Определение параметров тренда зашумленного сигнала

Во многих случаях для выявления характера изменения зашумленного, но, вместе с тем, достаточно медленно изменяющегося сигнала на каком то временном отрезке, можно найти описание этого изменения в виде алгебраического многочлена, причем для практического применения можно ограничиться первой или второй степенью этого многочлена.

Так как многочлен должен описывать дрейф на всем интервале анализа, то он может быть найден как среднеквадратическое приближение в виде полинома:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n .$$

Значения коэффициентов многочлена наилучшего приближения могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} + c_2 \cdot s_{20} + \ldots + c_n \cdot s_{n0} = r_0 ;\\
&c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} + c_2 \cdot s_{21} + \ldots + c_n \cdot s_{n1} = r_1 ;\\
&c_0 \cdot s_{02} + c_1 \cdot s_{12} + c_2 \cdot s_{22} + \ldots + c_n \cdot s_{n2} = r_2 ;\\
&\quad . \; . \\
&c_0 \cdot s_{0n} + c_1 \cdot s_{1n} + c_2 \cdot s_{2n} + \ldots + c_n \cdot s_{nn} = r_n ;
\end{aligned}$$

Для функции f(x), представленной в дискретном виде со значениями аргумента от 0 до N-1

$$s_{ij} = \sum_{x=0}^{N-1} x^{i+j} ; \qquad r_i = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot x^i .$$

На практике для описания низкочастотного дрейфа целесообразно применять полиномы первой или второй степени.

Для полинома первой степени система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned}
c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} = r_0 ;\\
c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} = r_1 .
\end{aligned}$$

Решая эту систему получим:

$$c_0 = \frac{r_1 \cdot s_{10} - r_0 \cdot s_{11}}{s_{01} \cdot s_{10} - s_{00} \cdot s_{11}} ; \qquad c_1 = \frac{r_0 \cdot s_{01} - r_1 \cdot s_{00}}{s_{01} \cdot s_{10} - s_{00} \cdot s_{11}} ;$$

Для полинома второй степени система выглядит следующим образом:

$$c_0 \cdot s_{00} + c_1 \cdot s_{10} + c_2 \cdot s_{20} = r_0 ;$$

$$c_0 \cdot s_{01} + c_1 \cdot s_{11} + c_2 \cdot s_{21} = r_1;$$
$$c_0 \cdot s_{02} + c_1 \cdot s_{12} + c_2 \cdot s_{22} = r_2;$$

После ввода обозначений :

$$k_0 = s_{00}; \quad k_1 = s_{01} = s_{10}; \quad k_2 = s_{02} = s_{11} = s_{20};$$
$$k_3 = s_{12} = s_{21}; \quad k_4 = s_{22};$$

Эта система приобретает вид

$$c_0 \cdot k_0 + c_1 \cdot k_1 + c_2 \cdot k_2 = r_0;$$
$$c_0 \cdot k_1 + c_1 \cdot k_2 + c_2 \cdot k_3 = r_1;$$
$$c_0 \cdot k_2 + c_1 \cdot k_3 + c_2 \cdot k_4 = r_2;$$

Для дискретной последовательности аргумента x значения коэффициентов s определяются следующими выражениями :

$$s_{00} = \sum_{x=0}^{N-1} 1 = N; \quad s_{10} = s_{01} = \sum_{x=0}^{N-1} x = \frac{(N-1)\cdot N}{2};$$
$$s_{11} = s_{20} = s_{02} = \sum_{x=0}^{N-1} x^2 = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(2N-1)}{6};$$

$$s_{12} = s_{21} = \sum_{x=0}^{N-1} x^3 = \frac{N^2\cdot(N-1)^2}{6};$$

$$s_{22} = \sum_{x=0}^{N-1} x^4 = \frac{N(N-1)(2N-1)(3(N-1)^2 + 3(N-1) - 1)}{30},$$

а коэффициенты r рассчитываются по формулам:

$$r_0 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x); \quad r_1 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cdot x; \quad r_2 = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cdot x^2.$$

Применив метод определителей для решения системы , можно получить коэффициенты для полинома второй степени:

$$c_0 = D_0/D; \quad c_1 = D_1/D; \quad c_2 = D_2/D,$$

где

$$D = k_0 k_2 k_4 + 2k_1 k_2 k_3 - k_1^2 k_4 - k_0 k_3^2 - k_2^3;$$

$$D_0 = r_0 k_2 k_4 + k_3(r_2 k_1 + r_1 k_2) - r_1 k_1 k_4 - r_0 k_3^2 - r_2 k_2^2;$$

$$D_1 = r_1 k_0 k_4 + k_2(r_0 k_2 + r_2 k_1) - r_2 k_0 k_3 - r_1 k_2^2 - r_0 k_1 k_4;$$

$$D_2 = k_2(r_1 k_1 + r_2 k_0) + r_0 k_1 k_3 - r_0 k_2^2 - r_2 k_1^2 - r_1 k_0 k_3 .$$

Низкочастотный дрейф исследуемого сигнала после этого описывается полиномом второй степени

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

или полиномом первой степени

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x ,$$

где $x = 0 \div N - 1$.

Рассмотренный подход выделения информативного сигнала легко реализуется программно и может использоваться при обработке данных.