Дискретизация сигналов

Принципы дискретизации

Сущность дискретизации аналоговых сигналов заключается в том, что непрерывная во времени аналоговая функция $x(t)$ заменяется последовательностью коротких импульсов, амплитудные значения которых c_n определяются с помощью весовых функций, либо непосредственно выборками (отсчетами) мгновенных значений сигнала $x(t)$ в моменты времени t_n. Представление сигнала $x(t)$ на интервале Т совокупностью дискретных значений c_n записывается в виде:

$$(c_1, c_2, ..., c_N) = A[x(t)],$$

где A - оператор дискретизации.

Запись операции восстановления сигнала $x(t)$:

$$x''(t) = B[(c_1, c_2, ..., c_N)].$$

Выбор операторов A и B определяется требуемой точностью восстановления сигнала. Наиболее простыми являются линейные операторы. В общем случае:

$$c_n = \int_t q_n(t)x(t)dt, \qquad (3.33)$$

где $q_n(t)$ - система весовых функций.

Отсчеты в выражении (3.33) связаны с операцией интегрирования, что обеспечивает высокую помехоустойчивость дискретизации. Однако в силу сложности технической реализации "взвешенного" интегрирования, последнее используется достаточно редко, при высоких уровнях помех. Более широкое распространение получили методы, при которых сигнал $x(t)$ заменяется совокупностью его мгновенных значений $x(t_n)$ в моменты времени t_n. Роль весовых функций в этом случае выполняют решетчатые функции. Отрезок времени Δt между соседними отсчетами называют шагом дискретизации. Дискретизация называется равномерной с частотой $F = \frac{1}{\Delta t}$, если значение Δt постоянно по всему диапазону преобразования сигнала. При неравномерной дискретизации значение Δt между выборками может изменяться по определенной программе или в зависимости от изменения каких-либо параметров сигнала.

Воспроизведение непрерывного сигнала по выборкам может проводиться как на основе ортогональных, так и неортогональных базисных функций. Воспроизводящая функция $x'(t)$ соответственно представляется аппроксимирующим полиномом:

$$x'(t) = \sum_n c_n v_n(t), \qquad (3.34)$$

где $v_n(t)$ - система базисных функций. Ортогональные базисные функции обеспечивают сходимость ряда к $x(t)$ при $n \Rightarrow \infty$. Оптимальными являются методы дискретизации, обеспечивающие минимальный числовой ряд при заданной погрешности воспроизведения сигнала. При неортогональных базисных функциях используются, в основном, степенные алгебраические полиномы вида:

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n t^n \, . \tag{3.35}$$

Если значения аппроксимирующего полинома совпадают со значениями выборок в моменты их отсчета, то такой полином называют интерполирующим. В качестве интерполирующих полиномов обычно используются многочлены Лагранжа. Для реализации интерполирующих полиномов необходима задержка сигнала на интервал дискретизации, что в системах реального времени требует определенных технических решений. В качестве экстраполирующих полиномов используют, как правило, многочлены Тейлора.

Естественным требованием к выбору частоты дискретизации является внесение минимальных искажений в динамику изменения сигнальных функций. Логично полагать, что искажения информации будут тем меньше, чем выше частота дискретизации F. С другой стороны также очевидно, что чем больше значение F, тем большим количеством цифровых данных будут отображаться сигналы, и тем большее время будет затрачиваться на их обработку. В оптимальном варианте значение частоты дискретизации сигнала F должно быть необходимым и достаточным для обработки информационного сигнала с заданной точностью, т.е. обеспечивающим допустимую погрешность восстановления аналоговой формы сигнала (среднеквадратическую в целом по интервалу сигнала, либо по максимальным отклонениям от истинной формы в характерных информационных точках сигналов).

Равномерная дискретизация

Спектр дискретного сигнала. Допустим, что для обработки задается произвольный аналоговый сигнал $x(t)$, имеющий конечный и достаточно компактный фурье-образ $X(f)$. Равномерная дискретизация непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой F (шаг $\Delta t = \frac{1}{F}$) с математических позиций означает умножение функции $x(t)$ на решетчатую функцию $Ш_{\Delta t}(t) = \sum_k \delta(t - k\Delta t)$ – непрерывную последовательность импульсов Кронекера:

$$x_{\Delta t}(t) = x(t) Ш_{\Delta t}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t). \tag{3.36}$$

С учетом известного преобразования Фурье решетчатой функции

$$Ш_{\Delta t}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n\Delta F) = F \cdot Ш_{F}(f)$$

Фурье-образ дискретной функции $x_{\Delta t}(t)$:

$$X_F(f) = X(f) * F \cdot Ш_{F}(f).$$

Отсюда, для спектра дискретного сигнала:

$$X_F(f) = F \cdot X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n\Delta F) = F \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF). \tag{3.37}$$

Из выражения следует, что спектр дискретного сигнала представляет собой *непрерывную периодическую функцию* с периодом F, совпадающую (при определенных условиях конечности спектра непрерывного сигнала) с функцией $F \cdot X(f)$ непрерывного сигнала $x(t)$ в пределах центрального периода от $-f_N$ до f_N, где $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{F}{2}$. Частоту f_N (или для круговой частоты $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$) называют частотой Найквиста. Центральный период функции $X_F(f)$ называют главным частотным диапазоном.

