Цифровые фильтры 1-го и 2-го порядков

Нерекурсивный фильтр 1-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 1-го порядка получается из общего уравнения (5.13) при a_k =0 при $k \geq 2$ и при b_k =0, при $k \geq 1$:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}. \tag{5.15}$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1). \tag{5.16}$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (5.15), (5.16) представляют в следующем виде:

$$H(z) = a_0 \left(1 + \alpha_1 z^{-1}\right); \tag{5.17}$$

$$y(n) = a_0 [x(n) + \alpha_1 x(n-1)], \tag{5.18}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{a_0}$.

Коэффициент a_0 выполняет в этих уравнениях только масштабирующие функции и не оказывает влияния на характеристики фильтра. Поэтому для анализа уравнение передаточной функции записывается в виде:

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1}. \tag{5.19}$$

Рабочим диапазоном частот цифрового фильтра является интервал Найквиста, в цифровых частотах Φ это диапазон от 0 до π.

Для комплексного коэффициента передачи фильтра выражение (5.19) при переменной $z = \exp(j\Phi)$

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \exp(-j\Phi). \tag{5.20}$$

При подстановке в (5.20) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \cos(\Phi) - j\alpha_1 \sin(\Phi). \tag{5.21}$$

АЧХ фильтра определяется как модуль $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$:

$$H(\Phi) = \sqrt{1 + 2\alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_1^2}. \tag{5.22}$$

Выражение для определения ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = arctg\left\{\frac{\mathrm{Im}[H(j\Phi)]}{\mathrm{Re}[H(j\Phi)]}\right\} = -arctg\left(\frac{\alpha_1 \sin(\Phi)}{1+\alpha_1 \cos(\Phi)}\right). \quad (5.23)$$

Задавая разные значения α_1 и изменяя значения Φ от 0 до 2π, можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

При α_1>0 получим ФНЧ, при α_1<0 получим ФВЧ, при α_1=±1 ФЧХ фильтра линейная. Линейность ФЧХ фильтра необходима при обработке сигналов, у которых информационным параметром является фаза, или не должно происходить фазовых искажений сигналов при обработке.

Дискретная импульсная характеристика фильтра определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции $H(z)$, представленной в виде полинома по степеням z^{-k}:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \ldots\ldots .$$

Сравнивая эту запись с уравнением (5.19), получим

$$h(0) = 1;\ h(1) = \alpha_1;\ h(n > 1) = 0. \quad (5.24)$$

Для обеспечения линейности ФЧХ требуется симметрия или антисимметрия ДИХ.

Нерекурсивный фильтр 2-го порядка

Передаточная функция нерекурсивного фильтра 2-го порядка получается из общего уравнения (5.13) при a_k=0 при $k\geq 3$ и при b_k=0, при $k\geq 1$:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}. \quad (5.25)$$

Разностное уравнение этого фильтра имеет вид:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2). \quad (5.26)$$

Для анализа характеристик фильтра уравнения (5.25), (5.26) представляют в следующем виде:

$$H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}; \quad (5.27)$$

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2), \quad (5.28)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{a_0}$, $\alpha_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$.

Выражение для комплексного коэффициента передачи этого фильтра получим при подстановке $z = \exp(j\Phi)$ в (5.27)

$$H(j\Phi) = 1 + \alpha_1 \exp(-j\Phi) + \alpha_2 \exp(-j2\Phi). \qquad (5.29)$$

При подстановке в (5.29) представления экспоненты в тригонометрической форме

$$H(j\Phi) = (1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi)) - j(\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi)) = H(\Phi)\exp[j\varphi(\Phi)]. \qquad (5.30)$$

АЧХ фильтра определяется как модуль $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$:

$$H(\Phi) = \sqrt{(1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi))^2 + (\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi))^2}\,. \qquad (5.31)$$

Выражение для определения ФЧХ нерекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$\varphi(\Phi) = -arctg\left(\frac{\alpha_1 \sin(\Phi) + \alpha_2 \sin(2\Phi)}{1 + \alpha_1 \cos(\Phi) + \alpha_2 \cos(2\Phi)}\right). \qquad (5.32)$$

Задавая разные значения α_1 и α_2 и изменяя значения Ф от 0 до 2π, можно построить АЧХ и ФЧХ проектируемого цифрового фильтра.

