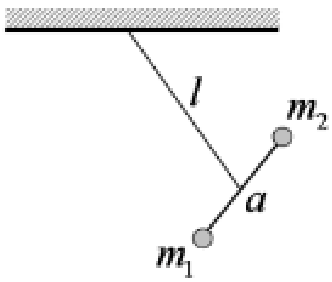
1. Un péndulo compuesto está formado por una varilla de masa despreciable y longitud l, con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longitud a, ($a < l$), en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2. Las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.



$$L = \frac{a^2}{8} m_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{8} m_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{a}{2} m_1 g \cos(\alpha_1) - l m_1 g \cos(\theta)$$
$$- \frac{a}{2} m_2 g \cos(\alpha_2) - l m_2 g \cos(\theta)$$

Para θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = l m_1 g \sin(\theta) + l m_2 g \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 l^2 \dot{\theta} + m_2 l^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_1 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l^2 \ddot{\theta}$$

Para α_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = \frac{a}{2} m_1 g \sin(\alpha_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} = \frac{a^2}{4} m_1 \dot{\alpha}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1}\right) = \frac{a^2}{4} m_1 \ddot{\alpha}_1$$

Para α_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = \frac{a}{2} m_2 g \sin(\alpha_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} = \frac{a^2}{4} m_2 \dot{\alpha}_2 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2}\right) = \frac{a^2}{4} m_2 \ddot{\alpha}_2$$

Unimos :

$$\ddot{\theta} = g \sin\theta$$

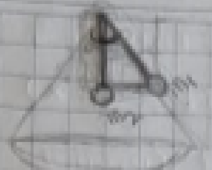
$$\ddot{\alpha}_1 = 2g \sin(\alpha_1) / a$$

$$\ddot{\alpha}_2 = 2g \sin(\alpha_2) / a$$

2. Dos masas, m_1 y m_2, están conectadas por una cuerda de longitud l a través de un agujero en el vértice de un cono vertical con ángulo de vértice α. La masa m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente. Desprecie la fricción.

   a) Determine las ecuaciones de movimiento del sistema

   b) Calcule el radio de equilibrio de m_1.



$z_{m_1} = r\cos\alpha \qquad z_{m_2} = l - r$

$x_{m_1} = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad y_{m_1} = -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta$

$v_{m_1}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$(\dot r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta\,\dot\theta)^2 + (\dot r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot\theta)^2$
$+ \dot r^2\cos^2\alpha)$

$v_{m_1}^2 = \dot r^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta^2 \qquad v_{m_2}^2 = \dot r^2$

$T = \frac{1}{2}m_1\dot r^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_2\dot r^2$

$V = m_1 g r\cos\alpha + m_2 g l - m_2 g r$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(m_1 r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta\right) \to 2m_1 r\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta\dot r + m_1 r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\ddot\theta$

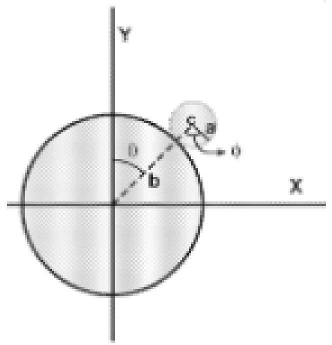
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(m_1\dot r + m_2\dot r\right) - \left(m_1 r\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta^2 - m_1 g\cos\alpha - m_2 g\right)$

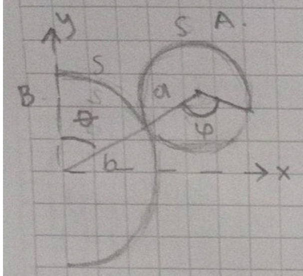
$0 = m_1\ddot r + m_2\ddot r - m_1 r\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta^2 + \cos\alpha\, g m_1 - m_2 g$

$\ddot\theta = 2\dot\theta\dot r/r$

$\ddot r = m_1 r\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot\theta^2 - \cos\alpha\, g m_1 + m_2 g\ /\ (m_1 + m_2)$

3. Un cilindro sólido A de radio a y masa m_A está en reposo sobre un cilindro fijo B de radio b. Los ejes de ambos son paralelos y horizontales. El cilindro A se desplaza de su posición de equilibrio y rueda sin deslizarse por encima del cilindro B. Usando las ecuaciones de Lagrange determinar las fuerzas de ligadura y encontrar la posición en la que ambos cilindros se separan.





