Ряд Фурье

Непрерывная периодическая функция $x(t)$ с периодом T_S, удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\exp(jk\Delta\omega t), \qquad (4.3)$$

где $\Delta\omega$ - период дискретизации по круговой частоте:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_S}; \quad \left(T_S = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right); \qquad (4.4)$$

$X(k)$ - коэффициенты Фурье (комплексные числа)

$$X(k) = \frac{1}{T_S}\int_{-\frac{T_S}{2}}^{\frac{T_S}{2}} x(t)\exp(-jk\Delta\omega t)dt\,; \qquad (4.5)$$

k - номер коэффициента Фурье, соответствующего частоте $k\Delta\omega$.

Аналогично, непрерывная периодическая функция частоты $X(\omega)$ с периодом ω_S, удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле может быть представлена в виде ряда, симметричного (4.3)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\exp(-jn\Delta t\omega), \qquad (4.6)$$

где Δt - период дискретизации по времени:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_S}; \quad \left(\omega_S = \frac{2\pi}{\Delta t} \neq \frac{2\pi}{T_S}\right); \qquad (4.7)$$

$x(n)$ - коэффициенты Фурье (комплексные числа)

$$x(n) = \frac{1}{\omega_S}\int_{-\frac{\omega_S}{2}}^{\frac{\omega_S}{2}} X(\omega)\exp(-jn\Delta t\omega)d\omega\,; \qquad (4.8)$$

n - номер коэффициента Фурье, соответствующего времени $n\Delta t$.

На основании приведенных формул можно записать соотношение для периодов функций и периодов дискретизации во временной и частотной областях

$$\omega_S\Delta t = T_S\Delta\omega\,.$$

Преобразованием Фурье дискретной последовательности $x(nT_Д)$ называется следующий ряд

$$X(j\omega T_Д) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_Д)\exp(-j\omega T_Д n), \tag{4.9}$$

где $x(nT_Д)$ - оригинал – вещественная или комплексная последовательность;

$X(j\omega T_Д)$ - фурье-изображение (фурье-образ) последовательности $x(nT_Д)$, результат преобразования Фурье.

Преобразование Фурье справедливо только в области абсолютной сходимости ряда (4.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x(nT_Д)\exp(-j\omega T_Д n) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(nT_Д) \right| < \infty .$$

Фурье-изображение $X(j\omega T_Д)$ последовательности $x(nT_Д)$ является периодической функцией, поскольку аргумент данной функции $\exp(j\omega T_Д)$ периодичен по частоте ω с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_Д = \dfrac{2\pi}{T_Д}$:

$$\exp(j\omega T_Д) = \exp\left(j\left[\omega \pm k\frac{2\pi}{T_Д}\right] T_Д \right) = \exp(j\omega T_Д)\exp(\pm j2\pi k) = \exp(j\omega T_Д). \tag{4.10}$$

Значит, непрерывная периодическая функция частоты $X(j\omega T_Д)$ может быть представлена рядом Фурье при $\omega_S = \omega_Д$ и $\Delta t = T_Д$

$$X(\omega) = X(j\omega T_Д) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\exp(-jn\Delta t\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\exp(-j\omega n T_Д), \tag{4.11}$$

где коэффициенты $x(n)$ вычисляются по формуле

$$x(n) = \frac{T_Д}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T_Д}}^{\frac{\pi}{T_Д}} X(j\omega T_Д)\exp(j\omega T_Д n)d\omega . \tag{4.12}$$

Подставляя $x(n) = x(nT_Д)$ в (4.11) и учитывая, что $x(nT_Д)_{|n<0} = 0$, получаем (4.9)

$$X(j\omega T_Д) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\exp(-j\omega n T_Д) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_Д)\exp(-j\omega n T_Д).$$

Поэтому формула (4.12) представляет собой обратное преобразование Фурье.

Таким образом, преобразованием Фурье последовательности $x(nT_Д)$ называется пара взаимно однозначных преобразований:

- прямое

$$X(j\omega T_Д) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_Д)\exp(-j\omega T_Д n); \qquad (4.13)$$

- обратное

$$x(nT_Д) = \frac{T_Д}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_Д}}^{\frac{\pi}{T_Д}} X(j\omega T_Д)\exp(j\omega T_Д n) d\omega . \qquad (4.14)$$