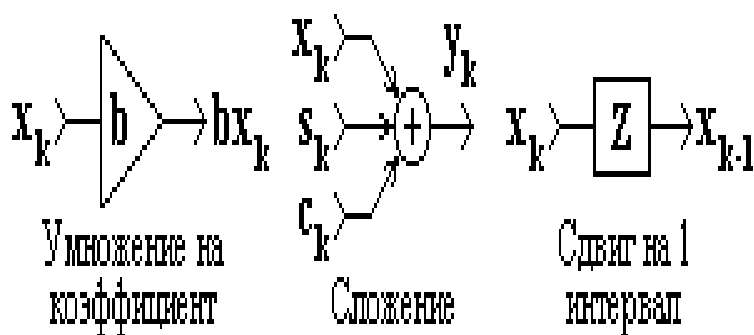


Рисунок 3.1 - Схемы системных операций

$$\begin{aligned}y(t) &= bx(t); \\y(t) &= x(t - \Delta t); \\y(t) &= a(t) + b(t).\end{aligned}$$

Графическое отображение операций (цифровая форма) приведено на рисунке 3.1.

Операции сложения и умножения являются линейными только для аналоговых и дискретных сигналов. В случае цифровых сигналов они линейны относительно самих цифровых сигналов, но если последние - результат операции амплитудно-цифрового преобразования, то сложение и умножение не может считаться линейным абсолютно точно по отношению к исходным сигналам.

**Инвариантность систем к сдвигу.** Система называется инвариантной к сдвигу (инвариантной во времени, а равно и по любым другим аргументам), если сдвиг входного сигнала по аргументам вызывает соответствующий сдвиг выходного сигнала:

$$\begin{aligned}T[a(x, t)] &= s(x, t); \\T[a(x - \Delta x, t - \Delta t)] &= s(x - \Delta x, t - \Delta t).\end{aligned}$$

Линейность и инвариантность к сдвигу являются независимыми свойствами систем и не определяют друг друга. Так, например, операция квадратирования сигнала (возведения в квадрат всех значений сигнала) инвариантна к сдвигу, но нелинейна.

В теории анализа и обработки данных основное место занимают системы, линейные и инвариантные к сдвигу (ЛИС - системы). Они обладают достаточно широкими практическими возможностями при относительной простоте математического аппарата. В дальнейшем, если это специально не оговаривается, рассматриваются именно такие системы.

Преимущество, которое отдается ЛИС - системам в методах обработки информации, базируется на возможности разложения входного сигнала любой, сколь угодно сложной формы, на составляющие простейших форм, отклик системы на которые известен и хорошо изучен, с последующим вычислением выходного сигнала в виде суммы откликов на все составляющие входного сигнала. В качестве простейших форм разложения сигналов используются, как правило, единичные импульсы и гармонические составляющие. Первая применяется при представлении сигнала в динамической форме и использует преобразование свертки, вторая - частотное представление сигнала и преобразование Фурье.

Другой важной особенностью ЛИС - систем является то, что любые их комбинации также являются ЛИС - системами, а любую сложную ЛИС - систему можно разложить на комбинации простых систем. Так, например, при последовательном (каскадном) соединении систем, когда выходной сигнал одной системы служит входным сигналом для второй и т.д., образуемая система в целом также является ЛИС - системой, если линейны и инвариантны к сдвигу все системы, в нее входящие, при этом по отношению к общей системной операции преобразования порядок соединения входящих в нее систем значения не имеет.

**Математическая модель системы** задается связью между сигналами входа и



выхода и в аналоговой одномерной линейной системе обычно выражается линейным дифференциальным уравнением:

$$\sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{n=0}^N b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \quad (3.7)$$

При нормировке к  $a_0 = 1$ , из этого выражения следует:

$$y(t) = \sum_{n=0}^N b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} - \sum_{m=1}^M a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}. \quad (3.8)$$

По существу, правой частью этого выражения в самой общей математической форме отображается содержание операции преобразования входного сигнала, т.е. задается оператор трансформации входного сигнала в выходной.

Аналогичная связь в цифровой системе описывается разностными уравнениями:

$$\sum_{m=0}^M a_m y[(k-m)\Delta t] = \sum_{n=0}^N b_n x[(k-n)\Delta t]; \quad (3.9)$$

$$y(k\Delta t) = \sum_{n=0}^N b_n x[(k-n)\Delta t] - \sum_{m=1}^M a_m y[(k-m)\Delta t]. \quad (3.10)$$

Последнее уравнение можно рассматривать как алгоритм последовательного вычисления значений  $y(k\Delta t)$ ,  $k=0,1,2,\dots$ , по значениям входного сигнала  $x(k\Delta t)$  и предыдущих вычисленных значений  $y(k\Delta t)$  при известных значениях коэффициентов  $a_m$ ,  $b_n$  и с учетом задания определенных начальных условий - значений  $x(k\Delta t)$  и  $y(k\Delta t)$  при  $k < 0$ . Интервал дискретизации в цифровых последовательностях отсчетов обычно нормируется и принимается равным 1, так как выполняет только роль масштабного множителя.

**Нерекурсивные цифровые системы.** При нулевых значениях коэффициентов  $a_m$  уравнение (3.10) переходит в уравнение дискретной свертки  $x(k)$  с оператором  $b_n$ :

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n). \quad (3.11)$$

При значениях коэффициентов  $b_n$  отличных от нуля, значения выходных отсчетов свертки для любого аргумента  $k$  определяются текущим и "прошлыми" значениями входных отсчетов. Такая система называется нерекурсивной цифровой системой (НЦС). Пример простейшей НЦС приведен на рисунке 3.2. Интервал суммирования по  $n$  получил название "окна" системы. Окно системы (3.2) составляет  $N+1$  точку, система является односторонней каузальной, причинно обусловленной текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала, выходной сигнал не опережает входного. Каузальная система может быть реализована аппаратно в реальном мас-

штабе времени. При  $k < n$  проведение обработки входных данных возможно только при задании определенных начальных условий для точек  $x(-k)$ ,  $k=1,2,...,N$ . Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения или значения отсчета  $x(0)$ . Применяется также четное или нечетное продление функции  $x(k)$  на интервал отрицательных значений  $k$ . Если при обработке данных начальные интервалы массивов  $x(k)$  существенного значения не имеют, то обработку можно начинать с отсчета  $k=N$ .

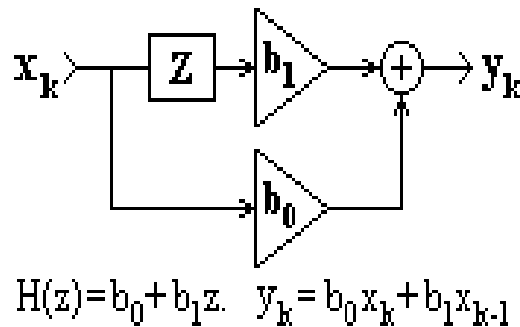


Рисунок 3.2 - Пример нерекурсивной цифровой системы

При обработке данных на ЭВМ ограничение по каузальности системного оператора снимается. В программном распоряжении системы могут находиться как "прошлые", так и "будущие" значения входных отсчетов, при этом уравнение (3.11) будет иметь вид:

$$y(k) = \sum_{n=-N^*}^N b_n x(k-n). \quad (3.12)$$

При  $N^* = N$  система называется двусторонней симметричной. Симметричные системы не изменяют фазы обрабатываемых сигналов.

Техника выполнения свертки в координатной области не отличается от техники выполнения обычной дискретной свертки двух массивов данных.

Представим, что на одной полоске бумаги выписаны по порядку сверху вниз значения данных  $x(k)$ . На второй полоске бумаги находятся записанные в обратном порядке значения коэффициентов системы  $b_n$ . Для вычисления  $y(k)$  располагаем вторую полоску против первой таким образом, чтобы значение  $b_0$  совпало со значением  $x(k)$ , перемножаем все значения  $b_n$  с расположенными против них значениями  $x(k-n)$  и суммируем результаты перемножения. Результат суммирования является выходным значением сигнала  $y(k)$ . Сдвигаем окно системы - полоску коэффициентов  $b_k$  на один отсчет последовательности  $x(k)$  вниз (по порядку возрастания номеров  $k$ ) или массив  $x(k)$  сдвигаем на отсчет вверх и вычисляем аналогично следующее значение, и т.д.

Описанный процесс свертки в вещественной области массива данных  $x(k)$  с

нерекурсивным оператором системы  $b_n$  (массивом весовых коэффициентов системы) обычно называют нерекурсивной цифровой фильтрацией данных, а саму систему, если она выполняет только данную операцию, нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ).

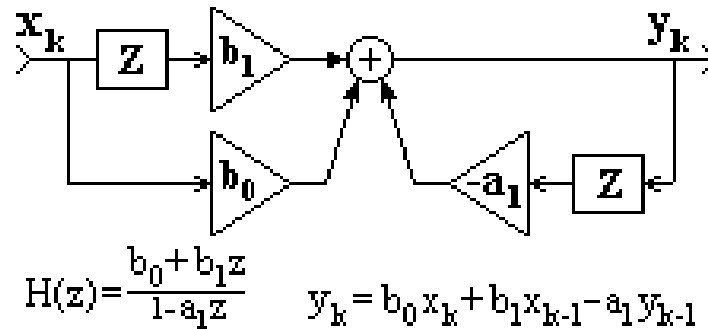


Рисунок 3.3 - Пример рекурсивной цифровой системы

**Рекурсивные цифровые системы.** Системы, которые описываются полным разностным уравнением

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m) \quad (3.13)$$

принято называть рекурсивными цифровыми системами (РЦС) или рекурсивными цифровыми фильтрами (РЦФ), так как в вычислении текущих значений выходного сигнала участвует не только входной сигнал, но и значения выходного сигнала, вычисленные в предшествующих циклах расчетов. С учетом последнего фактора рекурсивные системы называют системами с обратной связью. Пример рекурсивной системы приведен на рисунке 3.3.

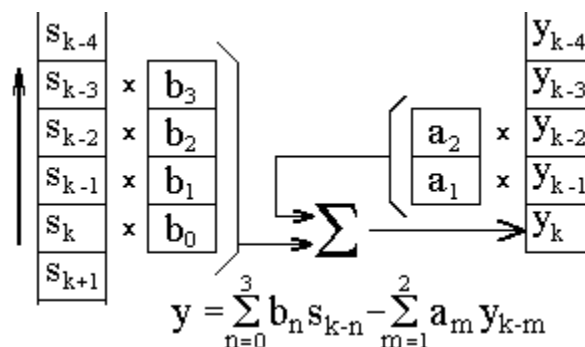


Рисунок 3.4 - Техника вычислений в РЦС

Полное окно рекурсивной системы состоит из двух составляющих: нерекурсив-

ной части  $b_n$ , аналогичной окну нерекурсивной системы и ограниченной в работе текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала (при реализации на ЭВМ возможно использование и "будущих" отсчетов сигнала), и рекурсивной части  $a_m$ , которая работает только с "прошлыми", ранее вычисленными значениями выходного сигнала. Техника вычислений для РЦС приведена на рисунке 3.4.

Пример 1.

Уравнение РЦС:  $y_k = b_0 x_k + a_1 y_{k-1}$ , при  $b_0 = a_1 = 0.5$ ,  $y_{-1} = 0$ . Входной сигнал:  $x_k = \{0, 10, 0, 0, 0, \dots\}$ .

Расчет выходного сигнала:

$$y_0 = 0,5x_0 + 0,5y_{-1} = 0 \quad y_1 = 0,5x_1 + 0,5y_0 = 5 \quad y_2 = 0,5x_2 + 0,5y_1 = 2.5$$

$$y_3 = 0,5x_3 + 0,5y_2 = 1.25$$

$$y_4 = 0,5x_4 + 0,5y_3 = 0.625 \quad y_5 = 0,5x_5 + 0,5y_4 = 0.3125 \quad \text{и т.д.}$$

Выходной сигнал:  $y_k = \{0, 5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, \dots\}$

Из примера можно видеть, что реакция РЦС на конечный входной сигнал, в принципе, может иметь бесконечную длительность, в отличие от реакции НЦС, которая всегда ограничена количеством членов  $b_k$  (окном системы).

**Стационарные и нестационарные системы.** Система считается *стационарной* и имеет постоянные параметры, если ее свойства (математический алгоритм оператора преобразования) в пределах заданной точности не зависят от входного и выходного сигналов и не изменяются ни во времени, ни от каких-либо других внешних факторов. Математически это означает задание системы уравнениями типа (3.9-3.13) с постоянными значениями коэффициентов  $a_j$  и  $b_i$  и реакция системы на какое-либо воздействие не зависит от времени (координат) его приложения. В противном случае система является нестационарной или *параметрической* (системой с переменными параметрами). Среди последних большое значение имеют так называемые адаптивные системы обработки данных. В этих системах производится, например, оценивание определенных параметров входных и выходных сигналов, по результатам сравнения которых осуществляется подстройка параметров преобразования (переходной характеристики системы) таким образом, чтобы обеспечить оптимальные по производительности условия обработки сигналов или минимизировать погрешность обработки.

### 3.2.2 Импульсная характеристика системы

**Импульсный отклик системы.** По определению, импульсными характеристиками систем (второй широко используемый термин - импульсный отклик систем) называются функции  $h(t)$  для аналоговых и  $h(k\Delta t)$  для цифровых систем, которые являются реакцией (откликом) систем на единичные входные сигналы: дельта-функцию  $\delta(t)$  для аналоговых и импульс Кронекера  $\delta(k\Delta t)$  для цифровых систем, поступающие на вход систем соответственно при  $t=0$  и  $k=0$ . Эта реакция однозначно определяется оператором преобразования:

$$y(t) = T[\delta(t)] \equiv h(t); \quad (3.14)$$

$$y(k\Delta t) = T[\delta(k\Delta t)] \equiv h(k\Delta t); \quad (3.15)$$

$$y(k) = T[\delta(k)] \equiv h(k). \quad (3.16)$$

Импульсный отклик аналоговой системы, как результат операции над дельта-функцией, в определенной степени представляет собой математическую абстракцию идеального преобразования. С практической точки зрения под импульсным откликом аналоговой системы можно понимать математическое отображение реакции системы на импульсный входной сигнал произвольной формы с площадью, равной 1, если длительность сигнала пренебрежимо мала по сравнению со временем реакции системы или с периодом ее собственных колебаний. Под временем (длиной) реакции системы обычно понимают интервал, на котором значения функции  $h(t)$  существенно отличаются от нуля после прекращения действия единичного сигнала на ее входе.

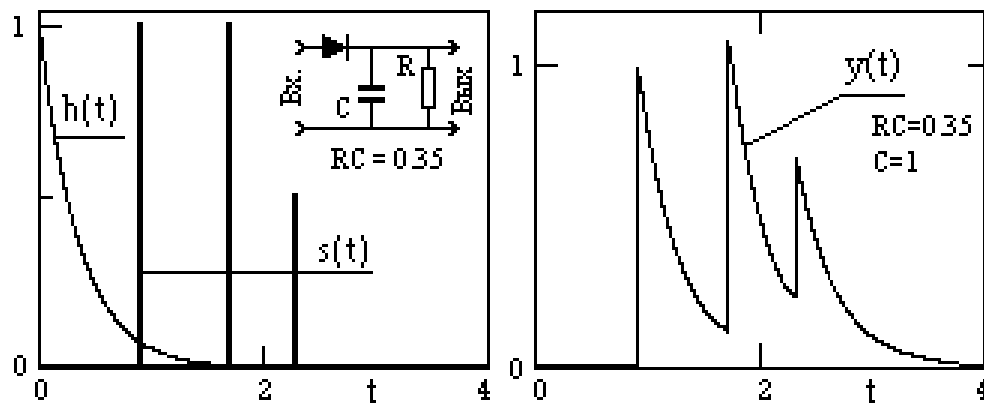


Рисунок 3.5 - Импульсный отклик системы  $h(t)$ , входной сигнал  $s(t)$  и выходная реакция системы  $y(t)$

Для цифровых систем импульсный отклик однозначно определяется реакцией системы на импульс Кронекера  $\delta(k\Delta t) = 1$  при  $k=0$ .

Функцию импульсного отклика называют также весовой функцией системы.

На рисунке 3.5 приведен пример импульсного отклика  $h(t)$  интегрирующей  $RC$ -цепи. При подаче на вход  $RC$ -цепи импульса заряда  $\Delta q$  емкость  $C$  заряжается до напряжения  $V_o = \Delta q/C$  и начинает разряжаться через сопротивление  $R$ , при этом напряжение на ней изменяется по закону  $v(t) = V_o \cdot e^{-t/RC} = (\Delta q/C) \cdot e^{-t/RC}$ . Отсюда, отклик  $RC$ -цепи по выходному напряжению на входной сигнал  $\Delta q = 1$ :  $h(t) = (1/C) \cdot e^{-t/RC}$ . По существу, импульсным откликом системы  $h(t)$  определяется доля входного сигнала, которая действует на выходе системы по истечении времени  $t$  после поступления сигнала на вход (запаздывающая реакция системы).

**Реакция системы на произвольный сигнал.** Если функция импульсного отклика системы известна, то, с учетом принципа суперпозиции сигналов в линейной системе, можно выполнить расчет реакции системы в любой произвольный момент времени на любое количество входных сигналов с любыми моментами времени их прихода путем суммирования запаздывающих реакций системы на эти входные сигналы, как это показано на рисунке 3.5 для трех входных импульсов. В общем случае произвольный сигнал на входе системы может быть разложен в линейную последовательность взвешенных единичных импульсов:

$$y(t) = T[s(t)] = T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]. \quad (3.17)$$

На основании принципа суперпозиции линейный оператор  $T$  может бытьнесен под знак интеграла, так как последний представляет собой предельное значение суммы. При этом операция преобразования действует только по переменной  $t$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Это выражение представляет собой интеграл Дюамеля или свертку входного сигнала с импульсной характеристикой системы. Заменой переменных  $t - \tau = \tau$  можно убедиться в том, что эта операция, как и положено свертке, коммутативна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau.$$

Аналогично, для дискретных и цифровых сигналов:

$$y(k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) h(k\Delta t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta t) s(k\Delta t - n\Delta t); \quad (3.19)$$

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) h(k - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) s(k - n). \quad (3.20)$$

В символической форме математического представления:

$$y(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t);$$

$$y(n) = s(n) * h(n) = h(n) * s(n).$$

В реальных физических системах импульсный отклик  $h(t)$  равен нулю при  $t < 0$  (реакция на выходе системы не может опережать входной сигнал) и, как правило, отличен от нуля только на определенном интервале  $r$ , по которому и ведется инте-

гирование или суммирование в выражениях свертки. При обработке данных на ЭВМ требований по односторонности импульсного отклика не предъявляется, равно как и по его размерам вперед и назад от нуля по координатам.

**Усиление постоянной составляющей сигнала.** Подадим на вход системы постоянный сигнал  $s(t) = A$ . При этом сигнал на выходе системы:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = A \cdot K_{\text{пс}}, \quad (3.21)$$

т.е. площадь импульсного отклика (для цифровой системы соответственно сумма коэффициентов импульсного отклика) является коэффициентом  $K_{\text{пс}}$  усиления постоянной составляющей входного сигнала. Если при обработке сигналов должны изменяться только динамические характеристики их формы без изменения постоянной составляющей, а равно и различных постоянных уровней (фона, пьедесталов, региональных трендов и т.п.), то площадь импульсного отклика (сумма коэффициентов) должна нормироваться к единице.

