

Análisis de un sistema dinámico con resortes acoplados

Maria José Sanchez - Juan David Verano

30 de agosto de 2024

1. Introducción

En este análisis se estudia el comportamiento de un sistema dinámico que consta de dos péndulos acoplados mediante un resorte. Se van a tener en cuenta tres configuraciones distintas: cuando las masas de los péndulos son diferentes; cuando las longitudes de las varillas son diferentes; y cuando el resorte está conectado en la mitad de las varillas.

2. Desarrollo Matemático

2.1. Ecuaciones Principales

Los vectores posiciones están definidos por las siguientes ecuaciones: Para la masa 1:

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1), \quad y_1 = l_1 \cos(\theta_1) \quad (1)$$

Para la masa 2:

$$x_2 = l_2 \sin(\theta_2), \quad y_2 = l_2 \cos(\theta_2) \quad (2)$$

La energía cinética del sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (3)$$

La energía potencial está dada por:

$$V = -mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + l^2k \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4)$$

Una vez planteadas las energías del sistema, armamos nuestro Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - l^2k \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (5)$$

Utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de las coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \quad (7)$$

Finalmente obtenemos con las siguientes expresiones:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{mg \sin(\theta_1) - kl_1l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{ml^2} \quad (8)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-mg \sin(\theta_2) + kl^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{ml^2} \quad (9)$$

3. Análisis del Comportamiento con Masas Diferentes

Analicemos un sistema en el que las masas de los péndulos m_1 y m_2 son diferentes. La relación entre estas masas se expresa como $r_m = \frac{m_1}{m_2}$ y Dependiendo del valor de r_m , el comportamiento del sistema puede tener ligeras diferencias:

- **Cuando $r_m = 1$:** El sistema es simétrico y el acoplamiento es fuerte. Los péndulos tienden a oscilar en fase o en anti-fase, dependiendo de las condiciones iniciales.

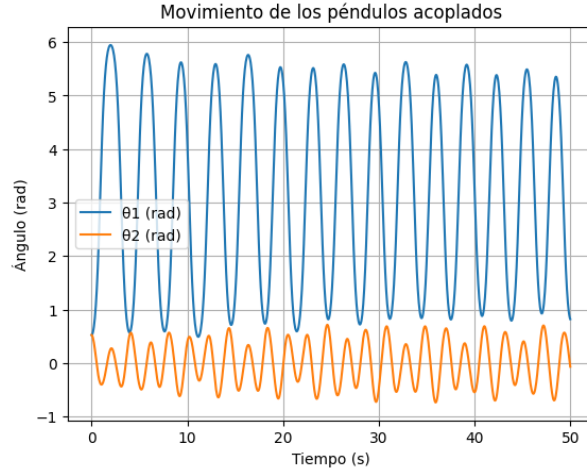


Figura 1: Comportamiento del sistema con $m_1 = m_2 = 1$ kg

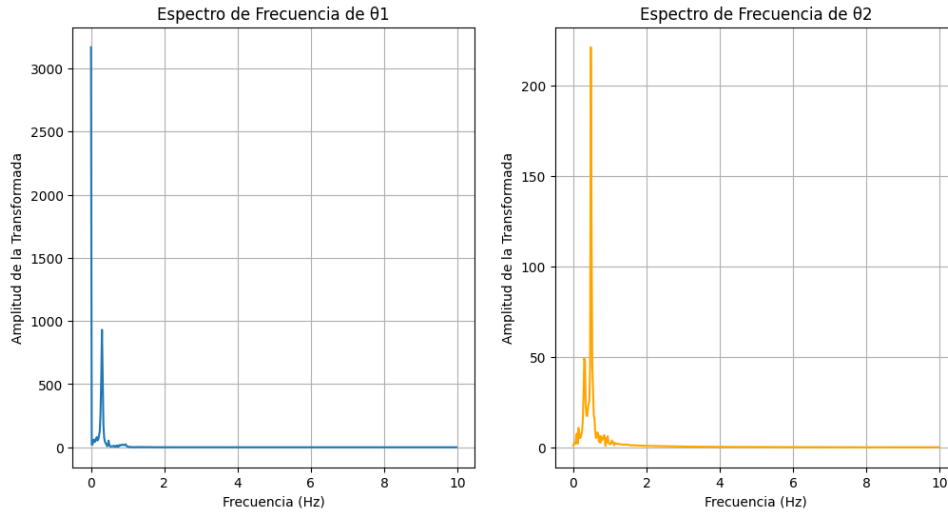


Figura 2: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,47952$ Hz

- **Cuando $r_m > 1$:** El péndulo con mayor masa domina la dinámica del sistema. Se observa un comportamiento donde el péndulo más liviano puede ser arrastrado por el más pesado, mostrando oscilaciones de mayor amplitud en θ_1 comparado con θ_2 .

