Лекция 2

План лекции:

1. Две группы методов распознавания образов.
2. Понятие разделяющей функции.
3. Линейные разделяющие функции для *N* классов.

2.1 Методы распознавания образов

В настоящее время существует большое множество методов классификации и распознавания образов. Однако все методы распознавания можно разделить на две группы. Первая основана на понятии пространства признаков и их обработки в этом пространстве. Вторая – на исследовании конструкции рассматриваемых образов (синтаксическое распознавание).

Для первой группы методов в качестве основополагающей принята гипотеза о возможности представления образа в виде вектора, принадлежащего множеству *V*. Множество образов представляется в виде множества векторов, состоящего из *N* подмножеств таких, что каждый вектор, отнесенный в результате классификации к *j*-ому классу, принадлежит подмножеству E_j.

Свойства множества *V* могут быть записаны в виде:

$$\bigcup_{i=1}^{N} E_i = V, E_i \cap E_j = 0 (\forall i = j).$$

Если подмножества образуют разделение *П(V)* множества *V*, то его называют полностью сепарабельным. Для пространства признаков на практике такое разделение бывает крайне редко. Чаще пространство признаков представляется кусочно-сепарабельным. Задача классификации состоит в отыскании функции *f*, обеспечивающей разделение пространства *V* на требуемые классы

f: V->П(V).

Процедура классификации состоит в том, чтобы для каждой области R_l найти решающую функцию $g_l(x)$, такую, что если

$g_i(\bar{x}) > g_j(\bar{x}),\ mo\ \bar{x} \in R_i\ \forall j = 1,2...N$, где N – общее количество областей.

2.2 Разделяющая функция

Разделяющую функцию часто представляют в виде линейной суммы:

$g(\bar{x}) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + ... + \omega_n x_n$, где ω_i – весовые коэффициенты, каждый из которых относится к определенной составляющей. Для удобства записи вводится весовой коэффициент с нулевым индексом ω_0. Это позволяет записать решающую функцию в более компактной форме:

$g(\bar{x}_a)=\bar{\omega}\bar{x}_a, где\ \bar{x}_a=\{1,x_1,x_2...x_n\}$ – вектор, в число составляющих которого входит дополнительно одна вещественная константа. Ее величину обычно принимают равной единице. Решающее правило d для их разделения можно записать в виде:

$$d=\begin{cases} c_1, если\ \ g(\bar{x})\geq 0, \\ c_2, в\ противном\ \ случае. \end{cases}$$

Для случая N сепарабельных классов *(N>2)* решение о принадлежности объекта к определенному классу будет:

$$d=\begin{cases} c_i, если\ \ g_i(\bar{x})=\bar{\omega}_i\,\bar{x}_a\geq 0, \\ \bar{c}_i, если\ \ g_i(\bar{x})<0 \end{cases},$$

где C – множество, состоящее из N классов. $C=\{c_1,c_2,...c_N\}, c_i+\bar{c}_i=C.$

В процессе построения разделяющей функции основная задача заключается в том, чтобы найти весовые коэффициенты вида $\bar{\omega}_i=\{\omega_{0i},\omega_{1i}...\}$ для каждого конкретного применения.

Одной из важных операций в процессе решения задачи распознавания образов является операция выявления общих характеристик предъявляемых объектов. Отнесение их к одному классу может рассматриваться как обобщение исходных данных. Для этой операции характерны два связанных действия – объединение подобных и отделение отличающихся объектов. Понятия подобия и сходства должны быть по возможности формализованы. Для этого используется понятие “расстояние”. Чем меньше расстояние между объектами x и y, тем больше между ними сходство.

В процессе классификации необходимо решать вопросы о качестве получаемого группирования. Для оценки его характеристик можно использовать показатель среднеквадратичного отклонения такого вида:

$$J=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\bar{x}\in E_j}\left\|\bar{x}-\bar{m}_j\right\|^2,$$

где N – число рассматриваемых областей. E_j – множество значений, принадлежащих области j, m_j – средний вектор множества j.

$\bar{m}_j=\dfrac{1}{N_j}\sum_{x\in E_j}\bar{x}$, N_j – число значений в E_j.

