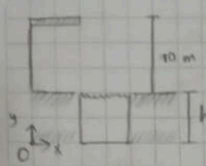
1. Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10 m de altura, tienen 5 m de profundidad

   a) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguirdad de los atletas

   b) Suponga que un corcho esférico de 5 cm de diámetro está en el fondo de fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

   c) Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superfie



Energía al saltar del trampolín $E_1 = mgy_1$

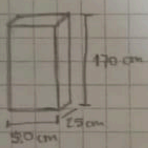
Energía al llegar al agua: $E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy_2$

Por conservación $E_1 = E_2$ y suponiendo una persona de 70 Kg de peso

$$(70)(9,81)(10+h) = (35)v^2 + (70)(9,81)(h)$$
$$686,7 + \cancel{686,7h} = 35v^2 + \cancel{686,7h}$$
$$v \approx -14 \ m/s$$

va hacia abajo

Aproximando la geometría de una persona a un paralelepípedo.



Volumen promedio: $V_0 = (1,70)(0,25)(0,5) = \underline{0,2125} \ m^3$

Usando ley de Newton:

$$\Sigma F = -mg + \rho g V_0 = ma$$
$$= -686,7 + 2084,625 = 70\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 19,97 \\ v(0) = -14 \\ x(0) = h \end{cases}$$

coef. ind.

$x(t) = At^2$
$x'(t) = 2At$
$x''(t) = 2A$

$\rightarrow x(t)_p = 9,98 \ t^2$

$$x(t) = c_1 + c_2 t + 9,98t^2$$
$$v(t) = c_2 + 19,97t$$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = h \\ v(0) = c_2 = -14 \end{cases}$$

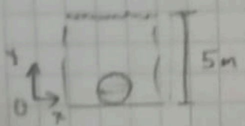
$\Rightarrow x(t) = h - 14t + 9,98t^2$ → optimizamos

$x'(t) = v(t) = -14 + 19,97t = 0 \rightarrow t_1 = 0,70$ seg

→ se detiene

$x(0,70) = h - 14(0,70) + 9,98(0,70)^2 = 0$

$\rightarrow \underline{h = 4,9 \ m}$



$\Sigma F = -mg + \rho g V_{esfera} = ma$

$\rightarrow -0{,}167 + 0{,}642 = 0{,}017 \dfrac{d^2y}{dt^2}$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$= 6{,}54 \times 10^{-5}\, m^3$

$\rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0{,}475$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

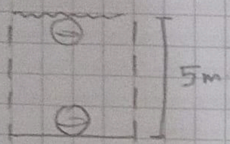
$m_{esfera} = \rho_{percho} V_{esfera}$
$= (256{,}77)(6{,}54\times10^{-5})$
$= 0{,}017$ Kg

$\rightarrow y(t) = c_1 + c_2 t + 0{,}2375 t^2$
$y(0) = c_1 = 0$
$v(t) = c_2 + 0{,}475t$
$v(0) = c_2 = 0$

$y(t) = 0{,}2375 t^2 = 5$

$\underline{t = 4{,}59 \text{ seg}}$

$v(4{,}59) = 0{,}2375(4{,}59)^2 = 5$ m/s.



• Energía en el fondo.

$E_0 = K + U + E_{int} \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mgy_0 + \frac{3}{2} P_0 V_0'$

Suponiendo que el gas es monoatómico.

$\rightarrow E_0 = 225525\, V_0'$

• Energía al salir a la superficie.

Presión en el fondo:

$\frac{1}{2} m v_s^2 + mgy_s + \frac{3}{2} P_s V_s'$

$P_0 = 101300 + (1000)(9{,}81)(5)$
$= 150350$

$\rightarrow 225525\, V_0' = \frac{1}{2} m v_s^2 + 49{,}05m + 151950\, V_s'$

$V_0' P_0 = V_s' P_s$

$V_s' = V_0' \dfrac{P_0}{P_s} \rightarrow V_s' = V_0' \dfrac{150350}{101300} \rightarrow V_s' = 1{,}48 V_0'$