Дискретная импульсная характеристика фильтра 2-го порядка определяется последовательностью коэффициентов передаточной функции $H(z)$ и содержит только три отсчета:

$$h(0) = 1;\; h(1) = \alpha_1;\; h(2) = \alpha_2\; h(n > 2) = 0\,. \qquad (5.33)$$

Рекурсивный фильтр 1-го порядка

Разностное уравнение рекурсивного фильтра первого порядка имеет вид:

$$y(n) = ax(n) + by(n-1). \qquad (5.34)$$

Это разностное уравнение интегрирующей RC-цепи. Дискретная импульсная характеристика такого фильтра:

$$h(n) = a\exp\left(-\frac{T}{\tau_ф}n\right) = a\exp\left(-\frac{T}{RC}n\right).$$

Передаточная функция этого фильтра - это z-преобразование ДИХ:

$$H(z) = a\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[\left(-\frac{T}{\tau_ф}k\right)z^{-k}\right] = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k\,,$$

где $q = \exp\left(-\frac{T}{\tau_ф}\right)z^{-1}$.

Использую формулу суммирования прогрессии, получим

$$H(z) = \frac{a}{1-q} = \frac{a}{1-bz^{-1}} = \frac{az}{z-b}, \qquad (5.35)$$

где $b = \exp\left(-\frac{T}{\tau_ф}\right)$.

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1-b\cos(\Phi)) + jb\sin(\Phi)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1-b\cos(\Phi)) + jb\sin(\Phi)} = \frac{a[(1-b\cos(\Phi)) - jb\sin(\Phi)]}{(1-b\cos(\Phi))^2 + b^2\sin^2(\Phi)} =$$
$$= \frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)}[1-b\cos(\Phi) - jb\sin(\Phi)].$$

$$H(\Phi) = \sqrt{\left(\frac{a}{1+b^2-2b\cos(\Phi)}\right)^2 \left[(1-b\cos(\Phi))^2 + (b\sin(\Phi)^2)\right]} = \frac{a}{\sqrt{1+b^2-2b\cos(\Phi)}}. \qquad (5.36)$$

Фазочастотная характеристика фильтра

$$\varphi(\Phi) = arctg\left\{\frac{\mathrm{Im}[H(j\Phi)]}{\mathrm{Re}[H(j\Phi)]}\right\} = -arctg\left(\frac{b\sin(\Phi)}{1-b\cos(\Phi)}\right). \qquad (5.37)$$

В зависимости от знака коэффициента b цифровой рекурсивный фильтр 1-го порядка может быть либо фильтром нижних частот (при $b>0$), либо фильтром верхних частот (при $b<0$).

Дискретная импульсная характеристика рассматриваемого фильтра описывается выражением $h(n) = ab^n$ и имеет бесконечную протяженность. Таким образом рекурсивный фильтр 1-го порядка является БИХ-фильтром.

Дискретная импульсная характеристика цифрового фильтра при $a=1$ и $b=1$ представляет собой бесконечную последовательность единичных отсчетов $h(n) = ab^n = 1$. Поэтому каждый входной отсчет $x(n)$ образует на выходе фильтра такую же последовательность, но своего уровня. Все последовательности от каждого отсчета суммируются, так что текущий выходной отсчет с номером n равен сумме всех входных в интервале от нуля до n:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k).$$

Это выражение соответствует цифровому интегратору.

