Линейные системы, инвариантные к сдвигу

Преобразование и обработка сигналов осуществляется в системах. Понятия сигнала и системы неразрывны, так как любой сигнал существует в какой-либо системе его обращения. Система обработки сигналов может быть реализована как в материальной форме (специальное устройство, измерительный прибор и т.п.), так и программно на ЭВМ или на любом другом вычислительном устройстве. Существуют и комплексные измерительно-вычислительные системы и комплексы (ИВС или ИВК), которые выполняют как ввод и первичную обработку сигналов непосредственно в материальной форме их представления, так и преобразование сигналов в цифровую форму, и последующую программную обработку. Форма реализации систем существенного значения не имеет и определяет только их возможности при анализе и обработке сигналов.

Линейные системы

Общие понятия систем. Безотносительно к назначению и исполнению система всегда имеет *вход*, на который подается входной сигнал или входное воздействие, в общем случае многомерное, и *выход*, с которого снимается обработанный выходной сигнал. Если устройство системы и внутренние операции преобразований принципиального значения не имеют, то система в целом может восприниматься как "черный ящик", в формализованном виде. Формализованная система представляет собой определенный *системный оператор* (алгоритм) преобразования входного сигнала – *воздействия* $s(t)$, в сигнал на выходе системы $y(t)$ – *отклик* или *выходную реакцию* системы. Символическое обозначение операции преобразования (трансформации):

$$y(t) = T[s(t)].$$

Системный оператор T - это правило (набор правил, алгоритм) преобразования сигнала $s(t)$ в сигнал $y(t)$. Для общеизвестных операций преобразования сигналов применяются также расширенные символы операторов трансформации, где вторым символом и специальными индексами обозначается конкретный вид операции (как, например, TF - преобразование Фурье, TF^{-1} - обратное преобразование Фурье).

Входной сигнал системы может представлять собой m - мерный вектор (m входных сигналов), а выходной сигнал n - мерный вектор, при этом система будет иметь m входов и n выходов.

Для детерминированных входных сигналов соотношение между выходными и входными сигналами однозначно задается системным оператором. В случае реализации на входе системы случайного входного процесса также существует однозначное соответствие процессов на выходе и входе системы, однако при этом одновременно происходит изменение статистических характеристик выходного сигнала (математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и пр.), которое также определяется системным оператором.

Для определения системы необходимо задать характер, тип и области допустимых величин входных и выходных сигналов. Как правило, системы выполняются на сигналы одного типа по входу/выходу и подразделяются на системы непрерывного времени (аналоговые или дискретные сигналы на входе и выходе) и цифровые системы. Совокупность системного оператора *T* и пространства сигналов образует математическую модель системы.

Линейные системы. Любые преобразования сигналов сопровождаются изменением их спектра и по характеру этих изменений разделяются на два вида: линейные и нелинейные. К нелинейным относят изменения, при которых в составе спектра сигналов появляются новые гармонические составляющие. При линейных изменениях сигналов изменяются амплитуды и/или начальные фазы гармонических составляющих спектра. Оба вида изменений могут происходить как с сохранением полезной информации, так и с ее искажением. Это зависит не только от характера изменения спектра сигналов, но и от спектрального состава самой полезной информации.

Линейные системы составляют основной класс систем обработки сигналов. Термин линейности означает, что система преобразования сигналов должна иметь произвольную, но в обязательном порядке линейную связь между входным сигналом (возбуждением) и выходным сигналом (откликом). В нелинейных системах связь между входным и выходным сигналом определяется произвольным нелинейным законом.

Система считается линейной, если в пределах установленной области входных и выходных сигналов ее реакция на входные сигналы аддитивна (выполняется принцип суперпозиции сигналов) и однородна (выполняется принцип пропорционального подобия).

Принцип *аддитивности*требует, чтобы реакция на сумму двух входных сигналов была равна сумме реакций на каждый сигнал в отдельности:

$$T[a(t)+b(t)] = T[a(t)] + T[b(t)].$$

Принцип *однородности* или пропорционального подобия требует сохранения однозначности масштаба преобразования при любой амплитуде входного сигнала:

$$T[ca(t)] = cT[a(t)].$$

Другими словами, отклик линейной системы на взвешенную сумму входных сигналов должен быть равен взвешенной сумме откликов на отдельные входные сигналы независимо от их количества и для любых весовых коэффициентов, в том числе комплексных.

