Цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой

Одним из наиболее распространенных способов получения цифровой передаточной функции фильтра с бесконечной импульсной характеристикой является билинейное преобразование аналоговой передаточной функции.

Если аналоговая передаточная функция имеет вид

$$H(P) = \frac{d_0 + d_1 P + d_2 P^2}{c_0 + c_1 P + c_2 P^2}, \tag{5.55}$$

то путем замены

$$P = l \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \tag{5.56}$$

$$l = ctg\left(\frac{\pi}{f_д / f_{ср}}\right), \tag{5.57}$$

где $f_д$ - частота дискретизации при аналого-цифровом преобразовании;

$f_{ср}$ - частота среза фильтра;

можно получить цифровую передаточную функцию фильтра.

$$H(z) = \frac{d_0 + d_1 l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d_2 l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + z^{-1}\right)^2}}{c_0 + c_1 l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + c_2 l^2 \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + z^{-1}\right)^2}} =$$

$$= \frac{d_0\left(1 + z^{-1}\right)^2 + d_1 l\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right) + d_2 l^2\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)}{c_0\left(1 + z^{-1}\right)^2 + c_1 l\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right) + c_2 l^2\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(d_0 + d_1 l + d_2 l^2\right) + \left(2d_0 - 2d_2 l^2\right)z^{-1} + \left(d_0 - d_1 l + d_2 l^2\right)z^{-2}}{\left(c_0 + c_1 l + c_2 l^2\right) + \left(2c_0 - 2c_2 l^2\right)z^{-1} + \left(c_0 - c_1 l + c_2 l^2\right)z^{-2}} =$$

$$= \frac{D_0 + D_1 z^{-1} + D_2 z^{-2}}{1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2}}, \tag{5.58}$$

где

$$D_0 = \frac{d_0 + d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad D_1 = \frac{2d_0 - 2d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \; D_2 = \frac{d_0 - d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \tag{5.59}$$

$$C_0 = 1; \quad C_1 = \frac{2c_0 - 2c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \quad C_2 = \frac{c_0 - c_1 l + c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2}; \qquad (5.60)$$

Передаточная функция фильтра нижних частот в общем виде может быть записана как

$$H(P) = \frac{A_0}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + ... + c_n P^n}, \qquad (5.61)$$

где c_1, c_2, ... c_n - положительные действительные коэффициенты.

Порядок фильтра определяется максимальной степенью переменной P. Для большего удобства при реализации фильтра полином знаменателя раскладывается на множители:

$$H(P) = \frac{A_0}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)(1 + a_2 P + b_2 P^2)(1 + a_3 P + b_3 P^2)....}, \qquad (5.62)$$

где a_i, b_i - положительные действительные коэффициенты. Для нечетных порядков полинома коэффициент b_i равен нулю.

Параметры фильтра могут быть оптимизированы по различным критериям. Для удовлетворения каждому из выбранных критериев коэффициенты a_i и b_i должны иметь определенные значения. В справочных изданиях приводятся значения коэффициентов a_i и b_i для различных модификаций фильтров нижних частот.

От передаточной функции фильтра нижних частот можно перейти к фильтрам других типов (верхних частот, полосовому и т.д.).

Передаточная функция одного звена фильтра низких частот

$$H(P)_{ФН} = \frac{1}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)}, \qquad (5.63)$$

т.е. применительно к выражению (5.55)) $d_0 = 1$; $d_1 = 0$; $d_2 = 0$; $c_0 = 1$; $c_1 = a_1$; $c_2 = b_1$.

Для перехода к передаточной функции фильтра высоких частот в выражении (5.63) P следует заменить на $1/P$. При этом частота среза остается без изменений.

$$H(P)_{ФВ} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a_1}{P} + \frac{b_1}{P^2}\right)} = \frac{P^2}{b_1 + a_1 P + P^2}, \qquad (5.64)$$

где сопоставляя с выражением (5.55) $d_0 = 0$; $d_1 = 0$; $d_2 = 1$; $c_0 = b_1$; $c_1 = a_1$; $c_2 = 1$.

Получить передаточную функцию полосового фильтра второго порядка можно из передаточной функции фильтра низких частот первого порядка

$$H(P)_{ФН} = \frac{1}{1+P}, \tag{5.65}$$

путем подстановки вместо P выражения

$$\frac{1}{\Delta\Omega}\cdot\left(P+\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{\Delta\Omega}\cdot\frac{P^2+1}{P}, \tag{5.66}$$

где Ω - нормированная частота,

$$\Omega = \frac{f}{f_r}, \tag{5.67}$$

f_r - резонансная частота полосового фильтра;

$\Delta\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$; причем $\Omega_{\max}\cdot\Omega_{\min} = 1$;

$\Omega_{\max}, \Omega_{\min}$ - значение максимальной и минимальной нормированных частот полосового фильтра, соответствующих уровню пропускания - 3 дБ;

$$H(P)_{ФП} = \frac{1}{1+\frac{1}{\Delta\Omega}\cdot\frac{P^2+1}{P}} = \frac{\Delta\Omega\cdot P}{1+\Delta\Omega\cdot P+P^2}, \tag{5.68}$$

где сопоставляя с выражением (5.55) $d_0 = 0;\ d_1 = \Delta\Omega;\ d_2 = 0;\ c_0 = 1;\ c_1 = \Delta\Omega;$ $c_2 = 1$.

