Корреляция

Корреляция (correlation), и ее частный случай для центрированных сигналов – ковариация, является методом анализа сигналов. Приведем один из вариантов использования метода. Допустим, что имеется сигнал $s(t)$, в котором может быть (а может и не быть) некоторая последовательность $x(t)$ конечной длины T, временное положение которой нас интересует. Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу $s(t)$ временном окне длиной T вычисляются скалярные произведения сигналов $s(t)$ и $x(t)$. Тем самым мы "прикладываем" искомый сигнал $x(t)$ к сигналу $s(t)$, скользя по его аргументу, и по величине скалярного произведения оцениваем степень сходства сигналов в точках сравнения.

Корреляционный анализ дает возможность установить в сигналах (или в рядах цифровых данных сигналов) наличие определенной связи изменения значений сигналов по независимой переменной, то есть, когда большие значения одного сигнала (относительно средних значений сигнала) связаны с большими значениями другого сигнала (положительная корреляция), или, наоборот, малые значения одного сигнала связаны с большими значениями другого (отрицательная корреляция), или данные двух сигналов никак не связаны (нулевая корреляция).

В функциональном пространстве сигналов эта степень связи может выражаться в нормированных единицах коэффициента корреляции, т.е. в косинусе угла между векторами сигналов, и, соответственно, будет принимать значения от 1 (полное совпадение сигналов) до -1 (полная противоположность) и не зависит от значения (масштаба) единиц измерений.

В варианте автокорреляции (autocorrelation) по аналогичной методике производится определение скалярного произведения сигнала $s(t)$ с собственной копией, скользящей по аргументу. Автокорреляция позволяет оценить среднестатистическую зависимость текущих отсчетов сигнала от своих предыдущих и последующих значений (так называемый радиус корреляции значений сигнала), а также выявить в сигнале наличие периодически повторяющихся элементов.

Особое значение методы корреляции имеют при анализе случайных процессов для выявления неслучайных составляющих и оценки неслучайных параметров этих процессов.

Заметим, что в терминах "корреляция" и "ковариация" в настоящее время существует изрядная путаница. В иностранной литературе термин "ковариация" применяется к центрированным функциям, а "корреляция" – к произвольным. В отечественной литературе, и особенно в литературе по сигналам и их обработке, довольно часто применяется прямо противоположная терминология. Однако при переводах иностранной литературы терминология, как правило, не изменяется, и начинает все шире проникать в отечественную литературу. Принципиального значения это не имеет, но при знакомстве с литературными источниками стоит обращать внимание на принятое назначение данных терминов.

При разработке настоящих лекций было принято решение использовать общепринятую международную терминологию, как согласованную по понятиям с основными положениями теории вероятностей и математической статистики.

Понятие автокорреляционных функций (АКФ) сигналов. АКФ (correlation function, CF) сигнала $s(t)$, конечного по энергии, является количественной интегральной характеристикой формы сигнала, и определяется интегралом от произведения двух копий сигнала $s(t)$, сдвинутых относительно друг друга на время τ:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \langle s(t), s(t+\tau)\rangle = \|s(t)\| \cdot \|s(t+\tau)\| \cos(\varphi(\tau)) \qquad (2.43)$$

Как следует из этого выражения, АКФ является скалярным произведением сигнала и его копии в функциональной зависимости от переменной величины значения сдвига τ. Соответственно, АКФ имеет физическую размерность энергии, а при $\tau = 0$ значение АКФ непосредственно равно энергии сигнала:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2\, dt = E_s.$$

АКФ относится к четным функциям, в чем нетрудно убедиться заменой переменной $t = t - \tau$ в выражении (2.43):

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t)dt = B_s(-\tau).$$

Максимум АКФ, равный энергии сигнала при $\tau=0$, всегда положителен, а модуль АКФ при любом значении временного сдвига не превосходит энергии сигнала. Последнее прямо вытекает из свойств скалярного произведения (как и неравенство Коши-Буняковского):

$$\langle s(t), s(t+\tau)\rangle = \|s(t)\| \cdot \|s(t+\tau)\| \cos(\varphi(\tau)) < E_s.$$

