Скользящее усреднение, сглаживание параболами, сглаживание Спенсера медианная фильтрация

При разработке способов определения параметров физических процессов, медленно изменяющихся во времени, важной задачей является устранения влияния шумовых эффектов или случайных помех, которые накладываются на обрабатываемый сигнал, получаемый на выходе первичного преобразователя.

Для устранения такого эффекта можно применить сглаживание данных. Одним из наиболее простых способов такого сглаживание является арифметическое усреднение. При его применении каждое i-ое значение дискретной функции (обрабатываемого массива данных) вычисляется в соответствии с выражением:

$$x_i = \frac{1}{K}\sum_{j=i-m}^{j=i+m} x_j , \qquad (6.1)$$

где K - количество точек для арифметического усреднения (нечетное целое число);

x_j - j-ое значение функции до обработки;

$$m = \frac{K-1}{2} .$$

Известны и другие, достаточно эффективные способы сглаживания, например, параболами второй степени по пяти, семи, девяти и одиннадцати точкам в соответствии с выражениями:

$$x_i = \frac{1}{35}\left(-3x_{i-2} + 12x_{i-1} + 17x_i + 12x_{i+1} - 3x_{i+2}\right);$$

$$x_i = \frac{1}{21}\left(-2x_{i-3} + 3x_{i-2} + 6x_{i-1} + 7x_i + 6x_{i+1} + 3x_{i+2} - 2x_{i+3}\right);$$

$$x_i = \frac{1}{231}\left(-21x_{i-4} + 14x_{i-3} + 39x_{i-2} + 54x_{i-1} + 59x_i + 54x_{i+1} + 39x_{i+2} + 14x_{i+3} - 21x_{i+4}\right);$$

$$x_i = \frac{1}{429}\left(-36x_{i-5} + 9x_{i-4} + 44x_{i-3} + 69x_{i-2} + 84x_{i-1} + 89x_i + 84x_{i+1} + 69x_{i+2} + 44x_{i+3} + 9x_{i+4} - 36x_{i+5}\right)$$

или параболами четвертой степени по семи, девяти, одиннадцати и тринадцати точкам:

$$x_i = \frac{1}{231}\left(5x_{i-3} - 30x_{i-2} + 75x_{i-1} + 131x_i + 75x_{i+1} - 30x_{i+2} + 5x_{i+3}\right);$$

$$x_i = \frac{1}{429}\left(15x_{i-4} - 55x_{i-3} + 30x_{i-2} + 135x_{i-1} + 179x_i + 135x_{i+1} + 30x_{i+2} - 55x_{i+3} + 15x_{i+4}\right);$$

$$x_i = \frac{1}{429}\left(18x_{i-5} - 45x_{i-4} - 10x_{i-3} + 60x_{i-2} + 120x_{i-1} + 143x_i + 120x_{i+1} + 60x_{i+2} - 10x_{i+3} - 45x_{i+4} + 18x_{i+5}\right),$$

$$x_i = \frac{1}{2431}\begin{pmatrix} 110x_{i-6} - 198x_{i-5} - 135x_{i-4} + 110x_{i-3} + 390x_{i-2} + 600x_{i-1} + 677x_i + \\ + 600x_{i+1} + 390x_{i+2} + 110x_{i+3} - 135x_{i+4} - 198x_{i+5} + 110x_{i+6} \end{pmatrix}.$$

В практических применениях дают хорошие результаты другие эффективные способы, например, 15-точечное сглаживание Спенсера:

$$x_i = \frac{1}{320}(-3x_{i-7} - 6x_{i-6} - 5x_{i-5} + 3x_{i-4} + 21x_{i-3} + 46x_{i-2} + 67x_{i-1} + 74x_i +$$
$$-3x_{i+7} - 6x_{i+6} - 5x_{i+5} + 3x_{i+4} + 21x_{i+3} + 46x_{i+2} + 67x_{i+1}) .$$

Подставив в эти выражения комплексную экспоненту $e^{i\omega t}$, где $\omega = 2\pi f$, можно определить передаточную функцию $H(\omega)$соответствующего преобразования.

Для арифметического усреднения

$$H(\omega) = \frac{1}{2m+1}\left(e^{-im\omega} + e^{-i(m-1)\omega} + e^{-i(m-2)\omega} + \ldots + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + \ldots e^{i(m+1)\omega} + e^{-im\omega}\right).$$

Выражение в скобках представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{i\omega}$, следовательно это выражение можно представить в виде:

$$H(\omega) = \frac{e^{-im\omega}}{2m+1} \cdot \frac{\left(e^{i(2m+1)m\omega} - 1\right)}{e^{i\omega} - 1} = \frac{e^{i\frac{2m+1}{2}\omega} - e^{-i\frac{2m+1}{2}\omega}}{(2m+1)\left(e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\omega\right]}{(2m+1)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Эта формула представляет собой передаточную характеристику фильтра низких частот и из нее видно, что, чем больше слагаемых задействованы при усреднении, тем больше подавление шумовых высокочастотных составляющих в сигнале (см. рисунок 6.1).