Примеры.

Система $y(t) = a^3 t$ линейна.

Система $y(t) = at^2$ нелинейна.

При программной реализации линейных систем на ЭВМ особых затруднений с обеспечением линейности в разумных пределах значений входных и выходных сигналов, как правило, не возникает. При физической (аппаратной) реализации систем обработки данных диапазон входных и/или выходных сигналов, в котором обеспечивается линейность преобразования сигналов, всегда ограничен и должен быть специально оговорен в технической документации или методической инструкции.

Основные системные операции. К базовым линейным операциям, из которых могут быть сформированы любые линейные операторы преобразования, относятся операции скалярного умножения, сдвига и сложения сигналов:

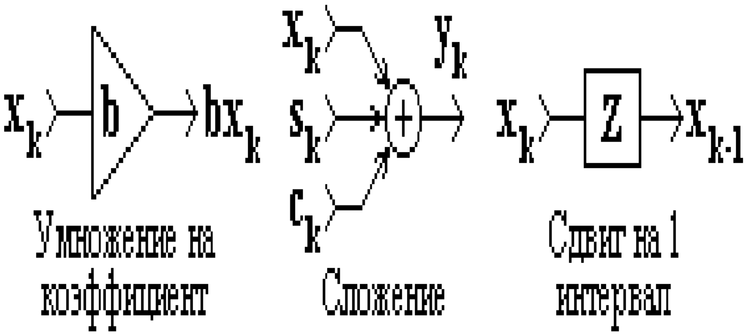


Рисунок 3.1 - Схемы системных операций

$$y(t) = bx(t);$$
$$y(t) = x(t - \Delta t);$$
$$y(t) = a(t) + b(t).$$

Графическое отображение операций (цифровая форма) приведено на рисунке 3.1.

Операции сложения и умножения являются линейными только для аналоговых и дискретных сигналов. В случае цифровых сигналов они линейны относительно самих цифровых сигналов, но если последние - результат операции амплитудно-цифрового преобразования, то сложение и умножение не может считаться линейным абсолютно точно по отношению к исходным сигналам.

Инвариантность систем к сдвигу. Система называется инвариантной к сдвигу (инвариантной во времени, а равно и по любым другим аргументам), если сдвиг входного сигнала по аргументам вызывает соответствующий сдвиг выходного сигнала:

$$T[a(x,t)] = s(x,t);$$
$$T[a(x - \Delta x, t - \Delta t)] = s(x - \Delta x, t - \Delta t).$$

Линейность и инвариантность к сдвигу являются независимыми свойствами систем и не определяют друг друга. Так, например, операция квадратирования сигнала (возведения в квадрат всех значений сигнала) инвариантна к сдвигу, но нелинейна.

В теории анализа и обработки данных основное место занимают системы, линейные и инвариантные к сдвигу (ЛИС - системы). Они обладают достаточно широкими практическими возможностями при относительной простоте математического аппарата. В дальнейшем, если это специально не оговаривается, рассматриваются именно такие системы.

Преимущество, которое отдается ЛИС - системам в методах обработки информации, базируется на возможности разложения входного сигнала любой, сколь угодно сложной формы, на составляющие простейших форм, отклик системы на которые известен и хорошо изучен, с последующим вычислением выходного сигнала в виде суммы откликов на все составляющие входного сигнала. В качестве простейших форм разложения сигналов используются, как правило, единичные импульсы и гармонические составляющие. Первая применяется при представлении сигнала в динамической форме и использует преобразование свертки, вторая - частотное представление сигнала и преобразование Фурье.