$$\vec{r}_{cm_A} = \begin{cases} x = (a+b)\,\text{sen}\,\theta \rightarrow \dot{x} = (a+b)\dot{\theta}\cos\theta \\ y = (a+b)\cos\theta \rightarrow \dot{y} = -(a+b)\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$T_{cm_A} = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_A (((a+b)\dot{\theta})^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta))$$

$$= \frac{1}{2} m_A ((a+b)^2\dot{\theta}^2).$$

$$S = b\theta = (2\pi - \varphi)a$$

$$b\dot{\theta} = -\dot{\varphi} a$$

$$-\dot{\varphi} = \frac{b}{a}\dot{\theta}$$

$$T_A = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_A b^2\right)\left(\frac{b}{a}\dot{\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} m_A \frac{b^4}{a^2}\dot{\theta}^2$$

$$V_A = m_A g (a+b)\cos\theta.$$

Lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_A (a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m_A \frac{b^4}{a^2}\dot{\theta}^2 - m_A g (a+b)\cos\theta.$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange (respecto a θ).

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_A g (a+b)\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_A (a+b)^2\dot{\theta} + \frac{1}{2} m_A \frac{b^4}{a^2}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_A (a+b)^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2} m_A \frac{b^4}{a^4}\ddot{\theta}$$

Ecuaciones de movimiento.

$$\cancel{m_A} g (a+b)\,\text{sen}\,\theta - \cancel{m_A}(a+b)^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\cancel{m_A}\frac{b^4}{a^2}\ddot{\theta} = 0$$

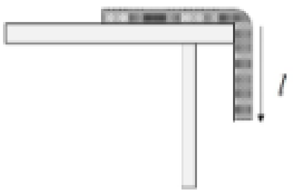
$$\ddot{\theta} = \frac{(a+b)\,\text{sen}\,\theta}{(a+b)^2 - \frac{1}{2}\frac{b^4}{a^2}}$$

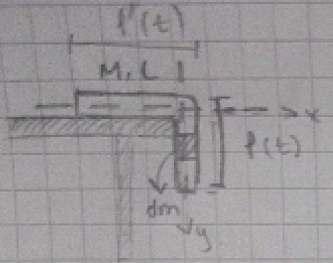
si $\ddot{\theta} = 0 \rightarrow (a+b)\,\text{sen}\,\theta = 0$

$\theta = n\pi$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{\theta = \pi}$$

4. Una cuerda uniforme de masa M y longitud L se encuentre sobre una mesa sin fricción. La cuerda se suelta desde el reposo cuando una sección de longitud l está colgando. Encuentre la trayectoria de la cuerda en función del tiempo.





Consideremos un fragmento pequeño de la cuerda colgante de masa dm y de longitud $d\ell$

$$T_{dm} = \frac{1}{2} dm\, \dot{y}^2 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{M}{L}\, d\ell\, \dot{\ell}^2$$

densidad

Todos los segmentos se mueven a la misma velocidad.

$$\ell(t) + \ell'(t) = L$$
$$\ell'(t) = L - \ell(t)$$

Integrando: $$T_\ell = \frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{\ell}^2 \int_0^{\ell} d\ell = \frac{1}{2}\frac{M}{L}\ell\dot{\ell}^2 = T_L$$

La energía potencial del sistema

$$V_L = V_\ell = \frac{M}{L}\ell g \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{2}\frac{M}{L} g \ell^2$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{M}{L}\ell\dot{\ell}^2 - \frac{1}{2}\frac{M}{L} g \ell^2$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = \frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{\ell}^2 - \frac{M}{L} g \ell$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} = -\frac{M}{L}\ell\dot{\ell}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}}\right) = -\frac{M}{L}\dot{\ell}^2 - \frac{M}{L}\ddot{\ell}\ell$$

Ecuaciones de movimiento.

$$\frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{\ell}^2 - \frac{M}{L} g \ell + \frac{M}{L}\dot{\ell}^2 + \frac{M}{L}\ell\ddot{\ell} = 0$$

$$\frac{3}{4}\frac{M}{L}\dot{\ell}^2 - \frac{M}{L} g \ell + \frac{M}{L}\ell\ddot{\ell} = 0 \rightarrow \frac{3}{4}\dot{\ell}^2 - g\ell + \ell\ddot{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\dot{\ell}^2 + \ell\ddot{\ell} = g\ell$$

Maria José Sanchez
Juan David Verano