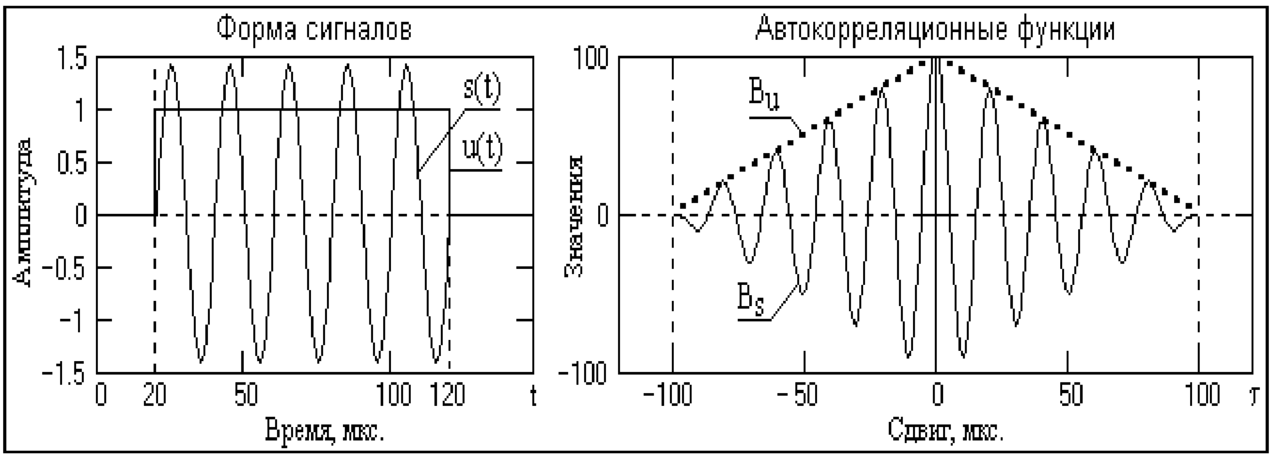

Рисунок 2.22 – Иллюстрация корреляции

В качестве примера на рис. 2.22 приведены два сигнала – прямоугольный импульс и радиоимпульс одинаковой длительности *T*, и соответствующие данным сигналам формы их АКФ. Амплитуда колебаний радиоимпульса установлена равной $\sqrt{\text{т}}$ амплитуды прямоугольного импульса, при этом энергии сигналов также будут одинаковыми, что подтверждается равными значениями центральных максимумов АКФ. При конечной длительности импульсов длительности АКФ также конечны, и равны удвоенным значениям длительности импульсов (при сдвиге копии конечного импульса на интервал его длительности как влево, так и вправо, произведение импульса со своей копией становится равным нулю). Частота колебаний АКФ радиоимпульса равна частоте колебаний заполнения радиоимпульса (боковые минимумы и максимумы АКФ возникают каждый раз при последовательных сдвигах копии радиоимпульса на половину периода колебаний его заполнения).

С учетом четности, графическое представление АКФ обычно производится только для положительных значений τ. Знак $+\tau$ в выражении (2.43) означает, что при увеличении значений τ от нуля копия сигнала $s(t+\tau)$ сдвигается влево по оси t. На практике сигналы обычно задаются на интервале положительных значений аргументов от *0-T*, что дает возможность продления интервала нулевыми значениями, если это необходимо для математических операций. В этих границах вычислений более удобным для построения вычислительных алгоритмов является сдвиг копии сигнала вправо по оси аргументов, т.е. применение в выражении (2.43) функции копии $s(t-\tau)$:

$$B_s(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt\,. \tag{2.44}$$

По мере увеличения значения величины сдвига τ для финитных(конечных) сигналов временное перекрытие сигнала с его копией уменьшается, а, соответственно, косинус угла взаимодействия и скалярное произведение в целом стремятся к нулю:

$$\lim_{|\tau|\Rightarrow\infty} B_s(\tau)=0\,.$$

АКФ, вычисленная по центрированному значению сигнала $s(t)$, представляет собой *автоковариационную* функцию сигнала:

$$C_s(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}[s(t)-\mu_s][s(t+\tau)-\mu_s]dt \tag{2.45}$$

где μ_s – среднее значение сигнала. Ковариационные функции связаны с корреляционным функциями достаточно простым соотношением:

$$C_s(\tau)=B_s(\tau)-\mu_s^2\,. \tag{2.46}$$

АКФ сигналов, ограниченных во времени. На практике обычно исследуются сигналы, заданные на определенном интервале [a, b], при этом вычисление АКФ производится с нормировкой на длину интервала [a, b]:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{b-a}\int_a^b s(t)s(t+\tau)dt\,. \tag{2.47}$$

АКФ может быть вычислена и для слабозатухающих сигналов с бесконечной энергией, как среднее значение скалярного произведения сигнала и его копии при устремлении интервала задания сигнала к бесконечности:

$$B_s(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t)s(t+\tau)dt\,. \tag{2.48}$$

АКФ по данным выражениям имеет физическую размерность мощности, и равна средней взаимной мощности сигнала и его копии в функциональной зависимости от сдвига копии.