Иногда может получиться так, что формируются группы, состоящие либо из разрозненных элементов, либо из не имеющих семантического смысла, т.е. внутренне не связанные друг с другом. Это хорошо видно из сопоставления рисунков 1 и 2. На рис. 1 показаны две области N_1 и N_2, полученные методом группирования точек. Их совокупность в каждой группе дает возможность составить по ним представление об исходной фигуре. И наоборот, если исходные данные сгруппированы в пять областей, как показано на рис. 2, то по ним невозможно составить представления о предъявляемых фигурах. Даже если внутри каждой области перебрать все возможные варианты построения всех отрезков, попарно соединяющих все имеющиеся точки.

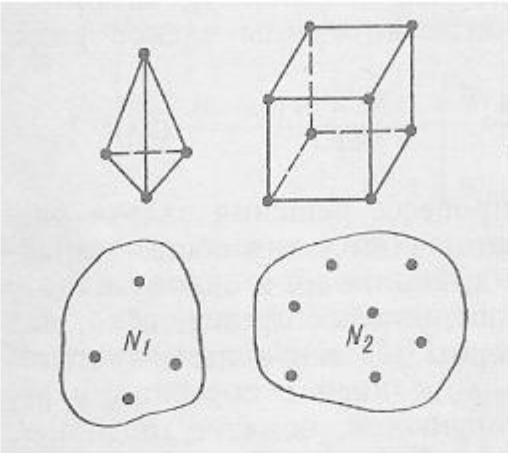

Рис. 1 – Группирование точек

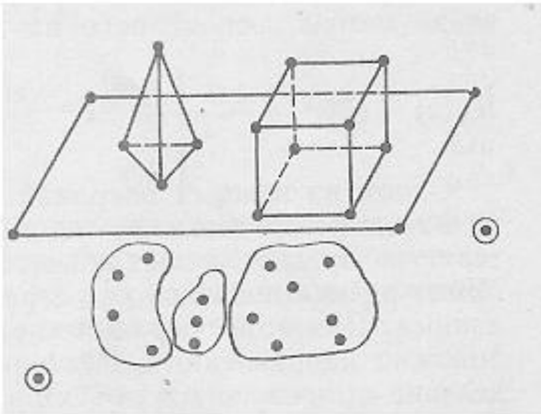

Рис. 2 – Группирование точек

2.3 Линейные разделяющие функции для N классов

Рассмотрим случаи применения линейных разделяющих функций для разбиения объектов более чем на два класса.

Случай 1. Каждый класс отделяется от всех остальных одной разделяющей поверхностью. Тогда существует *M* решающих правил, обладающих свойством

$$d_i(x) = w_i x \begin{Bmatrix} > 0, если\ x \in \omega_i, \\ < 0, если\ x \notin \omega_i \end{Bmatrix}, i = 1, 2, ..., M.$$

На рис. 3 приведен пример, иллюстрирующий *случай 1*. Здесь каждый класс можно отделить от всех остальных с помощью одной разделяющей границы. Так, например, если некоторый образ *x* принадлежит классу ω_1, на основании геометрических соображений заключаем, что $d_1(x) > 0,\ d_2(x) < 0,\ d_3(x) < 0.$ Граница, отделяющая класс ω_1 от остальных, определяется значениями *x*, при которых $d_1(x) = 0.$

