Представление периодической последовательности единичных импульсов в частотной области

Имеется бесконечная периодическая последовательность единичных импульсов с периодом T.

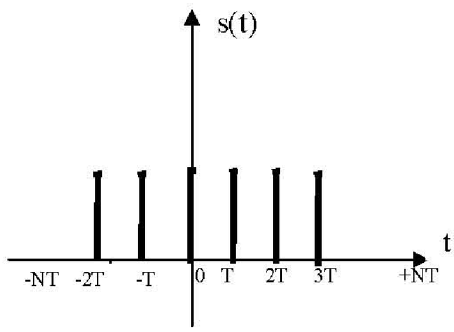

Рисунок 4.4 – Периодическая последовательность единичных импульсов

Определим её представление в частотной области.

Для этого сначала вычислим спектр ограниченной периодической последовательности единичных импульсов:

$$S_N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-N}^{N} \delta(t - nT) \right] \cdot e^{-2\pi f t} dt =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-2\pi f t} dt = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi n f T} =$$

$$= e^{i2\pi N f T} + e^{i2\pi(N-1) f T} + \cdots + 1 + \cdots + e^{-i2\pi N f T} =$$

$$= e^{i2\pi N f T} \left[1 + e^{-i2\pi f T} + (e^{-i2\pi f T})^2 + \cdots + (e^{-i2\pi f T})^{2N} \right] = \frac{e^{i2\pi N f T} (1 - e^{-i2\pi(2N+1) f T})}{1 - e^{-i2\pi f T}} = \qquad (4.53)$$

$$= \frac{\sin(\pi(2N+1) f T)}{\sin(\pi f T)}.$$

$$S_N(f) = \frac{\sin(\pi(2N+1) f T)}{\sin(\pi f T)}. \qquad (4.54)$$

Это выражение представляет преобразование Фурье конечной последовательности одиночных импульсов, следующих с периодом T, на интервале от $-N$ до N.

Когда N устремляется к бесконечности, то график стягивается в точки.

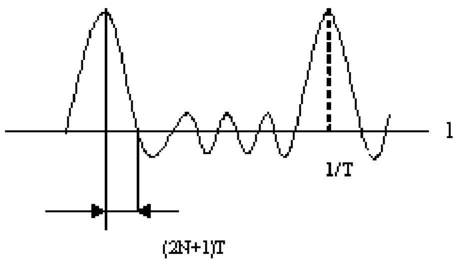

Рисунок 4.5 – Спектр ограниченной периодической последовательности единичных импульсов

Для любого N площадь под каждым лепестком огибающей $S_N(f)$равна:

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_N(f)df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{n=-N}^{N} e^{-i2\pi nfT} df = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-i2\pi nfT} df = \frac{1}{T}.$$

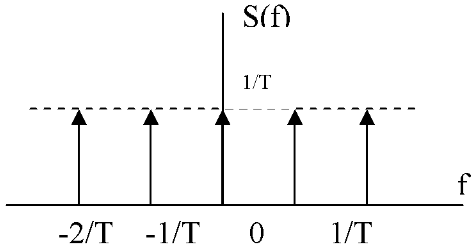

Рисунок 4.6 – Спектр периодической последовательности единичных импульсов

Спектр периодической последовательности одиночных импульсов представляет собой дискретную периодическую последовательность импульсов, каждый из которых охватывает площадь, равную *1/T*, где *T* - период следования единичных импульсов.

Таким образом, последовательности импульсов во временной области соответствует последовательность импульсов в частотной области:

$$\sum_{-n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}). \qquad (4.55)$$