Введение в цифровую фильтрацию

Понятие цифрового фильтра

Под фильтрацией понимается любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

Преобразование динамики сигналов (и данных, которые несут эти сигналы) осуществляется в системах. Системы, избирательно меняющие форму сигналов (амплитудно-частотную или фазово-частотную характеристику), устранение или уменьшение помех, извлечение из сигналов определенной информации, разделение сигналов на определенные составляющие называют фильтрами. Соответственно, фильтры с любым целевым назначением являются частным случаем систем преобразования сигналов.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания, прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех). Основными методами цифровой фильтрации данных являются частотная селекция сигналов и оптимальная (адаптивная) фильтрация.

В настоящем курсе рассматриваются методы линейной обработки данных линейными дискретными системами. Линейными называют системы, которые осуществляют преобразование линейных комбинаций входных сигналов в суперпозицию выходных сигналов. Принцип реализации линейных систем, физический - в виде специальных микропроцессорных устройств, или алгоритмический - в виде программ на ЭВМ, существенного значения не имеет и определяет только их потенциальные возможности.

В общем случае термином **цифровой фильтр**(ЦФ) называют аппаратную или программную реализацию математического алгоритма, входом которого является цифровой сигнал, а выходом – другой цифровой сигнал с определенным образом модифицированной формой и(или) амплитудной и фазовой характеристикой. Классификация цифровых фильтров обычно базируется на функциональных признаках алгоритмов цифровой фильтрации, согласно которому ЦФ подразделяются на 4 группы: фильтры частотной селекции, оптимальные (квазиоптимальные), адаптивные и эвристические. Наиболее изученными и опробованными на практике являются ЦФ частотной селекции.

Разностное уравнение цифрового фильтра

Принцип разработки программы, закладываемой в цифровой вычислитель, во многих случаях базируется на аналоговых фильтрах (прототипах).

Одним из способов теоретического расчета выходного напряжения $y(t)$ аналогового фильтра является операция свертки его импульсной характеристики $h(t)$ с входным воздействием $x(t)$:

$$y(t)=\int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau . \tag{5.1}$$

Реальный фильтр – это некоторое аналоговое устройство, производящее операции в соответствии с математическим выражением (5.1).

Но эти математические операции может выполнить и цифровой вычислитель. Для этого интеграл заменяется суммой:

$$y(nT)=\sum_{k=0}^{N} h(kT)x(nT-kT)T ,$$

где N - разумно выбранное число суммируемых элементов;

$x(kT)$ - последовательность цифровых отсчетов дискретизированного входного воздействия $x(t)$;

$h(kT)$ - цифровые отсчеты импульсной характеристики заданного аналога-прототипа, являющиеся постоянными коэффициентами;

T - интервал дискретизации (величина постоянная).

Опуская постоянный множитель T, можно записать

$$y(nT)=\sum_{k=0}^{N} h(kT)x(nT-kT). \tag{5.2}$$

Выходной результат $y(nT)$ отличается от $y(t)$ только своей дискретной формой, которая восстанавливается в аналоговое колебание с помощью цифроаналогового преобразователя и формирующего фильтра. Следовательно, вычислитель, реализующий вычисление формулы (5.2), можно назвать цифровым фильтром, сохраняющим характеристики своего аналога-прототипа.

Получение эквивалентного цифрового фильтра, обладающего свойствами аналогового прототипа, базируется на операции дискретизации временных процессов, протекающих в цепях этого прототипа.

При дискретизации временных процессов производная по времени заменяется выражением:

$$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(t)-y(t-\Delta t)}{\Delta t}, \tag{5.3}$$

где Δt - приращение по времени.

В цифровых фильтрах Δt равно интервалу дискретизации T. Тогда производную (5.3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(nT)-y[(n-1)T]}{T}=\frac{y(n)-y(n-1)}{T},$$

где n - номер интервала дискретизации.

Дифференциальное уравнение простейшего фильтра, реализованного в виде однозвенной RC-цепи имеет следующий вид:

$$y(t)+\tau_{\text{ф}}\frac{dy(t)}{dt}=x(t)$$

где $\tau_{\text{ф}}=RC$;

R,C - номиналы сопротивления и емкости.

