

43 - Q1

a) Inicialmente podemos utilizar a Lei de Wien para encontrar a temperatura de cada camada utilizando o comprimento de onda observado com maior intensidade:

$$T = \frac{b}{\lambda_{MAX}}, \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1000 \text{ nm} \\ \lambda_2 &= 500 \text{ nm} \\ \lambda_3 &= 100 \text{ nm}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}T_1 &= 2900 \text{ K} \\ T_2 &= 5800 \text{ K} \\ T_3 &= 29000 \text{ K}\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}1 &: \text{ vermelho} \\ 2 &: \text{ ciano} \\ 3 &: \text{ violeta}\end{aligned}}$$

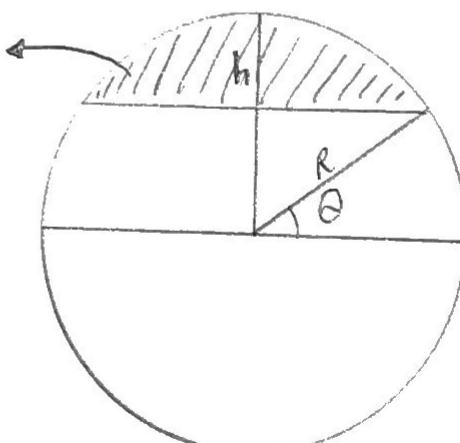
A camada com $\lambda_1 = 1000 \text{ nm}$ estará emitindo com maior intensidade no infravermelho, portanto, na faixa do visível, estará emitindo com maior intensidade a cor vermelha, já para $\lambda_2 = 500 \text{ nm}$ estará emitindo com maior intensidade na cor ciano e para a de $\lambda_3 = 100 \text{ nm}$ estará emitindo com maior intensidade no ultravioleta, portanto, no visível, estará emitindo com maior intensidade na violeta.

b) Podemos calcular o fluxo de cada camada utilizando as suas temperaturas, áreas superficiais e a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$f = \frac{A}{4\pi R^2} \sigma T^4$$

$$h = R - R \sin \theta$$

$$\begin{aligned}A &= 2\pi R h \\ A &= 2\pi R^2 (1 - \sin \theta)\end{aligned}$$



$$A_3 = 2 \cdot 2\pi R^2 (1 - \sin 60^\circ) = 2\pi R^2 (2 - \sqrt{3})$$

$$A_2 = 2 \cdot 2\pi R^2 (1 - \sin 30^\circ) - A_3 = 2\pi R^2 (\sqrt{3} - 1)$$

$$A_1 = 4\pi R^2 - 2 \cdot 2\pi R^2 (1 - \sin 30^\circ) = 2\pi R^2$$

A_1, A_2 e A_3 são as áreas superficiais totais de temperaturas iguais p. 1

43-Q1

Utilizando $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.K^{-4}$:

$$f_3 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \sigma T_3^4$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sigma T_2^4 \quad \Rightarrow$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \sigma T_1^4$$

$$\boxed{f_1 = 2,01 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2}$$
$$\boxed{f_2 = 2,35 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2}$$
$$\boxed{f_3 = 5,37 \cdot 10^9 \text{ W/m}^2}$$

c) Calculo do fluxo total f_T :

$$f_T = f_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow f_T \approx 5,40 \cdot 10^9 \text{ W/m}^2$$

Para que o fluxo continue o mesmo:

$$f_T = \sigma T'^4 \Rightarrow T' = \left(\frac{f_T}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{T' \approx 17600 \text{ K}}$$

a) Fórmula do Redshift Relativístico:

$$1+z = \sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}} \Rightarrow (1+z)^2 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = 1 + \frac{v_r}{c}$$

$$\Rightarrow (1+z)^2 - 1 = \frac{v_r}{c} \left(1 + (1+z)^2\right)$$

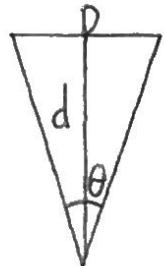
$$\Rightarrow v_r = c \cdot \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Utilizando $z = -4,26 \cdot 10^{-3} \Rightarrow v_r = -1,28 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

A velocidade radial é negativa pois o aglomerado está se aproximando. Como o movimento próprio é nulo, sua velocidade tangencial também é, logo a velocidade espacial será:

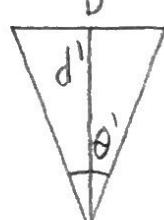
$$v = 1,28 \cdot 10^3 \text{ Km/s}$$

b) 10 anos atrás:



$$\left. \begin{array}{l} D = d \cdot \theta \\ \theta = 10^\circ \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} d \cdot \theta = d' \cdot \theta' \\ d\theta - d\theta' = -v \Delta t \theta' \\ \Rightarrow d = \frac{v \Delta t \cdot \theta'}{\theta' - \theta} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} d \cdot \theta = d' \cdot \theta' \\ d\theta - d\theta' = -v \Delta t \theta' \\ \Rightarrow d = \frac{v \Delta t \cdot \theta'}{\theta' - \theta} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \approx 7,33 \cdot 10^{15} \text{ m} \\ d' = 6,93 \cdot 10^{15} \text{ m} \end{array}$$

Agora:



$$\left. \begin{array}{l} D = d' \cdot \theta' \\ \theta' = 10^\circ 35'' \\ d' = d - v \Delta t \\ \Delta t = 10 \text{ anos} \end{array} \right\} \quad R = \frac{d \cdot \theta}{2} \Rightarrow R \approx 1,07 \cdot 10^{13} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} d' \approx 0,224 \text{ pc} \\ R \approx 71,3 \text{ U.A} \end{array}$$

43-Q3

a) Utilizando a Lei de Planck para corpos negros:

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1} \Rightarrow e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 B_\lambda} + 1 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda K_B T} = \ln\left(\frac{2hc^2}{\lambda^5 B_\lambda} + 1\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda K_B \ln\left(\frac{2hc^2}{\lambda^5 B_\lambda} + 1\right)} \quad \begin{aligned} \lambda &= 710 \text{ nm} \\ B_\lambda &= 4,11 \cdot 10^{13} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T \approx 7140 \text{ K}$$

b) Rayleigh - Jeans:

Partindo da função de Planck e utilizando $e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda K_B T}$ para

$$\lambda T \gg \frac{hc}{K_B}$$

$$B_\lambda' = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda K_B \cdot T}{hc} \Rightarrow B_\lambda' = \frac{2c K_B T'}{\lambda^4} \Rightarrow T' = \frac{B_\lambda \cdot \lambda^4}{2c K_B}$$

$$T' \approx 1260 \text{ K}$$

$$\delta' = \left| \frac{T - T'}{T} \right| \Rightarrow \delta' \approx 82,3\%$$

Wien:

A Lei de Wien relaciona o comprimento de onda emitido com maior intensidade e a temperatura da estrela, portanto, para deduzi-la, precisamos derivar a intensidade de radiações emitidas pelo comprimento de onda:

43-Q3

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} = 2hc^2 \left(-\frac{5}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{-e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}}}{(e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1)^2} \cdot \frac{hc}{K_B T} \cdot \frac{-1}{\lambda^2} \right)$$

Intensidade máxima para $\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} = 0$:

$$\frac{hc}{\lambda^7 K_B T} \cdot \frac{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}}}{(e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1)^2} = \frac{5}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1}, \quad x = \frac{hc}{\lambda K_B T}$$

$$x \cdot \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{5}{e^x - 1} \Rightarrow x e^x = 5 e^x - 5 \Rightarrow x = 5(1 - e^{-x})$$

Por iteração, obtemos: $\frac{hc}{\lambda K_B T} \approx 4,965 \Rightarrow \lambda \cdot T = \frac{hc}{4,965 K_B} = b$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \cdot T'' = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}} \Rightarrow T'' = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{\lambda}$$