Функции автоковариации (ФАК) вычисляются аналогично, по центрированным значениям сигнала. Замечательной особенностью этих функций являются их простые соотношения с дисперсией σ_s^2 сигналов (квадратом стандарта - среднего квадратического отклонения значений сигнала от среднего значения). Как известно, значение дисперсии равно средней мощности сигналов, откуда следует:

$$|C_s(\tau)| \le \sigma_s^2, \qquad |C_s(\tau=0)| = \sigma_s^2\;. \tag{2.49}$$

Значения ФАК, нормированные на значение дисперсии, изменяются в интервале от -1 до 1 и представляют собой функцию автокорреляционных коэффициентов:

$$\rho_s(\tau) = \frac{C_s(\tau)}{C_s(0)} = \frac{C_s(\tau)}{\sigma_s^2}\;. \tag{2.50}$$

Иногда эту функцию называют "истинной" автокорреляционной функцией. В силу нормировки ее значения не зависят от единиц (масштаба) представления значений сигнала $s(t)$ и характеризуют степень линейной связи между значениями сигнала в зависимости от величины сдвига τ между отсчетами сигнала. Так, например, для шумовых сигналов при полной статистической независимости отсчетов по независимой переменной, значение $\rho_s(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \neq 0$, и стремится к 1 при $\tau \to 0$.

АКФ периодических сигналов. Энергия периодических сигналов бесконечна, поэтому АКФ периодических сигналов вычисляется по одному периоду T, с усреднением скалярного произведения сигнала и его сдвинутой копии в пределах этого периода:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)s(t-\tau)dt\,. \tag{2.51}$$

При $\tau=0$ значение нормированной на период АКФ равно средней мощности сигналов в пределах периода. При этом АКФ периодических сигналов является периодической функцией с тем же периодом T. Так, для сигнала

$$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0),\ \text{при}\ \ T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$B_s(\tau)=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)A\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi_0)dt=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau).$$

Полученный результат не зависит от начальной фазы гармонического сигнала, что характерно для любых периодических сигналов и является одним из свойств АКФ. С помощью функций автокорреляции можно проверять наличие периодических свойств в любых произвольных сигналах.

АКФ дискретных сигналов.При интервале дискретизации данных Δt = const вычисление АКФ выполняется по интервалам $\Delta\tau = \Delta t$ и обычно записывается, как дискретная функция номеров n сдвига отсчетов $n\,\Delta\tau$:

$$B_s(n) = \Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k s_{k-n}\ . \qquad (2.52)$$

Дискретные сигналы обычно задаются в виде числовых массивов определенной длины с нумерацией отсчетов $k = 0,1,\ldots N$, а вычисление дискретной АКФ выполняется в одностороннем варианте с учетом длины массивов по формуле:

$$B_s(n)=\frac{N\cdot\Delta t}{N+1-n}\sum_{k=0}^{N-n} s_k s_{k-n}\ . \qquad (2.53)$$

Множитель $\dfrac{N}{N+1-n}$ в данной функции является поправочным коэффициентом на постепенное уменьшение числа перемножаемых и суммируемых значений (от N до $N-n$) по мере увеличения сдвига n. Без этой поправки для нецентрированных сигналов в значениях АКФ появляется тренд суммирования средних значений.