**Усиление шумов.** Критерием качества системы при использовании любого метода обработки информации можно считать выполнение целевого назначения с минимальным усилением шумов (максимальным их подавлением). Допустим, что система имеет нормированный к единице импульсный отклик  $h(k)$ . Обозначим через  $\varepsilon(k)$  аддитивный шум с математическим ожиданием  $M\{\varepsilon(k)\} = \bar{\varepsilon} = 0$  и дисперсией  $D_{\varepsilon} = \sigma^2$ , который в сумме с сигналом поступает на вход системы. Значения  $\varepsilon(k)$  статистически независимы и некоррелированы с сигналом. С учетом помехи во входном сигнале  $x(k)$  значение сигнала на выходе системы:

$$y(k) = \sum_n h(n)[x(k-n) + \varepsilon(k-n)].$$

Математическое ожидание значений выходного сигнала:

$$M\{y(k)\} = \sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] = \sum_n h(n)x(k-n).$$

Дисперсия распределения отсчетов выходного сигнала:

$$D\{y(k)\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] - M\{y(k)\}\right]^2\right\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]^2\right\}.$$

Если правую часть последнего выражения представить в виде

$$M \left\{ \left[ \sum_n h(n) \varepsilon(k-n) \right]^2 \right\} = M \left\{ \left[ \sum_n h(n) \varepsilon(k-n) \right] \cdot \left[ \sum_m h(m) \varepsilon(k-m) \right] \right\},$$

то в этом выражении математические ожидания всех членов произведения с сомножителями  $\varepsilon(n)\varepsilon(m)$  при  $n \neq m$  равны 0 в силу статистической независимости значений шума. Остаются только члены с  $n = m$ , т.е.:

$$M \left\{ \sum_n h^2(n) \varepsilon^2(n) \right\} = \sum_n h^2(n) M \{ \varepsilon^2(n) \} = D_\varepsilon \sum_n h^2(n) = \sigma^2 \sum_n h^2(n). \quad (3.22)$$

Отсюда следует, что сумма квадратов значений нормированного импульсного отклика системы представляет собой коэффициент усиления аддитивных шумов во входном сигнале.

Пример.

Сглаживающий фильтр:  $y(k) = 0.2 \sum_{n=-2}^2 x(k-n)$ .

Коэффициент усиления шумов:  $5 (0.2^2) = 0.2$ .

Дисперсия шумов уменьшается в  $1/0.2 = 5$  раз.

**Определение реакции на единичный импульс** требуется для рекурсивных систем, так как импульсная реакция для НЦС специального определения не требует:

$$h(k) = \sum_{n=-N}^N b(n) \delta(k-n) \equiv b(k).$$

Если выражение для системы известно в общей форме (3.13), определение импульсной реакции производится подстановкой в уравнение системы импульса Кронекера с координатой  $k = 0$  при нулевых начальных условиях, при этом сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы:  $y(k) \equiv h(k)$ .

Пример.

Уравнение РЦС:  $y_k = x_k + 0.5y_{k-1}$ .

Входной сигнал:  $x_k = \delta_o = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ .

Расчет выходного сигнала при нулевых начальных условиях:

$y_0 = x_0 + 0.5 y_{-1} = 1 + 0 = 1 = h_0$ .  $y_1 = x_1 + 0.5 y_0 = 0 + 0.5 = 0.5 = h_1$ .  $y_2 = x_2 + 0.5$

$y_1 = 0 + 0.25 = 0.25 = h_2$

$y_3 = x_3 + 0.5 y_2 = 0.125 = h_3$ .  $y_4 = x_4 + 0.5 y_3 = 0.0625 = h_4$ , и так далее.

Импульсный отклик системы:  $h_k = \{1, 0.5, 0.25, 0.125, \dots\} \equiv (0.5)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Определение импульсной реакции физических систем обычно производится подачей на вход систем ступенчатой функции  $u_o(k) = 1$  при  $k \geq 0$ , и  $u_o(k) = 0$  при  $k < 0$ :

$$g(k) = \sum_{n=0}^N h(n) u_o(k-n) = \sum_{n=0}^N h(n).$$



$$h(k) = g(k) - g(k-1), k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Функция  $g(k)$  получила название переходной характеристики системы (перехода из одного статического состояния в другое).

### 3.3. Передаточные функции цифровых систем

**Z-преобразование** является удобным методом решения разностных уравнений линейных систем. Применяя z-преобразование к обеим частям равенства (3.13), получаем:

$$Y(z) \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} = X(z) \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}, \quad (3.23)$$

где  $X(z), Y(z)$  - соответствующие z-образы входного и выходного сигнала. Из этого выражения, полагая  $a_0 = 1$ , получаем в общей форме функцию связи входа и выхода системы - уравнение *передаточной* функции системы (или *системной* функции) в z-области:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N b_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}}. \quad (3.24)$$

Для нерекурсивных систем при  $a_m = 0$ :

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}. \quad (3.25)$$

При подаче на вход системы единичного импульса Кронекера  $\delta_0$ , имеющего z-образ  $\delta(z) = z^{-n} = 1$ , сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы  $y(k) = h(k)$ , при этом:

$$H(z) = Y(z) = \frac{Y(z)}{\delta(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}. \quad (3.26)$$

т.е. передаточная функция системы является z-образом ее импульсной реакции. При обратном z-преобразовании передаточной функции соответственно получаем импульсную характеристику системы:

$$h(k) \Leftrightarrow H(z).$$

Если функция  $H(z)$  представлена конечным степенным полиномом, как это обычно имеет место для НЦС, то обратное  $z$ -преобразование элементарно. Передаточная функция РЦС также может быть представлена степенным полиномом прямым делением числителя на знаменатель правой части выражения (3.23), однако результат при этом может оказаться как конечным, так и бесконечным, т.е. система может иметь либо конечную, либо бесконечную импульсную характеристику. Системы с бесконечной импульсной характеристикой получили название БИХ-систем, с конечной импульсной характеристикой соответственно КИХ-систем. Нерекурсивные системы всегда имеют конечную импульсную характеристику, т.к. длительность импульсной реакции НЦС определяется окном фильтра.

**Устойчивость систем.** Любая практическая система должна быть *устойчивой*, т.е. для сигналов, конечных по энергии или средней мощности, выходные сигналы также должны быть конечными по этим параметрам. Система называется устойчивой, если при любых начальных условиях реакция системы на любое ограниченное воздействие также ограничена.

Для конечного по энергии входного сигнала, можно записать:

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t - \tau)| d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau.$$

Отсюда следует условие, при котором выходной сигнал системы также будет ограниченным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (3.27)$$

т.е. необходимым и достаточным условием устойчивости системы является абсолютная сходимости ее импульсной характеристики, или, для цифровых систем, абсолютная суммируемость импульсного отклика:

$$\sum_n |h(n)| < \infty. \quad (3.28)$$

Анализ устойчивости может быть проведен по передаточной функции. В устойчивой системе значение  $H(z)$  должно быть конечным во всех точках  $z$ -плоскости, где  $|z| \geq 1$ , а, следовательно, передаточная функция не должна иметь особых точек (полюсов) при  $|z| \geq 1$  (вне единичного круга на  $z$ -плоскости). Полюсы определяются корнями многочлена знаменателя передаточной функции  $H(z)$ .

Приведенный критерий устойчивости относится к несократимой дроби, т.к. в противном случае возможна компенсация полюса нулем передаточной функции и следует проверить наличие однозначных нулей и полюсов.

Проверка на устойчивость требуется только для рекурсивных цифровых фильтров (систем с обратной связью), нерекурсивные системы всегда устойчивы.

### 3.4 Частотные характеристики систем

Для линейных систем, принимая в качестве сигнала на входе системы собственную функцию  $x(k\Delta t) = B(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)$ , мы вправе ожидать на выходе системы сигнал  $y(k\Delta t) = A(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)$ . Подставляя эти выражения в разностное уравнение системы (3.10), получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^M a_m A(\omega) \exp(j\omega k\Delta t - j\omega m\Delta t) &= \sum_{n=0}^N b_n B(\omega) \exp(j\omega k\Delta t - j\omega n\Delta t); \\ A(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) \sum_{m=0}^M a_m \exp(-j\omega m\Delta t) &= B(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n\Delta t); \\ A(\omega) \sum_{m=0}^M a_m \exp(-j\omega m\Delta t) &= B(\omega) \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n\Delta t).\end{aligned}\quad (3.29)$$

Отсюда, частотная передаточная функция системы (частотная характеристика при нормировке к  $a_0=1$ ):

$$H(\omega) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n\Delta t)}{1 + \sum_{m=0}^M a_m \exp(-j\omega m\Delta t)}.\quad (3.30)$$

Нетрудно убедиться, что подстановкой  $z = \exp(j\omega\Delta t)$  в выражение передаточной функции  $H(z)$  (3.24) может быть получено абсолютно такое же выражение для частотной характеристики, т.е.:

$$H(\omega) = H(z), \quad \text{при } z = \exp(j\omega\Delta t).$$

При обратном преобразовании  $H(z)$  во временную область с использованием выражений (3.26) отсюда следует также, что частотная характеристика системы представляет собой Фурье-образ ее импульсной реакции, и наоборот. При  $\Delta t = 1$ :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n);\quad (3.31)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) \exp(j\omega n) d\omega.\quad (3.32)$$

В общем случае  $H(\omega)$  является комплексной функцией, модуль которой  $R(\omega)$  называется амплитудно-частотной характеристикой системы (АЧХ), а аргумент  $\phi(\omega)$  - фазочастотной характеристикой (ФЧХ).

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[H(\omega)] + \operatorname{Im}^2[H(\omega)]};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}[H(\omega)]}{\operatorname{Re}[H(\omega)]} \right).$$

Физический смысл частотной характеристики системы достаточно прост. Произвольный сигнал на входе системы может рассматриваться в виде суммы гармонических составляющих с различным набором амплитуд и начальных фазовых углов. Амплитудно-частотной характеристикой системы устанавливаются коэффициенты усиления системой (коэффициенты передачи) этих частотных составляющих, а фазочастотной характеристикой - сдвиг фаз этих частотных составляющих в выходном сигнале относительно начальных фаз во входном сигнале.

**Основные свойства** частотных характеристик систем:

1. Частотные характеристики являются непрерывными функциями частоты.
2. При дискретизации данных по интервалам  $\Delta t$  функция  $H(\omega)$  является периодической. Период функции  $H(\omega)$  равен частоте дискретизации входных данных  $F = 1/\Delta t$ . Первый низкочастотный период (по аргументу  $\omega$  от  $-\pi/\Delta t$  до  $\pi/\Delta t$ , по  $f$  от  $-1/2\Delta t$  до  $1/2\Delta t$ ) называется главным частотным диапазоном передачи сигнала. Граничные частоты главного частотного диапазона соответствуют частоте Найквиста  $\pm\omega_N$ ,  $\omega_N = \pi/\Delta t$ . Частота Найквиста определяет предел частотной разрешающей способности системы по обработке данных.

3. Для систем с вещественными коэффициентами импульсной реакции  $h(n\Delta t)$  функция АЧХ является четной, а функция ФЧХ - нечетной. С учетом этого частотные характеристики систем обычно задаются только на интервале положительных частот  $0 - \omega_N$  главного частотного диапазона. Значения функций на интервале отрицательных частот являются комплексно сопряженными со значениями на интервале положительных частот.

### 3.5 Дискретизация сигналов

#### 3.5.1 Принципы дискретизации

Сущность дискретизации аналоговых сигналов заключается в том, что непрерывная во времени аналоговая функция  $x(t)$  заменяется последовательностью коротких импульсов, амплитудные значения которых  $c_n$  определяются с помощью весовых функций, либо непосредственно выборками (отсчетами) мгновенных значений сигнала  $x(t)$  в моменты времени  $t_n$ . Представление сигнала  $x(t)$  на интервале  $T$  совокупностью дискретных значений  $c_n$  записывается в виде:

$$(c_1, c_2, \dots, c_N) = A[x(t)],$$

где  $A$  - оператор дискретизации.

Запись операции восстановления сигнала  $x(t)$ :

$$x''(t) = B[(c_1, c_2, \dots, c_N)].$$

Выбор операторов  $A$  и  $B$  определяется требуемой точностью восстановления сигнала. Наиболее простыми являются линейные операторы. В общем случае:

$$c_n = \int_t q_n(t) x(t) dt, \quad (3.33)$$

где  $q_n(t)$  - система весовых функций.

Отсчеты в выражении (3.33) связаны с операцией интегрирования, что обеспечивает высокую помехоустойчивость дискретизации. Однако в силу сложности технической реализации "взвешенного" интегрирования, последнее используется достаточно редко, при высоких уровнях помех. Более широкое распространение получили методы, при которых сигнал  $x(t)$  заменяется совокупностью его мгновенных значений  $x(t_n)$  в моменты времени  $t_n$ . Роль весовых функций в этом случае выполняют решетчатые функции. Отрезок времени  $\Delta t$  между соседними отсчетами называют шагом дискретизации. Дискретизация называется равномерной с частотой  $F = \frac{1}{\Delta t}$ , если значение  $\Delta t$  постоянно по всему диапазону преобразования сигнала.

При неравномерной дискретизации значение  $\Delta t$  между выборками может изменяться по определенной программе или в зависимости от изменения каких-либо параметров сигнала.

Воспроизведение непрерывного сигнала по выборкам может проводиться как на основе ортогональных, так и неортогональных базисных функций. Воспроизводящая функция  $x'(t)$  соответственно представляется аппроксимирующим полиномом:

$$x'(t) = \sum_n c_n v_n(t), \quad (3.34)$$

где  $v_n(t)$  - система базисных функций. Ортогональные базисные функции обеспечивают сходимость ряда к  $x(t)$  при  $n \Rightarrow \infty$ . Оптимальными являются методы дискретизации, обеспечивающие минимальный числовой ряд при заданной погрешности воспроизведения сигнала. При неортогональных базисных функциях используются, в основном, степенные алгебраические полиномы вида:

$$x'(t) = \sum_{n=0}^N c_n t^n. \quad (3.35)$$

Если значения аппроксимирующего полинома совпадают со значениями выборок в моменты их отсчета, то такой полином называют интерполирующим. В качестве интерполирующих полиномов обычно используются многочлены Лагранжа. Для реализации интерполирующих полиномов необходима задержка сигнала на интервал дискретизации, что в системах реального времени требует определенных

технических решений. В качестве экстраполирующих полиномов используют, как правило, многочлены Тейлора.

Естественным требованием к выбору частоты дискретизации является внесение минимальных искажений в динамику изменения сигнальных функций. Логично полагать, что искажения информации будут тем меньше, чем выше частота дискретизации  $F$ . С другой стороны также очевидно, что чем больше значение  $F$ , тем большим количеством цифровых данных будут отображаться сигналы, и тем большее время будет затрачиваться на их обработку. В оптимальном варианте значение частоты дискретизации сигнала  $F$  должно быть необходимым и достаточным для обработки информационного сигнала с заданной точностью, т.е. обеспечивающим допустимую погрешность восстановления аналоговой формы сигнала (среднеквадратическую в целом по интервалу сигнала, либо по максимальным отклонениям от истинной формы в характерных информационных точках сигналов).

### 3.5.2 Равномерная дискретизация

**Спектр дискретного сигнала.** Допустим, что для обработки задается произвольный аналоговый сигнал  $x(t)$ , имеющий конечный и достаточно компактный фурье-образ  $X(f)$ . Равномерная дискретизация непрерывного сигнала  $x(t)$  с частотой  $F$  (шаг  $\Delta t = \frac{1}{F}$ ) с математических позиций означает умножение функции  $x(t)$  на решетчатую функцию  $\text{Ш}_{\Delta t}(t) = \sum_k \delta(t - k\Delta t)$  – непрерывную последовательность импульсов Кронекера:

$$x_{\Delta t}(t) = x(t)\text{Ш}_{\Delta t}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t). \quad (3.36)$$

С учетом известного преобразования Фурье решетчатой функции

$$\text{Ш}_{\Delta t}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\Delta F) = F \cdot \text{Ш}_F(f)$$

Фурье-образ дискретной функции  $x_{\Delta t}(t)$ :

$$X_F(f) = X(f) * F \cdot \text{Ш}_F(f).$$

Отсюда, для спектра дискретного сигнала:

$$X_F(f) = F \cdot X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\Delta F) = F \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF). \quad (3.37)$$

Из выражения следует, что спектр дискретного сигнала представляет собой *непрерывную периодическую функцию* с периодом  $F$ , совпадающую (при определенных условиях конечности спектра непрерывного сигнала) с функцией  $F \cdot X(f)$  не-

прерывного сигнала  $x(t)$  в пределах центрального периода от  $-f_N$  до  $f_N$ , где  $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{F}{2}$ . Частоту  $f_N$  (или для круговой частоты  $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$ ) называют частотой Найквиста. Центральный период функции  $X_F(f)$  называют главным частотным диапазоном.

Интуитивно понятно, что если спектр главного частотного диапазона с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром непрерывного сигнала, то по этому спектру может быть восстановлена не только форма дискретного сигнала, но и форма исходного непрерывного сигнала. При этом шаг дискретизации и соответствующее ему значение частоты Найквиста должны иметь определяющее значение.

Как правило, шаг дискретизации сигнала (шаг числовых массивов) условно принимают равным  $\Delta t = 1$ , при этом главный частотный диапазон занимает интервал  $-0.5 \leq f \leq 0.5$ , или, в шкале угловых частот  $\omega$  соответственно  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ .

Для того чтобы периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией аналогового сигнала, не изменяло спектр в главном частотном диапазоне (по отношению к спектру исходного аналогового сигнала), необходимо и достаточно, чтобы максимальные частотные составляющие  $f_{\max}$  в спектре аналогового сигнала не превышали частоты Найквиста  $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{F}{2}$ . Это означает, что частота дискретизации сигнала должна быть минимум в два раза выше максимальной частотной составляющей в спектре сигнала:

$$F = \frac{1}{\Delta t} \geq f_{\max}, \quad (3.38)$$

что обеспечивает выход спектра на нулевые значения на концах главного диапазона.

Другими словами, на одном периоде колебаний с частотой  $f_{\max}$  должно быть минимум две точки отсчета. Это и понятно – по одной точке отсчета на периоде гармонического сигнала определение трех неизвестных параметров данной гармоники (амплитуда, частота, фаза) невозможно.

Если условие (3.38) нарушается, искажения частотного спектра исходного аналогового сигнала неизбежны.

Характер возникающих искажений во временной области при нарушении условия (3.38) можно наглядно видеть на рисунке 3.5. На рисунке показаны три возможных варианта соотношения частот гармонических сигналов с постоянной частотой их дискретизации.

1. График А – частота гармонического сигнала меньше частоты Найквиста. Дискретным отсчетам может соответствовать только исходная гармоника, амплитуда, частота и фаза которой могут быть однозначно определены по любым трем последовательным точкам (три уравнения, три неизвестных).

2. График В – частота гармонического сигнала равна частоте Найквиста. Это означает периодическое повторение каждой пары последовательных отсчетов, а, следовательно, для решения имеется только два уравнения с тремя неизвестными с

возможностью определения только частоты, и то при условии, что начальная фаза сигнала не совпадает с начальной фазой частоты дискретизации (в этом случае все отсчеты нулевые). Амплитуда и фаза сигнала определяются однозначно только при условии совпадения отсчетов с экстремумами гармоники.

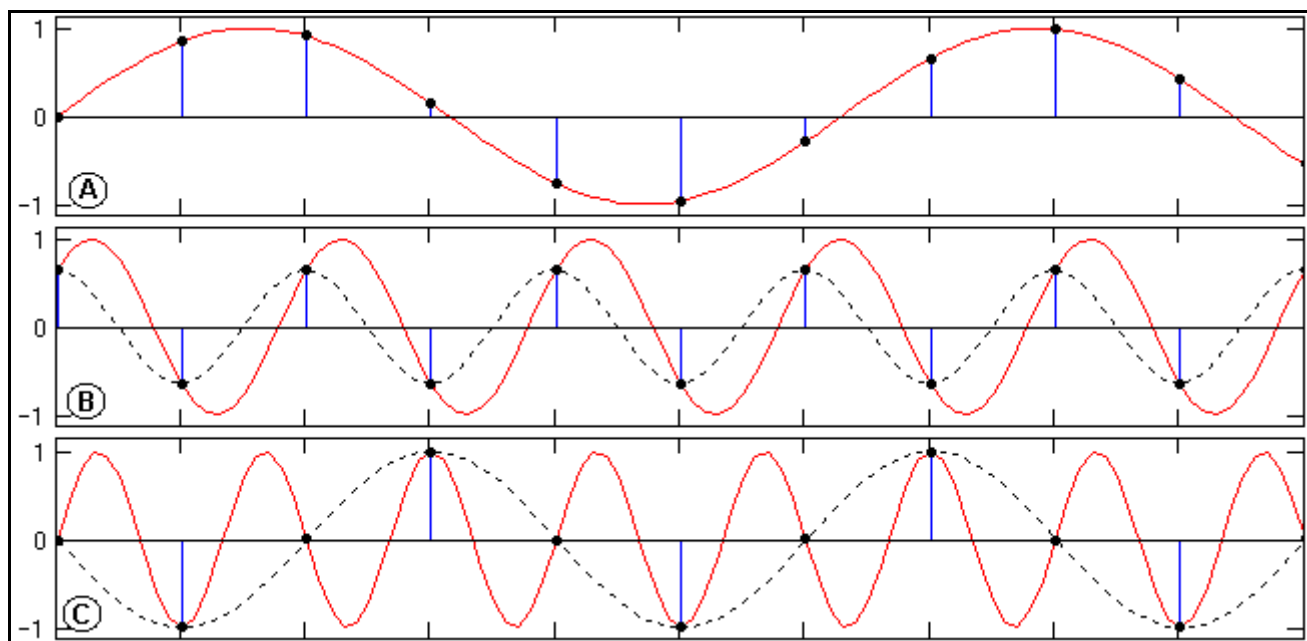


Рисунок 3.5 - Дискретизация гармоник с разной частотой

3. График С – частота гармонического сигнала больше частоты Найквиста. Решение трех уравнений по трем последовательным точкам позволяет определить амплитуду гармоники, но дает искаженные значения частоты и фазы колебания (показано пунктиром). Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот* (aliasing). Частоты гармонических колебаний выше частоты Найквиста как бы зеркально "отражаются" в главный частотный диапазон от его границ (на частоте Найквиста). Этот эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля (и любых других быстро вращающихся объектов) на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров.