Заменив $y(t)$ на $y(n)$, $x(t)$ на $x(n)$, получим

$$y(n)=ax(n)+by(n-1), \tag{5.4}$$

где $a=\dfrac{T}{T+\tau_{\text{ф}}}, b=\dfrac{\tau_{\text{ф}}}{T+\tau_{\text{ф}}}$.

Уравнение (2.5) называется разностным. Оно позволяет без каких-либо дополнительных действий представить вычислительную структуру цифрового фильтра. Выходная последовательность $y(n)$ для RC-цепи является суммой двух последовательностей, определяемых первым и вторым слагаемым правой части уравнения.

Величины a,b называют коэффициентами цифрового фильтра.

Разностное уравнение цифровой RC-цепи, предполагает, что для образования выходного отсчета используется не только входной, но и задержанный на один временной дискрет выходной отсчет (отсчет полученный на один дискрет раньше), т.е. в вычислениях имеется цепь обратной связи. Такой фильтр называют рекурсивным.

Дискретная свертка

Дискретизация интеграла свертки (5.1) открывает новые возможности в синтезе цифровых фильтров. Так как интервал T - постоянная величина, то $y(t)$, $x(t)$, $h(t)$ являются функциями номера отсчета и выражение для дискретной свертки имеет вид:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n-m). \tag{5.5}$$

При проведении вычислений следует учитывать, что при фиксированном n значение m не может быть больше, чем n, следовательно $(n-m)\geq 0$.

Дискретная импульсная характеристика RC-цепи

$$h(n)=\exp\left(-\frac{T}{\tau_{\text{ф}}}n\right)=\exp\left(-\frac{T}{RC}n\right). \tag{5.6}$$

Формула (5.5) может рассматриваться как разностное уравнение, которое устанавливает , что выходной отсчет может быть представлен в виде текущего (при $m=0$) и задержанных значений входных отсчетов, умноженных на весовые коэффициенты, роль которых выполняет дискретная импульсная характеристика (ДИХ). Так как ДИХ этого фильтра имеет бесконечную протяженность во времени, то физически реализовать такое вычисление на практике невозможно. Физически реализуемый фильтр можно получить, если ограничить протяженность ДИХ. Тогда выражение (5.5) будет иметь вид:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{k}h(m)x(n-m)=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\ldots+h(k)x(n-k). \qquad (5.7)$$

В вычислениях по этой формуле отсутствует петля обратной связи, поэтому такой фильтр называется нерекурсивным. Так как его ДИХ является ограниченной такой цифровой фильтр относится к классу фильтров с конечной импульсной характеристикой – **КИХ-фильтров**. Импульсная характеристика фильтра с обратной связью, описываемого уравнением (5.4), бесконечная и такие фильтры называются фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой – **БИХ-фильтрами**.

Таким образом, для одного и того же аналогового фильтра получены две различные схемы вычислений цифровых фильтров.

Нерекурсивные фильтры требуют большего числа вычислений, однако при определенных условиях они позволяют получить линейную фазовую характеристику цифрового фильтра и обеспечивают устойчивость работы.

Комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра

Анализ свойств цифровых фильтров проводят путем исследования их частотных характеристик. Чтобы получить выражение для комплексного коэффициента передачи цифрового фильтра, на его вход необходимо подать испытательное воздействие в виде дискретизированной комплексной экспоненты:

$$x(n)=\exp(j\Phi \mathrm{n}), \qquad (5.8)$$

функционально эквивалентной дискретизированной синусоиде с цифровой частотой

$$\Phi=\omega T=2\pi fT=\frac{2\pi f}{f_{\text{Д}}}=2\pi\frac{f}{f_{\text{Д}}}.$$

Реакция фильтра на такое воздействие будет представлять собой также синусоидальное колебание с той же частотой, но другой амплитудой $H(\Phi)$ и фазовым сдвигом $\varphi(\Phi)$:

$$y(n)=H(\Phi)\exp[j\varphi(\Phi)]\exp(j\Phi \mathrm{n})=H(j\Phi)x(n).$$

Множитель

$$H(j\Phi) = H(\Phi)\exp[j\varphi(\Phi)] \tag{5.9}$$

представляет собой комплексный коэффициент передачи фильтра.

Модуль комплексного коэффициент передачи $|H(j\Phi)| = H(\Phi)$ - это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра; $\varphi(\Phi)$ - фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра.