Вычисление свертки

Круговая свертка

Понятие круговой свертки используется только для периодических последовательностей. Круговой сверткой двух периодических N-точечных последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ называется N-точечная последовательность

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(n-m)x_2(m). \qquad (4.56)$$

Найдем N-точечное ДПФ круговой свертки

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n-m)\right]W_N^{nk}.$$

Изменив порядок суммирования

$$Y(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n-m)W_N^{nk}$$

и представив $W_N^{nk}=W_N^{(n-m)k}W_N^{mk}$, можно записать ДПФ в виде:

$$Y(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n-m)W_N^{(n-m)k}\right]W_N^{nk}. \qquad (4.57)$$

После замены переменных $l=n-m$ $(n=l+m)$ сумма в квадратных скобках, с учетом нулевых начальных условий, будет равна

$$\sum_{l+m=0}^{N-1}x_2(l)W_N^{lk}=\sum_{l=-m}^{-1}x_2(l)W_N^{lk}+\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)W_N^{lk}=0+\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)W_N^{lk}=X_2(k).$$

Подставив это значение в (4.57), получим N-точечное ДПФ круговой свертки, которое равно произведению N-точечных ДПФ свертываемых последовательностей:

$$Y(k)=X_2(k)\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{nk}=X_2(k)X_1(k), \quad k=0,1,2.....N-1.$$

Это соотношение является основой следующего алгоритма вычисления круговой свертки:

- определяются N-точечные ДПФ $X_1(k)$ и $X_2(k)$ и их произведение

$$Y(k)=X_2(k)X_1(k);$$

- с помощью ОДПФ определяется N-точечная последовательность $y(n)$.

ДПФ и ОДПФ рассчитываются с помощью быстрых алгоритмов, что существенно сокращает объем вычислений по сравнению с непосредственным вычислением свертки по формуле (4.56).

Линейная свертка

Линейной сверткой конечных последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ с длинами N_1 и N_2 называется L-точечная последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(n-m) x_2(m), \tag{4.58}$$

где $L = N_1 + N_2 - 1$, причем последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$ и $y(n)$ равны нулю вне этого интервала.

Конечные последовательности можно условно считать периодическими, поэтому для линейной свертки может использоваться алгоритм расчета круговой свертки с помощью ДПФ:

а) последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$ дополняются нулями до длины L;

б) осуществляется переход к L-точечным последовательностям $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$;

в) линейная свертка последовательностей $x_1(n)$, $x_2(n)$ будет равна L-точечной круговой свертке последовательностей $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(n-m) \tilde{x}_2(m); \tag{4.59}$$

г) определяются L-точечные ДПФ $\tilde{X}_1(k)$ и $\tilde{X}_2(k)$ и их произведение

$$Y(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k); \tag{4.60}$$

д) с помощью ОДПФ определяется L-точечная последовательность $y(n)$.

Вычисление свертки для длинных сигнальных реализаций

Если длина одной из последовательностей существенно превышает длину другой, линейная свертка вычисляется путем разбиения длинной последовательности на короткие части (секции), вычисления сверток для отдельных частей и объединения полученных частичных результатов, результат объединения и будет искомой линейной сверткой.

Этот случай особенно важен при решении практических задач ЦОС, когда требуется реализовать свертку импульсной характеристики устройства с входным сигналом и получить сигнал на выходе устройства:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}h(n-m)x(m).$$

Пусть длина импульсной характеристики $h(n)$ ограничена N_1 отсчетами, а длина последовательности $x(n)$ не ограничена.

Вычисление свертки с секционированием методом перекрытия с суммированием

Последовательность $x(n)$ делится на смежные секции $x_k(n)$ длиной N_2, рекомендуется выбирать длину N_2 близкой по величине к N_1.

Исходная последовательность $x(n)$ представляется в виде суммы секций:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n), \tag{4.61}$$

и тогда формула свертки принимает вид:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n-m).$$

Изменив порядок суммирования

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x_k(n-m),$$

с учетом того, что длины последовательностей $h(n)$ и $x_k(n)$ конечны и равны, соответственно) N_1 и N_2, бесконечный предел суммы по m конечный:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x_k(n-m),$$

получим L-точечную искомую свертку

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(n) \tag{4.62}$$

в виде суммы секционированных линейных сверток, где каждая секционированная свертка вычисляется по формуле:

$$y_k(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x_k(n-m),$$

где $L = N_1 + N_2 - 1$.

Смежные L-точечные секционированные свертки перекрываются на участке длинной $(N_1 + N_2 - 1) - N_2 = N_1 - 1$. На участке перекрытия отсчеты отдельных секционированных сверток суммируются.

Вычисление свертки с секционированием методом перекрытия с накоплением

Для вычисления свертки этим методом последовательность $x(n)$ делится на секции $\tilde{x}_k(n)$, $\tilde{x}_{k+1}(n)$, k=0,1,..., каждая из которых длиной $L = N_1 + N_2 - 1$ с участками перекрытий длиной $(N_1 - 1)$ отсчет. Последовательность $h(n)$ дополняется $(N_2 - 1)$ нулями до длины L, и получается L-точечная последовательность $\tilde{h}(n)$. Затем вычисляются секционированные круговые свертки $\tilde{y}_k(n), \tilde{y}_{k+1}(n)$:

$$\tilde{y}_k(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\tilde{x}_k(n-m); \tag{4.63}$$

$$\tilde{y}_{k+1}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\tilde{x}_{k+1}(n-m). \tag{4.64}$$

При формировании искомой свертки необходимо учитывать, что в данном случае секции $\tilde{x}_k(n)$, $\tilde{x}_{k+1}(n)$ перекрываются и условие (4.61) не выполняется:

$$x(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k(n)$$

и, соответственно, соотношение (4.62) также не действительно:

$$y(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}_k(n).$$

Поэтому, для формирования результирующей свертки при суммировании секционированных сверток $\tilde{y}_k(n)$, в каждой из них отбрасываются первые $(N_1 - 1)$ отсчетов.

В обоих методах секционированные свертки могут рассчитываться с помощью ДПФ и ОДПФ.