Другой важной особенностью ЛИС - систем является то, что любые их комбинации также являются ЛИС - системами, а любую сложную ЛИС - систему можно разложить на комбинации простых систем. Так, например, при последовательном (каскадном) соединении систем, когда выходной сигнал одной системы служит входным сигналом для второй и т.д., образуемая система в целом также является ЛИС - системой, если линейны и инвариантны к сдвигу все системы, в нее входящие, при этом по отношению к общей системной операции преобразования порядок соединения входящих в нее систем значения не имеет.

Математическая модель системы задается связью между сигналами входа и выхода и в аналоговой одномерной линейной системе обычно выражается линейным дифференциальным уравнением:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \tag{3.7}$$

При нормировке к $a_o = 1$, из этого выражения следует:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} - \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}. \tag{3.8}$$

По существу, правой частью этого выражения в самой общей математической форме отображается содержание операции преобразования входного сигнала, т.е. задается оператор трансформации входного сигнала в выходной.

Аналогичная связь в цифровой системы описывается разностными уравнениями:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m y[(k-m)\Delta t] = \sum_{n=0}^{N} b_n x[(k-n)\Delta t]; \tag{3.9}$$

$$y(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n x[(k-n)\Delta t] - \sum_{m=1}^{M} a_m y[(k-m)\Delta t]. \tag{3.10}$$

Последнее уравнение можно рассматривать как алгоритм последовательного вычисления значений $y(k\Delta t), k = 0,1,2.......,$ по значениям входного сигнала $x(k\Delta t)$ и предыдущих вычисленных значений $y(k\Delta t)$ при известных значениях коэффициентов a_m, b_n и с учетом задании определенных начальных условий - значений $x(k\Delta t)$ и $y(k\Delta t)$ при $k< 0$. Интервал дискретизации в цифровых последовательностях отсчетов обычно нормируется и принимается равным 1, так как выполняет только роль масштабного множителя.

Нерекурсивные цифровые системы. При нулевых значениях коэффициентов a_m уравнение (3.10) переходит в уравнение дискретной свертки $x(k)$ с оператором b_n:

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n). \tag{3.11}$$

При значениях коэффициентов b_n отличных от нуля, значения выходных отсчетов свертки для любого аргумента k определяются текущим и "прошлыми" значениями входных отсчетов. Такая система называется нерекурсивной цифровой системой (НЦС). Пример простейшей НЦС приведен на рисунке 3.2. Интервал суммирования по n получил название "окна" системы. Окно системы (3.2) составляет $N+1$ точку, система является односторонней каузальной, причинно обусловленной текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала, выходной сигнал не опережает входного. Каузальная система может быть реализована аппаратно в реальном масштабе времени. При $k<n$ проведение обработки входных данных возможно только при задании определенных начальных условий для точек $x(-k)$, $k=1,2,..,N$. Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения или значения отсчета $x(0)$. Применяется также четное или нечетное продление функции $x(k)$ на интервал отрицательных значений k. Если при обработке данных начальные интервалы массивов $x(k)$ существенного значения не имеют, то обработку можно начинать с отсчета $k=N$.

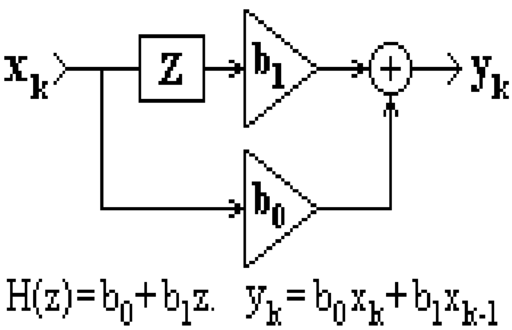


Рисунок 3.2 - Пример нерекурсивной цифровой системы

При обработке данных на ЭВМ ограничение по каузальности системного оператора снимается. В программном распоряжении системы могут находиться как "прошлые", так и "будущие" значения входных отсчетов, при этом уравнение (3.11) будет иметь вид:

$$y(k)=\sum_{n=-N^*}^{N} b_n x(k-n). \qquad (3.12)$$

При $N^*=N$ система называется двусторонней симметричной. Симметричные системы не изменяют фазы обрабатываемых сигналов.

Техника выполнения свертки в координатной области не отличается от техники выполнения обычной дискретной свертки двух массивов данных.

Представим, что на одной полоске бумаги выписаны по порядку сверху вниз значения данных $x(k)$. На второй полоске бумаги находятся записанные в обратном порядке значения коэффициентов системы b_n. Для вычисления $y(k)$ располагаем вторую полоску против первой таким образом, чтобы значение b_0 совпало со значением $x(k)$, перемножаем все значения b_nс расположенными против них значениями $x(k-n)$ и суммируем результаты перемножения. Результат суммирования является выходным значением сигнала $y(k)$. Сдвигаем окно системы - полоску коэффициентов b_k, на один отсчет последовательности $x(k)$ вниз (по порядку возрастания номеров k) или массив $x(k)$ сдвигаем на отсчет вверх и вычисляем аналогично следующее значение, и т.д.

Описанный процесс свертки в вещественной области массива данных $x(k)$ с нерекурсивным оператором системы b_n (массивом весовых коэффициентов системы) обычно называют нерекурсивной цифровой фильтрацией данных, а саму систему, если она выполняет только данную операцию, нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ).

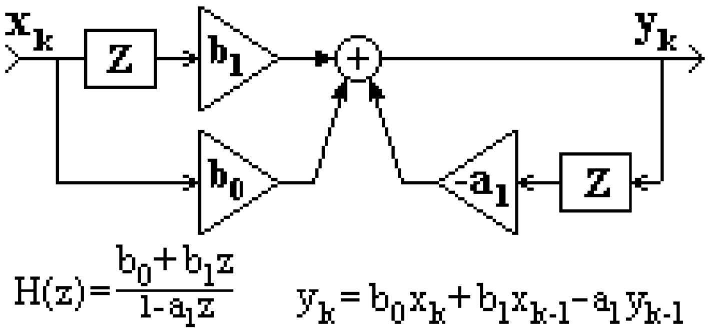
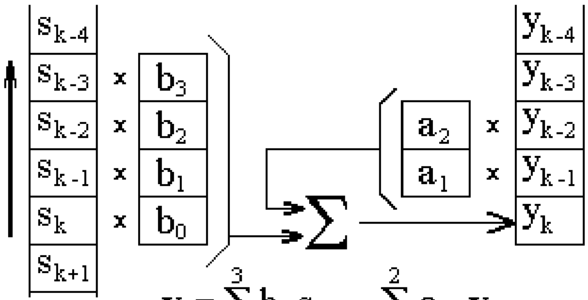


Рисунок 3.3 - Пример рекурсивной цифровой системы

Рекурсивные цифровые системы. Системы, которые описываются полным разностным уравнением

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n)-\sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m) \qquad (3.13)$$

принято называть рекурсивными цифровыми системами (РЦС) или рекурсивными цифровыми фильтрами (РЦФ), так как в вычислении текущих значений выходного сигнала участвует не только входной сигнал, но и значения выходного сигнала, вычисленные в предшествующих циклах расчетов. С учетом последнего фактора рекурсивные системы называют системами с обратной связью. Пример рекурсивной системы приведен на рисунке 3.3.



$$y = \sum_{n=0}^{3} b_n s_{k-n} - \sum_{m=1}^{2} a_m y_{k-m}$$

Рисунок 3.4 - Техника вычислений в РЦС

Полное окно рекурсивной системы состоит из двух составляющих: нерекурсивной части b_n, аналогичной окну нерекурсивной системы и ограниченной в работе текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала (при реализации на ЭВМ возможно использование и “будущих” отсчетов сигнала), и рекурсивной части a_m, которая работает только с "прошлыми", ранее вычисленными значениями выходного сигнала. Техника вычислений для РЦС приведена на рисунке 3.4.

Пример 1.

Уравнение РЦС: $y_k = b_o x_k + a_1 y_{k-1}$, при $b_o = a_1 = 0.5$, $y_{-1} = 0$. Входной сигнал: $x_k = \{0, 10, 0, 0, 0, ...\}$.