$$T'' \approx 4080 \text{ K}$$

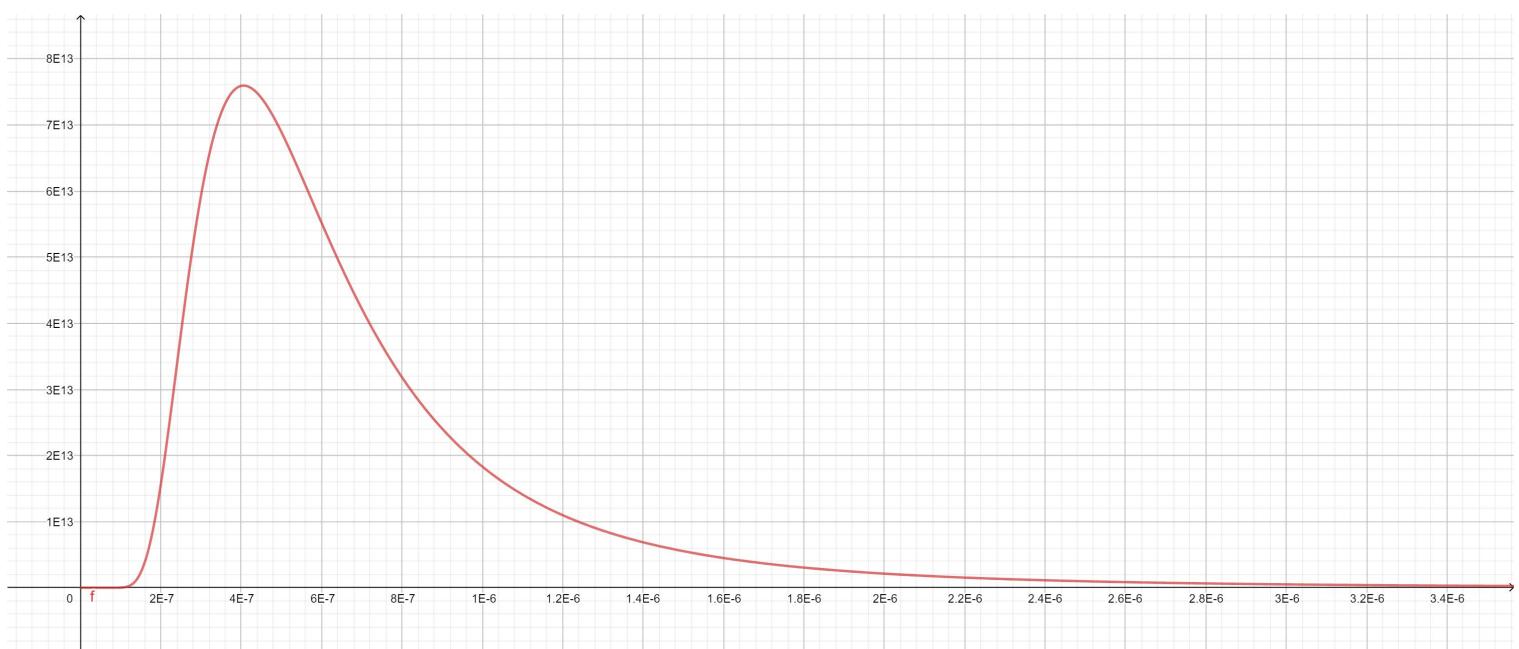
$$\delta'' = \left| \frac{T - T''}{T''} \right| \Rightarrow \boxed{\delta'' \approx 42,8\%}$$

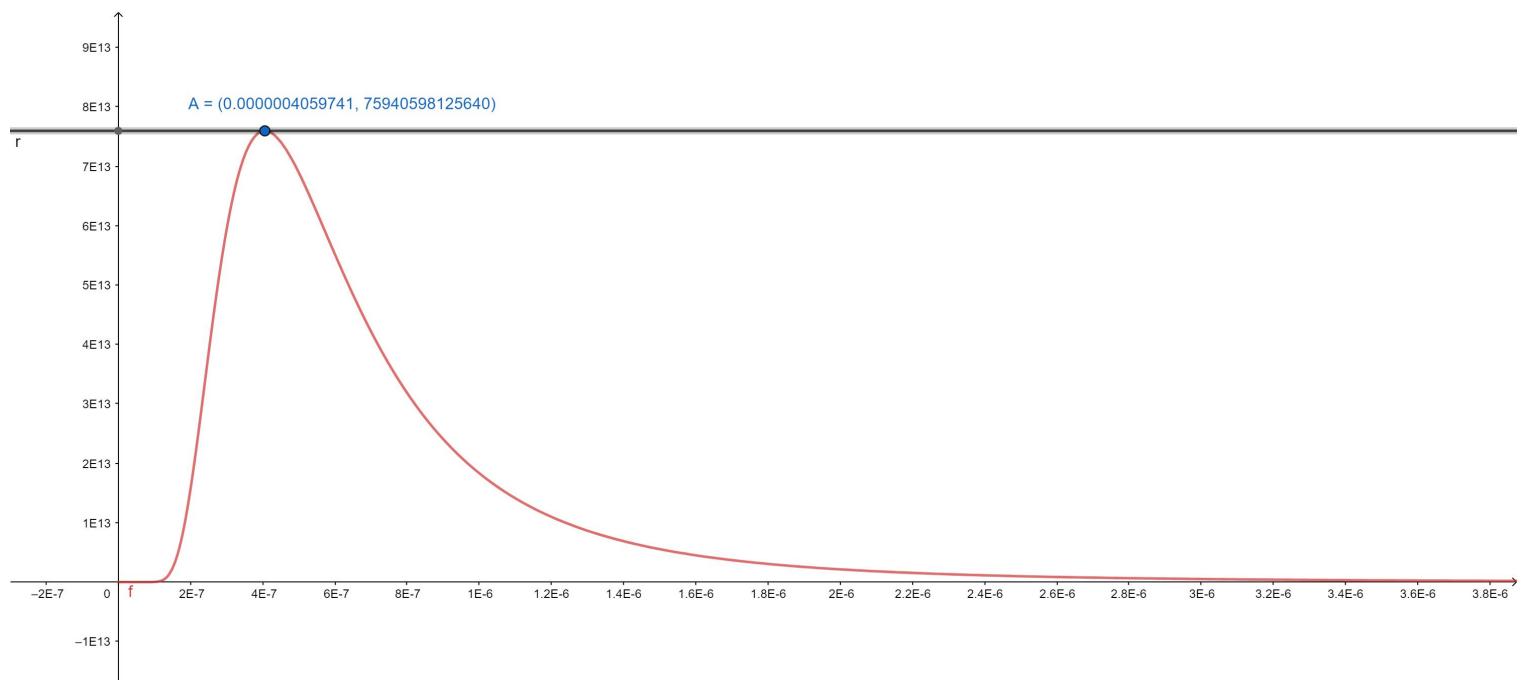
Como $\delta'' < \delta'$ a Lei de Wien seria mais adequada para o caso de $\lambda = 710 \text{ nm}$.