Интуитивно понятно, что если спектр главного частотного диапазона с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром непрерывного сигнала, то по этому спектру может быть восстановлена не только форма дискретного сигнала, но и форма исходного непрерывного сигнала. При этом шаг дискретизации и соответствующее ему значение частоты Найквиста должны иметь определяющее значение.

Как правило, шаг дискретизации сигнала (шаг числовых массивов) условно принимают равным $\Delta t = 1$, при этом главный частотный диапазон занимает интервал $-0.5 \le f \le 0.5$, или, в шкале угловых частот□ соответственно $-\pi \le \omega \le \pi$.

Для того чтобы периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией аналогового сигнала, не изменяло спектр в главном частотном диапазоне (по отношению к спектру исходного аналогового сигнала), необходимо и достаточно, чтобы максимальные частотные составляющие $f_{\max}$ в спектре аналогового сигнала не превышали частоты Найквиста $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{F}{2}$. Это означает, что частота дискретизации сигнала должна быть минимум в два раза выше максимальной частотной составляющей в спектре сигнала:

$$F = \frac{1}{\Delta t} \ge f_{\max}, \tag{3.38}$$

что обеспечивает выход спектра на нулевые значения на концах главного диапазона.

Другими словами, на одном периоде колебаний с частотой $f_{\max}$ должно быть минимум две точки отсчета. Это и понятно – по одной точке отсчета на периоде гармонического сигнала определение трех неизвестных параметров данной гармоники (амплитуда, частота, фаза) невозможно.

Если условие (3.38) нарушается, искажения частотного спектра исходного аналогового сигнала неизбежны.

Характер возникающих искажений во временной области при нарушении условия (3.38) можно наглядно видеть на рисунке 3.5. На рисунке показаны три возможных варианта соотношения частот гармонических сигналов с постоянной частотой их дискретизации.

1. График А – частота гармонического сигнала меньше частоты Найквиста. Дискретным отсчетам может соответствовать только исходная гармоника, амплитуда, частота и фаза которой могут быть однозначно определены по любым трем последовательным точкам (три уравнения, три неизвестных).

2. График В – частота гармонического сигнала равна частоте Найквиста. Это означает периодическое повторение каждой пары последовательных отсчетов, а, следовательно, для решения имеется только два уравнения с тремя неизвестными с возможностью определения только частоты, и то при условии, что начальная фаза сигнала не совпадает с начальной фазой частоты дискретизации (в этом случае все отсчеты нулевые). Амплитуда и фаза сигнала определяются однозначно только при условии совпадения отсчетов с экстремумами гармоники.