Расчет выходного сигнала:

$y_o = 0{,}5x_o + 0{,}5y_{-1} = 0$ $\quad y_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}5y_o = 5$ $\quad y_2 = 0{,}5x_2 + 0{,}5y_1 = 2.5$

$y_3 = 0{,}5x_3 + 0{,}5y_2 = 1.25$

$y_4 = 0{,}5x_4 + 0{,}5y_3 = 0.625 y_5 = 0{,}5x_5 + 0{,}5y_4 = 0.3125$ ит.д.

Выходной сигнал: $y_k = \{0, 5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, ...\}$

Из примера можно видеть, что реакция РЦС на конечный входной сигнал, в принципе, может иметь бесконечную длительность, в отличие от реакции НЦС, которая всегда ограничена количеством членов b_k (окном системы).

Стационарные и нестационарные системы. Система считается *стационарной* и имеет постоянные параметры, если ее свойства (математический алгоритм оператора преобразования) в пределах заданной точности не зависят от входного и выходного сигналов и не изменяются ни во времени, ни от каких-либо других внешних факторов. Математически это означает задание системы уравнениями типа (3.9-3.13) с постоянными значениями коэффициентов a_jи b_i и реакция системы на какое-либо воздействие не зависит от времени (координат) его приложения. В противном случае система является нестационарной или *параметрической* (системой с переменными параметрами). Среди последних большое значение имеют так называемые адаптивные системы обработки данных.

В этих системах производится, например, оценивание определенных параметров входных и выходных сигналов, по результатам сравнения которых осуществляется подстройка параметров преобразования (переходной характеристики системы) таким образом, чтобы обеспечить оптимальные по производительности условия обработки сигналов или минимизировать погрешность обработки.

Импульсная характеристика системы

Импульсный отклик системы. По определению, импульсными характеристиками систем (второй широко используемый термин - импульсный отклик систем) называются функции $h(t)$ для аналоговых и $h(k\Delta t)$ для цифровых систем, которые является реакцией (откликом) систем на единичные входные сигналы: дельта-функцию $\delta(t)$ для аналоговых и импульс Кронекера $\delta(k\Delta t)$ для цифровых систем, поступающие на вход систем соответственно при $t=0$ и $k=0$. Эта реакция однозначно определяется оператором преобразования:

$$y(t) = T[\delta(t)] \equiv h(t); \tag{3.14}$$

$$y(k\Delta t) = T[\delta(k\Delta t)] \equiv h(k\Delta t); \tag{3.15}$$

$$y(k) = T[\delta(k)] \equiv h(k). \tag{3.16}$$

Импульсный отклик аналоговой системы, как результат операции над дельта-функцией, в определенной степени представляет собой математическую абстракцию идеального преобразования. С практической точки зрения под импульсным откликом аналоговой системы можно понимать математическое отображение реакции системы на импульсный входной сигнал произвольной формы с площадью, равной 1, если длительность сигнала пренебрежимо мала по сравнению со временем реакции системы или с периодом ее собственных колебаний. Под временем (длиной) реакции системы обычно понимают интервал, на котором значения функции $h(t)$ существенно отличаются от нуля после прекращения действия единичного сигнала на ее входе.

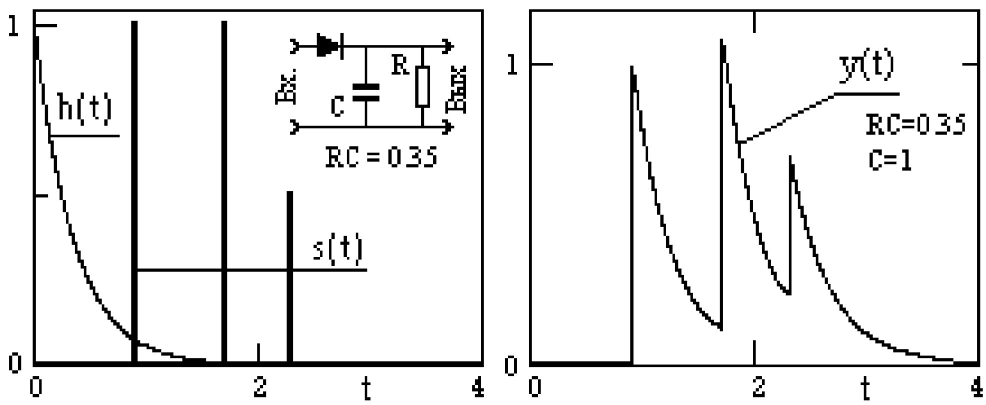


Рисунок 3.5 - Импульсный отклик системы $h(t)$,
входной сигнал $s(t)$ и выходная реакция системы $y(t)$