**Интерполяционный ряд Котельникова-Шеннона.** Спектр дискретизированного сигнала (3.37) представляет собой сумму сдвинутых копий исходного аналогового сигнала с шагом сдвига, равным частоте дискретизации. Очевидно, что если спектры копий не перекрываются, то по центральной копии дискретного спектра можно восстановить исходный аналоговый сигнал с абсолютной точностью. Умножая функцию (3.37) на прямоугольную весовую функцию  $\Pi_F(f)$ , равную 1 в пределах главного частотного диапазона  $\left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right]$  и нулю за его пределами, получаем непрерывный спектр в бесконечных по частоте границах, равный спектру  $F \cdot X(f)$  в пределах главного частотного диапазона:



$$F \cdot X(f) = F \cdot [X(f) * \text{Ш}_F(f)] \cdot \Pi_F(f). \quad (3.39)$$

Обратное преобразование Фурье такого спектра должно давать конечный и непрерывный сигнал. Произведем обратное преобразование обеих частей равенства (3.39):

$$F \cdot [X(f) * \text{Ш}_F(f)] \Leftrightarrow x_{\Delta t}(t), \quad \Pi_F(f) \Leftrightarrow F \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t};$$

$$F \cdot x(t) = x_{\Delta t}(t) * F \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t};$$

$$x(t) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t).$$

Дискретизированный сигнал  $x_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t)$  представляет собой сумму последовательных весовых импульсов Кронекера, сдвинутых на интервал  $\Delta t$ , со значениями веса, равными значениям отсчетов функции  $x(t)$  в моменты  $k\Delta t$ . При прохождении такого сигнала через систему с импульсным откликом

$$h(t) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t}$$

каждый весовой импульс Кронекера возбудит на выходе соответствующую последовательную серию сдвинутых и масштабированных копий оператора фильтра. Отсюда, с учетом очевидного равенства

$$\delta(t - k\Delta t) * \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t} = \frac{\sin(\pi F(t - k\Delta t))}{\pi F(t - k\Delta t)},$$

выходной сигнал будет представлять собой сумму сдвинутых весовых импульсных откликов системы, где значение веса определяется отсчетами дискретного сигнала:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(\pi F(t - k\Delta t))}{\pi F(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)}. \quad (3.40)$$

Эта конечная формула носит название интерполяционного ряда Котельникова-Шеннона. Из нее следует, что если наибольшая частота в спектре произвольной непрерывной функции  $x(t)$  не превышает частоты ее дискретизации, то она без потери точности может быть представлена в виде числовой последовательности дискретных значений  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и однозначно восстановлена по этой последовательности. В этом и состоит сущность теоремы отсчетов Котельникова. В зарубежной

литературе она называется также теоремой Шеннона или теоремой дискретизации (sampling theorem).

Дискретизируемые сигналы, как правило, содержат широкополосные шумы, высокочастотные составляющие которых неизбежно перекрываются при периодизации спектра, и увеличивают погрешность восстановления сигналов. Для исключения этого фактора перед проведением дискретизации должно быть обеспечено подавление всех частот выше частоты Найквиста, т.е. выполнена низкочастотная фильтрация сигнала.



## 4 Применение преобразования Фурье при обработке сигналов

### 4.1 Интегральное преобразование Фурье

Преобразованием Фурье функции  $x(t)$  называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

- прямое преобразование

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt; \quad (4.1)$$

- обратное преобразование

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (4.2)$$

где  $x(t)$  - оригинал – вещественная или комплексная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле: на любом конечном интервале в области задания определена, однозначна, непрерывна или кусочно-непрерывна, имеет конечное число экстремумов и разрывов первого рода;

$X(j\omega)$ - фурье-изображение (фурье-образ) функции  $x(t)$ , результат преобразования Фурье;

$\omega = 2\pi f$  ;

$f$  - частота сигнала;

$t$  - время.

Преобразование Фурье справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла (4.1)

$$\int_0^{\infty} |x(t) \exp(-j\omega t)| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Преобразование Фурье справедливо для более узкого класса сигналов, чем преобразование Лапласа.

### 4.2 Ряд Фурье

Непрерывная периодическая функция  $x(t)$  с периодом  $T_s$ , удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \exp(jk\Delta\omega t), \quad (4.3)$$

где  $\Delta\omega$  - период дискретизации по круговой частоте:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s}; \quad \left( T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right); \quad (4.4)$$

$X(k)$  - коэффициенты Фурье (комплексные числа)

$$X(k) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} x(t) \exp(-jk\Delta\omega t) dt; \quad (4.5)$$

$k$  - номер коэффициента Фурье, соответствующего частоте  $k\Delta\omega$ .

Аналогично, непрерывная периодическая функция частоты  $X(\omega)$  с периодом  $\omega_s$ , удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле может быть представлена в виде ряда, симметричного (4.3)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-jn\Delta t \omega), \quad (4.6)$$

где  $\Delta t$  - период дискретизации по времени:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s}; \quad \left( \omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t} \neq \frac{2\pi}{T_s} \right); \quad (4.7)$$

$x(n)$  - коэффициенты Фурье (комплексные числа)

$$x(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} X(\omega) \exp(+jn\Delta t \omega) d\omega; \quad (4.8)$$

$n$  - номер коэффициента Фурье, соответствующего времени  $n\Delta t$ .

На основании приведенных формул можно записать соотношение для периодов функций и периодов дискретизации во временной и частотной областях

$$\omega_s \Delta t = T_s \Delta \omega.$$

Преобразованием Фурье дискретной последовательности  $x(nT_d)$  называется следующий ряд

$$X(j\omega T_d) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \exp(-j\omega T_d n), \quad (4.9)$$

где  $x(nT_d)$  - оригинал – вещественная или комплексная последовательность;

$X(j\omega T_d)$  - фурье-изображение (фурье-образ) последовательности  $x(nT_d)$ , результат преобразования Фурье.

Преобразование Фурье справедливо только в области абсолютной сходимости ряда (4.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT_d) \exp(-j\omega T_d n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT_d)| < \infty.$$

Фурье-изображение  $X(j\omega T_d)$  последовательности  $x(nT_d)$  является периодической функцией, поскольку аргумент данной функции  $\exp(j\omega T_d)$  периодичен по частоте  $\omega$  с периодом, равным частоте дискретизации  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$ :

$$\exp(j\omega T_d) = \exp\left(j\left[\omega \pm k \frac{2\pi}{T_d}\right]T_d\right) = \exp(j\omega T_d) \exp(\pm j2\pi k) = \exp(j\omega T_d). \quad (4.10)$$

Значит, непрерывная периодическая функция частоты  $X(j\omega T_d)$  может быть представлена рядом Фурье при  $\omega_s = \omega_d$  и  $\Delta t = T_d$

$$X(\omega) = X(j\omega T_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-jn\Delta t\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-j\omega nT_d), \quad (4.11)$$

где коэффициенты  $x(n)$  вычисляются по формуле

$$x(n) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_d}}^{\frac{\pi}{T_d}} X(j\omega T_d) \exp(j\omega T_d n) d\omega. \quad (4.12)$$

Подставляя  $x(n) = x(nT_d)$  в (4.11) и учитывая, что  $x(nT_d)_{n<0} = 0$ , получаем (4.9)

$$X(j\omega T_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-j\omega nT_d) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \exp(-j\omega nT_d).$$

Поэтому формула (4.12) представляет собой обратное преобразование Фурье.

Таким образом, преобразованием Фурье последовательности  $x(nT_d)$  называется пара взаимно однозначных преобразований:

- прямое

$$X(j\omega T_d) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \exp(-j\omega T_d n); \quad (4.13)$$

- обратное

$$x(nT_{\text{Д}}) = \frac{T_{\text{Д}}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_{\text{Д}}}}^{\frac{\pi}{T_{\text{Д}}}} X(j\omega T_{\text{Д}}) \exp(j\omega T_{\text{Д}} n) d\omega. \quad (4.14)$$

#### 4.3 Дискретное преобразование Фурье периодической последовательности

Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) периодической последовательности  $x_p(n)$  называется пара взаимно однозначных дискретных рядов Фурье для последовательностей во временной и частотной областях:

- прямое преобразование

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k=0,1,2,\dots,(N-1); \quad (4.15)$$

- обратное преобразование (ОДПФ)

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad n=0,1,2,\dots,(N-1), \quad (4.16)$$

где  $x_p(n)$ ,  $n=0,1,2,\dots,(N-1)$  – один период последовательности во временной области (вещественной или комплексной);

$X_p(k)$ ,  $k=0,1,2,\dots,(N-1)$  – дискретные коэффициенты Фурье (вещественные или комплексные) – один период последовательности в частотной области (один период спектра);

$N$  - период последовательности.

Период – это минимальный временный интервал, начиная с которого, функция начинает повторять свое значения, т. е. для всех  $n$  выполняются условия:

$$x(n) = x(n \pm m \cdot N).$$

#### 4.4 Преобразование Фурье и спектр вещественных сигналов и переход к комплексному представлению

Спектром аналогового (непрерывного) сигнала называется представление сигнала в частотной области, получаемое с помощью прямого преобразования Фурье :

$$c_{\omega} = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt; \quad (4.17)$$

$$s_{\omega} = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt; \quad (4.18)$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t) dt, \quad (4.19)$$

где  $c_{\omega}, s_{\omega}$  - амплитуды косинусной и синусной спектральных составляющих частоты  $\omega$  рад/с,  $\omega = 1 \frac{2\pi}{T}, 2 \frac{2\pi}{T}, 3 \frac{2\pi}{T}, \dots$ ;

$T$  - интервал времени, который считается периодом функции  $x(t)$ .

По спектру можно восстановить исходный сигнал :

$$x(t) = c_0 + \sum_{\omega=1}^{\infty} c_{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sum_{\omega=1}^{\infty} s_{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (4.20)$$

При обработке сигналов с помощью средств вычислительной техники предварительно производится их аналого-цифровое преобразование (дискретизация во времени и квантование по уровню), причем при выборе периода дискретизации следует руководствоваться теоремой Котельникова:

$$t_0 \leq \frac{1}{2f_{\max}}, \quad (4.21)$$

где  $f_{\max}$  - максимальная спектральная составляющая (в Гц) присутствующая в сигнале, спектральные составляющие большие  $f_{\max}$  должны быть равны нулю.

Для определения амплитуд спектральных составляющих цифрового сигнала применяется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right); \quad (4.22)$$

$$S_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right), \quad (4.23)$$

где  $x(k)$  -  $k$ -ое значение сигнала ( $k$ -ый элемент массива (последовательности)  $\{x(k)\}$ ,  $k = 1 \div N - 1$ );

$N$  - число элементов в массиве, обычно выбирается кратным степени 2;

$j$  - номер спектральной составляющей,  $j$  изменяется от 0 до  $\frac{N}{2}$ , нулевая со-

ставляющая есть не что иное, как двойная постоянная составляющая, присутствующая в сигнале.



Если при оцифровке сигнала время дискретизации было равно  $t_\delta$ , период анализа и частотное разрешение анализа соответственно равны:

$$T = N \cdot t_\delta; \quad \Delta f = \frac{1}{N \cdot t_\delta} = \frac{1}{T}. \quad (4.24)$$

Тогда  $j$ -ая составляющая соответствует частоте  $j \cdot \Delta f$ .

Значение, равное  $\Delta f$ , еще называют фундаментальной частотой спектрального анализа.

Если время дискретизации задано в секундах, то единица измерений частотного разрешения - Гц.

Когда определены все значения  $C_j$  и  $S_j$ , то сходный массив данных, без учета постоянной составляющей, можно представить как:

$$x(k) = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} \left( C_j \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) + S_j \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) \right) = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} A_j \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N} - \varphi_j\right), \quad (4.25)$$

где  $A_j = \sqrt{C_j^2 + S_j^2}$  - амплитуда  $j$ -ой спектральной составляющей;

$\varphi_j = \arctg\left(\frac{S_j}{C_j}\right)$  - начальная фаза  $j$ -ой спектральной составляющей;

$k$  - номер дискретного отсчета, изменяется от 0 до  $N - 1$ .

В соответствии с формулами Эйлера

$$\cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2}; \quad (4.26)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2i} = -i \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2}, \quad (4.27)$$

где  $i$  - мнимая единица, ( $i^2 = -1$ ).

Тогда

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}};$$

$$S_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot -i \frac{e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2} = \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}};$$

$$\begin{aligned}
x(k) &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \left( C_j \cdot \frac{e^{\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2} + S_j \cdot \frac{e^{\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}} - e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}}}{2} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \left( \frac{C_j - iS_j}{2} \cdot e^{\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}} + \frac{C_j + iS_j}{2} \cdot e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}} \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_j - iS_j}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) - i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_j + iS_j}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) + i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Определив в выражениях (4.22), (4.23) значения  $C_{N-j}$  и  $S_{N-j}$ , получим

$$\begin{aligned}
C_{N-j} &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (N-j) \cdot k}{N}\right) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(2\pi \cdot k - \frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = C_j = C_{-j}; \\
S_{N-j} &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (N-j) \cdot k}{N}\right) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(2\pi \cdot k - \frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot -\sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = -\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}\right) = -S_j = S_{-j}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{C_{N-j} - iS_{N-j}}{2} = \frac{C_j + iS_j}{2} = \frac{C_{-j} - iS_{-j}}{2}; \quad e^{\frac{i2\pi \cdot (N-j) \cdot k}{N}} = e^{i2\pi \cdot k} \cdot e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}} = e^{-\frac{i2\pi \cdot j \cdot k}{N}}.$$

Следовательно выражение (4.28) можно записать как

$$x(k) = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{C_j - iS_j}{2} \cdot e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_j - iS_j}{2} \cdot e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}}. \quad (4.31)$$

Если обозначить  $X(j) = \frac{C_j - iS_j}{2}$ , то выражение (4.31) представляется в виде:

$$x(k) = \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \cdot e^{i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \cdot W_N^{-jk}, \quad (4.32)$$

где

$$X(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-i\frac{2\pi \cdot j \cdot k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{jk}. \quad (4.33)$$

$$W_N^r = e^{-i\frac{2\pi}{N}r}.$$

Выражения (4.32), (4.33) представляют  $N$  - точечное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в комплексном виде. Выражение (4.33) определяет прямое ДПФ, а выражение (4.32) обратное ДПФ.

Обратное ДПФ можно вычислить сделав перестановку исходного массива данных и введя масштабный коэффициент. Это позволяет использовать один программный алгоритм для вычисления обоих преобразований.

Сделав в выражении

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \cdot W_N^{-jk} = X(0) \cdot W_N^0 + X(1) \cdot W_N^{-1k} + X(2) \cdot W_N^{-2k} + \dots + \\ &+ X(m) \cdot W_N^{-mk} + \dots + X(N-1) \cdot W_N^{-(N-1)k}; \end{aligned} \quad (4.34)$$

перестановку элементов

$$\begin{aligned} x(k) &= X(N-1) \cdot W_N^{-(N-1)k} + X(N-2) \cdot W_N^{-(N-2)k} + X(3) \cdot W_N^{-(N-3)k} + \dots + \\ &+ X(N-m) \cdot W_N^{-(N-m)k} + \dots + X(1) \cdot W_N^{-1k} + X(0) \cdot W_N^0 = \\ &= W_N^{-N \cdot k} \cdot \left[ X(N-1) \cdot W_N^{1k} + X(N-2) \cdot W_N^{2k} + X(3) \cdot W_N^{3k} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + X(N-m) \cdot W_N^{mk} + \dots + X(1) \cdot W_N^{(N-1)k} + X(0) \cdot W_N^{N \cdot k} \right], \end{aligned}$$

с учетом того, что  $W_N^{-N \cdot k} = 1$ , получим

$$\begin{aligned} x(k) &= X(0) \cdot W_N^0 + X(N-1) \cdot W_N^{1k} + X(N-2) \cdot W_N^{2k} + X(3) \cdot W_N^{3k} + \dots + \\ &+ X(N-m) \cdot W_N^{mk} + \dots + X(1) \cdot W_N^{(N-1)k}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Следовательно после перестановки массива исходных данных таким образом, что первый элемент массива меняется местами с  $(N-1)$ -ым элементом, второй с

$(N - 2)$ -ым и так далее, обратное ДПФ принимает форму прямого ДПФ.

#### 4.5 Алгоритм быстрого преобразования Фурье, реализация и оценка трудоемкости

Трудоемкость вычисления амплитуд комплексных составляющих  $X(j)$  весьма значительна:  $N^2$  операций комплексного сложения и умножения (без учета вычисления тригонометрических составляющих, для определения которых можно применить табличный способ). Поэтому для вычисления  $X(j)$  применяют алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

В основе алгоритмов, обеспечивающих снижение трудоемкости вычисления ДПФ лежат следующие соотношения:

$$W_N^{k \cdot n} = W_N^{k \cdot (n+N)} = W_N^{(k+N) \cdot n}; \quad W_N^{k \cdot (N-n)} = W_N^{-k \cdot n}. \quad (4.36)$$

Алгоритмы, в которых исходная, размерности  $N$ , дискретная последовательность, представляющая сигнал, разбивается на меньшие последовательности, называются алгоритмами с прореживанием по времени. Сущность такого преобразования выглядит следующим образом.

$$\begin{aligned} X(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{jk} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) \cdot W_N^{2l \cdot j} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) \cdot W_N^{(2l+1) \cdot j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{l \cdot j} + \frac{1}{N} W_N^j \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{l \cdot j}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В выражении (4.37) первая сумма является  $N/2$ -точечным дискретным преобразованием Фурье для четных элементов, а вторая - для нечетных, последовательности  $\{x(k)\}$ . Суммы вычисляются по отдельности, а затем полученные результаты объединяются и дают  $N$  - точечное ДПФ. Трудоемкость этого вычисления  $2\left(\frac{N}{2}\right)^2$  операций комплексного умножения и сложения плюс  $N$  комплексных умножений и сложений. Разбиение последовательностей можно продолжать до тех пор, пока в них не останется по два элемента. Тогда с учетом того, что

$$W_{N/2} = W_N^2; \quad W_{N/2}^{N/2} = -1; \quad W_N^{m+N/2} = -W_N^m$$

вычислительный алгоритм можно представить граф-схемой (пример для  $N=16$ ), изображенной на рисунке 4.1.

Эту реализацию называют алгоритмом БПФ Кули-Тьюки с прореживанием по времени. Она состоит из последовательности ступеней, на каждой из которых выполняются однотипные действия над массивом комплексных данных, поступающим на вход ступени, а результаты, полученные в ходе преобразований, выполненных на текущей ступени, обратно перезаписываются в исходный массив, который является выходным для текущей ступени и входным для следующей ступени.

Основной вычислительной процедурой этого алгоритма является, так называемая, операция "бабочка", которая в комплексном виде представляется как

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + W_N^r \cdot X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) - W_N^r \cdot X_m(q) \end{aligned} \quad (4.38)$$

где  $m$  - номер ступени преобразования исходного массива данных.