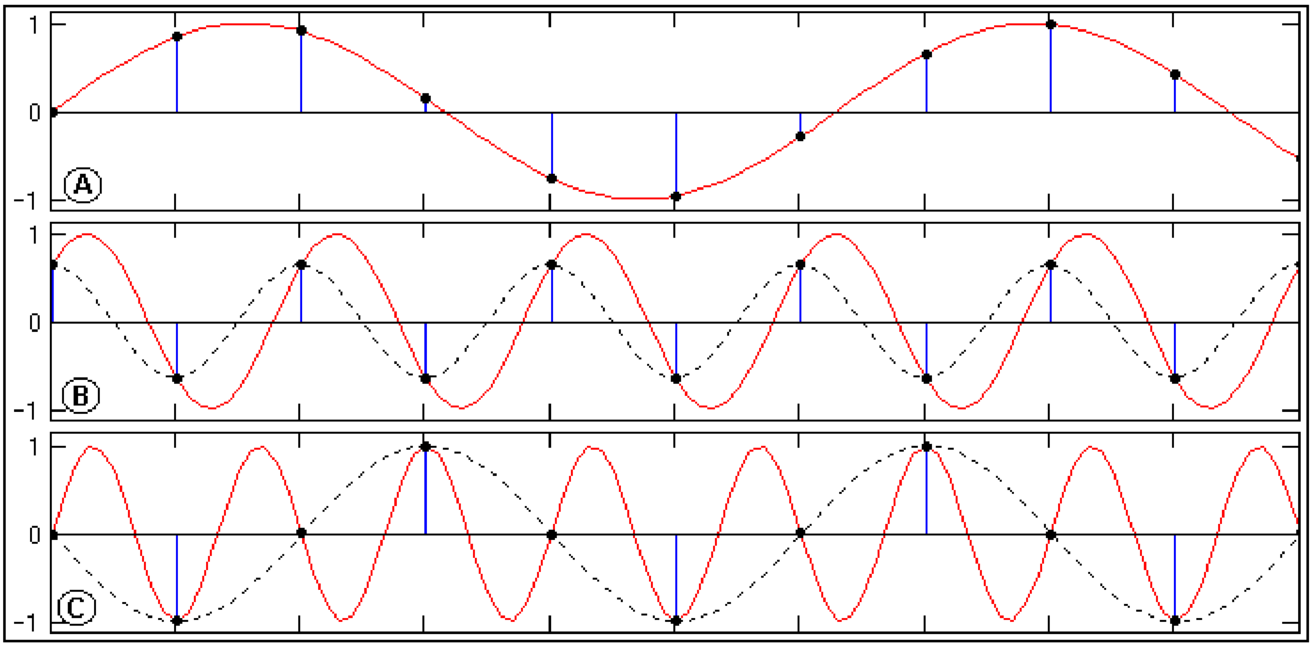

Рисунок 3.5 - Дискретизация гармоник с разной частотой

3. График С – частота гармонического сигнала больше частоты Найквиста. Решение трех уравнений по трем последовательным точкам позволяет определить амплитуду гармоники, но дает искаженные значения частоты и фазы колебания (показано пунктиром). Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот* (aliasing). Частоты гармонических колебаний выше частоты Найквиста как бы зеркально "отражаются" в главный частотный диапазон от его границ (на частоте Найквиста). Этот эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля (и любых других быстро вращающихся

объектов) на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров.

Интерполяционный ряд Котельникова-Шеннона. Спектр дискретизированного сигнала (3.37) представляет собой сумму сдвинутых копий исходного аналогового сигнала с шагом сдвига, равным частоте дискретизации. Очевидно, что если спектры копий не перекрываются, то по центральной копии дискретного спектра можно восстановить исходный аналоговый сигнал с абсолютной точностью. Умножая функцию (3.37) на прямоугольную весовую функцию $\Pi_F(f)$, равную 1 в пределах главного частотного диапазона $\left[-\frac{F}{2},\frac{F}{2}\right]$ и нулю за его пределами, получаем непрерывный спектр в бесконечных по частоте границах, равный спектру $F \cdot X(f)$ в пределах главного частотного диапазона:

$$F \cdot X(f) = F \cdot [X(f) * Ш_F(f)] \cdot \Pi_F(f). \tag{3.39}$$

Обратное преобразование Фурье такого спектра должно давать конечный и непрерывный сигнал. Произведем обратное преобразование обеих частей равенства (3.39):

$$F \cdot [X(f) * Ш_F(f)] \Leftrightarrow x_{\Delta t}(t), \quad \Pi_F(f) \Leftrightarrow F\frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t};$$

$$F \cdot x(t) = x_{\Delta t}(t) * F\frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t};$$

$$x(t) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

Дискретизированный сигнал $x_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$ представляет собой сумму последовательных весовых импульсов Кронекера, сдвинутых на интервал Δt, со значениями веса, равными значениям отсчетов функции $x(t)$ в моменты $k\Delta t$. При прохождении такого сигнала через систему с импульсным откликом

$$h(t) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t}$$

каждый весовой импульс Кронекера возбудит на выходе соответствующую последовательную серию сдвинутых и масштабированных копий оператора фильтра. Отсюда, с учетом очевидного равенства

$$\delta(t - k\Delta t) * \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t} = \frac{\sin(\pi F(t - k\Delta t))}{\pi F(t - k\Delta t)},$$

выходной сигнал будет представлять собой сумму сдвинутых весовых импульсных откликов системы, где значение веса определяется отсчетами дискретного сигнала:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\frac{\sin(\pi F(t-k\Delta t))}{\pi F(t-k\Delta t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)}. \quad (3.40)$$

Эта конечная формула носит название интерполяционного ряда Котельникова-Шеннона. Из нее следует, что если наибольшая частота в спектре произвольной непрерывной функции $x(t)$ не превышает частоты ее дискретизации, то она без потери точности может быть представлена в виде числовой последовательности дискретных значений $x(k\Delta t), k=0,1,2,......$, и однозначно восстановлена по этой последовательности. В этом и состоит сущность теоремы отсчетов Котельникова. В зарубежной литературе она называется также теоремой Шеннона или теоремой дискретизации (sampling teorem).

Дискретизируемые сигналы, как правило, содержат широкополосные шумы, высокочастотные составляющие которых неизбежно перекрываются при периодизации спектра, и увеличивают погрешность восстановления сигналов. Для исключения этого фактора перед проведением дискретизации должно быть обеспечено подавление всех частот выше частоты Найквиста, т.е. выполнена низкочастотная фильтрация сигнала.