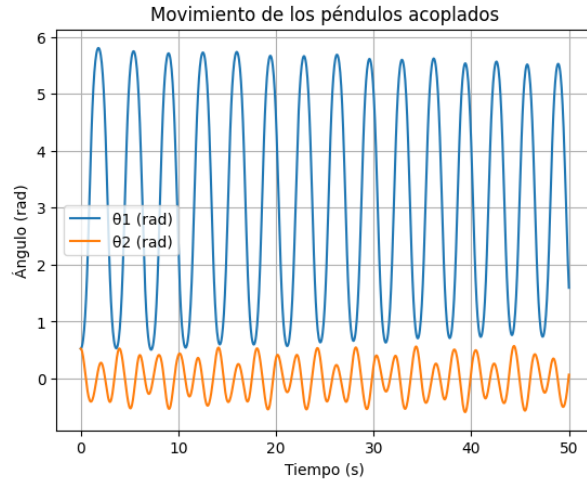


Figura 3: Comportamiento del sistema con $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg.

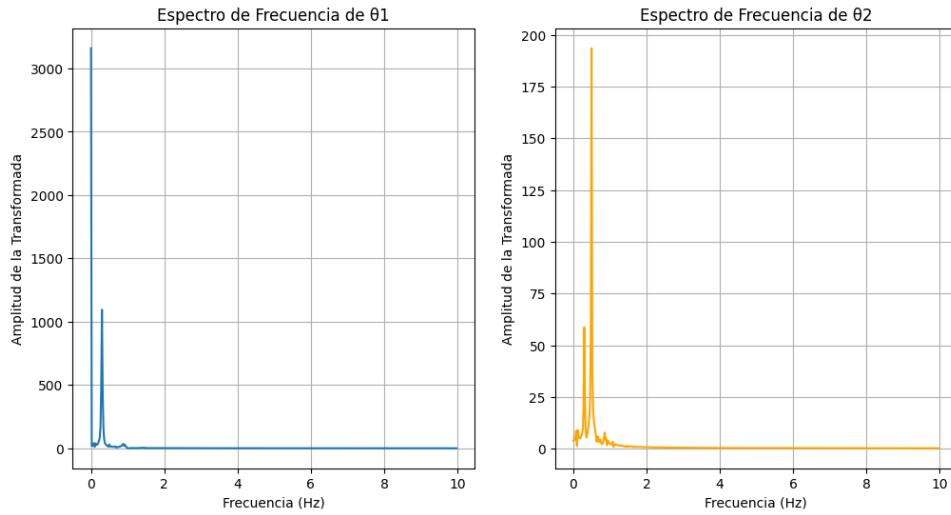


Figura 4: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,4995$ Hz

- **Cuando $r_m < 1$:** Ocurre lo opuesto; el péndulo más liviano oscila con mayor amplitud, mientras que el péndulo más pesado tiene oscilaciones más cortas.

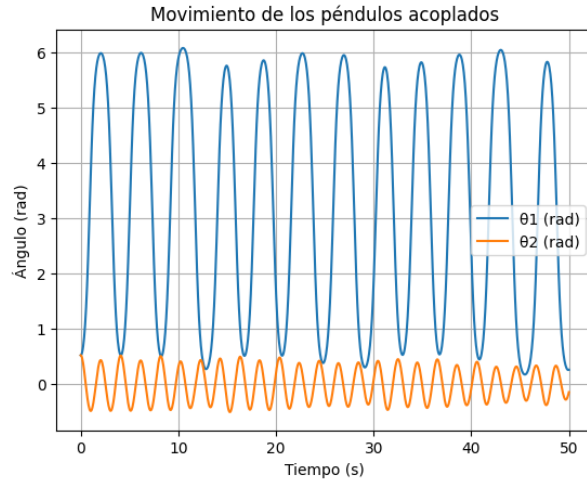


Figura 5: Comportamiento del sistema con masas de $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 3$ kg