По аналогии с колебательным контуром определяется добротность полосового фильтра:

$$Q = \frac{f_r}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{1}{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}. \tag{5.69}$$

Тогда выражение (5.68) можно записать в виде

$$H(P)_{ФП} = \frac{\frac{1}{Q}\cdot P}{1+\frac{1}{Q}\cdot P+P^2}. \tag{5.70}$$

Подстановка выражения (5.66) в (5.64) приводит к описанию полосовых фильтров четвертого порядка:

$$H(P)_{ФП} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{\Delta\Omega} \cdot \frac{P^2+1}{P} + \frac{b_1}{(\Delta\Omega)^2} \cdot \frac{P^4 + 2P^2 + 1}{P^2}} =$$

$$= \frac{\frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1} \cdot P^2}{1 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P + \left[2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}\right] \cdot P^2 + \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1} \cdot P^3 + P^4} = \qquad (5.71)$$

$$= \frac{m_2 \cdot P^2}{n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot P + n_2 \cdot P^2 + n_3 \cdot P^3 + n_4 \cdot P^4}, \qquad (5.72)$$

где

$$m_2 = \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_0 = 1; \quad n_1 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_2 = 2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_1}; \quad n_3 = \frac{a_1 \cdot \Delta\Omega}{b_1}; \quad n_4 = 1.$$

После подстановки выражений (5.57), (5.58) в выражение (5.72) получим передаточную функцию цифрового полосового фильтра четвертого порядка:

$$H(z) = \frac{D_0 + D_2 z^{-2} + D_4 z^{-4}}{1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3} + C_4 z^{-4}}, \qquad (5.73)$$

где

$$C_1 = \frac{4n_0 + 2n_1 \cdot l - 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_2 = \frac{6n_0 - 2n_2 \cdot l^2 + 6n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_3 = \frac{4n_0 - 2n_1 \cdot l + 2n_3 \cdot l^3 - 4n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$C_4 = \frac{n_0 - n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 - n_3 \cdot l^3 - n_4 \cdot l^4}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$D_0 = \frac{m_2 \cdot l^2}{n_0 + n_1 \cdot l + n_2 \cdot l^2 + n_3 \cdot l^3 + n_4 \cdot l^4};$$

$$D_2 = -2D_0; \qquad D_4 = D_0.$$

По передаточной функции фильтра можно определить его амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики. Для этого в выражение (5.58) делается подстановка

$$z^{-1} = e^{-j\frac{2\pi f}{f_\partial}}. \qquad (5.74)$$

Тогда получим

$$H(jf) = \frac{D_0 + D_1 e^{-j\frac{2\pi f}{f_\partial}} + D_2 e^{-j\frac{4\pi f}{f_\partial}}}{C_0 + C_1 e^{-j\frac{2\pi f}{f_\partial}} + C_2 e^{-j\frac{4\pi f}{f_\partial}}} =$$

$$= \frac{D_0 + D_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) - jD_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) - jD_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)}{C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) - jC_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right) - jC_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)} =$$

$$= \frac{D_0 + D_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)}{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right] - j\left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]} -$$

$$- j\frac{D_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)}{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right] - j\left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2 + \left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[D_0 + D_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right] - j\left[D_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\left\{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right] + j\left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]\right\}. \qquad (5.75)$$

Выражение (5.75) представляется в следующем виде:

$$H(jf) = a(f)\cdot\left[\mathrm{Re}_1(f) + j\,\mathrm{Im}_1(f)\right]\cdot\left[\mathrm{Re}_2(f) + j\,\mathrm{Im}_2(f)\right], \qquad (5.76)$$

где

$$a(f) = \frac{1}{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2 + \left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + jC_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2};$$

$$\mathrm{Re}_1(f) = D_0 + D_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right);$$

$$\mathrm{Im}_1(f) = -\left[D_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right];$$

$$\mathrm{Re}_2(f) = C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right);$$

$$\mathrm{Im}_2(f) = C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right).$$

Амплитудно-частотная и фазочастотные характеристики фильтра, которая является, соответственно, модулем и аргументом выражения (5.76), определяется как

$$A(f) = \sqrt{\left[a(f)\right]^2\left\{\left[\mathrm{Re}_1(f)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}_1(f)\right]^2\right\}\cdot\left\{\left[\mathrm{Re}_2(f)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}_2(f)\right]^2\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left[D_0 + D_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2 + \left[D_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + D_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2}{\left[C_0 + C_1\cos\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\cos\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2 + \left[C_1\sin\left(\frac{2\pi f}{f_\partial}\right) + C_2\sin\left(\frac{4\pi f}{f_\partial}\right)\right]^2}} \qquad (5.77)$$

и

$$\varphi(f) = arctg\left(\frac{\mathrm{Im}_1(f)}{\mathrm{Re}_1(f)}\right) + arctg\left(\frac{\mathrm{Im}_2(f)}{\mathrm{Re}_2(f)}\right) = \qquad (5.78)$$

$$= -arctg\left(\frac{D_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_д}\right) + D_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_д}\right)}{D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_д}\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_д}\right)}\right) + arctg\left(\frac{C_1 \sin\left(\frac{2\pi f}{f_д}\right) + C_2 \sin\left(\frac{4\pi f}{f_д}\right)}{C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_д}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi f}{f_д}\right)}\right)$$

Если $x(n)$ - последовательность дискретных отсчетов, которая должна быть подвергнута цифровой рекурсивной фильтрации, а передаточная функция цифрового фильтра описывается выражением (5.58), то последовательность на выходе цифрового фильтра $y(n)$ связана со входной следующим преобразованием:

$$y(i) = D_0 \cdot x(i) + D_1 \cdot x(i-1) + D_2 \cdot x(i-2) - C_1 \cdot y(i-1) - C_2 \cdot y(i-2), \qquad (5.79)$$

$i = 0,1,2...N...$; $x(-1) = 0$; $x(-2) = 0$; $y(-1) = 0$; $y(-2) = 0$.

Для фильтра, состоящего из нескольких звеньев, дискретная последовательность на выходе первого звена является входной последовательностью для второго звена и т. д. .

Если после выполнения фильтрации определяются значения фазовые параметры сигнала, то необходимо вводить соответствующую фазовую поправку, вычисляемую по формуле (5.78).

Однако во многих случаях для обработки принимается ограниченная дискретная последовательность исходных данных $i = 0 \div N-1$. А при подаче последовательности на вход фильтра на его выходе наблюдается переходной процесс. Для того, чтобы не принимать для обработки удлиненную последовательность, представляется возможным реализовать рекурсивную цифровую фильтрацию путем двойного прохождения исходной последовательности через фильтр. Первый проход приводит к завершению переходного процесса, а второй обеспечивает выполнение цифровой фильтрации. Для устранения точки разрыва между первым и последним отсчетами дискретной последовательности применяется линейная аппроксимация для двух первых и двух последних точек.

Функция, реализующая предложенный способ выполнения рекурсивной фильтрации может иметь такой вид:

```
// x - массив входных данных
 // y - массив выходных данных
 // d - массив коэффициентов D цифрового фильтра
 // c - массив коэффициентов C цифрового фильтра
// N - размермассива
 fn_Rek_Filtr(float *x, float *y, float *d, float * c, int N)
{
    int i;
```

```
for (i=0; i<N; i++)
{
        y[i]=0;
        f_Ar[i]=0; // Вспомогательный массив
}
 for (i=0; i<N; i++)
      {
         f_Ar[i]=x[i];
}

      x[N-2]=f_Ar[N-2]=x[N-3]+( ( (x[2]-x[N-3]) *1.0)/5.0);
      x[N-1]=f_Ar[N-1]=x[N-3]+( ( (x[2]-x[N-3]) *2.0)/5.0);
      x[0]=f_Ar[0]=x[N-3]+( ( (x[2]-x[N-3]) *3.0)/5.0);
      x[1]=f_Ar[1]=x[N-3]+( ( (x[2]-x[N-3]) *4.0)/5.0);
//  Первый проход
      y[0]=d[0]*f_Ar[0];
y[1]=d[0]*f_Ar[1] + d[1]*f_Ar[0]-c[1]*f_Ar[0];
     for (i=2; i<N; i++)
       y[i]=d[0]*f_Ar[i] + d[1]*f_Ar[i-1] + d[2]*f_Ar[i-2]- c[1]*y[i-1] - c[2]*y[i-2];
//  Второй проход
       y[0]=d[0]*x[0] + d[1]*x[N-1] + d[2]*x[N-2]-c[1]*y[N-1] - c[2]*y[N-2];
y[1]=d[0]*x[1] + d[1]*x[0] + d[2]*x[N-1]-c[1]*y[0] - c[2]*y[N-1];

     for (i=2; i<N; i++)
       y[i]=d[0]*x[i] + d[1]*x[i-1] + d[2]*x[i-2]-c[1]*y[i-1] - c[2]*y[i-2];

}
```