Практически, дискретная АКФ имеет такие же свойства, как и непрерывная АКФ. Она также является четной, а ее значение при n = 0 равно мощности дискретного сигнала.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) разных сигналов (cross-correlation function, CCF) описывает как степень сходства формы двух сигналов, так и их взаимное расположение друг относительно друга по координате (независимой переменной). Обобщая формулу (2.43) автокорреляционной функции на два различных сигнала $s(t)$ и $u(t)$, получаем следующее скалярное произведение сигналов:

$$B_{su}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)u(t+\tau)dt\,. \qquad (2.54)$$

Взаимная корреляция сигналов характеризует определенную корреляцию явлений и физических процессов, отображаемых данными сигналами, и может служить мерой “устойчивости” данной взаимосвязи при раздельной обработке сигналов в различных устройствах. Для конечных по энергии сигналов ВКФ также конечна, при этом:

$$B_{su}(\tau)\le \|s(t)\|\cdot\|u(t)\|,$$

что следует из неравенства Коши-Буняковского и независимости норм сигналов от сдвига по координатам.

При замене переменной $t = t-\tau$ в формуле (2.54), получаем:

$$B_{su}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)u(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)s(t-\tau)dt=B_{us}(-\tau). \qquad (2.55)$$

Для периодических сигналов понятие ВКФ обычно не применяется, за исключением сигналов с одинаковым периодом, например, сигналов входа и выхода систем при изучении характеристик систем.

Количественный показатель степени сходства сигналов $s(t)$ и $u(t)$ - функция взаимных корреляционных коэффициентов. Аналогично функции автокорреляционных коэффициентов, она вычисляется через центрированные значения функций (для вычисления взаимной ковариации достаточно центрировать только одну из функций), и нормируется на произведение значений стандартов функций $s(t)$ и $u(t)$:

$$\rho_{su}(\tau)=\frac{C_{su}(\tau)}{\sigma_s\sigma_u}. \qquad (2.56)$$

Интервал изменения значений корреляционных коэффициентов при сдвигах τ может изменяться от –1 (полная обратная корреляция) до 1 (полное сходство или стопроцентная корреляция). При сдвигах τ, на которых наблюдаются нулевые значения $\rho_{su}(\tau)$, сигналы независимы друг от друга (некоррелированы). Коэффициент взаимной корреляции позволяет устанавливать наличие связи между сигналами вне зависимости от физических свойств сигналов и их величины.

Спектральная плотность АКФ может быть определена из следующих простых соображений.

В соответствии с выражением (2.43) АКФ представляет собой функцию скалярного произведения сигнала и его копии, сдвинутой на интервал τ при -∞< τ<∞:

$$B_s(\tau)=\langle s(t), s(t-\tau)\rangle\,.$$

Скалярное произведение может быть определено через спектральные плотности сигнала и его копии, произведение которых представляет собой спектральную плотность взаимной мощности:

$$B_s(\tau) = \langle s(t), s(t-\tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S_\tau^*(\omega) d\omega$$

Смещение сигнала по оси абсцисс на интервал τ отображается в спектральном представлении умножением спектра сигнала на $\exp(-j\omega\tau)$, а для сопряженного спектра на множитель $\exp(j\omega\tau)$:

$$S_\tau^*(\omega) = S^*(\omega)\exp(j\omega\tau).$$

С учетом этого получаем:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega)\exp(j\omega\tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau) d\omega. \tag{2.57}$$

Но последнее выражение представляет собой обратное преобразование Фурье энергетического спектра сигнала (спектральной плотности энергии). Следовательно, энергетический спектр сигнала и его автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье:

$$B_s(\tau) \Leftrightarrow |S(\omega)|^2 = W_s(\omega). \tag{2.58}$$

Аналогичный результат может быть получен и прямым преобразованием Фурье автокорреляционной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau)\exp(-j\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)\exp(-j\omega\tau) dt d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\exp(j\omega(t+\tau)) d(t+\tau) d\tau = S(\omega)S^*(\omega) = W_s(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность АКФ есть не что иное, как спектральная плотность мощности сигнала, которая, в свою очередь, может определяться прямым преобразованием Фурье через АКФ:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau)\exp(-j\omega\tau) d\tau. \tag{2.59}$$

Последние выражение накладывает определенные ограничения на форму АКФ и методику их ограничения по длительности.

Энергетический спектр сигналов всегда положителен, мощность сигналов не может быть отрицательной. Следовательно, АКФ не может иметь формы прямоугольного импульса, т.к. преобразование Фурье прямоугольного импульса – знакопеременный интегральный синус. На АКФ не должно быть и разрывов первого рода (скачков), т.к. с учетом четности АКФ любой симметричный скачек по координате $\pm\tau$ порождает “разделение” АКФ на сумму определенной непрерывной функции и прямоугольного импульса длительностью 2τ □□с соответствующим появлением отрицательных значений в энергетическом спектре.

АКФ достаточно протяженных сигналов обычно ограничиваются по размерам (исследуются ограниченные интервалы корреляции данных от $-T/2$ до $T/2$). Однако усечение АКФ, это умножение АКФ на прямоугольный селектирующий импульс длительностью T, что в частотной области отображается сверткой фактического спектра мощности со знакопеременной функцией интегрального синуса $\sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$. С одной стороны, это вызывает определенное сглаживание спектра мощности, что зачастую бывает полезным, например, при исследовании сигналов на значительном уровне шумов. Но, с другой стороны, может происходить и существенное занижение величины энергетических пиков, если в сигнале имеются какие-либо гармонические составляющие, и появление отрицательных значений мощности на краевых частях пиков и скачков.

Как известно, спектры мощности сигналов не имеют фазовой характеристики и по ним невозможно восстановление сигналов. Следовательно, АКФ сигналов, как временное представление спектров мощности, также не имеет информации о фазовых характеристиках сигналов и восстановление сигналов по АКФ невозможно. Сигналы одной формы и сдвинутые во времени имеют одинаковые АКФ. Больше того, сигналы разной формы могут иметь сходные АКФ, если имеют близкие спектры мощности.

Можно записать следующее уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S^{*}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega$$

и, подставив в это выражение значение τ=0, получим хорошо известное равенство, называемое *равенством Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^{2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^{2}d\omega . \qquad (2.60)$$

Оно позволяет вычислять энергию сигнала, как по временной, так и по частотной области.

Интервал корреляции сигнала является числовым параметром оценки ширины АКФ и степени значимой корреляции значений сигнала по аргументу.

Если допустить, что сигнал $s(t)$ имеет примерно равномерный энергетический спектр с верхней граничной частотой до $\omega_{в}$ (форма центрированного прямоугольного импульса, как, например, сигнал 1 на рисунке 2.23 с $f_{в}$=50 Гц в одностороннем представлении), то АКФ сигнала определится выражением:

$$B_s(\tau)=\frac{W_0}{\pi}\int_0^{\omega_\text{в}}\cos(\omega\tau)d\omega=\frac{W_0\cdot\omega_\text{в}}{\pi}\frac{\sin(\omega_\text{в}\tau)}{\omega_\text{в}\tau}. \qquad (2.61)$$

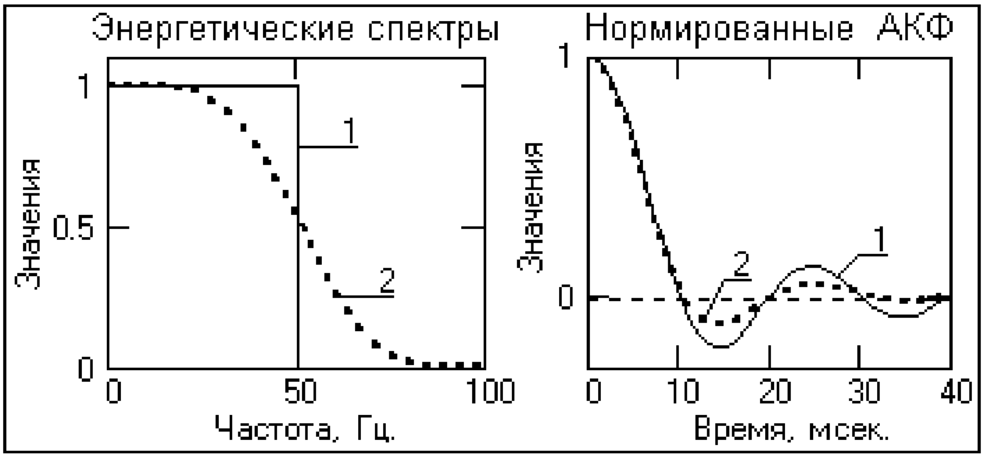

Рисунок 2.23 – Определение интервала корреляции

Интервалом корреляции сигнала $\tau_\text{к}$ считается величина ширины центрального пика АКФ от максимума до первого пересечения нулевой линии. В данном случае для прямоугольного спектра с верхней граничной частотой $\omega_\text{в}$ первое пересечение нуля соответствует $\sin(\omega_\text{в}\tau)=0$ при $\omega_\text{в}\tau=\pi$, откуда:

$$\tau_\text{к}=\frac{\pi}{\omega_\text{в}}=\frac{1}{f_\text{в}} \qquad (2.62)$$

Интервал корреляции тем меньше, чем выше верхняя граничная частота спектра сигнала. Для сигналов с плавным срезом по верхней граничной частоте роль параметра $\omega_\text{в}$ играет средняя ширина спектра (сигнал 2 на рисунке 2.23).

Спектральная плотность мощности статистических шумов при единичном измерении представляет собой случайную функцию $W_\text{q}(\omega)$ со средним значением $W_\text{q}(\omega)\Rightarrow\sigma_q^2 W_\text{q}(\omega)$,где σ_q^2– дисперсия шумов. В пределе, при равномерном спектральном распределении шумов от 0 до ∞, АКФ шумов стремится к значению $B_\text{q}(\tau)\Rightarrow\sigma_q^2$ при $\tau\Rightarrow$ 0, $B_\text{q}(\tau)\Rightarrow 0$ при $\tau\neq$ 0, т.е. статистические шумы не коррелированны ($\tau_\text{к}\Rightarrow 0$).

Спектральная плотность ВКФ может быть получена на основании тех же соображений, что и для АФК, или непосредственно из формулы (2.57) заменой спектральной плотности сигнала $S^*(\omega)$ на спектральную плотность второго сигнала $U^*(\omega)$:

$$B_{su}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)U^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega. \qquad (2.63)$$

Или, при смене порядка сигналов:

$$B_{us}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)S^{*}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega. \qquad (2.64)$$

Произведение $S(\omega)U^{*}(\omega)$ представляет собой взаимный энергетический спектр $W_{su}(\omega)$ сигналов $s(t)$ и $u(t)$. Соответственно, $U(\omega)S^{*}(\omega)=W_{us}(\omega)$. Следовательно, как и АКФ, взаимнокорреляционная функция и спектральная плотность взаимной мощности сигналов связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$B_{su}(\tau)\Leftrightarrow W_{su}(\omega)\equiv W_{us}^{*}(\omega); \qquad (2.65)$$

$$B_{us}(\tau)\Leftrightarrow W_{us}(\omega)\equiv W_{su}^{*}(\omega). \qquad (2.66)$$

В общем случае, за исключением спектров четных функций, из условия несоблюдения четности для функций ВКФ следует, что взаимные энергетические спектры являются комплексными функциями:

$$U(\omega)=A_U(\omega)+jB_U(\omega), \quad V(\omega)=A_V(\omega)+jB_V(\omega).$$

$$W_{UV}(\omega)=A_UA_V+B_UB_V+j(B_UA_V-A_UB_V)=\mathrm{Re}(W_{UV}(\omega))+j\,\mathrm{Im}(W_{UV}(\omega))$$

и содержат определенную фазовую характеристику гармонических составляющих ВКФ, которой и формируется сдвиг максимума ВКФ.

На рисунке 2.24 можно наглядно видеть особенности формирования ВКФ на примере двух одинаковых по форме сигналов, сдвинутых относительно друг друга.

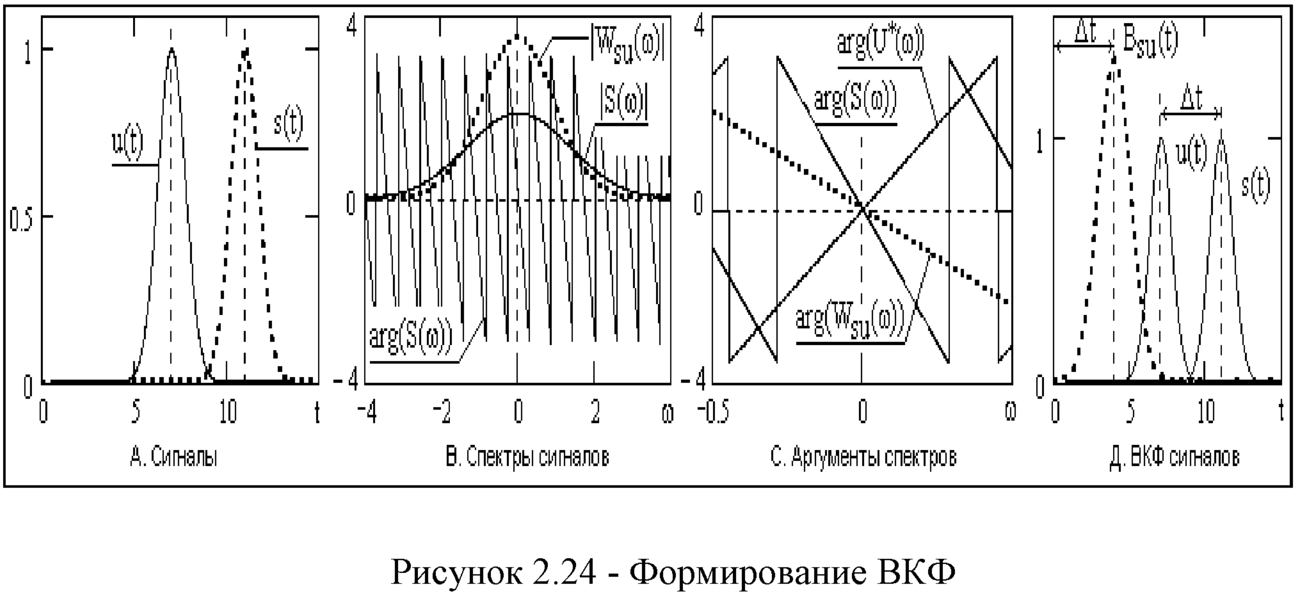

Рисунок 2.24 - Формирование ВКФ

Форма сигналов и их взаимное расположение приведены на виде А. Модуль и аргумент спектра сигнала $s(t)$ приведены на виде В. Модуль спектра $u(t)$ тождественен модулю $S(\omega)$. На этом же виде приведен модуль спектра взаимной мощности сигналов $W_{su}(\omega)=S(\omega)\cdot U^{*}(\omega)$. Как известно, при перемножении комплексных спектров модули спектров перемножаются, а фазовые углы складываются, при этом для сопряженного спектра $U^*(\omega)$ фазовый угол меняет знак. Если первым в формуле вычисления ВКФ (8.2.1) стоит сигнал $s(t)$, а сигнал $u(t-\tau)$ на оси ординат стоить впереди $s(t)$, то фазовые углы $S(\omega)$ по мере увеличения частоты нарастают в сторону отрицательных значений углов (без учета периодического сброса значений на 2π), а фазовые углы $U^*(\omega)$ по абсолютным значениям меньше фазовых углов $s(t)$ и нарастают (за счет сопряжения) в сторону положительных значений. Результатом умножения спектров (как это видно на рис. 8.3.4, вид С) является вычитание из фазовых углов $S(\omega)$ значений углов $U^*(\omega)$, при этом фазовые углы спектра $W_{su}(\omega)$ остаются в области отрицательных значений, что обеспечивает сдвиг всей функции ВКФ (и ее пиковых значений) вправо от нуля по оси τ на определенную величину (для одинаковых сигналов – на величину разности между сигналами по оси ординат). При смещении начального положения сигнала $u(t)$ в сторону сигнала $s(t)$ фазовые углы $W_{su}(\omega)$ уменьшаются, в пределе до нулевых значений при полном совмещении сигналов, при этом функция $B_{su}(t)$ смещается к нулевым значениям τ в пределе до обращения в АКФ (для одинаковых сигналах $s(t)$ и $u(t)$.

При анализе дискретных данных и числовых рядов соответственно используется функция взаимной ковариации (ФВК):

$$C_{su}(n) = \frac{N \cdot \Delta t}{N+1-n} \sum_{k=0}^{N-n} (s_k - \bar{s})(u_{k+n} - \bar{u}).$$

Как известно для детерминированных сигналов, если спектры двух сигналов не перекрываются и, соответственно, взаимная энергия сигналов равна нулю, такие сигналы ортогональны друг другу. Связь энергетических спектров и корреляционных функций сигналов показывает еще одну сторону взаимодействия сигналов. Если спектры сигналов не перекрываются и их взаимный энергетический спектр равен нулю на всех частотах, то при любых временных сдвигах τ друг относительно друга их ВКФ также равна нулю. А это означает, что такие сигналы являются некоррелированными. Это действительно как для детерминированных, так и для случайных сигналов и процессов.