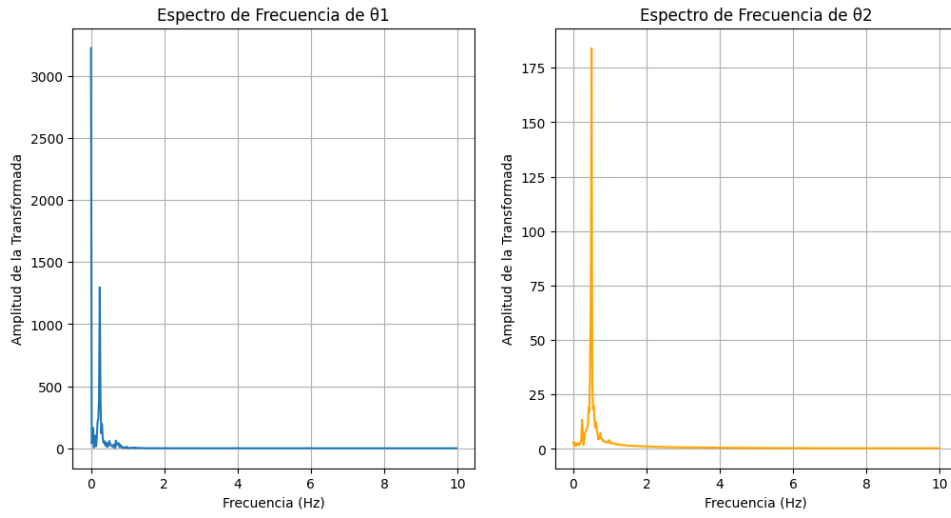


Figura 6: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,4995$ Hz

Nota: Para este análisis se tuvieron las constantes $l_1 = l_2 = 1,0$ m; $k = 1,0$ N/m ; $\theta_1 = \theta_2 = \pi/6$, $\omega_1 = \omega_2 = 0,0$ rad/s

4. Análisis del Comportamiento con Longitudes Diferentes

Ahora consideremos el caso donde las longitudes de las varillas l_1 y l_2 son diferentes, con una relación definida por $r_l = \frac{l_1}{l_2}$. Esta relación afecta el período natural de oscilación de cada péndulo:

- **Cuando $r_l = 1$:** Ambos péndulos tienen el mismo período de oscilación en ausencia de acoplamiento. El sistema es más propenso a oscilar en fase o anti-fase.