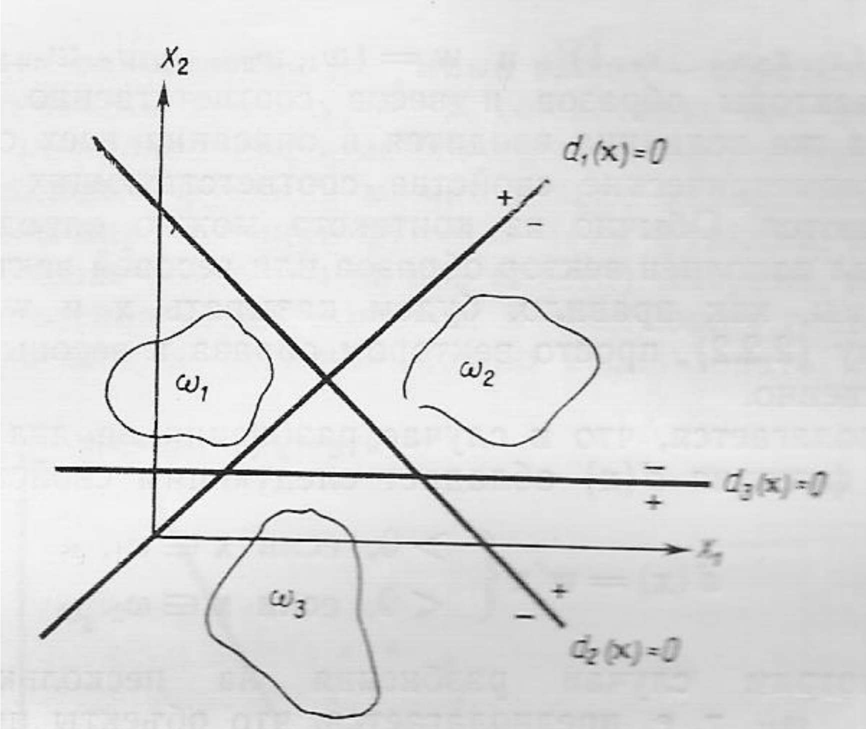

Рис. 3 – Случай 1 разделения на несколько классов

Рассмотрим численную иллюстрацию этого случая. Пусть решающие правила, соответствующие рис. 2.4, имеют вид: $d_1(x) = -x_1 + x_2$, $d_2(x) = x_1 + x_2 - 5$, $d_3(x) = -x_2 + 1$. Следовательно, три разделяющие границы определяются уравнениями: $-x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 - 5 = 0$, $-x_2 + 1 = 0$.

Следовательно, область, соответствующая классу ω_1, включает область с той стороны от прямой $d_1(x) = -x_1 + x_2 = 0$, где $d_1(x)$ положительна, и область отрицательных значений функций $d_2(x)$ и $d_3(x)$, ограниченную прямыми $d_2(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0$, *и* $d_3(x) = -x_2 + 1 = 0$. Эта область отмечена на рис. 4, и сопоставление его с рис. 2.5 показывает, что класс ω_1, занимающий небольшой участок, в действительности – безграничен. Области, соответствующие классам ω_2 и ω_3, также показаны на рис. 4.

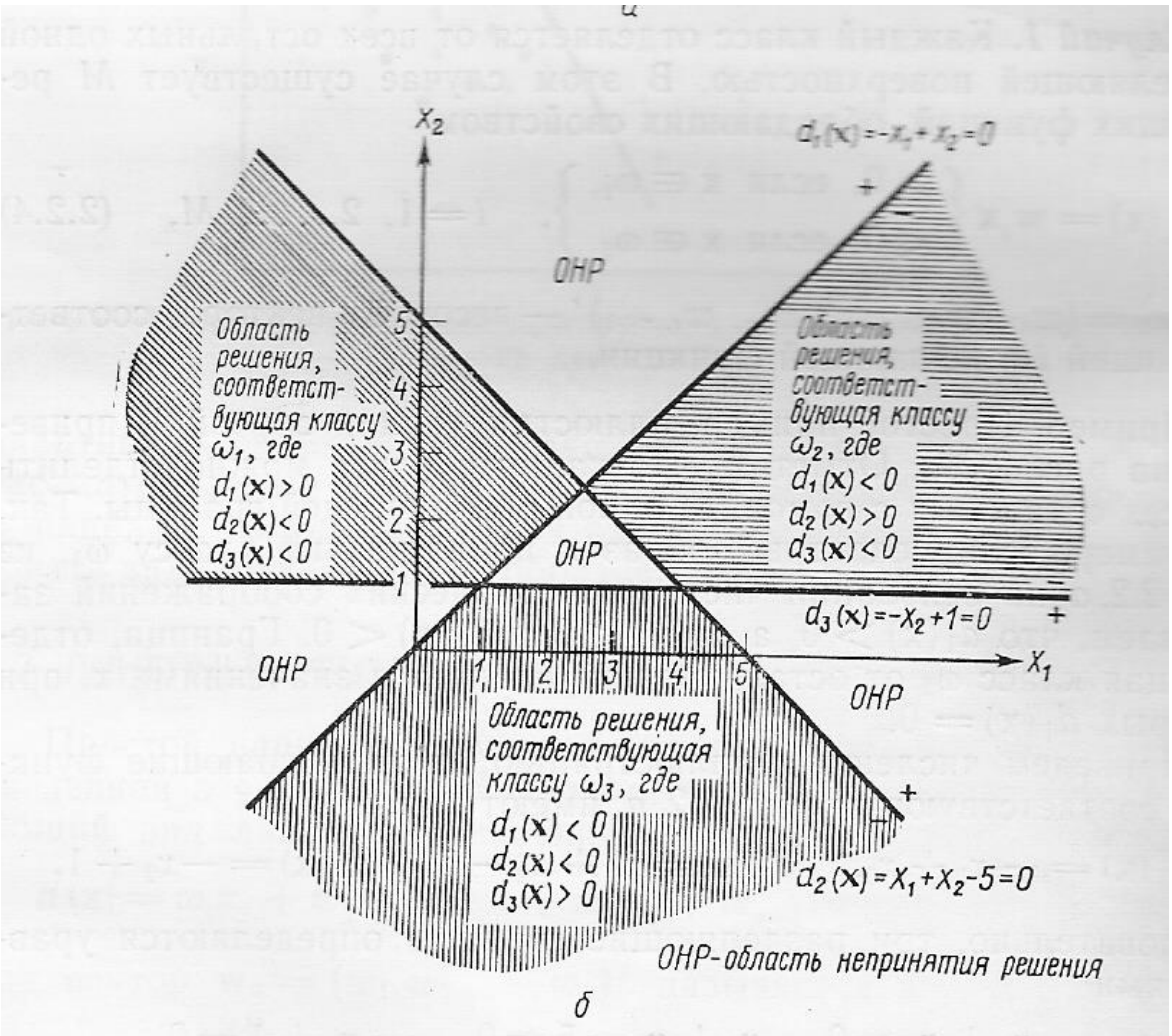

Рис. 4 – Иллюстрация к случаю 1 разделения на несколько классов

Если функция $d_i(x)$ больше нуля при более чем одном значении i, рассматриваемая схема классификации не позволяет найти решение. Это справедливо и при $d_i(x) < 0$ для всех i. На рис. 4 существуют четыре области неопределенности, соответствующие одной из этих ситуаций.

Отнесение неклассифицированного объекта к одному из трех классов, определяемых рассмотренными решающими функциями, выполняется следующим образом. Пусть требуется классифицировать образ x=(6, 5). Подстановка его признаков в три решающие функции дает следующее: $d_1(x) = -1, d_2(x) = 6, d_3(x) = -4.$ Так как $d_2(x) > 0$ при $d_1(x) < 0$ и $d_3(x) < 0,$ образ зачисляется в класс $\omega_2.$

Случай 2. Каждый класс отделяется от любого другого класса «индивидуальной» разделяющей поверхностью, т.е. классы попарно разделимы. В этом случае существует M(M-1)/2 (число сочетаний из M классов по два) разделяющих поверхностей. Решающие функции имеют вид $d_{ij}(x) = w`_{ij}\, x$ и обладают тем свойством, что если образ x принадлежит классу ω_i, то $d_{ij}(x) > 0$ для всех $i \neq j;$ кроме того, $d_{ij}(x) = -d_{ji}(x).$

На рис. 5 представлены три класса образов, разделенных согласно случаю 2. Очевидно, что ни один класс нельзя отделить от всех остальных с помощью единственной разделяющей поверхности. Каждая из приведенных на рис. 3 границ обеспечивает разделение двух классов. Так, например, хотя граница $d_{12}(x)=0$ проходит через класс ω_3, она дает эффективное разделение только для классов ω_1 и ω_2.