Для цифровых систем импульсный отклик однозначно определяется реакцией системы на импульс Кронекера $\delta(k\Delta t)=1$ при $k=0$.

Функцию импульсного отклика называют также весовой функцией системы.

На рисунке 3.5 приведен пример импульсного отклика $h(t)$ интегрирующей RC-цепи. При подаче на вход RC-цепи импульса заряда Δq емкость C заряжается до напряжения $V_o = \Delta q/C$ и начинает разряжаться через сопротивление R, при этом напряжение на ней изменяется по закону $v(t) = V_o \cdot e^{-t/RC} = (\Delta q/C) \cdot e^{-t/RC}$. Отсюда, отклик RC-цепи по выходному напряжению на входной сигнал $\Delta q = 1$: $h(t) = (1/C) \cdot e^{-t/RC}$. По существу, импульсным откликом системы $h(t)$ определяется доля входного сигнала, которая действует на выходе системы по истечении времени t после поступления сигнала на вход (запаздывающая реакция системы).

Реакция системы на произвольный сигнал. Если функция импульсного отклика системы известна, то, с учетом принципа суперпозиции сигналов в линейной системе, можно выполнить расчет реакции системы в любой произвольный момент времени на любое количество входных сигналов с любыми моментами времени их прихода путем суммирования запаздывающих реакций системы на эти входные сигналы, как это показано на рисунке 3.5 для трех входных импульсов. В общем случае произвольный сигнал на входе системы может быть разложен в линейную последовательность взвешенных единичных импульсов:

$$y(t) = T[s(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]. \qquad (3.17)$$

На основании принципа суперпозиции линейный оператор T может быть внесен под знак интеграла, так как последний представляет собой предельное значение суммы. При этом операция преобразования действует только по переменной t:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau. \qquad (3.18)$$

Это выражение представляет собой интеграл Дюамеля или свертку входного сигнала с импульсной характеристикой системы. Заменой переменных $t\text{-}\tau=\tau$ можно убедиться в том, что эта операция, как и положено свертке, коммутативна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau.$$

.

Аналогично, для дискретных и цифровых сигналов:

$$y(k\Delta t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n\Delta t)h(k\Delta t-n\Delta t)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n\Delta t)s(k\Delta t-n\Delta t); \qquad (3.19)$$

$$y(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)h(k-n)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)s(k-n). \qquad (3.20)$$

В символической форме математического представления:

$$y(t)=s(t)*h(t)=h(t)*s(t);$$

$$y(n)=s(n)*h(n)=h(n)*s(n).$$

В реальных физических системах импульсный отклик $h(t)$ равен нулю при $t<0$ (реакция на выходе системы не может опережать входной сигнал) и, как правило, отличен от нуля только на определенном интервале r, по которому и ведется интегрирование или суммирование в выражениях свертки. При обработке данных на ЭВМ требований по односторонности импульсного отклика не предъявляется, равно как и по его размерам вперед и назад от нуля по координатам.

Усиление постоянной составляющей сигнала. Подадим на вход системы постоянный сигнал $s(t)=A$. При этом сигнал на выходе системы:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s(t-\tau)d\tau=A\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau=A\cdot K_{\text{ПС}}, \qquad (3.21)$$

т.е. площадь импульсного отклика (для цифровой системы соответственно сумма коэффициентов импульсного отклика) является коэффициентом K_{nc} усиления постоянной составляющей входного сигнала. Если при обработке сигналов должны изменяться только динамические характеристики их формы без изменения постоянной составляющей, а равно и различных постоянных уровней (фона, пьедесталов, региональных трендов и т.п.), то площадь импульсного отклика (сумма коэффициентов) должна нормироваться к единице.