Значения элементов входного массива на входе алгоритма соответствуют нулевой итерации.

Следует отметить, что массив данных на входе алгоритма представляет собой преобразованный массив исходных данных, а именно, выполнена перестановка местами большинства элементов.

Если массив исходных данных состоит из  $N$  элементов, то для представления номера элемента в двоичной системе счисления требуется  $m = \log_2 N$  двоичных разрядов

$x(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\dots\alpha_2\alpha_1\alpha_0)$ , здесь  $\alpha_i$  -  $i$ -ый двоичный разряд номера.

При перестановке меняются местами элемент  $x(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\dots\alpha_2\alpha_1\alpha_0)$  и элемент  $x(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m-2}\alpha_{m-1})$ .

Такая перестановка называется двоичной инверсией, так как в преобразованной последовательности исходных данных двоичные номера элементов являются зеркальным отображением номеров элементов исходной последовательности.

Массив данных на выходе алгоритма БПФ получается упорядоченным и не требует дополнительных преобразований.

Для реализации алгоритма БПФ требуется  $\log_2 N$  ступеней, а на каждой ступени выполняется  $\frac{N}{2}$  операций "бабочка". Таким образом, трудоемкость всего алгоритма -  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  операций "бабочка".

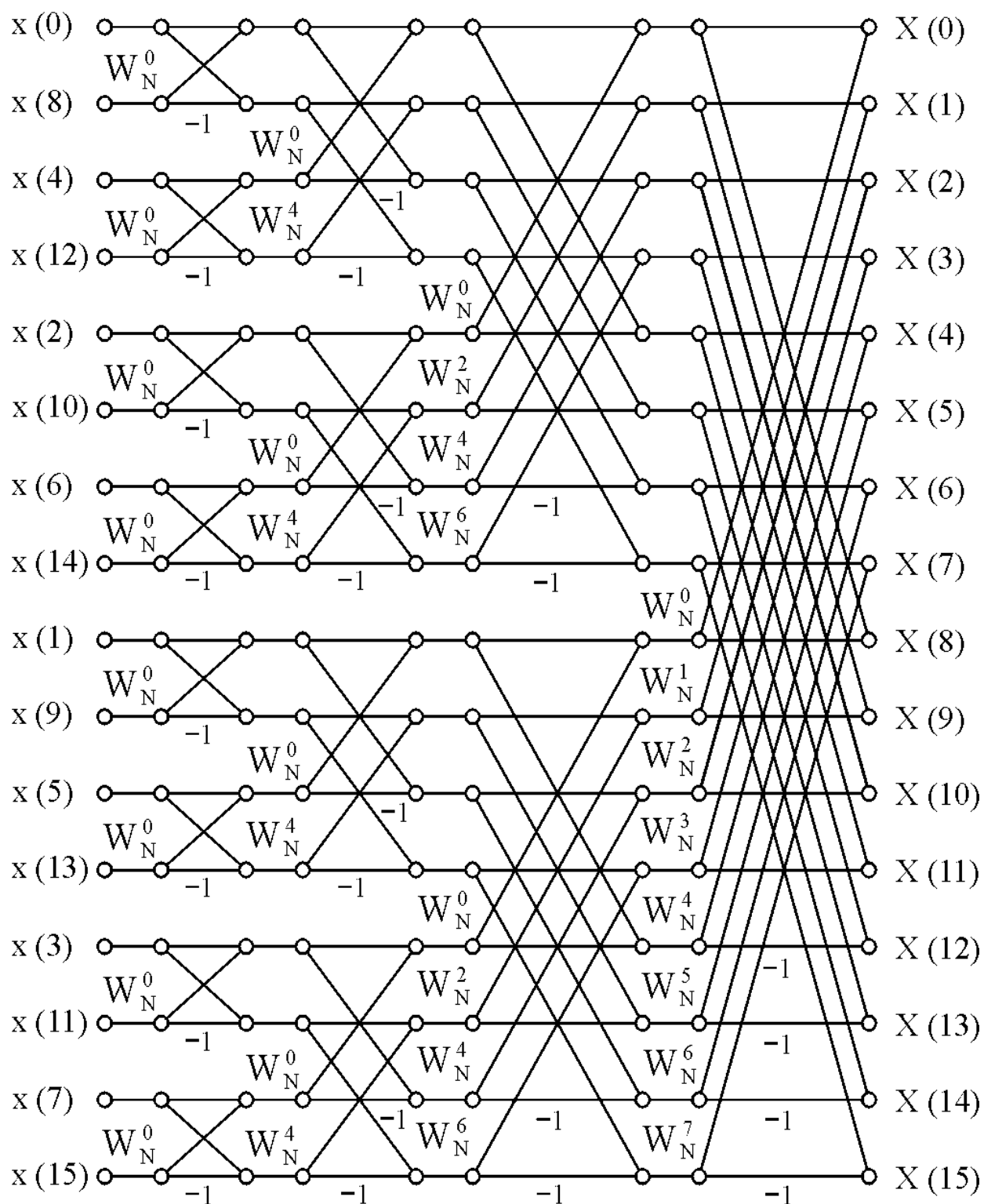


Рисунок 4.1 – Граф-схема алгоритма БПФ с прореживанием по времени

При переходе от комплексного представления выражений (4.33) к действительному получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] + A; \\ \operatorname{Im}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] + B; \\ \operatorname{Re}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] - A; \\ \operatorname{Im}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] - B, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Re}[X_m(q)] \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) - \operatorname{Im}[X_m(q)] \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right); \\ B &= \operatorname{Im}[X_m(q)] \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) + \operatorname{Re}[X_m(q)] \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Для реализации операции "бабочка" необходимо выполнить четыре операции действительного умножения и шесть операций действительного сложения, а трудоемкость всего алгоритма БПФ равна:

$$\begin{aligned} 3N \cdot \log_2 N &\text{ операций сложения и} \\ 2N \cdot \log_2 N &\text{ операций умножения.} \end{aligned}$$

Вычисление функций  $\sin$  и  $\cos$  целесообразно осуществлять табличным способом. Так как современные ПЭВМ имеют достаточно большие размеры оперативной памяти, то для упрощения алгоритма выбора значений функции, соответствующих определенному аргументу, из таблицы, размер таблицы целесообразно выбрать равным максимальной размерности обрабатываемых массивов данных и в нее записать один период функции синуса.

Можно заметить, что на первой, второй и третьей ступенях БПФ реализация операции "бабочка" значительно упрощается.

Так для "бабочек" с индексом равным нулю ( $W_N^0$ ) выражения (4.39) принимают вид (первая модификация):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] + \operatorname{Re}[X_m(q)]; \\ \operatorname{Im}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] + \operatorname{Im}[X_m(q)]; \\ \operatorname{Re}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] - \operatorname{Re}[X_m(q)]; \\ \operatorname{Im}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] - \operatorname{Im}[X_m(q)], \end{aligned} \quad (4.41)$$

для "бабочек" с индексом  $N/4$  ( $W_N^{N/4}$ ) (вторая модификация) - вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] - \operatorname{Im}[X_m(q)]; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] + \operatorname{Re}[X_m(q)]; \\
\operatorname{Re}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] + \operatorname{Im}[X_m(q)]; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] - \operatorname{Re}[X_m(q)],
\end{aligned} \tag{4.42}$$

для "бабочек" с индексом  $N/8$  ( $W_N^{\frac{N}{8}}$ ) (третья модификация) - вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] + C; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] + D; \\
\operatorname{Re}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] - C; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] - D,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

где

$$\begin{aligned}
C &= (\operatorname{Re}[X_m(q)] - \operatorname{Im}[X_m(q)]) \cdot \sqrt{2}; \\
D &= (\operatorname{Im}[X_m(q)] + \operatorname{Re}[X_m(q)]) \cdot \sqrt{2},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

а для "бабочек" с индексом  $3N/8$  ( $W_N^{\frac{3N}{8}}$ ) (четвертая модификация) - вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] - E; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(p)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] - F; \\
\operatorname{Re}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Re}[X_m(p)] + E; \\
\operatorname{Im}[X_{m+1}(q)] &= \operatorname{Im}[X_m(p)] + F,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

где

$$\begin{aligned}
E &= (\operatorname{Re}[X_m(q)] + \operatorname{Im}[X_m(q)]) \cdot \sqrt{2}; \\
F &= (\operatorname{Im}[X_m(q)] - \operatorname{Re}[X_m(q)]) \cdot \sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

На первой ступени БПФ требуется выполнить  $\frac{N}{2}$  "бабочек" первой модификации ( $2N$  операций сложения), на второй ступени по  $\frac{N}{4}$  "бабочек" первой и второй модификаций ( $2N$  операций сложения), на третьей ступени по  $\frac{N}{8}$  "бабочек" первой, второй, третьей и четвертой модификации ( $\frac{5N}{2}$  операций сложения и  $\frac{N}{2}$  операций умножения). На каждой следующей ступени имеется соответственно по  $\frac{N}{16}$ ,  $\frac{N}{32}$ , ..., 2 "бабочек" каждой из модификаций.



Следовательно, для реализации модифицированного алгоритма БПФ требуется выполнить:

$$\begin{aligned} N \cdot (2\log_2 N - 7) + 12 & \text{ операций умножения и} \\ 3N \cdot (2\log_2 N - 1) + 4 & \text{ операций сложения.} \end{aligned}$$

Так как при решении задач обработки реальных сигналов приходится иметь дело с действительными данными, то можно еще использовать особенности БПФ для действительных последовательностей. В этом случае исходная последовательность данных размерности  $N$  разбивается на две последовательности размерности  $\frac{N}{2}$ , одна из которых, состоящая из четных элементов исходной последовательности, интерпретируется как действительная часть, а вторая, состоящая из нечетных элементов исходной последовательности, интерпретируется как мнимая часть комплексной последовательности. В совокупности эти две последовательности представляют комплексную последовательность данных размерности  $\frac{N}{2}$ .

Далее для комплексной последовательности размерности  $\frac{N}{2}$  выполняется БПФ. Но после его реализации требуется выполнить два действия по переходу к действительной последовательности размерности  $N$ . Первое действие, условно называемое разведением спектров, определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X(k)] &= p1; & \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right] &= p1; \\ \operatorname{Im}[X(k)] &= p2; & \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right] &= -p2; \\ \operatorname{Re}[X(N - k)] &= p3; & \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] &= p3; \\ \operatorname{Im}[X(N - k)] &= p4; & \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] &= -p4; \end{aligned} \tag{4.47}$$

где

$$\begin{aligned}
p1 &= \frac{\operatorname{Re}[X(k)] + \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right]}{2}; \\
p2 &= \frac{\operatorname{Im}[X(k)] - \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right]}{2}; \\
p3 &= \frac{\operatorname{Im}[X(k)] + \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right]}{2}; \\
p4 &= \frac{\operatorname{Re}[X(k)] - \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} - k\right)\right]}{2},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

а  $k$  изменяется от 0 до  $\frac{N}{4}$ .

Для реализации одной такой группы требуется выполнить четыре операции сложения, четыре операции умножения на 0.5, и две операции изменения знака. А для всей последовательности операций по разведению спектра - по  $N$  операций сложения и умножения на 0.5 и  $\frac{N}{2}$  операций изменения знака.

Вторая действие, называемое объединением спектра, состоит из следующих операций:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[X(k)] &= \operatorname{Re}[X(k)] + A; \\
\operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] &= \operatorname{Im}[X(k)] - A; \\
\operatorname{Im}[X(k)] &= \operatorname{Im}[X(k)] + B; \\
\operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] &= \operatorname{Im}[X(k)] - B,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right); \\
B &= \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2} + k\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right),
\end{aligned} \tag{4.50}$$

а  $k$  изменяется от 0 до  $\frac{N}{2}$ .

Выражения (4.49) и (4.50), по сути дела, представляют собой обычную "бабочку", состоящую из четырех операций умножения и шести операций сложения.

А для всего действия по объединению спектра требуется выполнить  $2N$  умножений и  $3N$  сложений.

Таким образом, реализация обычного БПФ для действительной последовательности требует выполнения

$$N \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 3 \right) \text{ операций умножения и}$$

$$N \cdot \left( \frac{3}{2} \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 4 \right) \text{ операций сложения,}$$

а модифицированного БПФ для действительной последовательности

$$N \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) - 0.5 \right) + 12 \text{ операций умножения и}$$

$$N \cdot \left( \frac{3}{2} \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 2.5 \right) \right) + 4 \text{ операций сложения.}$$

Во многих практических приложениях БПФ в недавнем прошлом реализовывался для данных, представленных в формате с фиксированной запятой с ограниченной разрядностью, как правило, равной шестнадцати. Такой подход объясняется требованием уменьшения времени выполнения этого алгоритма в системах реального времени. Соотношение шум/сигнал для такой реализации БПФ определяется величиной  $4N \cdot 2^{-2b}$ , где  $N$  - размерность массива входных данных, а  $b$  - число значащих двоичных разрядов.

Современные ПЭВМ оснащены мощными математическими сопроцессорами, которые осуществляют выполнение арифметических операций и вычисление основных функций в формате с плавающей запятой с высокой скоростью. Применение математического сопроцессора позволяет практически пренебречь шумом, возникающим в выходных данных из-за ограниченной разрядной сетки. Соотношение шум/сигнал для данных с плавающей запятой определяется выражением  $2 \log_2 N \cdot 2^{-2b}$ . Так как для формата с плавающей запятой  $b$  обычно равно 24, то это соотношение имеет очень малое значение даже для больших  $N$ .

При применении математического сопроцессора ПЭВМ при оценке трудоемкости БПФ следует учитывать и операции пересылки данных из памяти в регистры сопроцессора и обратно, так как они сопоставимы по времени с арифметическими операциями сопроцессора. Для математического сопроцессора i486, если трудоемкость операции умножения принять за 1, то трудоемкость операции сложения будет примерно 0.625, операции пересылка память-регистр сопроцессора (П→R) - 0.1875, операции пересылка регистр сопроцессора память (R→П) - 0.4375, операции пересылка память-память (П→П) - 0.4375, операции инверсия знака 0.375. Для математического сопроцессора Pentium, если трудоемкость операции умножения принять за 1, то трудоемкость операции сложения будет примерно 1, операции пересылка память-регистр сопроцессора (П→R) - 0.333, операции пересылка регистр сопроцессора память (R→П) - 0.666, операции пересылка память-память (П→П) - 0.333.

Программная реализация на языке высокого уровня операции "бабочка" может иметь вид:

```

TSIN = mass[is]; // mass - массив в котором записан период синуса
TCOS = mass[ic]; // is - индекс для выбора из массива функции синуса
                        // ic - индекс для выбора из массива функции косинуса
ReA = ar_r[p];      // ar_r - массив, в котором хранится действительная
                        // часть преобразуемой последовательности
ImA = ar_im[p];     // ar_im - массив, в котором хранится мнимая
                        // часть преобразуемой последовательности
ReB = ar_r[q];
ImB = ar_im[q];
p1 = ReB * TCOS;    // p1, p2, p3 - переменные, используемые
p2 = ImB * TSIN;    // в промежуточных вычислениях
p1 = p1 - p2;
p2 = ImB * TCOS;
p3 = ReB * TSIN;
p2 = p2 + p3;
ar_r[q] = ReA - p1; // в массивах ar_r и ar_im значения элементов
ar_r[p] = ReA + p1; // изменяются от ступени к ступен
ar_im[q] = ImA - p2;
ar_im[p] = ImA + p2;

```

С учетом того, что сопроцессор поддерживает выполнение команд типа регистр-регистр и регистр-память, легко определить, что для выполнения этой программной реализации необходимо по 10 операций пересылки  $\Pi \rightarrow R$  и  $R \rightarrow \Pi$  и 6 операций пересылки  $\Pi \rightarrow \Pi$ .

Проведя аналогичные рассуждения, увидим, что для реализации "бабочек" первой и второй модификации требуется по 4 операции пересылок  $\Pi \rightarrow R$ ,  $R \rightarrow \Pi$  и  $\Pi \rightarrow \Pi$ , а для "бабочек" третьей и четвертой модификации - по 6 операций пересылок  $\Pi \rightarrow R$  и  $R \rightarrow \Pi$  и 4 операции пересылки  $\Pi \rightarrow \Pi$ , для операции разведения спектров - по 6 операций пересылок  $\Pi \rightarrow R$  и  $R \rightarrow \Pi$  и 8 операций пересылок  $\Pi \rightarrow \Pi$  и для операции объединения спектра - по 10 операций пересылок  $\Pi \rightarrow R$  и  $R \rightarrow \Pi$  и 6 операций пересылок  $\Pi \rightarrow \Pi$ .

С учетом этих данных, можно получить выражения для определения суммарного числа различных операций пересылок для полной реализации алгоритма БПФ.

Для реализации обычного алгоритма БПФ требуется выполнить

$5N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$ ,  
 $5N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $R \rightarrow \Pi$ ,  
 $5N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow \Pi$ .

Для реализации модифицированного алгоритма БПФ требуется выполнить

$N \cdot (5\log_2 N - 11) + 20$  пересылок типа  $P \rightarrow R$ ,  
 $N \cdot (5\log_2 N - 11) + 20$  пересылок типа  $R \rightarrow P$ ,  
 $N \cdot (3\log_2 N - 4) + 8$  пересылок типа  $P \rightarrow P$ .

Для реализации обычного алгоритма БПФ для действительных последовательностей требуется выполнить

$N \cdot \left( 2.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 6.5 \right)$  пересылок типа  $P \rightarrow R$ ,  
 $N \cdot \left( 2.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 6.5 \right)$  пересылок типа  $R \rightarrow P$ ,  
 $N \cdot \left( 1.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 5 \right)$  пересылок типа  $P \rightarrow P$ .

Для реализации модифицированного алгоритма БПФ для действительных последовательностей требуется выполнить

$N \cdot \left( 2.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 1 \right) + 20$  пересылок типа  $P \rightarrow R$ ,  
 $N \cdot \left( 2.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 1 \right) + 20$  пересылок типа  $R \rightarrow P$ ,  
 $N \cdot \left( 1.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 3 \right) + 8$  пересылок типа  $P \rightarrow P$ .