Рекурсивный фильтр 2-го порядка

На основе общих формул (5.13), (5.14) можно представить передаточную функцию и разностное уравнение для рекурсивного фильтра 2-го порядка:

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}; \tag{5.38}$$

$$y(n) = ax(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2). \tag{5.39}$$

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$H(j\Phi) = \frac{a}{1 - b_1 \exp(-j\Phi) - b_2 \exp(-j2\Phi)}; \tag{5.40}$$

$$H(j\Phi) = \frac{a}{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(\Phi)) + j(b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(\Phi))}. \tag{5.41}$$

Используя формулу (5.41) получим выражения для АЧХ фильтра:

$$H(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{(1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(\Phi))^2 + (b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(\Phi))^2}} \tag{5.42}$$

и его ФЧХ

$$\varphi(\Phi) = -arctg\left(\frac{b_1 \sin(\Phi) + b_2 \sin(2\Phi)}{1 - b_1 \cos(\Phi) - b_2 \cos(2\Phi)}\right). \tag{5.43}$$

Проведем преобразования выражения (5.38)

$$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{az^2}{z^2 - b_1 z - b_2}. \tag{5.44}$$

Решение квадратного уравнения числителя, позволяет получить значения z, при которых передаточная функция обращается в ноль. Эти значения называются нулями. Для данного выражения имеем двухкратный нуль

$$z_{0_{1,2}} = 0 . \tag{5.45}$$

Решение квадратного уравнения знаменателя, позволяет получить значения полюсов передаточной функции

$$z_{п_{1,2}} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{x} + b_2} . \tag{5.46}$$

Найдем соотношение коэффициентов b и полюсов.

$$H(z) = \frac{az^2}{z^2 - b_1 z - b_2} = \frac{az^2}{(z - z_{п_1})(z - z_{п2})} = \frac{az^2}{z^2 - (z_{п_1} + z_{п_2})z + z_{п_1} z_{п_2}} . \tag{5.47}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b_1 &= z_{п_1} + z_{п_2} ; \\ b_2 &= -z_{п_1} z_{п_2} . \end{aligned} \tag{5.48}$$

Дискретную импульсную характеристику фильтра можно определить осуществив обратное z-преобразование передаточной функции $H(z)$. Одним из способов нахождения обратного z-преобразования является разложение на простые дроби:

$$H(z) = \frac{a}{(1 - z_{п_1} z^{-1})(1 - z_{п2} z^{-1})} = \frac{A}{1 - z_{п_1} z^{-1}} + \frac{B}{1 - z_{п_2} z^{-1}} . \tag{5.49}$$

Известно, что z-функция

$$X(z) = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} \tag{5.50}$$

является z-преобразованием последовательности

$$x(n) = \beta^n . \tag{5.51}$$

Следовательно, ДИХ рекурсивного фильтра 2-го порядка может быть записана в виде:

$$h(n) = A z_{п_1}^{n} + B z_{п_2}^{n} . \tag{5.52}$$

Для нахождения значений Aи Bвоспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для этого приведем (5.49) к общему знаменателю

$$H(z) = \frac{(A+B) - \left(Az_{п_2} + Bz_{п_1}\right)z^{-1}}{\left(1 - z_{п_1}z^{-1}\right)\left(1 - z_{п_2}z^{-1}\right)}.$$

Отсюда

$$a = (A+B) - \left(Az_{п_2} + Bz_{п_1}\right)z^{-1},$$

что позволяет составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ Az_{п_2} + Bz_{п_1} = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы позволяет получить

$$A = a\frac{z_{п_1}}{z_{п_1} - z_{п_2}}; \qquad B = a\frac{z_{п_2}}{z_{п_2} - z_{п_1}}. \qquad (5.53)$$

Подставляя выражения (5.53) в (5.52) получим

$$h(n) = a\frac{z_{п_1}^{n+1} - z_{п_2}^{n+1}}{z_{п_1} - z_{п_2}}. \qquad (5.54)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения в формуле (5.46) полюсы могут быть как действительными, так и комплексными.