Z – преобразование

Определение

Цифровая обработка сигналов оперирует с дискретными преобразованиями сигналов и обрабатывающих данные сигналы систем. Математика дискретных преобразований зародилась еще в 18 веке в рамках теории рядов и их применения для интерполяции и аппроксимации функций, однако ускоренное развитие она получила в 20 веке после появления первых вычислительных машин. В принципе, в своих основных положениях математический аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных требует учета этого фактора, и его игнорирование может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

Распространенным способом анализа дискретных цифровых последовательностей является z-преобразование (z-transform). Оно играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как для аналоговых – преобразование Лапласа. Большое значение z-преобразование имеет для расчетов рекурсивных цифровых систем обработки сигналов, а потому рассматривается отдельной темой перед началом изучения рекурсивных цифровых фильтров.

Z- преобразование является обобщением дискретного преобразования Фурье. Особенно эффективно оно используется при анализе дискретных систем и, в частности, при проектировании рекурсивных цифровых фильтров.

Впервые z-преобразование введено в употребление П.Лапласом в 1779 и повторно "открыто" В.Гуревичем в 1947 году с изменением символики на z^{-k}. В настоящее время в технической литературе имеют место оба вида символики. На практическое использование преобразования это не влияет, так как смена знака только зеркально изменяет нумерацию членов полинома (относительно z^0), числовое пространство которых в общем случае от $-\infty$ до $+\infty$.

Преобразованием Лапласа функции $x(t)$ называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt; \qquad (3.1)$$

прямое преобразование и обратное

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p)e^{pt}dp, \qquad (3.2)$$

где $X(p)$ – L –изображение (L –образ) функции $x(t)$, результат преобразования Лапласа;

p - оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega; \qquad (3.3)$$

σ_0 - абсцисса абсолютной сходимости интеграла (3.1).

Преобразование Лапласа справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла (3.1)

$$\int_0^\infty \left|x(t)e^{-pt}\right|dt = \int_0^\infty \left|x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\right|dt = \int_0^\infty \left|x(t)\right|\cdot\left|e^{-j\omega t}\right|e^{-\sigma t}dt = \int_0^\infty \left|x(t)\right|\cdot e^{-\sigma t}dt < \infty ,$$

определяемое абсциссой абсолютной сходимости σ_0. На комплексной плоскости p - плоскости это область, где $\mathrm{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

Дискретное преобразование Лапласа последовательности $x(nT)$ получают в результате перехода от непрерывного времени к дискретному

$$t \Rightarrow nT \;,$$

замены непрерывной функции последовательностью

$$x(t) \Rightarrow x(nT),$$

а интеграл заменяется суммой:

$$X\left(e^{pt}\right) = D\{X(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT} \;. \qquad (3.4)$$

При исследовании дискретных сигналов и линейных систем вместо дискретного преобразования Лапласа используют Z-преобразование, которое получается из дискретного преобразования Лапласа в результате замены переменных

$$z = e^{pT} .$$

Z-преобразованием последовательности $x(nT)$ называется следующий ряд:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \;, \qquad (3.5)$$

где $Z\{x(nT)\}$ - символическое обозначение Z-преобразования;

$x(nT)$ - оригинал (вещественная или комплексная последовательность);

$X(z)$ - z-изображение (z-образ) последовательности $x(nT)$, результат Z-преобразования.

Z-преобразование однозначно связывает последовательность $x(nT)$ с ее z-изображением $X(z)$ и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|x(nT)z^{-n}\right| < \infty \,. \qquad (3.6)$$

Комплексная переменная z может быть представлена в двух формах:

- в алгебраической

$$z = \xi + j\eta;$$

- в показательной

$$z = re^{j\varphi},$$

где радиус r является модулем, а угол φ - аргументом переменной z:

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

$$\varphi = \arg(z) = arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Соответственно, положение произвольной точки на комплексной z-плоскости может задаваться:

- координатами $(\xi;\eta)$ - в декартовой системе координат;
- полярными координатами $(r;\varphi)$ - в полярной системе координат.

Основные свойства Z-преобразования

Одним из важнейших свойств Z-преобразования является свойство его единственности, в соответствии с которым последовательность $x(nT)$ однозначно определяется z-изображением $X(z)$ в области его сходимости и наоборот, z-изображение $X(z)$ однозначно определяет последовательность $x(nT)$.

Другие свойства Z-преобразования:

1. Линейность

Если последовательность $x(nT)$ равна линейной комбинации последовательностей

$$x(nT) = a_1x_1(nT) + a_2x_2(nT) + a_3x_3(nT) + ...,$$

то её z-изображение равно линейной комбинации z-изображений данных последовательностей:

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) + a_3X_3(z) + ... \quad .$$

2. Z –преобразование задержанной последовательности (теорема о задержке)

Z – изображение последовательности $x[(n-m)T]$, задержанной на m (m>0) отсчетов, равно z-изображению незадержанной последовательности $x(nT)$, умноженному на z^{-m}:

$$Z\{x(nT)\} = X(z);$$

$$Z\{x[(n-m)T]\} = X(z)z^{-m}.$$

3. Z –преобразование свертки последовательностей (теорема о свертке)

Сверткой последовательностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ называется последовательность $x(nT)$, определяемая соотношением

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT) x_2[(n-m)T].$$

Z – изображение свертки равно произведению z-изображений свертываемых последовательностей

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = X_1(z) X_2(z).$$