Сопроцессор ПЭВМ имеет восемь внутренних регистров, доступ к которым осуществляется по принципу стека. Наличие этих регистров дает возможность в начале выполнения базовых операций БПФ ("бабочка", разведение спектров, сведение спектра) загрузить в регистры сопроцессора операнды, участвующие в операциях, а затем выгружать из регистров получаемые результаты в требуемые ячейки оперативной памяти. Такая организация вычислительного процесса БПФ позволяет значительно сократить число различных пересылок. Ниже представлена реализация операции "бабочка" на математическом сопроцессоре процессоров Intel.

```

TSIN = mass[is]; // mass - массив в котором записан период синуса
TCOS = mass[ic]; // is - индекс для выбора из массива функции синуса
                  // ic - индекс для выбора из массива функции косинуса

asm push si
asm mov ax,word ptr i_p // i_p - значение индекса элемента X(p)
asm mov dx,word ptr i_q // i_q - значение индекса элемента X(q)
asm shl ax,1
asm shl ax,1
asm shl dx,1
  
```

```

asm shl dx,1
asm les bx,dword ptr [bp+10] // загрузить адрес массива мнимой части
                                // исходных данных в регистр bx
asm mov si,bx
asm add bx,dx //определить адрес элемента массива мнимой
                // части X(q)
asm FLD dword ptr es:[bx] // загрузить значение элемента массива
                // мнимой части X(q) (ImB) в вершину стека сопроцессора
asm FST ST(2) // создать копию ImB в регистре ST(2) сопроцессора
asm les bx,dword ptr [bp+6] // загрузить адрес массива действительной
                                // части исходных данных в регистр bx
asm mov cx,bx
asm add bx,dx //определить адрес элемента массива действительной
                // части X(q)
asm FLD dword ptr es:[bx] // загрузить значение элемента массива
                // действительной части X(q) (ReB) в вершину стека сопроцессора
asm FST ST(2) // Создать копию ReB в регистре ST(2) сопроцессора
asm FLD dword ptr TSIN // загрузить TSIN в вершину стека сопроцессора
asm FLD dword ptr TCOS // загрузить TCOS в вершину стека сопроцессора
asm FMUL ST(5),ST(0) // ImB*TCOS , результат в ST(5)
asm FMULP ST(4),ST(0) // ReB*TCOS , результат в ST(4)
asm FMUL ST(2),ST(0) // ImB*TSIN
asm FMULP ST(1),ST(0) // ReB*TSIN
asm FADDP ST(3),ST(0) // ImB*TCOS+ReB*TSIN (ii2), результат в ST(3)
asm FSUBP ST(1),ST(0) // ReB*TCOS-ImB*TSIN (ii1) , результат в ST(1)
asm mov bx,cx
asm add bx,ax //определить адрес элемента массива действительной
                // части X(p)
asm FLD dword ptr es:[bx] // загрузить значение элемента массива
                // действительной части X(p) (ReA) в вершину стека сопроцессора
asm FLD ST(0) // Создать копии ReA в регистрах ST(0) и ST(1)
asm FSUB ST(0),ST(2) // ReA-ii1
asm mov bx,cx
asm add bx,dx //определить адрес элемента массива действительной
                // части X(q)
asm FSTP dword ptr es:[bx] // выгрузить из вершины стека сопроцессора
                //вычисленное значение в элемент массива действительной части X(q)
asm FADDP ST(1),ST(0) // ReA+ii1
asm mov bx,cx
asm add bx,ax //определить адрес элемента массива действительной
                // части X(p)
asm FSTP dword ptr es:[bx] // выгрузить из вершины стека сопроцессора
                //вычисленное значение в элемент массива действительной части X(p)
asm mov bx,si
asm add bx,ax //определить адрес элемента массива мнимой

```

```

// части X(p)
asm FLD  dword ptr es:[bx] // загрузить значение элемента массива
// мнимой части X(p) (ImA) в вершину стека сопроцессора
asm FLD  ST(0) // создать копии ImA в регистрах ST(0) и ST(1)
asm FSUB ST(0),ST(2)      // ImA-ii2
asm mov  bx,si
asm add  bx,dx //определить адрес элемента массива мнимой
// части X(q)
asm FSTP dword ptr es:[bx] // выгрузить из вершины стека сопроцессора
//вычисленное значение в элемент массива мнимой части X(q)
asm FADDP ST(1),ST(0)     // ImA+ii2
asm mov  bx,si
asm add  bx,ax //определить адрес элемента массива мнимой
// части X(p)
asm FSTP dword ptr es:[bx] // выгрузить из вершины стека сопроцессора
//вычисленное значение в элемент массива мнимой части X(p)
asm pop  si

```

При таком подходе для вычисления одной операции "бабочка" требуется выполнить 6 пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$ , 4 пересылки типа  $R \rightarrow \Pi$  и 2 пересылки типа  $\Pi \rightarrow \Pi$ , для вычисления "бабочек" третьей и четвертой модификаций 5 пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$  и 4 пересылки типа  $R \rightarrow \Pi$ , для операции разведения спектров 5 пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$  и 4 пересылки  $R \rightarrow \Pi$ .

А в целом при такой организации вычислений для всего обычного алгоритма БПФ требуется выполнить

$3N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$ ,  
 $2N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $R \rightarrow \Pi$ ,  
 $N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow \Pi$ ,

для реализации модифицированного алгоритма БПФ -

$N \cdot (3\log_2 N - 3.5) + 6$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$ ,  
 $2N \cdot \log_2 N$  пересылок типа  $R \rightarrow \Pi$ ,  
 $N \cdot (\log_2 N - 3)$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow \Pi$ .

для реализации обычного алгоритма БПФ для действительных последовательностей-

$N \cdot \left( 1.5\log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 4.25 \right)$  пересылок типа  $\Pi \rightarrow R$ ,  
 $N \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 4 \right)$  пересылок типа  $R \rightarrow \Pi$ ,

$$\frac{N}{2} \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) - 3 \right) \text{ пересылок типа П} \rightarrow \text{П.}$$

для реализации модифицированного алгоритма БПФ для действительных последовательностей -

$$N \cdot \left( 1.5 \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 2.5 \right) \text{ пересылок типа П} \rightarrow \text{R,}$$

$$N \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) + 4 \right) \text{ пересылок типа R} \rightarrow \text{П,}$$

$$\frac{N}{2} \cdot \left( \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) - 3 \right) \text{ пересылок типа П} \rightarrow \text{П.}$$

Оценка трудоемкости рассмотренных алгоритмов показала, что использование стековых регистров сопроцессора для хранения промежуточных данных позволяет значительно снизить трудоемкость реализации алгоритма БПФ в целом. К примеру, для модифицированного алгоритма БПФ для действительных последовательностей при размере выборки в 1024 отсчета для математического сопроцессора i486 трудоемкость уменьшается примерно в 1.385 раз, а для математического сопроцессора Pentium - в 1.338 раз.

#### 4.6 Преобразование Фурье прямоугольного импульса

Прямоугольный импульс определяется выражением:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T < t < T; \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases} \quad (4.51)$$

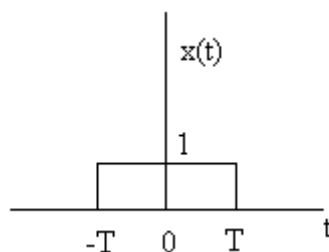


Рисунок 4.2 – Форма прямоугольного импульса

Прямое преобразование Фурье позволяет получить спектр прямоугольного импульса:



$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi \cdot f \cdot T} - e^{j2\pi \cdot f \cdot T}] = \\
 &= 2T \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} = \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}.
 \end{aligned}
 \tag{4.52}$$

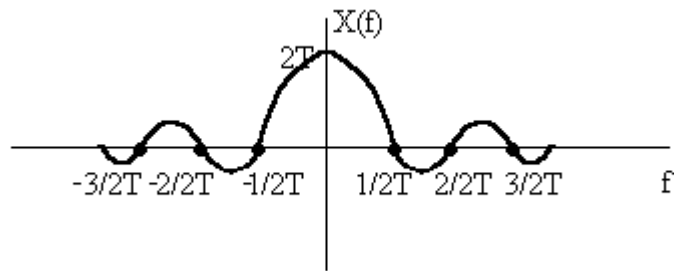


Рисунок 4.3 – Спектр прямоугольного импульса

Обратное преобразование Фурье приводит к восстановлению прямоугольного импульса:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi \cdot f} e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df = \begin{cases} 1, & -T < t < T; \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

#### 4.7 Представление периодической последовательности единичных импульсов в частотной области

Имеется бесконечная периодическая последовательность единичных импульсов с периодом  $T$ .

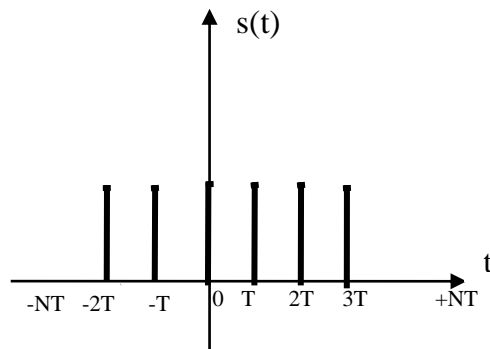


Рисунок 4.4 – Периодическая последовательность единичных импульсов

Определим её представление в частотной области.

Для этого сначала вычислим спектр ограниченной периодической последовательности единичных импульсов:

$$\begin{aligned}
 S_N(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-N}^N \delta(t - nT) \right] e^{-i2\pi ft} dt = \\
 &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt = \sum_{n=-N}^N e^{-i2\pi n f T} = \\
 &= e^{i2\pi N f T} + e^{i2\pi (N-1) f T} + \dots + 1 + \dots + e^{-i2\pi N f T} = \\
 &= e^{i2\pi N f T} \left[ 1 + e^{-i2\pi f T} + (e^{-i2\pi f T})^2 + \dots + (e^{-i2\pi f T})^{2N} \right] = \frac{e^{i2\pi N f T} (1 - e^{-i2\pi (2N+1) f T})}{1 - e^{-i2\pi f T}} = \quad (4.53) \\
 &= \frac{\sin(\pi(2N+1)fT)}{\sin(\pi f T)}.
 \end{aligned}$$

$$S_N(f) = \frac{\sin(\pi(2N+1)fT)}{\sin(\pi f T)}. \quad (4.54)$$

Это выражение представляет преобразование Фурье конечной последовательности одиночных импульсов, следующих с периодом  $T$ , на интервале от  $-N$  до  $N$ .

Когда  $N$  устремляется к бесконечности, то график стягивается в точки.

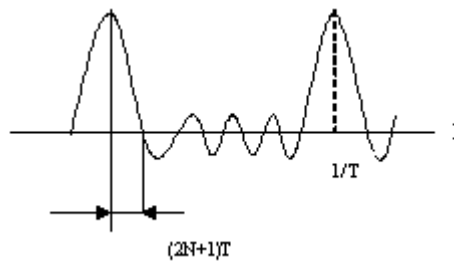


Рисунок 4.5 – Спектр ограниченной периодической последовательности единичных импульсов

Для любого  $N$  площадь под каждым лепестком огибающей  $S_N(f)$  равна:

$$\frac{1}{2T} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_N(f) df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{n=-N}^N e^{-i2\pi n f T} df = \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-i2\pi n f T} df = \frac{1}{T}.$$

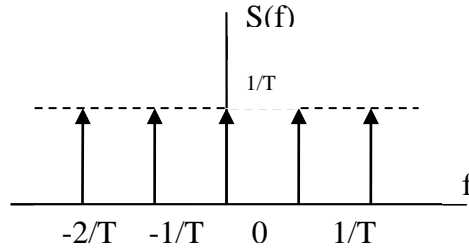


Рисунок 4.6 – Спектр периодической последовательности единичных импульсов

Спектр периодической последовательности одиночных импульсов представляет собой дискретную периодическую последовательность импульсов, каждый из которых охватывает площадь, равную  $1/T$ , где  $T$  - период следования единичных импульсов.

Таким образом, последовательности импульсов во временной области соответствует последовательность импульсов в частотной области:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \quad (4.55)$$

## 4.8 Вычисление свертки

### 4.8.1 Круговая свертка

Понятие круговой свертки используется только для периодических последовательностей. Круговой сверткой двух периодических  $N$ -точечных последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  называется  $N$ -точечная последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(n-m)x_2(m). \quad (4.56)$$

Найдем  $N$ -точечное ДПФ круговой свертки

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) \right] W_N^{nk}.$$

Изменив порядок суммирования

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{nk}$$

и представив  $W_N^{nk} = W_N^{(n-m)k} W_N^{mk}$ , можно записать ДПФ в виде:

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{(n-m)k} \right] W_N^{mk}. \quad (4.57)$$

После замены переменных  $l = n - m$  ( $n = l + m$ ) сумма в квадратных скобках, с учетом нулевых начальных условий, будет равна

$$\sum_{l+m=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = \sum_{l=-m}^{-1} x_2(l) W_N^{lk} + \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = 0 + \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = X_2(k).$$

Подставив это значение в (4.57), получим  $N$ -точечное ДПФ круговой свертки, которое равно произведению  $N$ -точечных ДПФ свертываемых последовательностей:

$$Y(k) = X_2(k) \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk} = X_2(k) X_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Это соотношение является основой следующего алгоритма вычисления круговой свертки:

- определяются  $N$ -точечные ДПФ  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$  и их произведение

$$Y(k) = X_2(k) X_1(k);$$

- с помощью ОДПФ определяется  $N$ -точечная последовательность  $y(n)$ .

ДПФ и ОДПФ рассчитываются с помощью быстрых алгоритмов, что существенно сокращает объем вычислений по сравнению с непосредственным вычислением свертки по формуле (4.56).

#### 4.8.2 Линейная свертка

Линейной сверткой конечных последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  с длинами  $N_1$  и  $N_2$  называется  $L$ -точечная последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(n-m) x_2(m), \quad (4.58)$$

где  $L = N_1 + N_2 - 1$ , причем последовательности  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  и  $y(n)$  равны нулю вне этого интервала.

Конечные последовательности можно условно считать периодическими, поэтому для линейной свертки может использоваться алгоритм расчета круговой свертки с помощью ДПФ:

- а) последовательности  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  дополняются нулями до длины  $L$ ;
- б) осуществляется переход к  $L$ -точечным последовательностям  $\tilde{x}_1(n)$ ,  $\tilde{x}_2(n)$ ;
- в) линейная свертка последовательностей  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  будет равна  $L$ -точечной круговой свертке последовательностей  $\tilde{x}_1(n)$ ,  $\tilde{x}_2(n)$ :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(n-m) \tilde{x}_2(m); \quad (4.59)$$

- г) определяются  $L$ -точечные ДПФ  $\tilde{X}_1(k)$  и  $\tilde{X}_2(k)$  и их произведение

$$Y(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k); \quad (4.60)$$

- д) с помощью ОДПФ определяется  $L$ -точечная последовательность  $y(n)$ .

#### 4.8.3 Вычисление свертки для длинных сигнальных реализаций

Если длина одной из последовательностей существенно превышает длину другой, линейная свертка вычисляется путем разбиения длинной последовательности на короткие части (секции), вычисления сверток для отдельных частей и объединения полученных частичных результатов, результат объединения и будет искомой линейной сверткой.

Этот случай особенно важен при решении практических задач ЦОС, когда требуется реализовать свертку импульсной характеристики устройства с входным сигналом и получить сигнал на выходе устройства:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m) x(m).$$

Пусть длина импульсной характеристики  $h(n)$  ограничена  $N_1$  отсчетами, а длина последовательности  $x(n)$  не ограничена.

##### 4.8.3.1 Вычисление свертки с секционированием методом перекрытия с суммированием

Последовательность  $x(n)$  делится на смежные секции  $x_k(n)$  длиной  $N_2$ , рекомендуется выбирать длину  $N_2$  близкой по величине к  $N_1$ .

Исходная последовательность  $x(n)$  представляется в виде суммы секций:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n), \quad (4.61)$$

и тогда формула свертки принимает вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n-m).$$

Изменив порядок суммирования

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x_k(n-m),$$

с учетом того, что длины последовательностей  $h(n)$  и  $x_k(n)$  конечны и равны, соответственно)  $N_1$  и  $N_2$ , бесконечный предел суммы по  $m$  конечный:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x_k(n-m),$$

получим  $L$ -точечную искомую свертку

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \quad (4.62)$$

в виде суммы секционированных линейных сверток, где каждая секционированная свертка вычисляется по формуле:

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x_k(n-m),$$

где  $L = N_1 + N_2 - 1$ .

Смежные  $L$ -точечные секционированные свертки перекрываются на участке длиной  $(N_1 + N_2 - 1) - N_2 = N_1 - 1$ . На участке перекрытия отсчеты отдельных секционированных сверток суммируются.

#### 4.8.3.2 Вычисление свертки с секционированием методом перекрытия с накоплением

Для вычисления свертки этим методом последовательность  $x(n)$  делится на секции  $\tilde{x}_k(n)$ ,  $\tilde{x}_{k+1}(n)$ ,  $k=0,1,\dots$ , каждая из которых длиной  $L = N_1 + N_2 - 1$  с участками перекрытий длиной  $(N_1 - 1)$  отсчет. Последовательность  $h(n)$  дополняется  $(N_2 - 1)$  нулями до длины  $L$ , и получается  $L$ -точечная последовательность  $\tilde{h}(n)$ . Затем вычисляются секционированные круговые свертки  $\tilde{y}_k(n)$ ,  $\tilde{y}_{k+1}(n)$ :

$$\tilde{y}_k(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}_k(n-m); \quad (4.63)$$

$$\tilde{y}_{k+1}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}_{k+1}(n-m). \quad (4.64)$$

При формировании искомой свертки необходимо учитывать, что в данном случае секции  $\tilde{x}_k(n)$ ,  $\tilde{x}_{k+1}(n)$  перекрываются и условие (4.61) не выполняется:

$$x(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k(n)$$

и, соответственно, соотношение (4.62) также не действительно:

$$y(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}_k(n).$$

Поэтому, для формирования результирующей свертки при суммировании секционированных сверток  $\tilde{y}_k(n)$ , в каждой из них отбрасываются первые  $(N_1 - 1)$  отсчетов.

В обоих методах секционированные свертки могут рассчитываться с помощью ДПФ и ОДПФ.

## 5 Цифровая фильтрация

### 5.1 Введение в цифровую фильтрацию

#### 5.1.1 Понятие цифрового фильтра

Под фильтрацией понимается любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

Преобразование динамики сигналов (и данных, которые несут эти сигналы) осуществляется в системах. Системы, избирательно меняющие форму сигналов (амплитудно-частотную или фазово-частотную характеристику), устранение или уменьшение помех, извлечение из сигналов определенной информации, разделение сигналов на определенные составляющие называют фильтрами. Соответственно, фильтры с любым целевым назначением являются частным случаем систем преобразования сигналов.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания, прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех). Основными методами цифровой фильтрации данных являются частотная селекция сигналов и оптимальная (адаптивная) фильтрация.

В настоящем курсе рассматриваются методы линейной обработки данных линейными дискретными системами. Линейными называют системы, которые осуществляют преобразование линейных комбинаций входных сигналов в суперпозицию выходных сигналов. Принцип реализации линейных систем, физический - в виде специальных микропроцессорных устройств, или алгоритмический - в виде программ на ЭВМ, существенного значения не имеет и определяет только их потенциальные возможности.

В общем случае термином **цифровой фильтр (ЦФ)** называют аппаратную или программную реализацию математического алгоритма, входом которого является цифровой сигнал, а выходом – другой цифровой сигнал с определенным образом модифицированной формой и(или) амплитудной и фазовой характеристикой. Классификация цифровых фильтров обычно базируется на функциональных признаках алгоритмов цифровой фильтрации, согласно которому ЦФ подразделяются на 4 группы: фильтры частотной селекции, оптимальные (квазиоптимальные), адаптивные и эвристические. Наиболее изученными и опробованными на практике являются ЦФ частотной селекции.

#### 5.1.2 Разностное уравнение цифрового фильтра

Принцип разработки программы, закладываемой в цифровой вычислитель, во многих случаях базируется на аналоговых фильтрах (прототипах).



Одним из способов теоретического расчета выходного напряжения  $y(t)$  аналогового фильтра является операция свертки его импульсной характеристики  $h(t)$  с входным воздействием  $x(t)$ :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (5.1)$$

Реальный фильтр – это некоторое аналоговое устройство, производящее операции в соответствии с математическим выражением (5.1).

Но эти математические операции может выполнить и цифровой вычислитель. Для этого интеграл заменяется суммой:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N h(kT)x(nT-kT)T,$$

где  $N$  - разумно выбранное число суммируемых элементов;

$x(kT)$  - последовательность цифровых отсчетов дискретизированного входного воздействия  $x(t)$ ;

$h(kT)$  - цифровые отсчеты импульсной характеристики заданного аналого-прототипа, являющиеся постоянными коэффициентами;

$T$  - интервал дискретизации (величина постоянная).

Опуская постоянный множитель  $T$ , можно записать

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N h(kT)x(nT-kT). \quad (5.2)$$

Выходной результат  $y(nT)$  отличается от  $y(t)$  только своей дискретной формой, которая восстанавливается в аналоговое колебание с помощью цифроаналогового преобразователя и формирующего фильтра. Следовательно, вычислитель, реализующий вычисление формулы (5.2), можно назвать цифровым фильтром, сохраняющим характеристики своего аналога-прототипа.

Получение эквивалентного цифрового фильтра, обладающего свойствами аналогового прототипа, базируется на операции дискретизации временных процессов, протекающих в цепях этого прототипа.

При дискретизации временных процессов производная по времени заменяется выражением:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (5.3)$$

где  $\Delta t$  - приращение по времени.

В цифровых фильтрах  $\Delta t$  равно интервалу дискретизации  $T$ . Тогда производную (5.3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(nT) - y[(n-1)T]}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T},$$

где  $n$  - номер интервала дискретизации.

Дифференциальное уравнение простейшего фильтра, реализованного в виде однозвенной  $RC$ -цепи имеет следующий вид:

$$y(t) + \tau_{\phi} \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

где  $\tau_{\phi} = RC$ ;

$R, C$  - номиналы сопротивления и емкости.