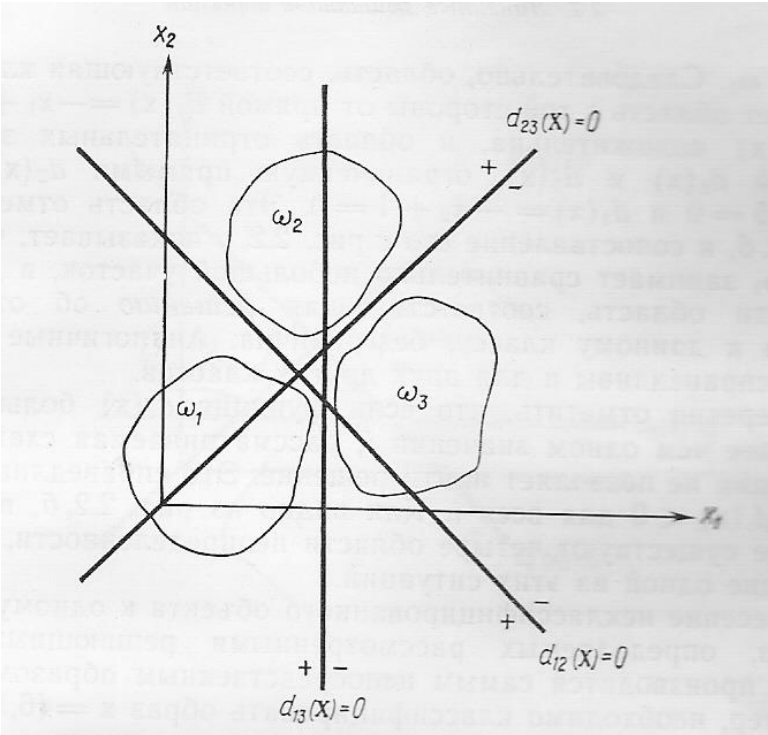

Рис. 5 – Случай 2 разделения на несколько классов

Пусть решающие функции имеют следующий вид:
$d_{12}(x)=-x_1-x_2+5,\ d_{13}(x)=-x_1+3,\ d_{23}(x)=-x_1+x_2.$

Разделяющие границы получим, приравнивая решающие функции нулю. Здесь области решений могут содержать несколько зон, где соответствующие функции положительны. Область, относящаяся к классу ω_1, определяется значениями образа *x*, при которых $d_{12}(x)>0$ и $d_{13}(x)>0$. Значение решающей функции $d_{23}(x)$ в этой области не существенно, поскольку данная решающая функция никак не связана с классом ω_1.

Области, определяемые тремя указанными решающими функциями, представлены на рис. 6. Для выделения областей, соответствующих разным классам, использовано условие $d_{ij}(x)=-d_{ji}(x)$. Поэтому поскольку $d_{12}(x)=-x_1-x_2+5,\ d_{21}(x)=x_1+x_2-5,$ то зона положительности функции $d_{12}(x)$ совпадает с зоной отрицательности функции $d_{21}(x)$. Как и в случае 1, области решения безграничны и существуют области неопределенности, в которых условия случая 2 не выполняются.

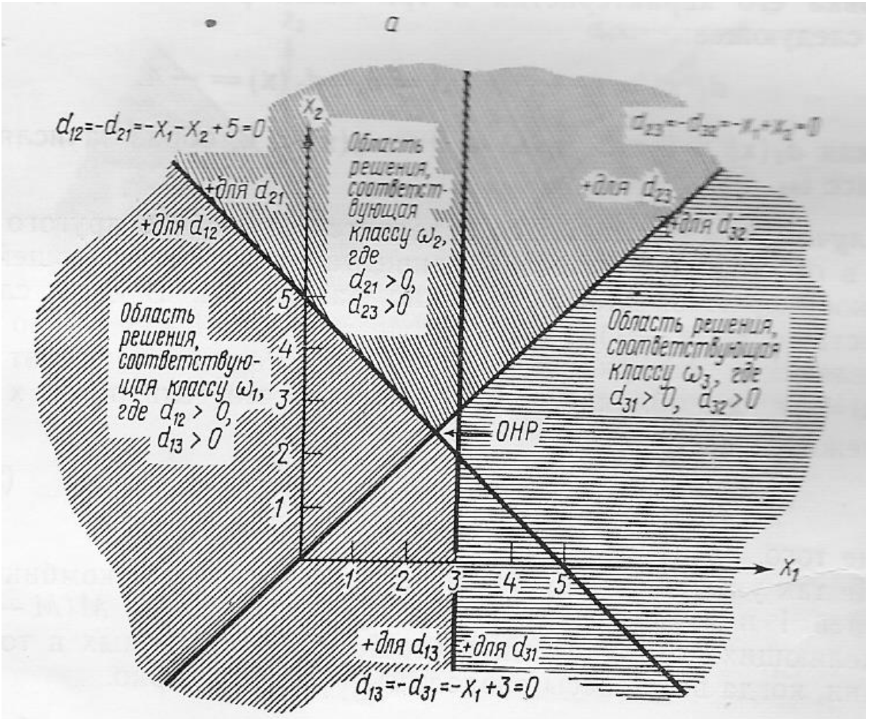

Рис. 6 – Иллюстрация к случаю 2 разделения на несколько классов

Рассмотрим классификацию объекта, заданного вектором x=(4, 3). Подстановка его признаков в выбранные решающие функции дает следующее: $d_{12}(x)=-2,\ d_{13}(x)=-1,\ d_{23}(x)=-1.$

Следовательно, $d_{21}(x)=2,\ d_{31}(x)=1, d_{32}(x)=1.$ Поскольку $d_{3j}(x)>0$ для j=1, 2 и значения функций не попадают в область неопределенности, то рассматриваемый образ зачисляется в класс ω_3.