$\rightarrow 0 = \frac{1}{2} m v_s^2 + 49{,}05m + 224886\, V_0' - 225525\, V_0$

$0 = \frac{1}{2} m v_s^2 + 49{,}05m - 639 V_0'$

$V_0' = \frac{4}{3}\pi r^3$ suponiendo $r = 1$

$v_s = \sqrt{\left(639 V_0' - 49{,}05\right)\left(\frac{2}{m}\right)}$

$V_0' = \frac{4\pi(0{,}01)^3}{3}$ y $m = 0{,}01$ Kg

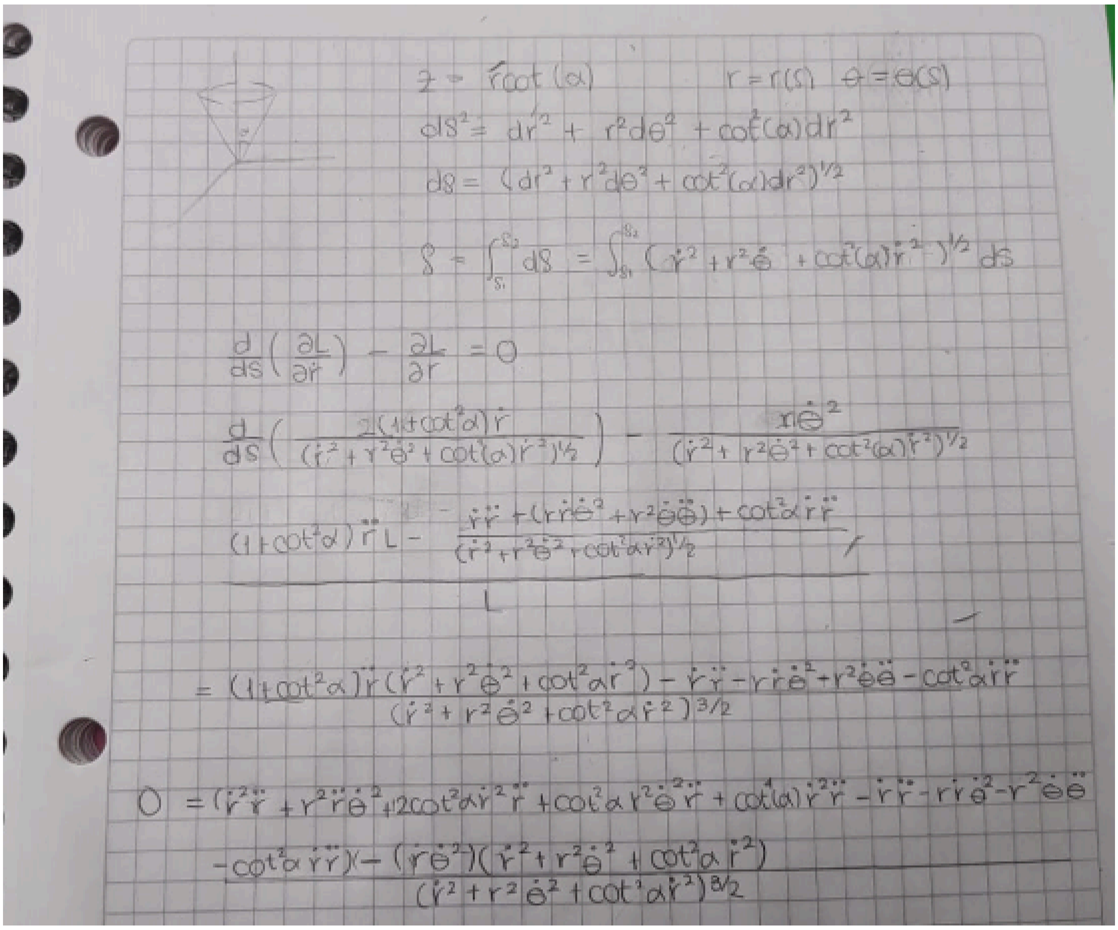
1 cm de radio.

$\underline{v_s = 9{,}9 \text{ m/s}}$

2. El siguiente enlace [1] utiliza los resultados de un artículo [2] que describen el movimiento de una partícula sobre una superficie sin fricción.

   a) Calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre dos puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vértice es α.

   b) Reproduzca las trayectorias que se muestran en el enlace.



$$z = r\cot(\alpha) \qquad r = r(s) \quad \theta = \theta(s)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cot^2(\alpha) dr^2$$

$$ds = (dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cot^2(\alpha) dr^2)^{1/2}$$

$$S = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{s_1}^{s_2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2(\alpha)\dot{r}^2)^{1/2} ds$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{2(1+\cot^2\alpha)\dot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2(\alpha)\dot{r}^2)^{1/2}}\right) - \frac{r\dot{\theta}^2}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2(\alpha)\dot{r}^2)^{1/2}}$$

$$\frac{(1+\cot^2\alpha)\ddot{r}L - \dfrac{\dot{r}\ddot{r} + (r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \cot^2\alpha\,\dot{r}\ddot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2\alpha\,\dot{r}^2)^{1/2}}}{L}$$

$$= \frac{(1+\cot^2\alpha)\ddot{r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2\alpha\,\dot{r}^2) - \dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - \cot^2\alpha\,\dot{r}\ddot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2\alpha\,\dot{r}^2)^{3/2}}$$

$$0 = \frac{(\dot{r}^2\ddot{r} + r^2\ddot{r}\dot{\theta}^2 + 2\cot^2\alpha\,\dot{r}^2\ddot{r} + \cot^2\alpha\, r^2\dot{\theta}^2\ddot{r} + \cot^4(\alpha)\dot{r}^2\ddot{r} - \dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - \cot^2\alpha\,\dot{r}\ddot{r}) - (r\dot{\theta}^2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2\alpha\,\dot{r}^2)}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot^2\alpha\,\dot{r}^2)^{3/2}}$$

3. Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

ejercicio #3:

$dU = \rho g y \, ds \rightarrow U = \int_L \rho g y \, ds$ ①

$L = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{1/2} dx \rightarrow g(y, y', x) = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{1/2} dx - L = 0$ ②

— usamos 1 y 2 para realizar el principio variacional

$S' = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y(1+y'^2)^{1/2}}_{f} + \underbrace{\lambda(1+y'^2)^{1/2}}_{g} \, dx$ → L se pierde cuado se realicen las derivadas al ser constante

$$\mathcal{L} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0$$

◎ $\frac{\partial f}{\partial y} = (1+y'^2)^{1/2}$

◎ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{(1+y'^2)^{1/2}}\right) = \frac{y'^4 + y'^2 + yy''}{(1+y'^2)^{3/2}}$

◎ $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$

◎ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}\right) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$

$0 = (1 + y'^2)^2 - y'^4 - y'^2 + yy'' - \lambda y'' \quad / (1 + y'^2)^{3/2}$

$0 = 1 + 2y'^2 + \cancel{y'^4} - \cancel{y'^4} - \cancel{y'^2} - yy'' - \lambda y''$

$0 = -(y + \lambda) y'' + y'^2 + 1 \rightarrow$ si $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$0 = -\left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \lambda\right)\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right) + 1 \qquad y' = +\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$

$0 = -\frac{\lambda}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right) + 1 \qquad y'' = +\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$0 = -\frac{\lambda}{a}\cosh\frac{x}{a} \qquad \lambda = 0$

Maria José Sanchez Manjarres
Juan David Verano Ramírez