Заменив  $y(t)$  на  $y(n)$ ,  $x(t)$  на  $x(n)$ , получим

$$y(n) = ax(n) + by(n-1), \quad (5.4)$$

где  $a = \frac{T}{T + \tau_{\phi}}, b = \frac{\tau_{\phi}}{T + \tau_{\phi}}.$

Уравнение (2.5) называется разностным. Оно позволяет без каких-либо дополнительных действий представить вычислительную структуру цифрового фильтра. Выходная последовательность  $y(n)$  для  $RC$ -цепи является суммой двух последовательностей, определяемых первым и вторым слагаемым правой части уравнения.

Величины  $a, b$  называют коэффициентами цифрового фильтра.

Разностное уравнение цифровой  $RC$ -цепи, предполагает, что для образования выходного отсчета используется не только входной, но и задержанный на один временной дискрет выходной отсчет (отсчет полученный на один дискрет раньше), т.е. в вычислениях имеется цепь обратной связи. Такой фильтр называют рекурсивным.

### 5.1.3 Дискретная свертка

Дискретизация интеграла свертки (5.1) открывает новые возможности в синтезе цифровых фильтров. Так как интервал  $T$  - постоянная величина, то  $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $h(t)$  являются функциями номера отсчета и выражение для дискретной свертки имеет вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (5.5)$$

При проведении вычислений следует учитывать, что при фиксированном  $n$  значение  $m$  не может быть больше, чем  $n$ , следовательно  $(n-m) \geq 0$ .

Дискретная импульсная характеристика  $RC$ -цепи

$$h(n) = \exp\left(-\frac{T}{\tau_{\phi}} n\right) = \exp\left(-\frac{T}{RC} n\right). \quad (5.6)$$

Формула (5.5) может рассматриваться как разностное уравнение, которое устанавливает, что выходной отсчет может быть представлен в виде текущего (при  $m=0$ ) и задержанных значений входных отсчетов, умноженных на весовые коэффициенты, роль которых выполняет дискретная импульсная характеристика (ДИХ). Так как ДИХ этого фильтра имеет бесконечную протяженность во времени, то физически реализовать такое вычисление на практике невозможно. Физически реализуемый фильтр можно получить, если ограничить протяженность ДИХ. Тогда выражение (5.5) будет иметь вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^k h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(k)x(n-k). \quad (5.7)$$

В вычислениях по этой формуле отсутствует петля обратной связи, поэтому такой фильтр называется **нерекурсивным**. Так как его ДИХ является ограниченной такой цифровой фильтр относится к классу фильтров с конечной импульсной характеристикой – **КИХ-фильтров**. Импульсная характеристика фильтра с обратной связью, описываемого уравнением (5.4), бесконечная и такие фильтры называются фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой – **БИХ-фильтрами**.

Таким образом, для одного и того же аналогового фильтра получены две различные схемы вычислений цифровых фильтров.

Нерекурсивные фильтры требуют большего числа вычислений, однако при определенных условиях они позволяют получить линейную фазовую характеристику цифрового фильтра и обеспечивают устойчивость работы.

#### 5.1.4 Комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра

Анализ свойств цифровых фильтров проводят путем исследования их частотных характеристик. Чтобы получить выражение для комплексного коэффициента передачи цифрового фильтра, на его вход необходимо подать испытательное воздействие в виде дискретизированной комплексной экспоненты:

$$x(n) = \exp(j\Phi n), \quad (5.8)$$

функционально эквивалентной дискретизированной синусоиде с цифровой частотой

$$\Phi = \omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_d} = 2\pi \frac{f}{f_d}.$$

Реакция фильтра на такое воздействие будет представлять собой также синусоидальное колебание с той же частотой, но другой амплитудой  $H(\Phi)$  и фазовым сдвигом  $\varphi(\Phi)$ :

$$y(n) = H(\Phi) \exp[j\varphi(\Phi)] \exp(j\Phi n) = H(j\Phi) x(n).$$

Множитель

$$H(j\Phi) = H(\Phi) \exp[j\varphi(\Phi)] \quad (5.9)$$

представляет собой комплексный коэффициент передачи фильтра.

Модуль комплексного коэффициента передачи  $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$  - это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра;  $\varphi(\Phi)$  - фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра.

## 5.2 Способы описания цифровых фильтров

Реакция  $y(n)$  цифрового фильтра на входное воздействие  $x(n)$  определяется сверткой этого воздействия с импульсной характеристикой фильтра:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) = h(n) * x(n).$$

Из свойств  $z$ -преобразования следует, что свертке последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  соответствует произведение их  $z$ -преобразований

$$Y(z) = X(z) H(z). \quad (5.10)$$

Из равенства (5.10) следуют выводы:

а)  $H(z)$  является  $z$ -преобразованием импульсной характеристики фильтра  $h(n)$ :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-k}; \quad (5.11)$$

б) так как  $X(z)$  и  $Y(z)$  - это  $z$ -преобразования входного воздействия и выходной реакции цифрового фильтра, то  $H(z)$  является передаточной функцией фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (5.12)$$

Передаточную функцию цифрового фильтра, полученную как  $z$ -преобразование его ДИХ в общем виде можно представить отношением двух полиномов, или дробно-рациональной функцией от переменной  $z^{-k}$ :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^L b_k z^{-k}}. \quad (5.13)$$

Это наиболее общее выражение для  $H(z)$ . Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  называются коэффициентами цифрового фильтра. Цифровой фильтр считается рассчитанным (синтезированным), если определены порядки  $M$  и  $L$  полиномов числителя и знаменателя и коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ .

Передаточной функции  $H(z)$  соответствует разностное уравнение цифрового фильтра:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^L b_k y(n-k). \quad (5.14)$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  разностного уравнения являются соответствующими коэффициентами передаточной функции цифрового фильтра.

Разностное уравнение представляет собой алгоритм, по которому можно составить программу для реализации цифровой фильтрации.

### 5.3 Цифровые фильтры 1-го и 2-го порядков

#### 5.3.1 Нерекурсивный фильтр 1-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 1-го порядка получается из общего уравнения (5.13) при  $a_k = 0$  при  $k \geq 2$  и при  $b_k = 0$ , при  $k \geq 1$ :

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}. \quad (5.15)$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1). \quad (5.16)$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (5.15), (5.16) представляют в следующем виде:

$$H(z) = a_0 (1 + \alpha_1 z^{-1}); \quad (5.17)$$

$$y(n) = a_0 [x(n) + \alpha_1 x(n-1)], \quad (5.18)$$

где  $\alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}$ .

Коэффициент  $\alpha_0$  выполняет в этих уравнениях только масштабирующие функции и не оказывает влияния на характеристики фильтра. Поэтому для анализа уравнение передаточной функции записывается в виде:

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1}. \quad (5.19)$$

Рабочим диапазоном частот цифрового фильтра является интервал Найквиста, в цифровых частотах  $\Phi$  это диапазон от 0 до  $\pi$ .

Для комплексного коэффициента передачи фильтра выражение (5.19) при переменной  $z = \exp(j\Phi)$

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \exp(-j\Phi). \quad (5.20)$$

При подстановке в (5.20) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \cos(\Phi) - j\alpha_1 \sin(\Phi). \quad (5.21)$$

АЧХ фильтра определяется как модуль  $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$ :

$$H(\Phi) = \sqrt{1 + 2\alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_1^2}. \quad (5.22)$$

Выражение для определения ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}[H(j\Phi)]}{\text{Re}[H(j\Phi)]} \right\} = -\arctg \left( \frac{\alpha_1 \sin(\Phi)}{1 + \alpha_1 \cos(\Phi)} \right). \quad (5.23)$$

Задавая разные значения  $\alpha_1$  и изменяя значения  $\Phi$  от 0 до  $2\pi$ , можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

При  $\alpha_1 > 0$  получим ФНЧ, при  $\alpha_1 < 0$  получим ФВЧ, при  $\alpha_1 = \pm 1$  ФЧХ фильтра линейная. Линейность ФЧХ фильтра необходима при обработке сигналов, у которых информационным параметром является фаза, или не должно происходить фазовых искажений сигналов при обработке.

Дискретная импульсная характеристика фильтра определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции  $H(z)$ , представленной в виде полинома по степеням  $z^{-k}$ :

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \dots$$

Сравнивая эту запись с уравнением (5.19), получим

$$h(0) = 1; \quad h(1) = \alpha_1; \quad h(n > 1) = 0. \quad (5.24)$$

Для обеспечения линейности ФЧХ требуется симметрия или антисимметрия ДИХ.

### 5.3.2 Нерекурсивный фильтр 2-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 2-го порядка получается из общего уравнения (5.13) при  $a_k=0$  при  $k \geq 3$  и при  $b_k=0$ , при  $k \geq 1$ :

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}. \quad (5.25)$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2). \quad (5.26)$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (5.25), (5.26) представляют в следующем виде:

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}; \quad (5.27)$$

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2), \quad (5.28)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Выражение для комплексного коэффициента передачи этого фильтра получим при подстановке  $z = \exp(j\Phi)$  в (5.27)

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \exp(-j\Phi) + \alpha_2 \exp(-j2\Phi). \quad (5.29)$$

При подстановке в (5.29) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi) = (1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi)) - j(\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi)) = H(\Phi) \exp[j\varphi(\Phi)]. \quad (5.30)$$

АЧХ фильтра определяется как модуль  $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$ :

$$H(\Phi) = \sqrt{(1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi))^2 + (\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi))^2}. \quad (5.31)$$

Выражение для определения ФЧХ нерекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$\varphi(\Phi) = -\arctg \left( \frac{\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi)}{1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi)} \right). \quad (5.32)$$

Задавая разные значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и изменяя значения  $\Phi$  от 0 до  $2\pi$ , можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

Дискретная импульсная характеристика фильтра 2-го порядка определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции  $H(z)$  и содержит только три отсчета:

$$h(0)=1; h(1)=\alpha_1; h(2)=\alpha_2; h(n>2)=0. \quad (5.33)$$

### 5.3.3 Рекурсивный фильтр 1-го порядка

Разностное уравнение рекурсивного фильтра первого порядка имеет вид:

$$y(n)=ax(n)+by(n-1). \quad (5.34)$$

Это разностное уравнение интегрирующей RC-цепи. Дискретная импульсная характеристика такого фильтра:

$$h(n)=a \exp\left(-\frac{T}{\tau_\phi} n\right)=a \exp\left(-\frac{T}{RC} n\right).$$

Передаточная функция этого фильтра - это  $z$ -преобразование ДИХ:

$$H(z)=a \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{T}{\tau_\phi} k\right] z^{-k}=a \sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

где  $q = \exp\left(-\frac{T}{\tau_\phi}\right) z^{-1}.$

Используя формулу суммирования прогрессии, получим

$$H(z)=\frac{a}{1-q}=\frac{a}{1-bz^{-1}}=\frac{az}{z-b}, \quad (5.35)$$

где  $b = \exp\left(-\frac{T}{\tau_\phi}\right).$

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi)=\frac{a}{(1-b\cos(\Phi))+jb\sin(\Phi)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра:



$$\begin{aligned}
H(j\Phi) &= \frac{a}{(1-b\cos(\Phi)) + jb\sin(\Phi)} = \frac{a[(1-b\cos(\Phi)) - jb\sin(\Phi)]}{(1-b\cos(\Phi))^2 + b^2\sin^2(\Phi)} = \\
&= \frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)} [1-b\cos(\Phi) - jb\sin(\Phi)] \\
H(\Phi) &= \sqrt{\left(\frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)}\right)^2 [(1-b\cos(\Phi))^2 + (b\sin(\Phi))^2]} = \frac{a}{\sqrt{1+b^2-2b\cos(\Phi)}}. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Фазочастотная характеристика фильтра

$$\varphi(\Phi) = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}[H(j\Phi)]}{\text{Re}[H(j\Phi)]} \right\} = -\arctg \left( \frac{b\sin(\Phi)}{1-b\cos(\Phi)} \right). \quad (5.37)$$

В зависимости от знака коэффициента  $b$  цифровой рекурсивный фильтр 1-го порядка может быть либо фильтром нижних частот (при  $b > 0$ ), либо фильтром верхних частот (при  $b < 0$ ).

Дискретная импульсная характеристика рассматриваемого фильтра описывается выражением  $h(n) = ab^n$  и имеет бесконечную протяженность. Таким образом рекурсивный фильтр 1-го порядка является БИХ-фильтром.

Дискретная импульсная характеристика цифрового фильтра при  $a=1$  и  $b=1$  представляет собой бесконечную последовательность единичных отсчетов  $h(n) = ab^n = 1$ . Поэтому каждый входной отсчет  $x(n)$  образует на выходе фильтра такую же последовательность, но своего уровня. Все последовательности от каждого отсчета суммируются, так что текущий выходной отсчет с номером  $n$  равен сумме всех входных в интервале от нуля до  $n$ :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).$$

Это выражение соответствует цифровому интегратору.

#### 5.3.4 Рекурсивный фильтр 2-го порядка

На основе общих формул (5.13), (5.14) можно представить передаточную функцию и разностное уравнение для рекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}; \quad (5.38)$$

$$y(n) = ax(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2). \quad (5.39)$$

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{1 - b_1 \exp(-j\Phi) - b_2 \exp(-j2\Phi)}; \quad (5.40)$$

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi)) + j(b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi))}. \quad (5.41)$$

Используя формулу (5.41) получим выражения для АЧХ фильтра:

$$H(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi))^2 + (b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi))^2}} \quad (5.42)$$

и его ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = -\arctg\left(\frac{b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi)}{1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi)}\right). \quad (5.43)$$

Проведем преобразования выражения (5.38)

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{az^2}{z^2 - b_1 z - b_2}. \quad (5.44)$$

Решение квадратного уравнения числителя, позволяет получить значения  $z$ , при которых передаточная функция обращается в ноль. Эти значения называются нулями. Для данного выражения имеем двухкратный нуль

$$z_{0,1,2} = 0. \quad (5.45)$$

Решение квадратного уравнения знаменателя, позволяет получить значения полюсов передаточной функции

$$z_{п1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}. \quad (5.46)$$

Найдем соотношение коэффициентов  $b$  и полюсов.

$$H(z) = \frac{az^2}{z^2 - b_1 z - b_2} = \frac{az^2}{(z - z_{п1})(z - z_{п2})} = \frac{az^2}{z^2 - (z_{п1} + z_{п2})z + z_{п1}z_{п2}}. \quad (5.47)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b_1 &= z_{n_1} + z_{n_2}; \\ b_2 &= -z_{n_1} z_{n_2}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Дискретную импульсную характеристику фильтра можно определить осуществив обратное  $z$ -преобразование передаточной функции  $H(z)$ . Одним из способов нахождения обратного  $z$ -преобразования является разложение на простые дроби:

$$H(z) = \frac{a}{(1 - z_{n_1} z^{-1})(1 - z_{n_2} z^{-1})} = \frac{A}{1 - z_{n_1} z^{-1}} + \frac{B}{1 - z_{n_2} z^{-1}}. \quad (5.49)$$

Известно, что  $z$ -функция

$$X(z) = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} \quad (5.50)$$

является  $z$ -преобразованием последовательности

$$x(n) = \beta^n. \quad (5.51)$$

Следовательно, ДИХ рекурсивного фильтра 2-го порядка может быть записана в виде:

$$h(n) = A z_{n_1}^n + B z_{n_2}^n. \quad (5.52)$$

Для нахождения значений  $A$  и  $B$  воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для этого приведем (5.49) к общему знаменателю

$$H(z) = \frac{(A + B) - (A z_{n_2} + B z_{n_1}) z^{-1}}{(1 - z_{n_1} z^{-1})(1 - z_{n_2} z^{-1})}.$$

Отсюда

$$a = (A + B) - (A z_{n_2} + B z_{n_1}) z^{-1},$$

что позволяет составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ A z_{n_2} + B z_{n_1} = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы позволяет получить

$$A = a \frac{z_{n_1}}{z_{n_1} - z_{n_2}}; \quad B = a \frac{z_{n_2}}{z_{n_2} - z_{n_1}}. \quad (5.53)$$

Подставляя выражения (5.53) в (5.52) получим

$$h(n) = a \frac{z_{п1}^{n+1} - z_{п2}^{n+1}}{z_{п1} - z_{п2}}. \quad (5.54)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения в формуле (5.46) полюсы могут быть как действительными, так и комплексными.

#### 5.4 Типы фильтров

В зависимости от вида частотной характеристики выделяют три основных группы частотных фильтров: ФНЧ - фильтры низких частот (*low-pass filters*) - пропускание низких и подавление высоких частот во входном сигнале, ФВЧ - фильтры высоких частот (*high-pass filters*) - пропускание высоких и подавление низких частот, и ПФ - полосовые фильтры, которые пропускают (*band-pass filters*) или подавляют (*band-reject filters*) сигнал в определенной частотной полосе. Среди последних в отдельную группу иногда выделяют РФ - режекторные фильтры, понимая под ними фильтры с подавлением определенной гармонике во входном сигнале, и СФ – селекторные фильтры, обратные РФ. Если речь идет о подавлении определенной полосы частот во входном сигнале, то такие фильтры называют заградительными.

Схематические частотные характеристики фильтров приведены на рисунке 5.1. Между частотными интервалами пропускания и подавления сигнала существует зона, которая называется переходной. Ширина переходной зоны определяет резкость характеристики фильтра. В этой зоне амплитудная характеристика монотонно уменьшается (или увеличивается) от полосы пропускания до полосы подавления (или наоборот).



Рисунок 5.1 - Типы основных частотных фильтров

Практика проектирования цифровых фильтров базируется, в основном, на синтезе фильтров низких частот. Все другие виды фильтров могут быть получены из фильтров низких частот соответствующим преобразованием.

### 5.5 Цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой

Одним из наиболее распространенных способов получения цифровой передаточной функции фильтра с бесконечной импульсной характеристикой является билинейное преобразование аналоговой передаточной функции.

Если аналоговая передаточная функция имеет вид

$$H(P) = \frac{d_0 + d_1P + d_2P^2}{c_0 + c_1P + c_2P^2}, \quad (5.55)$$

то путем замены

$$P = l \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (5.56)$$

$$l = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{f_\partial / f_{cp}} \right), \quad (5.57)$$

где  $f_\partial$  - частота дискретизации при аналого-цифровом преобразовании;

$f_{cp}$  - частота среза фильтра;

можно получить цифровую передаточную функцию фильтра.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{d_0 + d_1l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d_2l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2}}{c_0 + c_1l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + c_2l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2}} = \\ &= \frac{d_0(1 + z^{-1})^2 + d_1l(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + d_2l^2(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{c_0(1 + z^{-1})^2 + c_1l(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + c_2l^2(1 - 2z^{-1} + z^{-2})} = \\ &= \frac{(d_0 + d_1l + d_2l^2) + (2d_0 - 2d_2l^2)z^{-1} + (d_0 - d_1l + d_2l^2)z^{-2}}{(c_0 + c_1l + c_2l^2) + (2c_0 - 2c_2l^2)z^{-1} + (c_0 - c_1l + c_2l^2)z^{-2}} = \\ &= \frac{D_0 + D_1z^{-1} + D_2z^{-2}}{1 + C_1z^{-1} + C_2z^{-2}}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

где

$$D_0 = \frac{d_0 + d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad D_1 = \frac{2d_0 - 2d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad D_2 = \frac{d_0 - d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad (5.59)$$

$$C_0 = 1; \quad C_1 = \frac{2c_0 - 2c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad C_2 = \frac{c_0 - c_1 l + c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad (5.60)$$

Передаточная функция фильтра нижних частот в общем виде может быть записана как

$$H(P) = \frac{A_0}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n}, \quad (5.61)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  - положительные действительные коэффициенты.

Порядок фильтра определяется максимальной степенью переменной  $P$ . Для большего удобства при реализации фильтра полином знаменателя раскладывается на множители:

$$H(P) = \frac{A_0}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)(1 + a_2 P + b_2 P^2)(1 + a_3 P + b_3 P^2) \dots}, \quad (5.62)$$

где  $a_i, b_i$  - положительные действительные коэффициенты. Для нечетных порядков полинома коэффициент  $b_i$  равен нулю.

Параметры фильтра могут быть оптимизированы по различным критериям. Для удовлетворения каждому из выбранных критериев коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  должны иметь определенные значения. В справочных изданиях приводятся значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  для различных модификаций фильтров нижних частот.