Случай 3. Существует М решающих функций $d_k(x)=w_k x, k=1,2,...M$, таких, что если образ x принадлежит классу ω_i, то $d_i(x)>d_j(x)$ для всех $j\neq i$. Эта ситуация является разновидностью случая 2, т.к. можно положить $d_{ij}(x)=d_i(x)-d_j(x)=(w_i-w_j)x=w_{ij}x,\ w_{ij}=w_i-w_j.$

Очевидно, что если $d_i(x)>d_j(x)$ для всех $j \neq I$, т.е. если классы разделимы, как в случае 3, то они автоматически разделимы и как в случае 2.

Граница между классами ω_i и ω_j определяется теми значениями вектора x, при которых имеет место равенство $d_i(x)=d_j(x)$. Поэтому при выводе уравнения разделяющей границы для классов ω_i и ω_j значения решающих функций $d_i(x)$ и $d_j(x)$ используются совместно.

Пример случая 3 приведен на рис. 7. Для образов, принадлежащих классу ω_1, должны выполняться условия $d_1(x)>d_2(x),\ d_1(x)>d_3(x).$ В общем случае требуется, чтобы входящие в класс ω_i образы располагались в положительных зонах поверхностей $d_i(x)-d_j(x)=0,\ j=1,2,...M, i\neq j.$

Положительная зона границы $d_i(x) - d_j(x) = 0$ совпадает с отрицательной зоной границы $d_j(x) - d_i(x) = 0$.

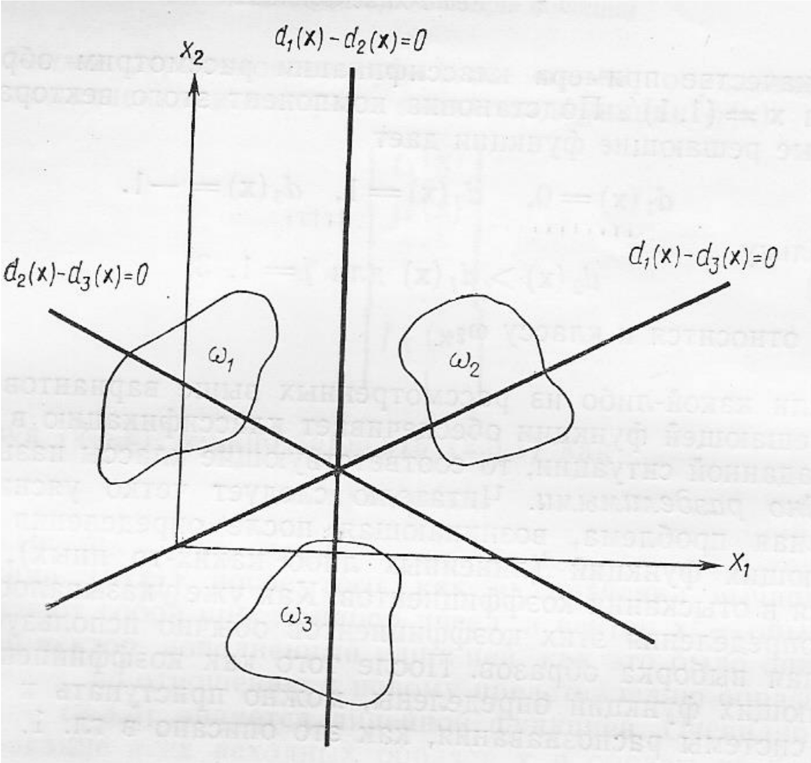

Рис. 7 – Случай 3 разделения на несколько классов

Пусть в качестве решающих функций выбраны следующие: $d_1(x) = -x_1 + x_2$, $d_2(x) = x_1 + x_2 - 1$, $d_3(x) = -x_2$. Разделяющие границы для трех классов выглядят при этом так:

$d_1(x) - d_2(x) = -2x_1 + 1 = 0,$

$d_1(x) - d_3(x) = -x_1 + 2x_2 = 0,$

$d_2(x) - d_3(x) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0.$

Для того чтобы определить область решений, соответствующую классу ω_1, необходимо выделить область, в которой выполняются неравенства $d_1(x) > d_2(x)$, $d_1(x) > d_3(x)$. Эта область совпадает с положительными зонами для прямых $-2x_1 + 1 = 0$ и $-x_1 + 2x_2 = 0$. Область принятия решения о принадлежности образа классу ω_2 совпадает с положительными зонами для прямых $2x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 2x_2 - 1 = 0$. Область, отвечающая классу ω_3, определяется положительными зонами для прямых $x_1 - 2x_2 = 0$ и $-x_1 - 2x_2 + 1 = 0$. Иллюстрация случая 3 приведена на рис. 8.

В случае 3 области неопределенности как таковые отсутствуют, за исключением самих разделяющих границ.

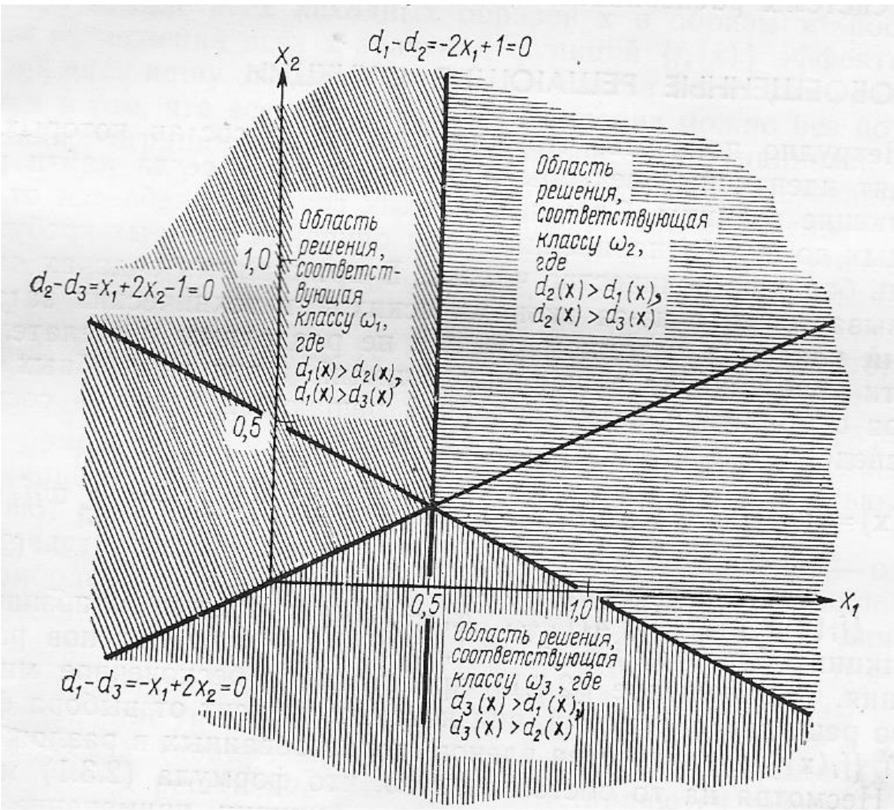

Рис. 8 – Иллюстрация к случаю 3 разделения на несколько классов

В качестве примера классификации рассмотрим обработку образа x=(1,1). Подстановка признаков образа в выбранные решающие функции дает следующие значения:
$d_1(x)=0,\ d_2(x)=1,\ d_3(x)=-1.$ Поскольку $d_2(x)>d_j(x),\ j=1,3,$ образ относится к классу ω_2.

Если какой-либо из рассмотренных вариантов линейной решающей функции обеспечивает классификацию в некоторой заданной ситуации, то соответствующие классы называются *линейно разделимыми.* Основная проблема, возникающая после определения набора решающих функций, заключается в отыскании коэффициентов. Для их определения обычно используется доступная выборка образов. После того как коэффициенты всех решающих функций определены, можно приступать к построению системы распознавания.