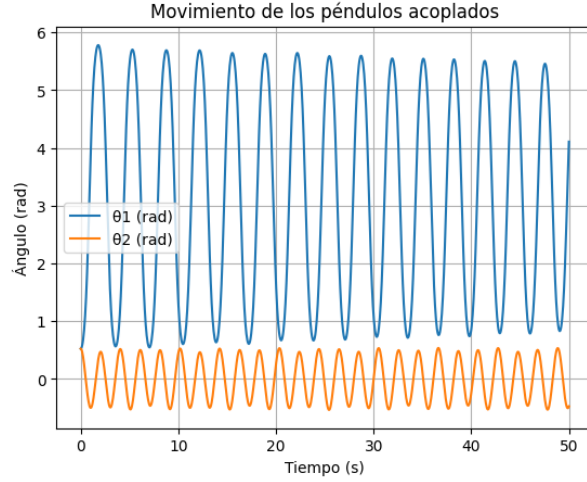


Figura 7: Comportamiento del sistema con $l_1 = l_2 = 1,0$ m

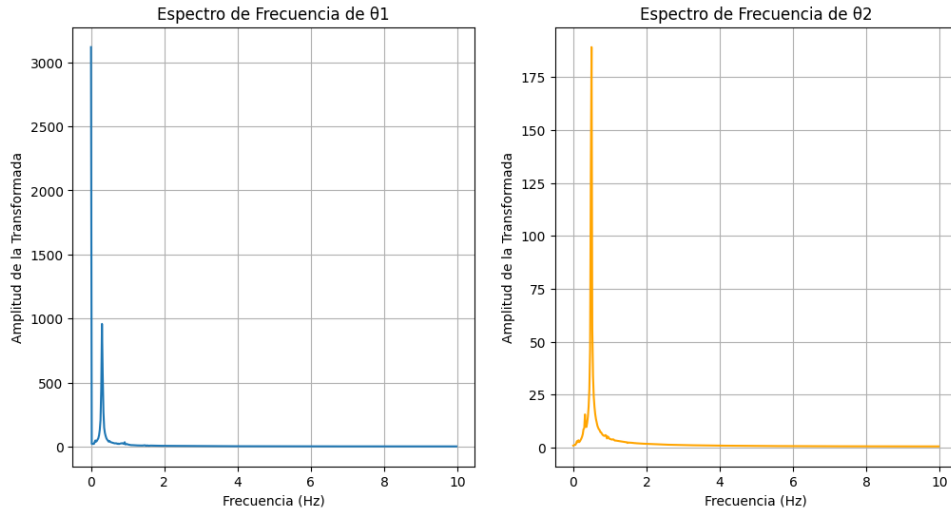


Figura 8: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,4995$ Hz

- **Cuando $r_l > 1$:** Podemos observar que el péndulo de mayor longitud presenta una frecuencia menor y una amplitud mayor que el otro, pero con se puede notar que presenta una ligera disminución en la amplitud al final

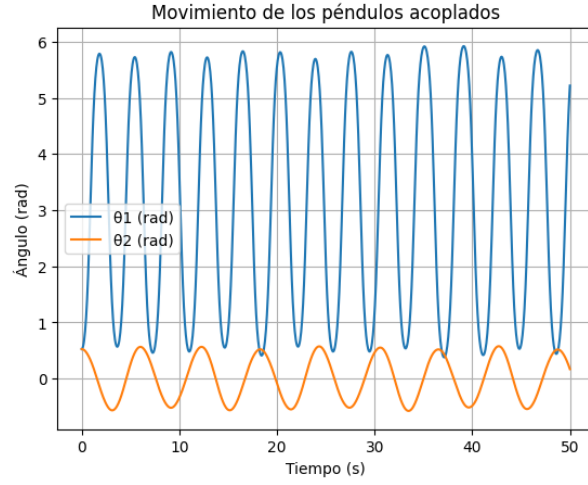


Figura 9: Comportamiento del sistema con $l_1 = 3,0$ m, $l_2 = 1,0$ m

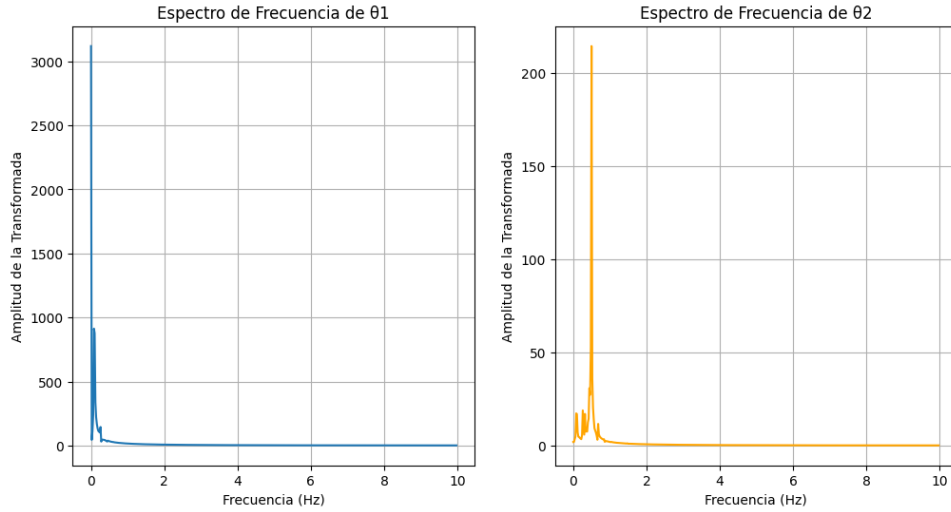


Figura 10: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,4995$ Hz

- **Cuando $r_l < 1$:** El péndulo con la varilla más corta oscila más lento y con mayor amplitud. Este desajuste en las frecuencias puede llevar a comportamientos acoplados menos predecibles y, en algunos casos, a movimientos más complejos ya que lo observamos en el comportamiento del péndulo largo.