От передаточной функции фильтра нижних частот можно перейти к фильтрам других типов (верхних частот, полосовому и т.д.).

Передаточная функция одного звена фильтра низких частот

$$H(P)_{\Phi H} = \frac{1}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)}, \quad (5.63)$$

т.е. применительно к выражению (5.55))  $d_0 = 1; \quad d_1 = 0; \quad d_2 = 0; \quad c_0 = 1; \quad c_1 = a_1; \quad c_2 = b_1$ .

Для перехода к передаточной функции фильтра высоких частот в выражении (5.63)  $P$  следует заменить на  $1/P$ . При этом частота среза остается без изменений.

$$H(P)_{\Phi B} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a_1}{P} + \frac{b_1}{P^2}\right)} = \frac{P^2}{b_1 + a_1 P + P^2}, \quad (5.64)$$

где сопоставляя с выражением (5.55)  $d_0 = 0$ ;  $d_1 = 0$ ;  $d_2 = 1$ ;  $c_0 = b_1$ ;  $c_1 = a_1$ ;  $c_2 = 1$ .

Получить передаточную функцию полосового фильтра второго порядка можно из передаточной функции фильтра низких частот первого порядка

$$H(P)_{\phi H} = \frac{1}{1 + P}, \quad (5.65)$$

путем подстановки вместо  $P$  выражения

$$\frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \left( P + \frac{1}{P} \right) = \frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P}, \quad (5.66)$$

где  $\Omega$  - нормированная частота,

$$\Omega = \frac{f}{f_r}, \quad (5.67)$$

$f_r$  - резонансная частота полосового фильтра;

$\Delta\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$ ; причем  $\Omega_{\max} \cdot \Omega_{\min} = 1$ ;

$\Omega_{\max}, \Omega_{\min}$  - значение максимальной и минимальной нормированных частот полосового фильтра, соответствующих уровню пропускания - 3 дБ;

$$H(P)_{\phi\Pi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P}} = \frac{\Delta\Omega \cdot P}{1 + \Delta\Omega \cdot P + P^2}, \quad (5.68)$$

где сопоставляя с выражением (5.55)  $d_0 = 0$ ;  $d_1 = \Delta\Omega$ ;  $d_2 = 0$ ;  $c_0 = 1$ ;  $c_1 = \Delta\Omega$ ;  $c_2 = 1$ .

По аналогии с колебательным контуром определяется добротность полосового фильтра:

$$Q = \frac{f_r}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{1}{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}. \quad (5.69)$$

Тогда выражение (5.68) можно записать в виде

$$H(P)_{\phi\Pi} = \frac{\frac{1}{Q} \cdot P}{1 + \frac{1}{Q} \cdot P + P^2}. \quad (5.70)$$

Подстановка выражения (5.66) в (5.64) приводит к описанию полосовых фильтров четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
 H(P)_{\phi\Pi} &= \frac{1}{1 + \frac{a_1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2 + 1}{P} + \frac{b_1}{(\Delta\Omega)^2} \cdot \frac{P^4 + 2P^2 + 1}{P^2}} = \\
 &= \frac{\frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1} \cdot P^2}{1 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P + \left[ 2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1} \right] \cdot P^2 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P^3 + P^4} = \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{m_2 \cdot P^2}{n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot P + n_2 \cdot P^2 + n_3 \cdot P^3 + n_4 \cdot P^4}, \quad (5.72)$$

где

$$m_2 = \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_0 = 1; \quad n_1 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_2 = 2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_3 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_4 = 1.$$

После подстановки выражений (5.57), (5.58) в выражение (5.72) получим передаточную функцию цифрового полосового фильтра четвертого порядка:

$$H(z) = \frac{D_0 + D_2 z^{-2} + D_4 z^{-4}}{1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3} + C_4 z^{-4}}, \quad (5.73)$$

где

$$C_1 = \frac{4n_0 + 2n_1 \cdot l - 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_2 = \frac{6n_0 - 2n_2 \cdot l^2 + 6n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_3 = \frac{4n_0 - 2n_1 \cdot l + 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_4 = \frac{n_0 - n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 - n_3 \cdot l^3 - n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$



$$D_0 = \frac{m_2 \cdot l^2}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$D_2 = -2D_0; \quad D_4 = D_0.$$

По передаточной функции фильтра можно определить его амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики. Для этого в выражение (5.58) делается подстановка

$$z^{-1} = e^{-j\frac{2\pi f}{f_0}}. \quad (5.74)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} H(jf) &= \frac{D_0 + D_1 e^{-j\frac{2\pi f}{f_0}} + D_2 e^{-j\frac{4\pi f}{f_0}}}{C_0 + C_1 e^{-j\frac{2\pi f}{f_0}} + C_2 e^{-j\frac{4\pi f}{f_0}}} = \\ &= \frac{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) - jD_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) - jD_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) - jC_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) - jC_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)} = \\ &= \frac{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{\left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right] - j \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]} - \\ &- j \frac{D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{\left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right] - j \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]} = \\ &= \frac{1}{\left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2 + \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right) \right]^2}. \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \left[ D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] - j \left[ D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] \right\} \cdot \left\{ \left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] + j \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right] \right\}. \quad (5.75)$$

Выражение (5.75) представляется в следующем виде:

$$H(jf) = a(f) \cdot [\operatorname{Re}_1(f) + j \operatorname{Im}_1(f)] \cdot [\operatorname{Re}_2(f) + j \operatorname{Im}_2(f)], \quad (5.76)$$

где

$$a(f) = \frac{1}{\left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2 + \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + j C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2};$$

$$\operatorname{Re}_1(f) = D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right);$$

$$\operatorname{Im}_1(f) = - \left[ D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right];$$

$$\operatorname{Re}_2(f) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right);$$

$$\operatorname{Im}_2(f) = C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right).$$

Амплитудно-частотная и фазочастотные характеристики фильтра, которая является, соответственно, модулем и аргументом выражения (5.76), определяется как

$$A(f) = \sqrt{[a(f)]^2 \left\{ [\operatorname{Re}_1(f)]^2 + [\operatorname{Im}_1(f)]^2 \right\} \cdot \left\{ [\operatorname{Re}_2(f)]^2 + [\operatorname{Im}_2(f)]^2 \right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left[ D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2 + \left[ D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2}{\left[ C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2 + \left[ C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) \right]^2}} \quad (5.77)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \arctg\left(\frac{\text{Im}_1(f)}{\text{Re}_1(f)}\right) + \arctg\left(\frac{\text{Im}_2(f)}{\text{Re}_2(f)}\right) = \\ &= -\arctg\left(\frac{D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}\right) + \arctg\left(\frac{C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}{C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_0}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_0}\right)}\right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Если  $x(n)$  - последовательность дискретных отсчетов, которая должна быть подвергнута цифровой рекурсивной фильтрации, а передаточная функция цифрового фильтра описывается выражением (5.58), то последовательность на выходе цифрового фильтра  $y(n)$  связана со входной следующим преобразованием:

$$y(i) = D_0 \cdot x(i) + D_1 \cdot x(i-1) + D_2 \cdot x(i-2) - C_1 \cdot y(i-1) - C_2 \cdot y(i-2), \quad (5.79)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N, \dots; \quad x(-1) = 0; \quad x(-2) = 0; \quad y(-1) = 0; \quad y(-2) = 0.$$

Для фильтра, состоящего из нескольких звеньев, дискретная последовательность на выходе первого звена является входной последовательностью для второго звена и т. д. .

Если после выполнения фильтрации определяются значения фазовые параметры сигнала, то необходимо вводить соответствующую фазовую поправку, вычисляемую по формуле (5.78).

Однако во многих случаях для обработки принимается ограниченная дискретная последовательность исходных данных  $i = 0 \div N - 1$ . А при подаче последовательности на вход фильтра на его выходе наблюдается переходной процесс. Для того, чтобы не принимать для обработки удлиненную последовательность, представляется возможным реализовать рекурсивную цифровую фильтрацию путем двойного прохождения исходной последовательности через фильтр. Первый проход приводит к завершению переходного процесса, а второй обеспечивает выполнение цифровой фильтрации. Для устранения точки разрыва между первым и последним отсчетами дискретной последовательности применяется линейная аппроксимация для двух первых и двух последних точек.

Функция, реализующая предложенный способ выполнения рекурсивной фильтрации может иметь такой вид:

```
// x - массив входных данных
// y - массив выходных данных
// d - массив коэффициентов D цифрового фильтра
```

```

// c - массив коэффициентов C цифрового фильтра
// N - размер массива
fn_Rek_Filtr(float *x, float *y, float *d, float *c, int N)
{
    int i;
    for (i=0; i<N; i++)
    {
        y[i]=0;
        f_Ar[i]=0; // Вспомогательный массив
    }
    for (i=0; i<N; i++)
    {
        f_Ar[i]=x[i];
    }

    x[N-2]=f_Ar[N-2]=x[N-3]+( ( x[2]-x[N-3] ) *1.0)/5.0);
    x[N-1]=f_Ar[N-1]=x[N-3]+( ( x[2]-x[N-3] ) *2.0)/5.0);
    x[0]=f_Ar[0]=x[N-3]+( ( x[2]-x[N-3] ) *3.0)/5.0);
    x[1]=f_Ar[1]=x[N-3]+( ( x[2]-x[N-3] ) *4.0)/5.0);
    // Первый проход
    y[0]=d[0]*f_Ar[0];
    y[1]=d[0]*f_Ar[1] + d[1]*f_Ar[0]-c[1]*f_Ar[0];
    for (i=2; i<N; i++)
        y[i]=d[0]*f_Ar[i] + d[1]*f_Ar[i-1] + d[2]*f_Ar[i-2]- c[1]*y[i-1] - c[2]*y[i-2];
    // Второй проход
    y[0]=d[0]*x[0] + d[1]*x[N-1] + d[2]*x[N-2]-c[1]*y[N-1] - c[2]*y[N-2];
    y[1]=d[0]*x[1] + d[1]*x[0] + d[2]*x[N-1]-c[1]*y[0] - c[2]*y[N-1];

    for (i=2; i<N; i++)
        y[i]=d[0]*x[i] + d[1]*x[i-1] + d[2]*x[i-2]-c[1]*y[i-1] - c[2]*y[i-2];
}

```

## 5.4 Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой

### 5.4.1 Введение

Нерекурсивные фильтры реализуют алгоритм свертки двух функций:

$$y(n)=h(n)*x(n),$$

где  $x(n)$ — массив входных данных фильтра;  
 $h(n)$  — импульсная характеристика фильтра;

Если диапазон отсчетов импульсной характеристики фильтра  $0,1,2,\dots,N$ , то значения выходных отсчетов свертки  $y(k)$  для любого аргумента  $k$  определяются текущим и "прошлыми" (до  $k-N$ ) значениями входных отсчетов  $x(k)$ . Такой фильтр называется нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ). Интервал  $[0 \div N]$  получил название "окна" фильтра. Окно фильтра составляет  $N+1$  отсчет. Фильтр является односторонним каузальным, т.е. причинно обусловленным текущим и "прошлыми" значениями входного сигнала, и выходной сигнал не опережает входного. В общем случае, каузальный фильтр меняет в спектре сигнала состав гармоник, их амплитуды и фазы.

Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени. Начало фильтрации возможно только при задании определенных начальных значений отсчетов  $x(n)$  до общего количества отсчетов  $N+1$  для точек  $x(k)$  при  $k < N$ . Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения, тренд сигнала или значения отсчета  $x(0)$ , т.е. продление отсчета  $x(0)$  назад по аргументу.

Основное свойство любого фильтра – его *частотная (frequency response) и фазовая характеристики*. Они показывают, какое влияние фильтр оказывает на амплитуду и фазу различных гармоник обрабатываемого сигнала.

К наиболее известным типам нерекурсивных цифровых фильтров (НЦФ) относятся частотные фильтры, у которых симметричная импульсная характеристика. Такие фильтры не изменяют фазу входных сигналов. Формула свертки для них имеет вид:

$$y(k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h(n)x(k-n). \quad (5.80)$$

Практика проектирования цифровых фильтров базируется, в основном, на синтезе фильтров низких частот. Все другие виды фильтров могут быть получены из фильтров низких частот соответствующим преобразованием. Так, например, фильтр высоких частот может быть получен инверсией фильтра низких частот – вычислением разности между исходным сигналом и результатом его фильтрации низкочастотным НЦФ:

$$y(k) = x(k) - \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h(n)x(k-n). \quad (5.81)$$

Отсюда, условие инверсии симметричного низкочастотного фильтра в высокочастотный:

$$h_B(0) = 1 - h_H(0), \quad h_B(n) = -h_H(n), \quad \text{при } n \neq 0.$$

Применяется также способ получения фильтров высоких частот из низкочастотных фильтров путем реверса частоты в передаточной функции низкочастотного

фильтра, т.е. заменой переменной  $\omega$  на переменную  $\omega' = \pi - \omega$  (при  $\Delta t = 1$ ). Для симметричных фильтров, содержащих в передаточной функции только косинусные члены аргумента  $\omega$ , в результате такой операции будем иметь:

$$\cos[n(\pi - \omega)] = \cos(n\pi)\cos(n\omega) = (-1)^n \cos(n\omega).$$

Последнее означает смену знака всех нечетных гармоник передаточной характеристики фильтра и, соответственно, всех нечетных членов фильтра. Физическую сущность такой операции инверсии спектра легко понять на постоянной составляющей сигнала. При изменении на противоположный знака каждого второго отсчета постоянной величины это постоянное значение превращается в "пилу", частота которой равна частоте Найквиста главного частотного диапазона (отсчеты по амплитудным значениям этой частоты), равно как и наоборот, отсчеты гармоники сигнала на частоте Найквиста (знакопередающиеся в силу сдвига по интервалам дискретизации на  $\pi$ ) превращаются в постоянную составляющую.

Полосовой фильтр может реализоваться последовательным применением ФНЧ и ФВЧ с соответствующим перекрытием частот пропускания. В математическом представлении это означает последовательную свертку массива данных с массивами коэффициентов  $h_H$  - низкочастотного, и  $h_B$  - высокочастотного фильтров:

$$v(n) = h_H(n) * x(n); \quad y(n) = h_B(n) * v(n) = h_H(n) * h_B(n) * x(n).$$

Так как операция свертки коммутативна, то вместо отдельных массивов коэффициентов ФНЧ и ФВЧ их сверткой может быть определен непосредственно массив коэффициентов полосового фильтра:  $h_{\Pi}(n) = h_H(n) * h_B(n)$ .

Полосовой режекторный фильтр также может быть получен методом инверсии полосового фильтра. Одночастотные режекторные фильтры обычно выполняются на основе простых рекурсивных цифровых фильтров, более эффективных для данных целей.

Часто к фильтрам предъявляются более сложные требования. Например, фильтр может иметь несколько частотных полос пропускания с разными коэффициентами усиления, а для полос непропускания могут быть заданы разные коэффициенты подавления. Иногда требуемая частотная характеристика фильтра задается вообще произвольной кривой.

#### 5.4.2 Методика расчетов НЦФ

Обычно при фильтрации сигналов задается требуемая частотная характеристика фильтра. Задачей является построить фильтр, отвечающий заданным требованиям и провести фильтрацию. Зачастую бывает невозможно построить в точности заданный фильтр, и выполняется фильтр, близкий по характеристикам к заданному.

Существует много способов построения фильтров с заданной частотной характеристикой. Наиболее простой из них – проектирование фильтров с линейной фазой

с помощью весовых окон. Этот способ является универсальным и позволяет получить фильтр с любой заданной частотной характеристикой. Однако, с помощью других, математически более строгих и совершенных методов, иногда удается построить фильтр меньшей длины, удовлетворяющий тем же требованиям к частотной характеристике.

Наиболее простой является методика расчетов программных двусторонних симметричных фильтров без изменения фазы выходного сигнала относительно входного. В самом общем виде она включает:

1. Задание идеальной амплитудно-частотной характеристики передаточной функции фильтра. Термин идеальности понимается здесь в том смысле, что на характеристике указываются полосы пропускания и подавления частот с коэффициентами передачи 1 и 0 соответственно без переходных зон.

2. Расчет функции импульсного отклика идеального фильтра (обратное преобразование Фурье частотной характеристики фильтра). При наличии скачков функций на границах пропускания/подавления импульсный отклик содержит бесконечно большое количество членов.

3. Ограничение функции отклика до определенного количества членов, при этом на передаточной характеристике фильтра возникает явление Гиббса – осцилляции частотной характеристики с центрами на скачках.

4. Для нейтрализации явления Гиббса производится выбор весовой функции и расчет ее коэффициентов, на которые умножаются коэффициенты функции отклика фильтра. Результатом данной операции являются значения коэффициентов оператора фильтра (рабочий импульсный отклик фильтра). По существу, операции 3 и 4 представляют собой усечение ряда Фурье динамического (временного) представления передаточной функции фильтра определенной весовой функцией (умножение на весовую функцию).

5. С использованием полученных значений коэффициентов оператора фильтра производится построение его частотной характеристики и проверяется ее соответствие поставленной задаче.

При проектировании симметричных нерекурсивных фильтров нет необходимости базироваться на расчете фильтров низких частот с последующим их преобразованием, при необходимости, в фильтры верхних частот или полосовые фильтры. Расчет непосредственно полосового фильтра достаточно прост, а НЧ- и ВЧ-фильтры являются частным случаем полосового фильтра с одной верхней или одной нижней граничной частотой.

#### 5.4.3 Фильтры с линейной фазовой характеристикой

Несколько сложнее расчет каузальных (односторонних) частотных фильтров, для которых требуется обеспечить линейность фазово-частотной характеристики для исключения изменения гармонии сочетания частотных составляющих сигнала на его выходе по отношению к входу. Чтобы фильтр имел линейную фазовую характеристику необходимо обеспечить выполнение условия:

$$\varphi(\omega) = \alpha\omega. \quad (5.82)$$

Оно выполняется, если импульсная характеристика фильтра имеет положительную симметрию:

$$h(n) = h(N - n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad N - \text{нечетное (тип 1)};$$

$$h(n) = h(N - n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad N - \text{четное (тип 2)}.$$

При этом фазовая характеристика будет определяться длиной фильтра:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}.$$

Частотная характеристика фильтра:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\varphi(\omega)), \quad (5.83)$$

где модуль  $|H(\omega)|$  задается аналогично АЧХ симметричных фильтров. Следует также учитывать, что частотную характеристику типа 2 нельзя использовать для проектирования фильтров верхних частот, т.к. она всегда равна нулю на частоте Найквиста.

Собственно методика расчета каузальных фильтров, за исключением использования (5.83) для задания частотной характеристики, не отличается от методики расчета симметричных фильтров, включая необходимость использования весовых функций для нейтрализации явления Гиббса. Это позволяет применять чисто практический метод расчетов – вычислить и отработать сначала симметричный фильтр на  $N$ -точек (тип 1), а затем превратить его в каузальный сдвигом вправо на  $\frac{N-1}{2}$  точек в область только положительных значений  $n \geq 0$ .

#### 5.4.4 Идеальные частотные фильтры

Идеальным полосовым фильтром называется фильтр, имеющий единичную амплитудно-частотную характеристику в полосе от определенной нижней частоты  $\omega_n$  до определенной верхней частоты  $\omega_v$ , и нулевой коэффициент передачи за пределами этой полосы (для цифровых фильтров - в главном частотном диапазоне).

Импульсная реакция фильтра (коэффициенты оператора) находится обратным преобразованием Фурье заданной передаточной функции  $H(\omega)$ . В общем случае:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega n\Delta t) d\omega.$$

Для получения вещественной функции импульсного отклика фильтра действи-



тельная часть передаточной функции должна быть четной, а мнимая - нечетной. Цифровые фильтры задаются в главном частотном диапазоне, границы которого (частота Найквиста  $\pm \omega_N$ ) определяются интервалом дискретизации данных ( $\pm \omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$ ), подлежащих фильтрации, и соответственно определяют интервал дискретизации оператора фильтра ( $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_N}$ ). Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом мнимая часть передаточной функции должна быть равна нулю, при этом оператор фильтра определяется косинусным преобразованием Фурье:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_N} H(\omega) \cos\left(\frac{n\pi\omega}{\omega_N}\right) d\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.84)$$

Для идеального полосового фильтра  $H(\omega)=1$  в полосе частот от  $\omega_H$  до  $\omega_B$  и интеграл (5.84) вычисляется в этих пределах. Идеальные фильтры низких и высоких частот, как частные случаи идеальных ПФ, интегрируются в диапазоне от 0 до  $\omega_B$  для низкочастотного и от  $\omega_H$  до  $\omega_N$  для высокочастотного фильтра.