Однако смысловое понятие частоты при обработке временных трендов отличается от аналогичного понятия при обработке сигналов. Это объясняется тем, что при исследовании временных трендов интерес представляет не их частотный состав, а вид изменения (увеличение, уменьшение, постоянство, цикличность и т.д.).

Также достаточно эффективно для сглаживания данных применение, так называемых, эвристических алгоритмов.

Одним из них является медианная фильтрация. В ходе ее реализации в скользящем временном окне размерностью N, где N целое нечетное число, центральный элемент заменяется средним элементом последовательности, представляющих собой упорядоченные, в порядке возрастания значений, элементы массива данных сглаживаемого сигнала, попавших во временное окно. Достоинством медианной фильтрации является способность удалять импульсные помехи, длительность которых не превышает $N/2$, практически без искажения плавно изменяющихся сигналов. Данный способ подавления шумов не имеет строгого математического обоснования, однако простота вычислений и эффективность получаемых результатов обусловили широкое его распространение.

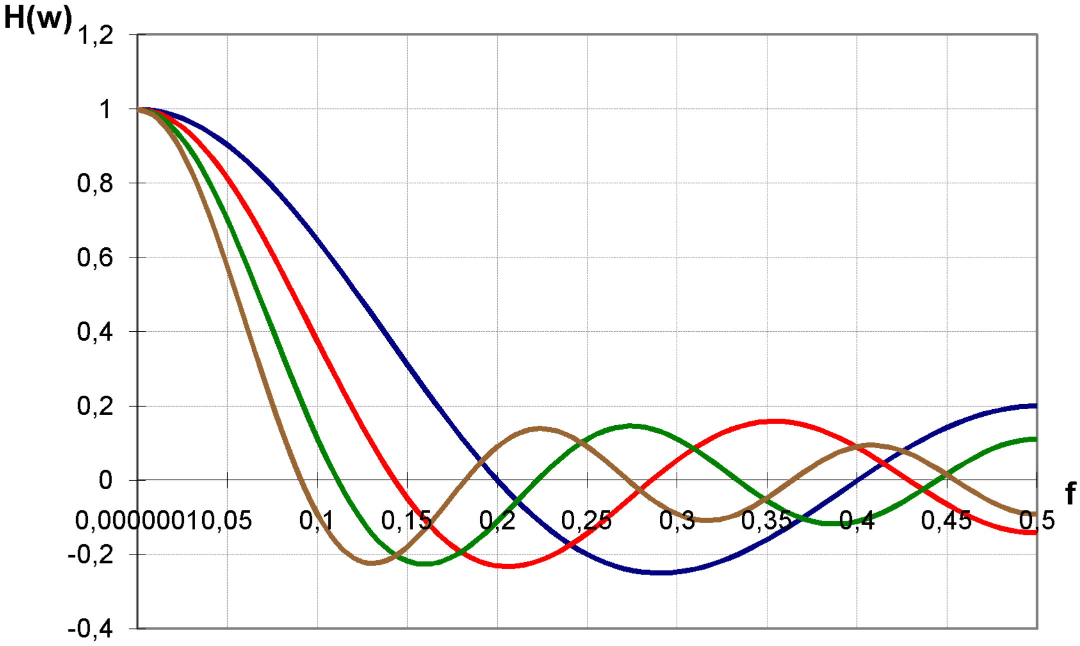

Рисунок 6.1 - Графики передаточной характеристики операции арифметического усреднения для m=5, 7, 9, 11

Другим интересным алгоритмом сглаживания является медианное усреднение. Его сущность состоит в следующем. В скользящем временном окне, размерности N (N - целое нечетное число), элементы массива данных упорядочиваются в порядке возрастания, а затем из упорядоченной последовательности удаляется по K первых и последних элементов ($K < N$). Центральный элемент временного окна из последовательности сглаживаемых данных заменяется значением, вычисляемым как

$$x_i = \frac{1}{N-2K} \sum_{m=i-\frac{N-1}{2}+K}^{i+\frac{N-1}{2}-K} x_m .$$

Этот способ позволяет подавить импульсные и радиочастотные помехи, а также достигнуть хорошего сглаживания сигналов.