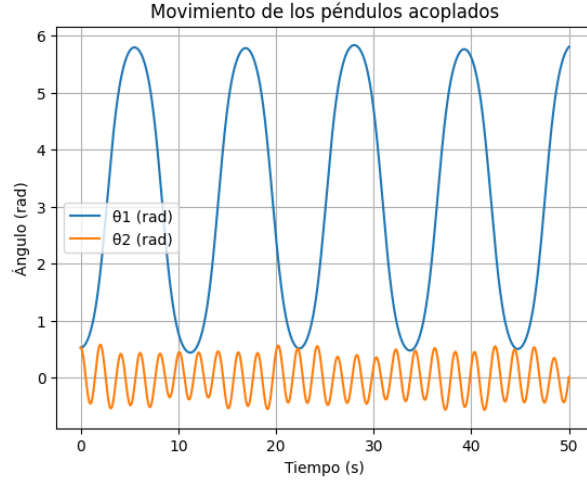


Figura 11: Comportamiento del sistema con $m_1 = 1,0$ m, $l_2 = 3,0$ m

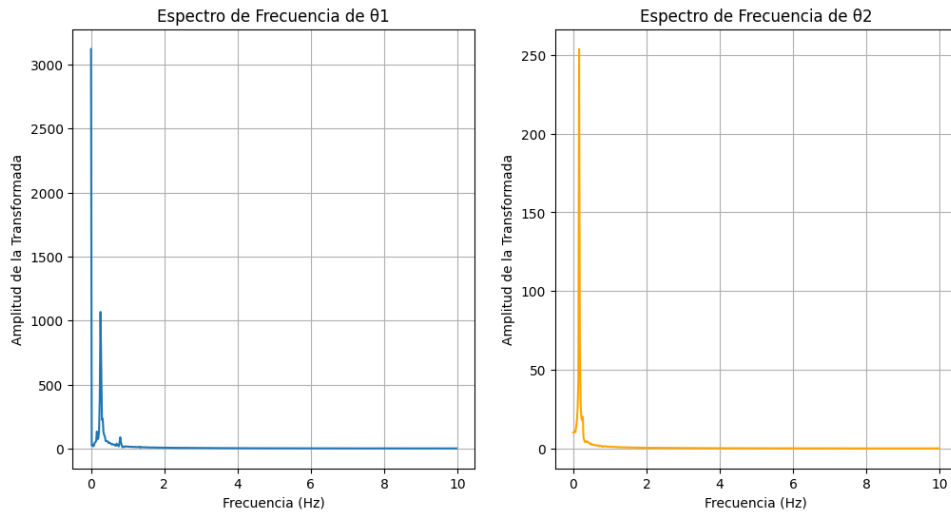


Figura 12: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,15984$ Hz

5. Análisis comparativo para longitudes distintas

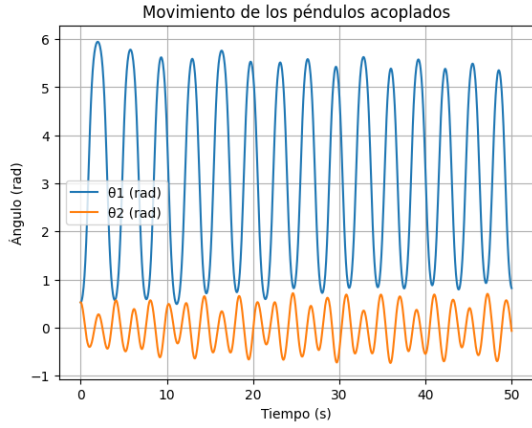


Figura 13: $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$

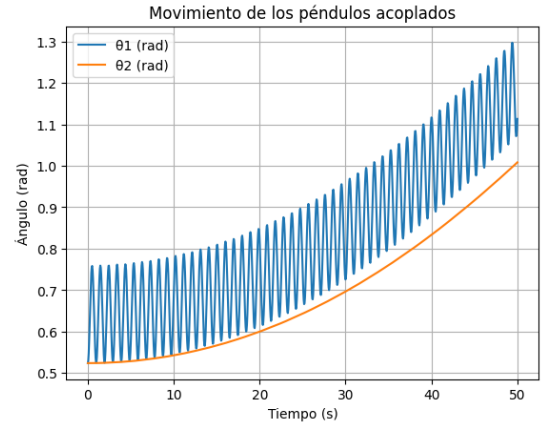


Figura 14: $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 50 \text{ m}$

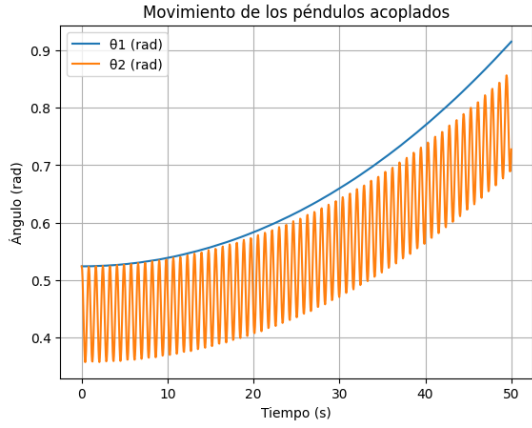


Figura 15: $l_1 = 50 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$

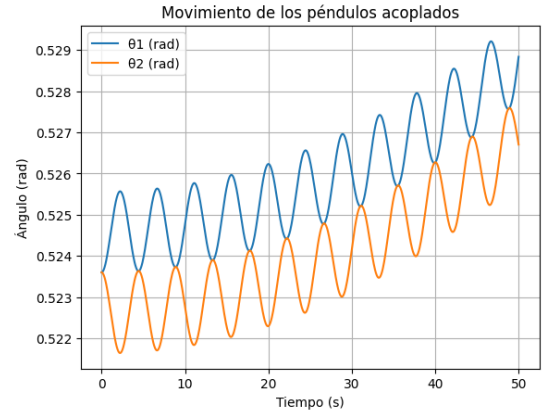


Figura 16: $l_1 = 50 \text{ m}$, $l_2 = 50 \text{ m}$

El desajuste en las longitudes puede inducir modos normales de oscilación que son menos simétricos y más sensibles a pequeñas perturbaciones, aumentando la posibilidad de comportamiento caótico.

Nota: Para este análisis se tuvieron las constantes $m_1 = m_2 = 5,0 \text{ kg}$; $k = 1,0 \text{ N/m}$; $\theta_1 = \theta_2 = \pi/6$, $\omega_1 = \omega_2 = 0,0 \text{ rad/s}$