Усиление шумов. Критерием качества системы при использовании любого метода обработки информации можно считать выполнение целевого назначения с минимальным усилением шумов (максимальным их подавлением). Допустим, что система имеет нормированный к единице импульсный отклик $h(k)$. Обозначим через $\varepsilon(k)$ аддитивный шум с математическим ожиданием $M\{\varepsilon(k)\}=\bar{\varepsilon}=0$ и дисперсией $D_\varepsilon=\sigma^2$, который в сумме с сигналом поступает на вход системы. Значения $\varepsilon(k)$ статистически независимы и некоррелированы с сигналом. С учетом помехи во входном сигнале $x(k)$ значение сигнала на выходе системы:

$$y(k)=\sum_{n}h(n)[x(k-n)+\varepsilon(k-n)].$$

Математическое ожидание значений выходного сигнала:

$$M\{y(k)\} = \sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] = \sum_n h(n)x(k-n).$$

Дисперсия распределения отсчетов выходного сигнала:

$$D\{y(k)\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] - M\{y(k)\}\right]^2\right\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]^2\right\}.$$

Если правую часть последнего выражения представить в виде

$$M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]^2\right\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]\cdot\left[\sum_m h(m)\varepsilon(k-m)\right]\right\},$$

то в этом выражении математические ожидания всех членов произведения с сомножителями $\varepsilon(n)\varepsilon(m)$ при $n \neq m$ равны 0 в силу статистической независимости значений шума. Остаются только члены с $n = m$, т.е.:

$$M\left\{\sum_n h^2(n)\varepsilon^2(n)\right\} = \sum_n h^2(n) M\{\varepsilon^2(n)\} = D_\varepsilon \sum_n h^2(n) = \sigma^2 \sum_n h^2(n). \qquad (3.22)$$

Отсюда следует, что сумма квадратов значений нормированного импульсного отклика системы представляет собой коэффициент усиления аддитивных шумов во входном сигнале.

Пример.

Сглаживающий фильтр: $y(k) = 0.2 \sum_{n=-2}^{2} x(k-n)$.

Коэффициент усиления шумов: $5\,(0.2^2) = 0.2$.

Дисперсия шумов уменьшается в 1/0.2 = 5 раз.

Определение реакции на единичный импульс требуется для рекурсивных систем, так как импульсная реакция для НЦС специального определения не требует:

$$h(k) = \sum_{n=-N}^{N} b(n)\delta(k-n) \equiv b(k).$$

Если выражение для системы известно в общей форме (3.13), определение импульсной реакции производится подстановкой в уравнение системы импульса Кронекера с координатой $k = 0$ при нулевых начальных условиях, при этом сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы: $y(k) \equiv h(k)$.

Пример.

Уравнение РЦС: $y_k = x_k + 0.5y_{k-1}$.

Входной сигнал: $x_k = \delta_o = \{1,0,0,0,\ldots\}$.

Расчет выходного сигнала при нулевых начальных условиях:
$y_o = x_o+0.5\ y_{-1} = 1+0 = 1 = h_o$. $y_1 = x_1+0.5\ y_o = 0+0.5 = 0.5 = h_1$. $y_2 = x_2+0.5$
$y_1 = 0+0.25 = 0.25= h_2$
$y_3 = x_3+0.5\ y_2 = 0.125 = h_3$. $y_4 = x_4+0.5\ y_3 = 0.0625 = h_4$, и так далее.
Импульсный отклик системы: $h_k = \{1,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ ...\} \equiv (O.5)^k$, $k = 0,1,2....$

Определение импульсной реакции физических систем обычно производится подачей на вход систем ступенчатой функции $u_o(k) = 1$ при $k \geq 0$, и $u_o(k) = 0$ при $k < 0$:

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N} h(n)u_0(k-n) = \sum_{n=0}^{N} h(n).$$

$$h(k) = g(k) - g(k-1),\ k = 0,1,2,3......$$

Функция $g(k)$ получила название переходной характеристики системы (перехода из одного статического состояния в другое).