c) Gráfico $B_\lambda \times \lambda$ (Geogebra) - Páginas 5,1 e 5,2

B_λ foi representado na ordenada com $[B_\lambda] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$
 λ foi representado na abscisa com $[\lambda] = \text{m}$

$$\text{Função: } B_\lambda = \frac{1,192 \cdot 10^{-16}}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2016 \cdot 10^{-6}}{\lambda}} - 1}$$





43- Q3

d) Utilizando a Lei de Wien:

$$\lambda_M = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}, T = 7140 K \Rightarrow \boxed{\lambda_M \approx 405,9 \text{ nm}}$$

Utilizando o Gráfico, obtemos:

$$\boxed{\lambda'_M \approx 406,0 \text{ nm}}$$

Como esperado, os comprimentos de onda deram praticamente iguais, pois a Lei de Wien é deduzida encontrando o ponto máximo da função $\left(\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} = 0\right)$. No gráfico, o mesmo processo foi feito, porém visualmente.

c) Para encontrar o fluxo bolométrico, devemos integrar a intensidade de radiação sobre todos os comprimentos de onda:

$$F_B = \pi \int_0^{\infty} B_\lambda d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1} d\lambda$$

Utilizando um programa de computador, obtemos:

$$\boxed{F_B \approx 1,473 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2}$$

Utilizando a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$F'_B = \sigma T^4, \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{K}^{-4}$$

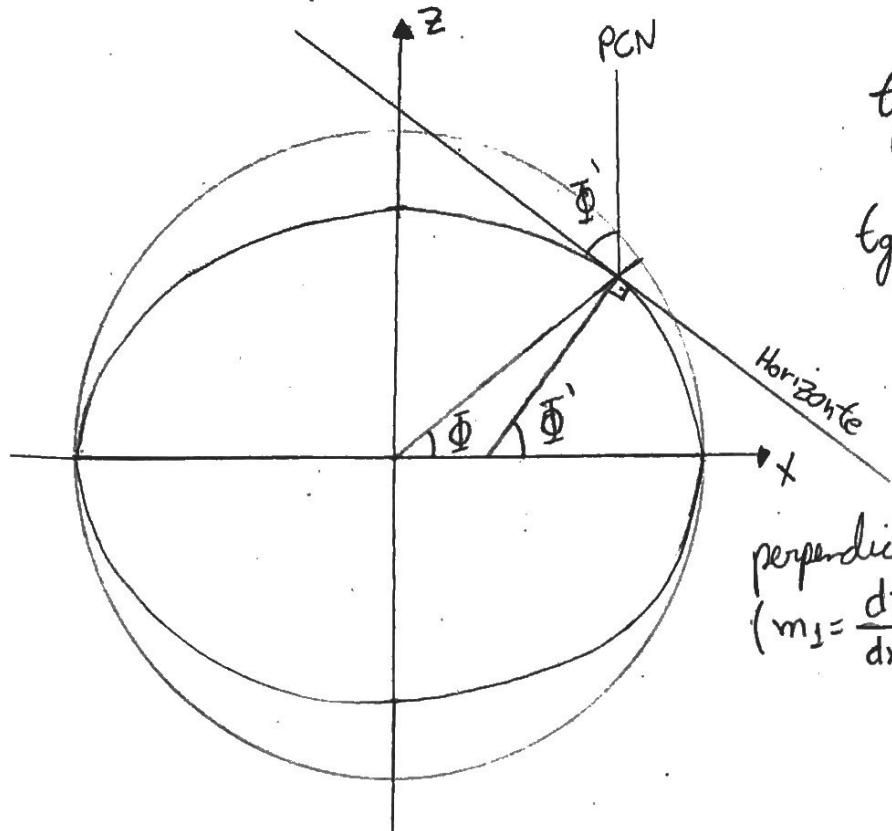
$$\Rightarrow F'_B \approx 1,474 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2$$