6. Análisis comparativo para amplitudes distintas

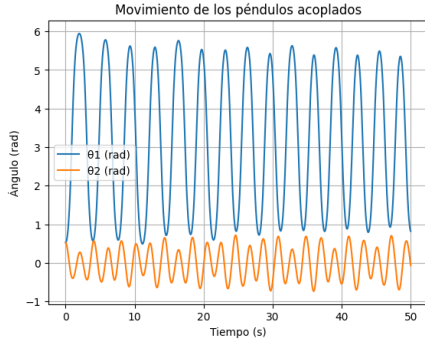


Figura 17: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = \pi/6$ rad

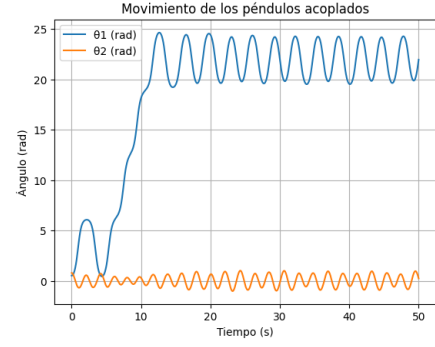


Figura 18: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = \pi/4$ rad

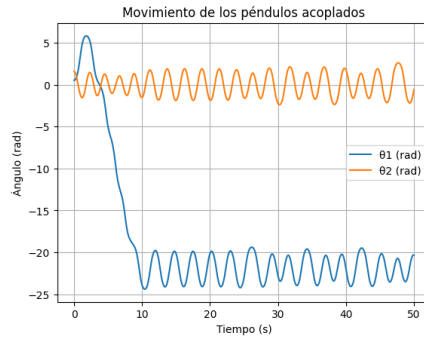


Figura 19: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = \pi/2$ rad

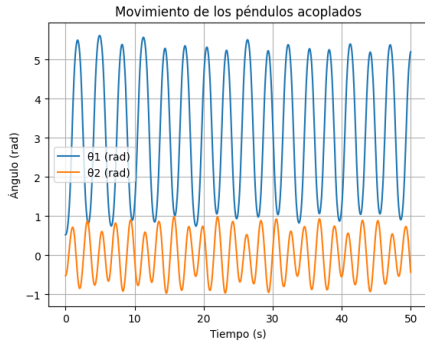


Figura 20: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = -\pi/6$ rad

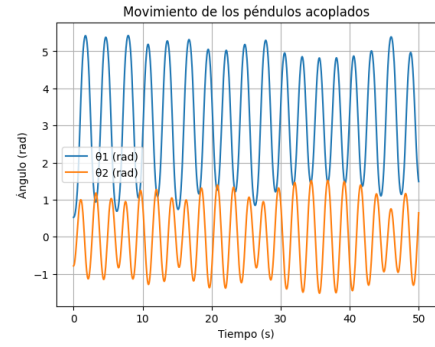


Figura 21: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = -\pi/4$ rad

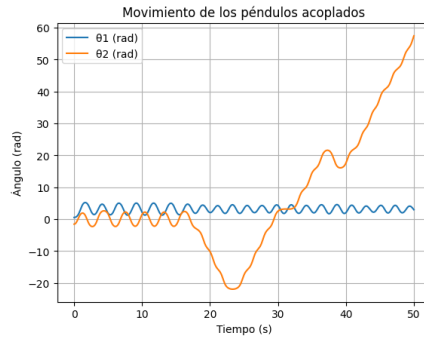


Figura 22: $\theta_1 = \pi/6$ rad, $\theta_2 = -\pi/2$ rad

7. Análisis comparativo de distintas constantes de resorte.

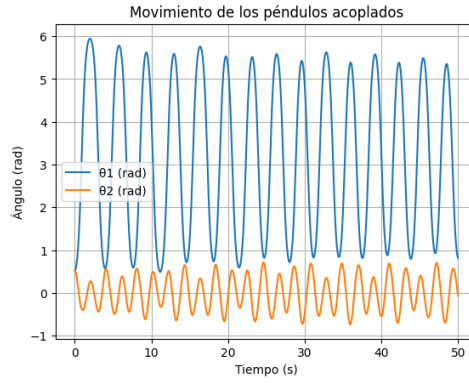


Figura 23: Comportamiento del sistema con $k = 1,0$ N/m

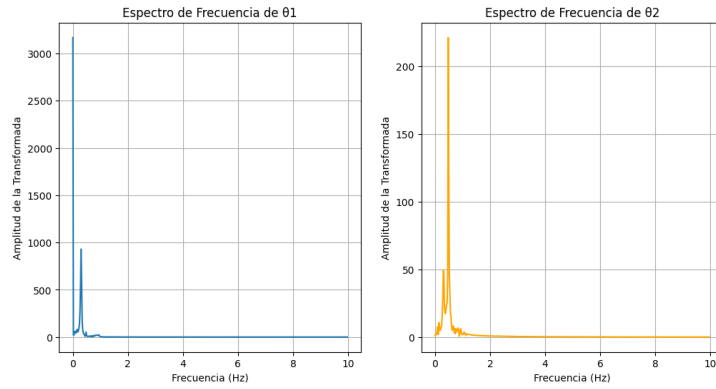


Figura 24: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,47952$ Hz

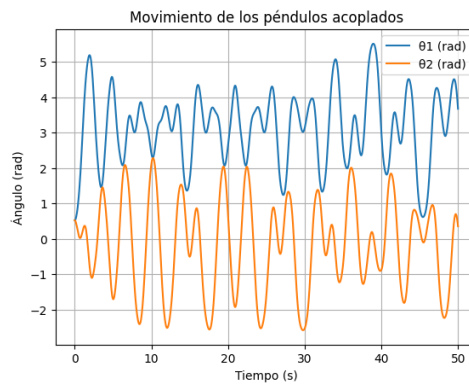


Figura 25: Comportamiento del sistema con $k = 5,0$ N/m

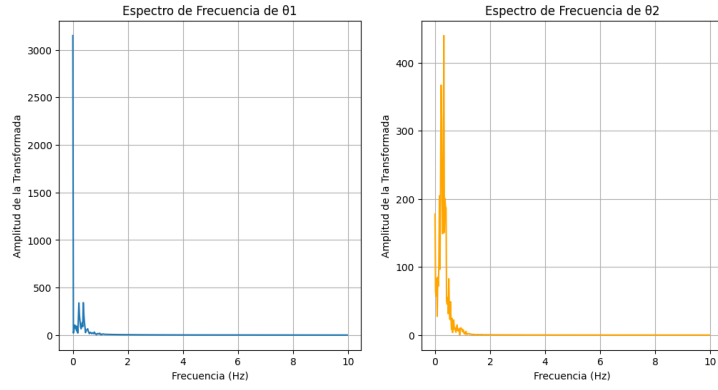


Figura 26: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0,31968$ Hz

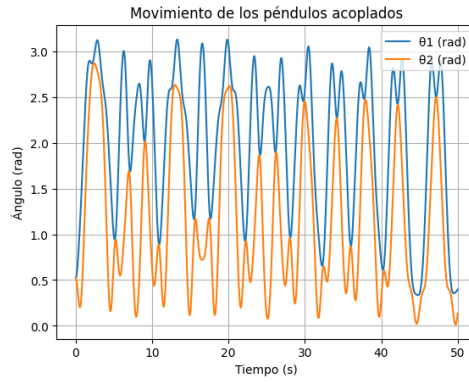


Figura 27: Comportamiento del sistema con $k = 10,0$ N/m

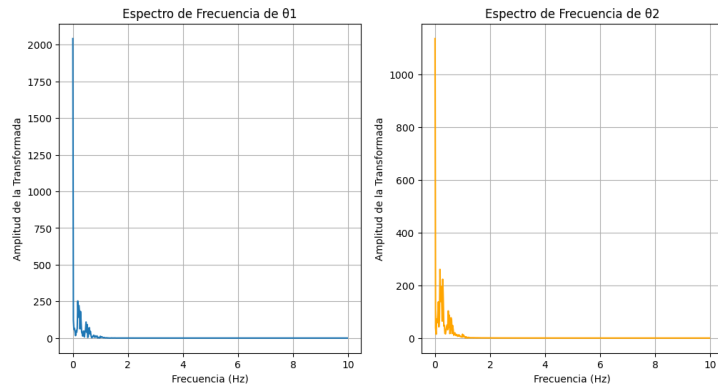


Figura 28: Espectro de frecuencias del sistema.
Frecuencia dominante de $F_1 = 0$ Hz y $F_2 = 0$ Hz

