Лекция 6

План лекции:

1. Метод потенциалов как пример алгоритма контролируемого обучения.

6.1 Метод потенциалов

Примеры, рассмотренные в предыдущей лекции, показали, что при построении систем классификации образов аналитическими методами первоочередной задачей является определение решающих функций, которые порождают в пространстве образов границы, отделяющие образы, принадлежащие различным классам. В настоящей лекции рассмотрим подход к определению решающих правил и разделяющих функций, основанный на использовании понятия потенциальной функции.

Рассмотрим алгоритм разделения на два класса, состоящий в том, чтобы отнести неизвестный предъявляемый объект к одному из двух известных классов: c_1 или c_2. Количество классов можно наращивать, главное условие – их сепарабельность. На *первом этапе* задача состоит в поиске разделяющей функции, позволяющей, исходя из обучающей выборки, определить границу между двумя классами. Эту процедуру называют обучением системы. *На втором этапе* разделяющая функция используется для классификации заданных объектов.

В качестве примера способа построения функции, разделяющей области двух классов, а затем распознавания с ее помощью предъявляемых объектов, рассмотрим метод потенциалов, для чего введем некоторые понятия.

Все объекты будем представлять точками в пространстве признаков. Пусть в каждой такой точке помещен электрический заряд. В некоторой произвольной точке M совокупность всех зарядов создает электрический потенциал V, являющийся суммой отдельных потенциалов, создаваемых каждым отдельным зарядом. Известно, что величина потенциала вычисляется как сумма $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \sum_i V_i$, где q_i – заряд в точке P_i; r_i – расстояние от точки P_i до точки

M. Потенциал выражается функцией, симметричной относительно точки, в которой помещен заряд, в ней потенциал по определению равен бесконечности. Линии, соединяющие точки равного потенциала, называются эквипотенциальными.

Если отвлечься от электрической специфики введенных понятий, то можно представить всякое облако точек, отображающее некоторый класс, как некое потенциальное плато, отделенное от других подобных ему. Каждое плато задает определенный класс объектов. Классы находятся на большом расстоянии друг от друга, где потенциал минимален или равен нулю.

Определение минимальной эквипотенциали позволит найти границу между классами. Пусть $K(\vec{x},\vec{x}_k)$ – потенциальная функция, центрированная относительно $\vec{x}_k$. Для любой точки $\vec{x}$ и для любого $\vec{x}_k$ можно выбрать некоторое *K*, имеющее вид $K(\vec{x},\vec{x}_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\varphi_i(\vec{x})\varphi_i(\vec{x}_k)$, где λ_i выбраны такими, чтобы удовлетворялись

граничные условия, а функции $\varphi_i(\vec{x})$ представляют собой элементы последовательностей ортонормированных функций. Такой выбор сделан на основе теории методов аппроксимации функций. Наиболее часто встречающиеся ортогональные функции основаны на полиномах Лагерра, Чебышева и Эрмита.

Разделяющая функция находится с помощью суммарного потенциала $K(\vec{x})$, вычисляемого как сумма частных потенциалов $K(\vec{x},\vec{x}_i)$, связанных с каждым отдельным предъявляемым источником *i*. Суммарный потенциал вычисляется по следующему алгоритму $K_{i+1}(\vec{x})=K_i(\vec{x})+\rho_{i+1}K(\vec{x},\vec{x}_{i+1})$, в котором через *i* обозначен номер этапа, соответствующий номеру предъявляемого для распознавания объекта. Корректирующий член ρ_{i+1} удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho_{i+1}=\begin{cases}1,\ \text{если}\ x_{i+1}\in C_1\ u\, K_i(\vec{x}_{i+1})\le 0;\\ -1,\ \text{если}\ x_{i+1}\in C_2\ u\, K_i(\vec{x}_{i+1})>0;\\ 0,\ \text{при правильной классификации.}\end{cases} \quad (6.1)$$

Правильная классификация соответствует случаям, когда *K(x)>0* при $\vec{x}\in C_1$ и *K(x)<0* при $\vec{x}\in C_2$. Поэтому можно использовать $K_i(\vec{x})$ как разделяющую функцию $d(\vec{x})$ и определить ее итеративным путем: $d_{i+1}(\vec{x})=d_i(\vec{x})+\rho_{i+1}K(\vec{x},\vec{x}_{i+1})$.

Поскольку интервал изменения аргументов x_1 и x_2 может простираться от $-\infty$ до ∞, воспользуемся полиномами Эрмита, ограничиваясь первыми четырьмя слагаемыми и двумя переменными x_1 и x_2. Полиномы связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$H_{n+1}=2xH_n-2nH_{n-1},\ \text{где}\ H_0=1, H_1=2x.$$

Тогда определим значения первых четырех $\varphi_i(\vec{x})$:

$$\varphi_1(\vec{x})=H_0(x_1)H_0(x_2)=1\cdot 1=1;$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = H_1(x_1)H_0(x_2) = 2x_1 \cdot 1 = 2x_1;$$
$$\varphi_3(\vec{x}) = H_0(x_1)H_1(x_2) = 1 \cdot 2x_2 = 2x_2;$$
$$\varphi_4(\vec{x}) = H_1(x_1)H_1(x_2) = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2,$$

при этом потенциальная функция $K(\vec{x},\vec{x}_i) = \sum_{n=1}^{4}\varphi_n(\vec{x})\varphi_n(\vec{x}_i)$ для элемента x_i будет иметь вид:

$$K(\vec{x},\vec{x}_i) = 1 + 4x_1x_1^{(i)} + 4x_2x_2^{(i)} + 16x_1x_2x_1^{(i)}x_2^{(i)}, \qquad (6.2)$$

где $x_1^{(i)}$ – составляющая x_1 от i-го элемента, $x_2^{(i)}$ – составляющая x_2 от i-го элемента.

Рассмотрим пример, в котором методом потенциалов требуется построить разделяющую функцию между двумя классами C_1 и C_2, для которых имеются представители: объекты $X_1(-1{,}0), X_2(1{,}1) \in C_1$ и объекты $X_3(2{,}0), X_4(1{,}-2) \in C_2$. В качестве начального значения разделяющей функции примем $K_0(\vec{x}) = 0$.

Алгоритм «Метод потенциалов»

1-й шаг. Суммарный потенциал на первом шаге вычисляется через суммарный потенциал на нулевом шаге и частный потенциал в первом объекте-образце следующим образом: $K_1(\vec{x}) = K_0(\vec{x}) + K(\vec{x},\vec{x}_1)$. Частный потенциал $K(\vec{x},\vec{x}_1)$ определяется с помощью выражения (6.2) путем подстановки в него координат первого объекта. В результате $K_1(\vec{x}) = 1 - 4x_1$. Определим значение разделяющей функции в точке X_2, подставив ее координаты в полученное выражение: $K_1(\vec{x}_2) = 1 - 4 = -3 < 0$. При такой классификации разделяющая функция требует корректировки в соответствии с равенством (6.1).

2-й шаг. $K_2(\vec{x}) = K_1(\vec{x}) + K(\vec{x},\vec{x}_2)$, где в результате подстановки координат объекта X_2 в выражение (6.2) получаем: $K(\vec{x},\vec{x}_2) = 1 + 4x_1 + 4x_2 + 16x_1x_2$. Тогда $K_2(\vec{x}) = 2 + 4x_2 + 16x_1x_2$. Определим значение разделяющей функции в точке X_3, подставив ее координаты в полученное выражение: $K_2(\vec{x}_3) = 2 > 0$. При такой классификации разделяющая функция требует корректировки в соответствии с равенством (6.1).

3-й шаг. $K_3(\vec{x}) = K_2(\vec{x}) - K(\vec{x},\vec{x}_3)$, где в результате подстановки координат объекта X_3 в выражение (6.2) получаем $K(\vec{x},\vec{x}_3) = 1 + 8x_1$. Тогда $K_3(\vec{x}) = 1 - 8x_1 + 4x_2 + 16x_1x_2$. Определим значение разделяющей функции в точке X_4, подставив ее координаты в полученное выражение: $K_3(\vec{x}_4) = -47 < 0$.

Классификация верна, и разделяющая функция не требует корректировки. Поэтому $K_3(\vec{x}) = K_4(\vec{x})$.

4-й шаг. Поскольку в начале алгоритма было сделано предположение для первого объекта, проверяем, как классифицируется точка X_1: $K_4(\vec{x}_1) = 9 > 0$. Классификация верна, и разделяющая функция не требует корректировки.

Таким образом, все четыре объекта-образца классифицированы правильно, и разделяющая функция описывается уравнением: $d(\vec{x}) = 1 - 8x_1 + 4x_2 + 16x_1x_2$, откуда $x_2 = \dfrac{8x_1 - 1}{16x_1 + 4}$. График этой функции приведен на рис. 1.

На нем видно, что объекты X_1 , X_2, принадлежащие первому классу, помечены значком $\times$, объекты X_3 , X_4, принадлежащие второму классу, – значком 0, и разделяющая функция является границей между областями двух классов.

Если в полученное уравнение разделяющей функции подставить координаты объектов-образцов, то для X_1 и X_2 ее значения будут положительными, а для X_3 и X_4 – отрицательными. Для классификации других объектов необходимо выполнить те же действия. Если значение разделяющей функции больше нуля, объект принадлежит первому классу, если ее значение меньше нуля – второму классу. В случае нулевого значения разделяющей функции предъявляемый объект находится на границе классов.

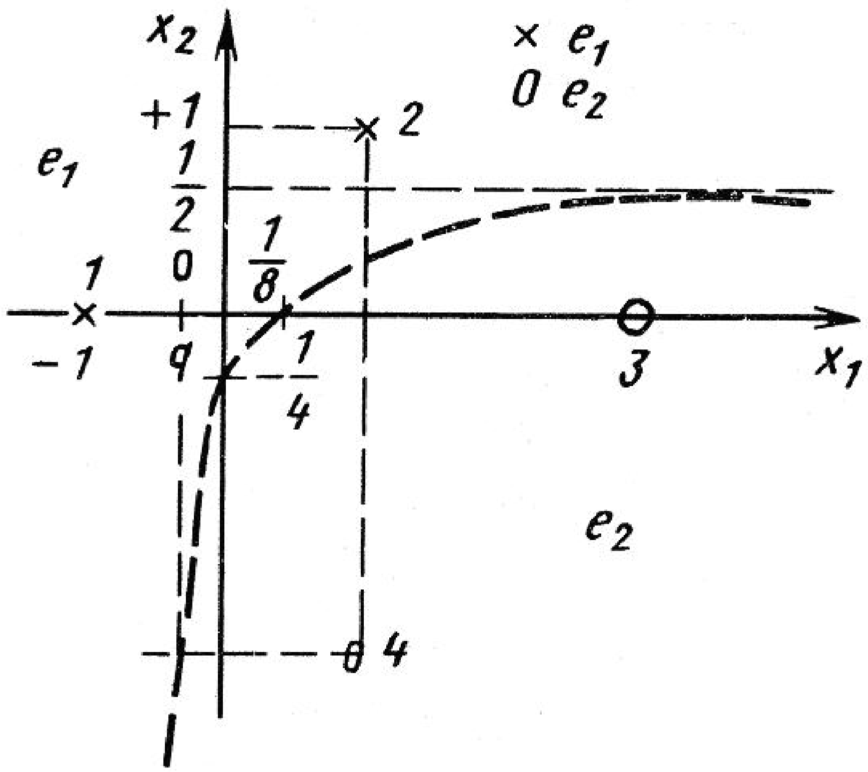

Рис. 1 – Разделяющая функция для двух классов