Como esperado, as respostas deram praticamente iguais, já que a Lei utilizada foi deduzida pela expressão que o computador calculou:

$$F_B = \pi \int_0^{\infty} B_\lambda d\lambda = \sigma T^4 \quad p.6$$

43 - Q4

a) Secção do elipsóide de fúnções: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{z}{x}$$

$$\operatorname{tg} \Phi' = -\frac{dx}{dz}$$

perpendicular a link do horizonte
($m_1 = \frac{dz}{dx}$): $\operatorname{tg} \Phi' = m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Para uma estrela ser circumpolar ela deve obedecer a regras:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\Phi|$$

Onde δ e Φ têm o mesmo sinal. Porém, considerando a Terra com o formato de um elipsóide, temos que utilizar a latitude geodésica Φ' :

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\Phi'|$$

Derivando a equação da elipse em z:

$$\frac{2x}{a^2} \frac{dx}{dz} + \frac{2z}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dz} = -\frac{a^2 z}{c^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg} \Phi' = \frac{a^2 z}{c^2 x} = \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg} \Phi$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \Phi' = \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg} \Phi, \text{ para } \Phi = 60^\circ: \Phi' \approx 60^\circ 9' 48''$$

$$\therefore |\delta| > 29^\circ 50' 12''$$

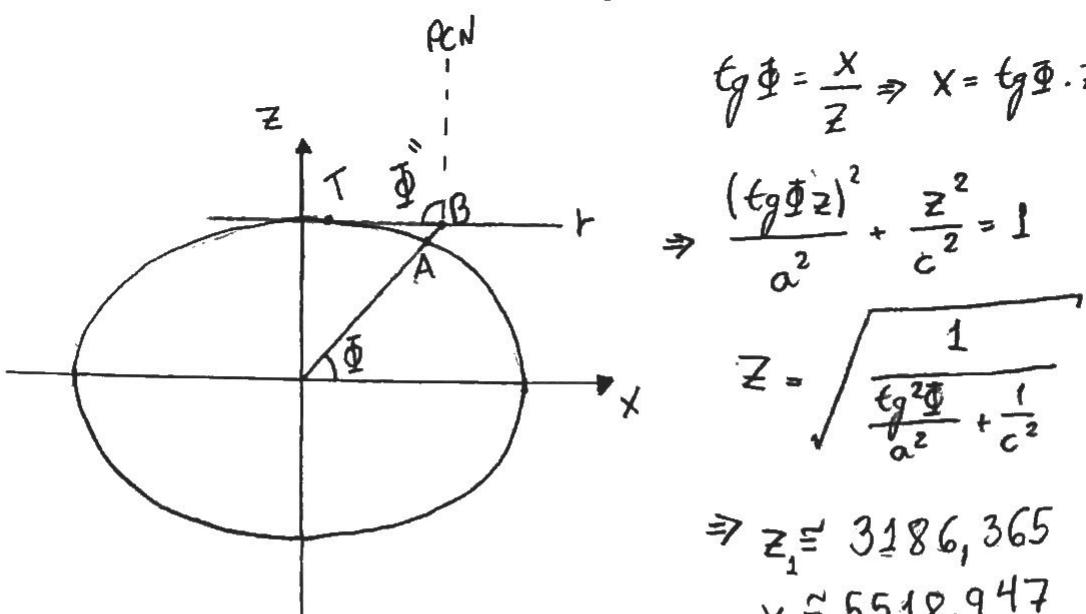
$$|\delta| < 90^\circ$$

Sera' circumpolar se a declinação estiver no intervalo:

$$29^\circ 50' 12'' < \delta < 90^\circ$$

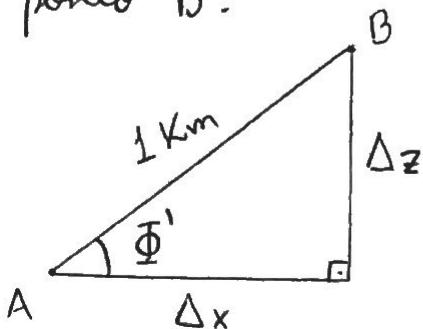
43 - Q4

b)



Para encontrar as coordenadas
do ponto B:

$$\Rightarrow A = (5518,947; 3186,365)$$



$$\begin{aligned} \Delta z &= \sin \Phi \\ \Delta x &= \cos \Phi \Rightarrow B = (5519,444; 3187,232) \\ x_2 &= x_1 + \Delta x \\ z_2 &= z_1 + \Delta z \end{aligned}$$

Para encontrar as declinações precisamos: (1) calcular a inclinação da reta r tangente a elipse e que passa por B e (2) calcular o ângulo $\Delta\theta$ que um observador em B consegue enxergar abais do horizonte de A.
(1) Considerando o ponto T em r tangente a circunferência e as coordenadas (x_0, z_0) :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \Rightarrow x_0^2 c^2 + z_0^2 a^2 = a^2 c^2$$

$$\text{Inclinação } m: m = \frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x_0}{a^2 z_0} = \frac{z_2 - z_0}{x_2 - x_0}$$

$$\Rightarrow -c^2 x_0 x_2 + c^2 x_0^2 = a^2 z_2 z_0 - a^2 z_0^2$$

$$\Rightarrow -c^2 x_0 x_2 + \underbrace{(c^2 x_0^2 + a^2 z_0^2)}_{a^2 c^2} = a^2 z_2 z_0 \Rightarrow z_0 = \frac{c^2}{z_2} - \frac{c^2 x_2}{a^2 z_2} x_0$$

43 - Q4

$$z_0^2 = c^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \frac{c^4}{z_2^2} - \frac{2c^4 x_2}{a^2 z_2^2} x_0 + \frac{c^4 x_2^2}{a^4 z_2^2} x_0^2$$

$$\Rightarrow a^2 z_2^2 - z_2^2 x_0^2 = a^2 c^2 - 2c^2 x_2 x_0 + \frac{c^2 x_2^2}{a^2} x_0^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 \left(\frac{c^2 x_2^2}{a^2} + z_2^2 \right) - 2c^2 x_2 x_0 + a^2 (c^2 - z_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4,042243 \cdot 10^7 x_0^2 - 4,460975 \cdot 10^{11} x_0 + 1,230658 \cdot 10^{15} = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau, obtemos:

$$x_0 = 5,517945 \cdot 10^3 \pm 5,281601 \cdot 10^1$$

Para a reta r: $x_0 \approx 5465,129 \Rightarrow m = \frac{z_2 - z_0}{x_2 - x_0} \Rightarrow m = -1,656785$

$$x_0 < x_2 \quad z_0 \approx 3277,220$$

(2) $\operatorname{tg} \theta = m \Rightarrow \theta \approx 121^\circ 6' 51''$

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{c^2 x_1}{a^2 z_1} = 1,720664 \Rightarrow \theta \approx 120^\circ 9' 50''$$

$$\Delta \theta = \theta' - \theta \Rightarrow \Delta \theta \approx 57' 1''$$

Finalmente, para calcular o intervalo de declinação:

$$|8| \geq 29^\circ 50' 12'' - \Delta \theta = 28^\circ 53' 11''$$

$$28^\circ 53' 11'' \leq \delta \leq 90^\circ$$

43-Q5

a) Para calcular o tempo no referencial das duas estrelas precisamos da distância $d = 8,6 \text{ ly}$ e da velocidade relativa da nave $v = 0,75c$:

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{8,6 \text{ ly}}{0,75c} = \frac{8,6 \text{ anos}}{0,75} \Rightarrow \boxed{\Delta t \approx 11,5 \text{ anos}}$$

b) No referencial da nave, precisamos corrigir o tempo Δt com o fator de Lorentz: $t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$

$$t'_0 = \gamma(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}), \quad t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}) \Rightarrow \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\frac{\Delta x}{c} = 8,6 \text{ anos}$$

$$\frac{v}{c} = 0,75$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \boxed{\Delta t' \approx 3,32 \text{ anos}}$$

c) Sim, pois Juvelino observa, exatamente na metade do caminho, as explosões simultaneamente. Como a luz demora 4,3 anos para chegar nessa posição, elas explodiram $t_1 = \frac{\Delta t}{2} - 4,3 \text{ anos}$ depois do início da viagem:

$$\boxed{t_1 = 1,43 \text{ anos}}$$

d) Não, pois, a menos que, na metade do caminho, sua velocidade fosse perpendicular à reta que liga as estrelas, é impossível que ocorra a simultaneidade de dois eventos distintos em diferentes referenciais com uma velocidade relativa não nula. Logo, o intervalo entre as explosões $\Delta t'_2$ pode ser calculado por:

$$\Delta t'_2 = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}), \quad \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t'_2 = -\gamma \frac{v\Delta x}{c^2} \Rightarrow \boxed{\Delta t'_2 = -4,27 \text{ anos}}$$

$$\boxed{\Delta t'_2 = 4,27 \text{ anos}}$$

a) Utilizando $T = 10^\circ\text{C}$ e $B = 760 \text{ mmHg}$ (nível do mar):

$$R \approx 58,12'' \cdot \operatorname{tg} Z_m$$

Testando para diferentes valores de Z_m da tabela, para $Z_m \leq 70^\circ$, a fórmula obtém com uma precisão de 1" nos valores de R . Logo:

$$Z_F \approx 70^\circ$$

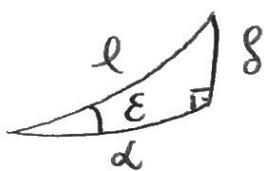
b) Para $Z_m = 16^\circ 34,4'$: $R \approx 17''$

$$Z_r = Z_m + R \Rightarrow Z_r \approx 16^\circ 34' 41''$$

(i) Para um observador com $\Phi < E$, o Sol está em seu ponto mais alto do céu de jinto no dia 1, pois, ao longo do mês, a declinação do Sol aumenta e, depois do dia 21, ela diminui um pouco.

$$\cos \delta = \cos l \cos \alpha + \sin l \sin \alpha \cos E, \quad \cos l = \cos \delta \cos \alpha$$

$$\cos \delta = \frac{\cos l}{\cos \alpha}$$



$$\Rightarrow \cos l = \cos l (1 - \sin^2 \alpha) + \sin l \sin \alpha \cos E$$

$$\cos l \tan \alpha = \sin l \cos E \Rightarrow \tan \alpha = \tan l \cos E$$

$$\text{Assumindo } \frac{dl}{dt} \text{ constante: } l = 90^\circ - \frac{20.360}{365} \quad E = 23^\circ 26,4' \Rightarrow \alpha_1 = 4^\circ 34' 40'' \\ \Rightarrow \delta_1 = 21^\circ 59' 31''$$

(ii) já para um observador com $\Phi > E$, o Sol está em seu ponto mais alto no dia 21: $\delta_0 = 23^\circ 26,4'$

Poderemos encontrar a latitude desses locais por:

$\Phi = \delta - z$, onde z é a distância zenithal real do Sol, quando $H=0^\circ$.

$$(i) \Phi_1 = 5^\circ 24,8' \quad (ii) \Phi_2 = 40^\circ 1,1'$$

$\Phi_1 = 5^\circ 24,8'$
$\Phi_2 = 40^\circ 1,1'$

43-Q6

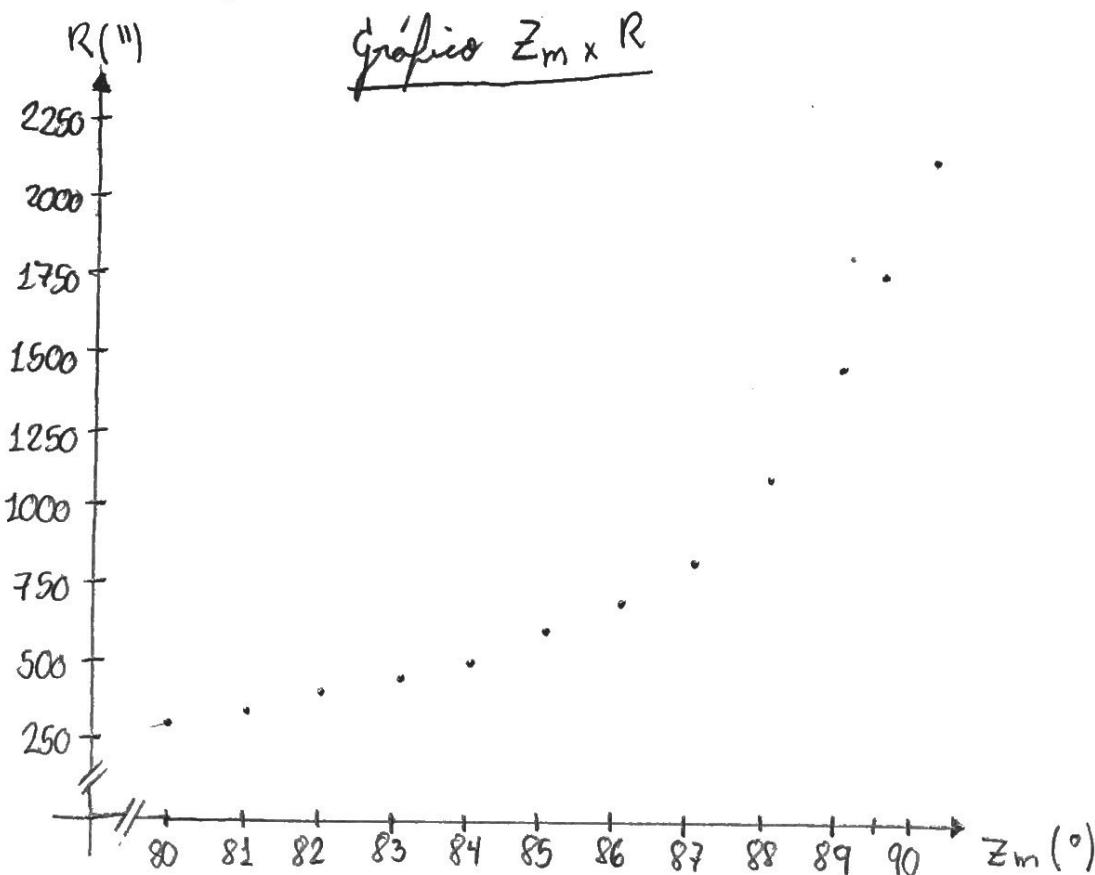
c) No momento que ele desaparece no horizonte, a distância zenithal real da parte superior do disco pode ser calculada por:

$$Z_{rs} = 90^\circ + 2123'' \Rightarrow Z_{rs} = 90^\circ 35,4'$$

Logo, o centro do sol estará em:

$$Z_{rc} = Z_{rs} + \frac{32'}{2} \Rightarrow \boxed{Z_{rc} = 90^\circ 51,4'}$$

d) Esboço do gráfico para $80^\circ < Z_m \leq 90^\circ$:



O gráfico parece uma curva exponencial da forma $y = e^{a+bx}$
 $\ln y = a + bx$

Logo, podemos fazer uma regressão linear com os valores de $\ln R$ e Z_m para $Z_m = 89^\circ$, $Z_m = 89^\circ 31'$ e $Z_m = 90^\circ$, que são os valores mais precisos dos necessários para resolver esse item.

43-Q6

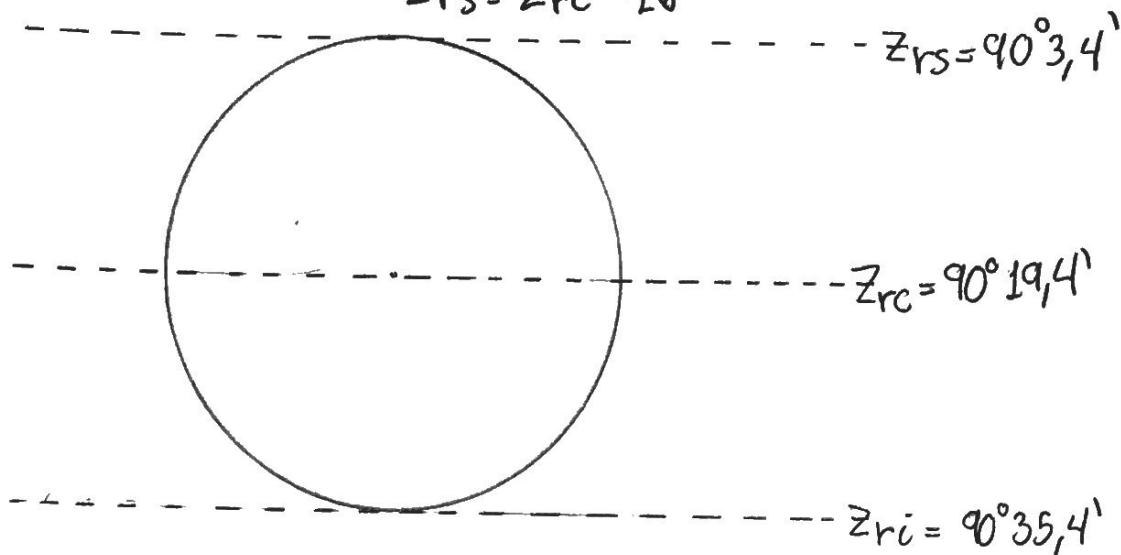
Realizando a regressão, obtemos:

$$R \approx e^{0,3598 Z_m - 24,73} \quad \text{para } 89^\circ \leq Z_m \leq 90^\circ$$

Posição real do Sol: $Z_{ri} = 90^\circ + 2123''$

$$Z_{rc} = Z_{ri} - 16'$$

$$Z_{rs} = Z_{rc} - 16'$$



Posição aparente; pela fórmula obtida acima:

$$Z_{mi} = 90^\circ$$

$$Z_{mc} = Z_{rc} - \frac{e^{0,3598 Z_{mc} - 24,73}}{3600}$$

$$Z_{ms} = Z_{rs} - \frac{e^{0,3598 Z_{ms} - 24,73}}{3600}$$

Por interações, obtemos:

$$Z_{ms} \approx 89^\circ 33,5''$$

$$Z_{mc} \approx 89^\circ 47,0''$$

$$Z_{mi} = 90^\circ$$

O diâmetro do Sol na horizontal não é alterado.

Formas de Sol quando próximo ao Horizonte