8. Análisis del Comportamiento con el Resorte en la Mitad de la Varilla

Finalmente, consideramos el caso en que el resorte que acopla los péndulos está conectado en la mitad de las varillas, es decir, en el punto medio de l_1 y l_2 . Esta configuración tiene varias cosas que hay que tener en cuenta:

- **Distribución de Fuerzas:** Al estar en la mitad de las varillas, el resorte aplica una fuerza que depende de las diferencias angulares en el centro de masa de cada péndulo. Esto puede resultar en un acoplamiento más complejo, donde no solo las diferencias angulares sino también la dinámica rotacional juegan un papel importante.
- **Modos de Oscilación:** Con el resorte en la mitad de las varillas, las oscilaciones pueden estar tanto en fase como en anti-fase, pero con frecuencias que no son simplemente funciones de las masas y longitudes, sino también de la constante del resorte k .
- **Sensibilidad a Perturbaciones:** EL sistema es altamente sensible a las perturbaciones iniciales, tales como el θ_0

9. Ecuaciones del Movimiento

Las ecuaciones que describen el movimiento de las varillas están dadas por:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_1 g \theta_1 - k l_1 l_2 (\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1^2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 g \theta_2 - k l_2 l_1 (\theta_2 - \theta_1)}{m_2}$$

Donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de las varillas 1 y 2, respectivamente, m_1 y m_2 son sus masas, l_1 y l_2 sus longitudes, y k es la constante del resorte.