При интервале дискретизации данных  $\Delta t$ , условно принимаемым за 1, главный частотный диапазон передаточных функций ограничивается значением частоты Найквиста от  $-\pi$  до  $\pi$ . Если на практике интервал дискретизации данных в физических единицах отличается от 1, то это сказывается только на изменении масштаба частотной шкалы передаточных функций.

Во всех дальнейших выражениях значение  $\Delta t$ , если это специально не оговорено, будем принимать равным 1.

При  $H(\omega)=A=1$  в полосе пропускания ( $\omega_H, \omega_B$ ), и  $H(\omega)=0$  за ее пределами, для идеальных симметричных полосовых НЦФ из (5.84) с границами интегрирования, соответственно, от  $\omega_H$  до  $\omega_B$  в общем виде получаем:

$$h(n) = \frac{A}{\pi} \left[ \omega_B \frac{\sin(n\omega_B)}{n\omega_B} - \omega_H \frac{\sin(n\omega_H)}{n\omega_H} \right]. \quad (5.85)$$

$$h(0) = \frac{\omega_B - \omega_H}{\pi}, \quad h(n) = \frac{\sin(n\omega_B) - \sin(n\omega_H)}{n\pi}.$$

где  $\text{sinc}(n\omega) = \frac{\sin(n\omega)}{n\omega}$  - функция интегрального синуса (функция отсчетов), бесконечная по координате  $\omega$ .

При инверсии частотной характеристики в заградительный фильтр:

$$h(0) = 1 - \frac{\omega_B - \omega_H}{\pi}, \quad h(n) = \frac{\sin(n\omega_H) - \sin(n\omega_B)}{n\pi}.$$

Размер оператора фильтра определяется приблизительно из следующих соображений. Чем больше размер оператора, тем круче будет переходная зона и меньше ее размер, т.е. тем ближе будет фактически реализованная передаточная функция фильтра к идеальной. Обычно сначала стоит попробовать построить фильтр достаточно большого размера, оценить его соответствие заданной частотной характеристике и в дальнейшем попытаться уменьшить. Значение  $N$  для симметричных НЦФ должно быть нечетным числом.

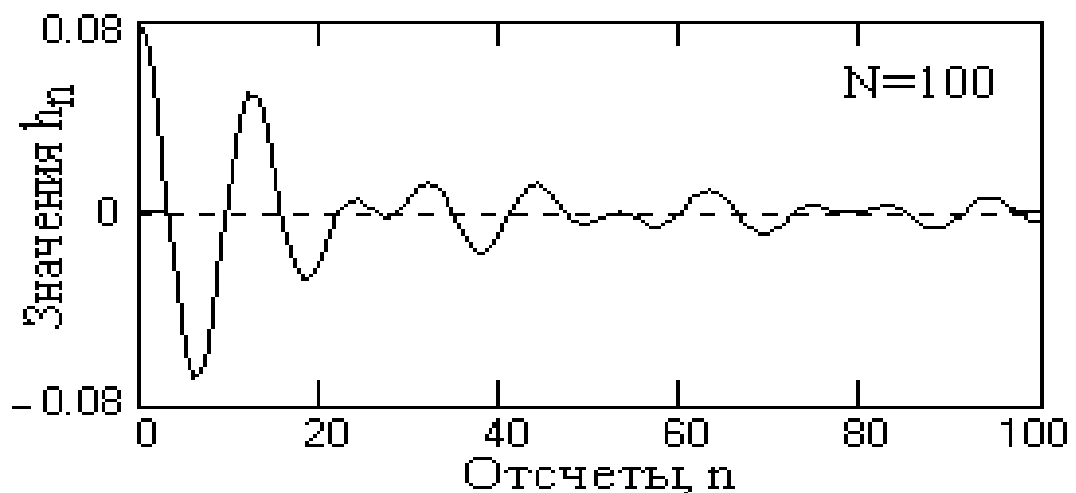


Рисунок 5.2 - Оператор фильтра

На рисунке 5.2. приведен оператор полосового фильтра, вычисленный по (5.85) для приведенных выше условий, с ограничением по числу коэффициентов оператора до  $N=100$ . Как видно из рисунка, оператор затухает достаточно медленно и явно усечен, что должно сказаться на форме частотной характеристики фильтра. Все дальнейшие вычисления будут проводиться на продолжении данного примера.

#### 5.4.5 Конечные приближения идеальных фильтров

Оператор идеального частотного НЦФ, как это следует из выражения (5.84), представляет собой бесконечную затухающую числовую последовательность, реализующую заданную передаточную функцию:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cos(n\omega). \quad (5.86)$$

На практике бесконечный ряд (5.86) всегда приходится ограничивать определенным числом членов его конечного приближения

$$H'(\omega) = \sum_{n=-N}^N h(n) \cos(n\omega),$$

при этом передаточная функция осложняется явлением Гиббса, и появляется переходная зона между полосами пропускания и подавления сигнала (рис. 5.3, пунктирная кривая при  $N=100$ ). Явление Гиббса формирует первые выбросы передаточной функции на расстоянии  $\frac{\pi}{2(N+1)}$  от скачков (разрывов первого рода). Если ширину переходной зоны  $\Delta_p$  в первом приближении принять по расстоянию между первыми выбросами по обе стороны от скачка функции  $H(\omega)$ , то ее значение будет ориентировочно равно  $\Delta_p = \frac{\pi}{N+1}$ .

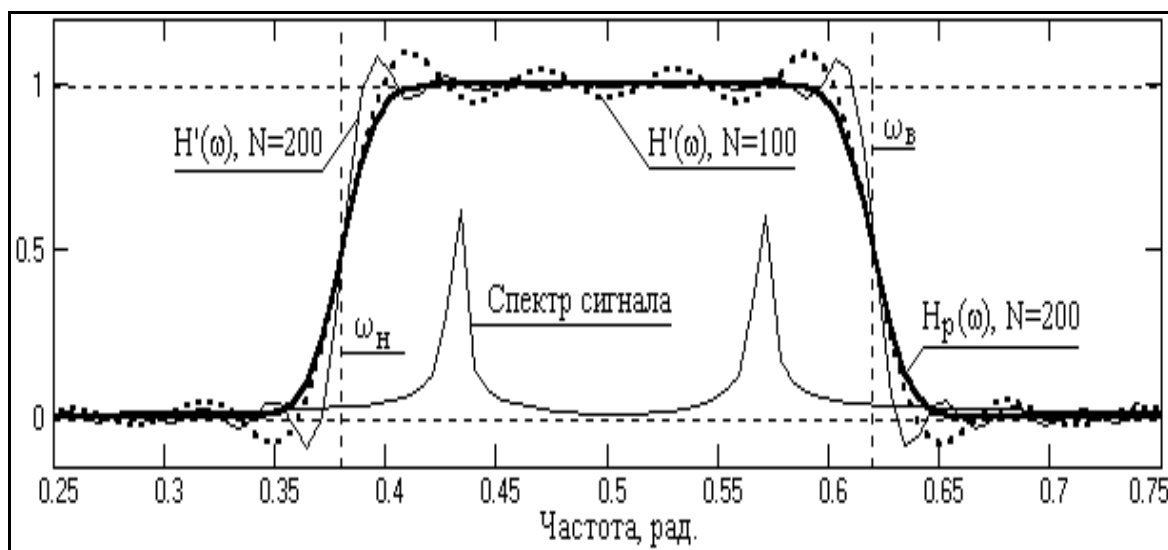


Рисунок 5.3 - Передаточные функции полосового фильтра

5.4.5.1 Применение весовых функций. Если уровень пульсаций передаточной функции, определяемый явлением Гиббса, не удовлетворяет поставленным задачам

фильтрации данных, рекомендуется использование сглаживающих весовых функций. С учетом того, что при применении весовых функций происходит расширение переходных зон примерно в два раза, значение ширины переходной зоны будет равным  $\Delta_p = \frac{2\pi}{N}$ . Отсюда можно определить минимальное число членов усеченного ряда по заданному размеру переходной зоны:

$$N = \frac{2\pi}{\Delta_p}. \quad (5.87)$$

Для примера на рисунке 5.3 значение  $N$  принято равным 200, при этом крутизна переходной зоны увеличилась (тонкая кривая  $H'(\omega), N=200$ ), создавая запас на последующее сглаживание весовой функцией.

Выбор весовых функций целесообразно осуществлять по допустимой величине осцилляций усиления сигнала в полосе подавления, т.е. по относительному значению амплитуды первого выброса на передаточных характеристиках весовых функций. Для выбранной весовой функции (с учетом числа ее членов по (5.87)) производится расчет весовых коэффициентов  $p(n)$ , после чего устанавливаются окончательные значения оператора фильтра:

$$h_n(n) = p(n)h(n). \quad (5.88)$$

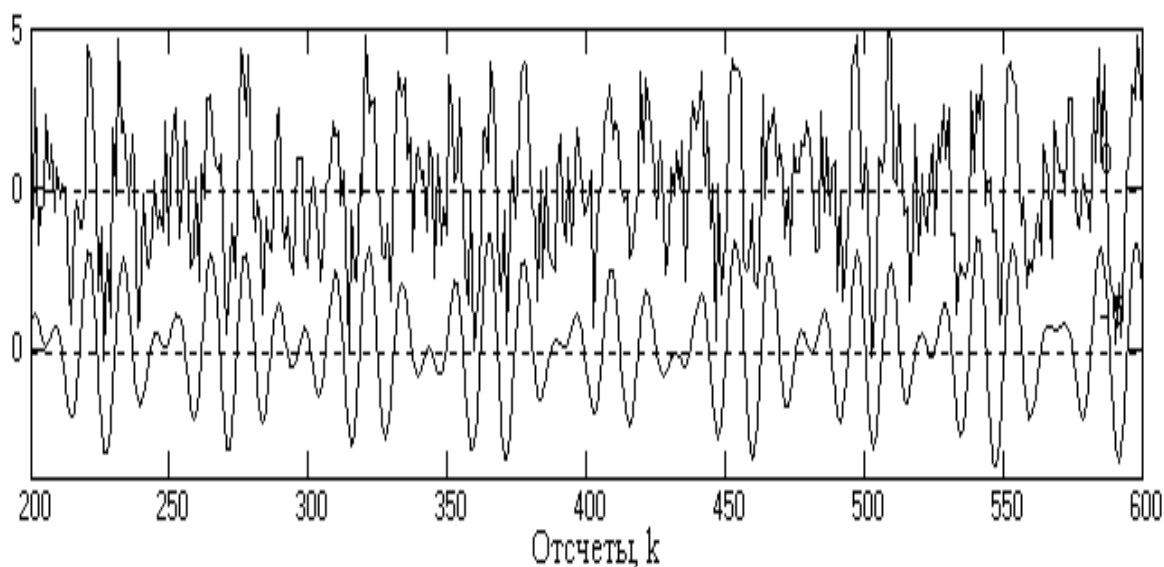


Рисунок 5.4 - Полосовая фильтрация  
(вверху – входной сигнал, внизу – выходной)

Подстановкой коэффициентов (5.88) в (5.86) рекомендуется произвести построение полученной передаточной характеристики фильтра и непосредственно по ней оценить пригодность фильтра для поставленных задач. Это наглядно видно на рисунке 5.3, где была применена весовая функция Гаусса. Передаточная функция  $H_p(\omega)$  имеет практически такую же крутизну, как и функция  $H'(\omega)$  при  $N=100$  и практически плоскую вершину в интервале спектра сигнала. Качество работы фильтра можно видеть на рисунке 5.4.

При необходимости более точной оценки полученной передаточной функции можно рекомендовать увеличение ее частотного разрешения в 2-4 раза перед выполнением преобразования Фурье, что можно выполнить путем увеличения размеров оператора  $h_n(n)$  дополнением нулями.

5.4.5.2 Основные весовые функции. Ниже в таблицах приведены формулы и основные спектральные характеристики наиболее распространенных весовых окон.

Основные весовые функции.

Временное окно	Весовая функция	Фурье-образ
Естественное (П)	$\Pi(t) = 1,  t  \leq \tau; \Pi(t) = 0,  t  > \tau$	$\Pi(\omega) = 2\tau \operatorname{sinc}[\omega\tau]$
Бартлетта (Δ)	$b(t) = 1 -  t /\tau$	$B(\omega) = \tau \operatorname{sinc}^2(\omega\tau/2)$
Хеннинга, Ганна	$p(t) = 0.5[1 + \cos(\pi t/\tau)]$	$0.5\Pi(\omega) + 0.25\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.25\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Хемминга	$p(t) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi t/\tau)$	$0.54\Pi(\omega) + 0.23\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.23\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Карре (2-е окно)	$p(t) = b(t) \operatorname{sinc}(\pi t/\tau)$	$\tau \cdot B(\omega) * \Pi(\omega), \Pi(\omega) = 1$ при $ \omega  < \pi/\tau$
Лапласа-Гаусса	$p(t) = \exp[-\beta^2(t/\tau)^2/2]$	$[(\tau/\beta)\sqrt{2\pi} \exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))] \otimes \Pi(\omega)$
Кайзера-Бесселя	$p(t) = \frac{J_0[\beta\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{J_0[\beta]},$ $J_0[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [(x/2)^k/k!]^2$	Вычисляется преобразованием Фурье. $J_0[x]$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

Характеристики спектров весовых функций.

Параметры	Ед. изм.	П-Окно	Барт-летт	Лан-цош	Хен-нинг	Хемм-инг	Кар-ре	Лапла-с	Кайзе-р
Амплитуда:									
Главный пик	$\tau$	2	1	1.18	1	1.08	0.77	0.83	0.82
1-й выброс(-)	%Гл.п.	0.217	-	0.048	0.027	0.0062	-	0.0016	.00045
2-й выброс(+)	- " -	0.128	0.047	0.020	0.0084	0.0016	-	0.0014	.00028
Ширина Гл. пика	$\omega\tau/2\pi$	0.60	0.89	0.87	1.00	0.91	1.12	1.12	1.15
Положения:									
1-й нуль	$\omega\tau/2\pi$	0.50	1.00	0.82	1.00	1.00	-	1.74	1.52
1-й выброс	$\omega\tau/2\pi$	0.72	-	1.00	1.19	1.09	-	1.91	1.59
2-й нуль	$\omega\tau/2\pi$	1.00	-	1.29	1.50	1.30	-	2.10	1.74
2-й выброс	$\omega\tau/2\pi$	1.22	1.44	1.50	1.72	1.41	-	2.34	1.88

Носители весовых функций, в принципе, являются неограниченными и при использовании в качестве весовых окон действуют только в пределах окна и обнуляются за его пределами. Для упрощения записи формулы приводятся в аналитиче-

ской форме с временным окном  $2\tau$ , симметричным относительно нуля ( $0 \pm \tau$ ). При переходе к дискретной форме окно  $2\tau$  заменяется окном  $2N+1$ , а значения  $t$  – дискретами  $t = n\Delta t$ . Большинство весовых функций на границах окна ( $n = \pm N$ ) принимают нулевые или близкие к нулевым значения. Последнее исключается, если принять  $2\tau = 2\tau = (2N+3)\Delta t$ , при этом близкие к нулю значения перемещаются за границы окна.

5.4.5.3 Весовая функция Кайзера. Наибольшее распространение при расчетах частотных НЦФ получила весовая функция Кайзера:

$$p(n) = \frac{J_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{n}{N} \right)^2} \right]}{J_0[\beta]}.$$

Это объясняется тем, что параметры функции Кайзера могут устанавливаться непосредственно по техническим требованиям к передаточным функциям проектируемых фильтров – допустимой ширине переходной зоны  $\Delta_p$  и значению коэффициента шума фильтра  $\delta$  (максимальным значениям осцилляций передаточной функции в единицах коэффициента передачи в полосе пропускания).

Кайзером установлено, что для заданного значения  $\delta$  произведение количества членов оператора НЦФ на ширину переходной зоны является величиной постоянной. Оно получило название  $D$ -фактора:

$$D = \frac{N\Delta_p}{\pi}. \quad (5.90)$$

С другой стороны, установлены следующие эмпирические соотношения между  $D$ -фактором и параметром  $\beta$  функции Кайзера:

$$\begin{aligned} D &= (A-7.95)/14.36, \text{ при } A > 21. \\ D &= 0.9222, \text{ при } A < 21. \\ \beta &= 0.1102(A-8.7), \text{ при } A > 50. \\ \beta &= 0, \text{ при } A < 21. \\ \beta &= 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), \quad 21 < A < 50. \end{aligned}$$

где:  $A = -20 \log \delta$  – затухание в децибелах.

Приведенные выражения позволяют по заданному значению коэффициента шума  $\delta$  определить параметр  $\beta$  функции Кайзера, а через  $D$ -фактор число членов фильтра:

$$N = \frac{D\pi}{\Delta_p}. \quad (5.91)$$

При проектировании полосовых фильтров проверка передаточной функции полученного оператора НЦФ исходному заданию по значению коэффициента шума является обязательной. Это объясняется тем, что поскольку полоса пропускания полосового фильтра ограничена двумя скачками, на передаточной характеристике возникают два центра осцилляций, при этом наложение осцилляций может как уменьшить, так и увеличить амплитуду суммарных осцилляций. Если за счет наложения произойдет увеличение амплитуды осцилляций, то расчет НЦФ следует повторить с уменьшением исходного значения  $\delta$ .

### **Пример расчета полосового фильтра.**

Произвести расчет ПФ при следующих исходных параметрах:  $\omega_n = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.6\pi$ ,  $\Delta_p = 0.1\pi$ ,  $\delta = 0.02$ .

1.  $A = -20 \log \delta$ .  $A = 34$ .

2.  $N = \pi(A - 7.95)/(14.36 \Delta_p)$ .  $N = 18$ .

3.  $\beta = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21)$ .  $\beta = 2.62$ .

4.  $h_o = (\omega_s - \omega_n)/\pi$ .  $h_o = 0.3$

5.  $h(n) = (\sin n\omega_s \sin n\omega_n)/(n\pi)$ .  $h(n) = 0.04521, -0.24490, -0.09515, \dots, 0.02721$ .

6.  $p_n = J_o\{\beta\sqrt{1 - (n/N)^2}\} / J_o\{\beta\}$ .  $p_n = 1.00, 0.997, 0.9882, \dots$

7. Оператор фильтра:  $h_n = p_n h(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .  $h_{-n} = h_n$ .  $h_n = 0.3000, 0.04508, -0.2420, \dots$

8. Проверка по формуле:  $H(\omega) = \sum_{n=-N}^N h_n \cos n\omega$ ,  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

Для оценки формы передаточной функции количество точек спектра в интервале  $0-\pi$  достаточно задать равным  $2N$ , т.е. с шагом  $\Delta\omega \leq \pi/36$ .

Влияние конечной разрядности на цифровые фильтры должно быть минимальным и не создавать на их частотных характеристиках дополнительных неравномерностей и отклонения от заданной формы. С чисто практической точки зрения ограничение разрядности коэффициентов фильтра в целях повышения производительности вычислений лучше всего (и проще всего) выполнять непосредственно сравнением частотных характеристик с изменением разрядности от большей к меньшей. Следует учитывать, что ограничение разрядности может по-разному сказываться на неравномерности фильтра в полосе пропускания и степени затухания сигналов в полосе подавления.

Ошибки отклонения  $\varepsilon(\omega)$  частотной характеристики относительно заданной при проектировании кроме разрядности коэффициентов  $B$  в битах зависит также от размеров  $N$  оператора фильтра и в первом приближении может оцениваться по формулам:

$$|\varepsilon(\omega)| = N2^{-B}, \quad (5.92)$$

$$|\varepsilon(\omega)| = 2^{-B} \sqrt{\frac{N}{3}}, \quad (5.93)$$

$$|\varepsilon(\omega)| = N 2^{-B} \sqrt{\frac{N \ln(N)}{3}}. \quad (5.94)$$

Выражение (5.92) наиболее пессимистично и предполагает наихудшие ситуации вычислений. Два других выражения носят более реальный характер по статистическим данным.