10. Variación de las Masas

Al considerar diferentes masas para las varillas, se observa que el sistema se vuelve asimétrico. Específicamente, si $m_1 > m_2$, la varilla 1 tenderá a oscilar con menor amplitud debido a su mayor inercia, mientras que la varilla 2 mostrará oscilaciones más pronunciadas. Este desbalance puede amplificarse si m_1 y m_2 difieren significativamente, lo que puede llevar a un comportamiento caótico en ciertos rangos de parámetros.

11. Variación de las Longitudes

Cuando las longitudes l_1 y l_2 son diferentes, la frecuencia natural de las oscilaciones de cada varilla cambia, lo que introduce una nueva fuente de desbalance en el sistema. En general, una varilla más larga tiene una menor frecuencia natural y, por tanto, oscila más lentamente.

12. Posición del Resorte

Si el resorte se encuentra en el medio de las varillas, las fuerzas restauradoras se distribuyen más equitativamente. Esto tiende a estabilizar el sistema y reducir la tendencia al comportamiento caótico. Sin embargo, si el resorte no está en el medio, se introduce un desbalance adicional que puede causar inestabilidades.

13. Comportamiento Caótico

El sistema se vuelve caótico bajo ciertas condiciones, particularmente cuando hay una combinación de diferencias en las masas, longitudes, y la posición del resorte. El caos es más probable cuando hay un desbalance significativo en cualquiera de estos parámetros, lo que lleva a una dependencia sensible de las condiciones iniciales y a oscilaci