Sistemas Lineares Triangulares

Decomposição de Cholesky

A decomposição de Cholesky **é a decomposição de uma matriz simétrica e definida positiva no produto de uma matriz triangular inferior e sua transposta** $(A = LL^t)$.

Quando aplicável, a decomposição de Cholesky é aproximadamente **duas vezes mais eficiente que a decomposição LU** para resolver sistemas de equações lineares.

Foi descoberta por **André-Louis Cholesky (1875-1918)** e publicada postumamente em 1924.

https://en.wikipedia.org/wiki/Cholesky_decomposition
https://en.wikipedia.org/wiki/Andr%C3%A9-Louis_Cholesky

Condições para a Decomposição de Cholesky

Simetria:

- A deve ser simétrica $(A = A^T)$.

Positividade:

- Todos os menores principais dominantes devem ser positivos.
- Todos os autovalores devem ser positivos.

Conceitos relacionados:

Menores Principais Dominantes
Determinantes das submatrizes de A formadas pelas primeiras k linhas e colunas.

Autovalores
Raízes do polinômio característico de A
.

Watkins, David S. Fundamentals of matrix computations. John Wiley & Sons, 2004.

Exercício

Verifique se a matriz A é simétrica e definida positiva.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema das Raízes Racionais

Para a equação com coeficientes inteiros

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

qualquer raiz racional $x = \frac{p}{q}$ irredutível satisfaz:

- p divide o termo constante a_0
- q divide o coeficiente líder a_n

Decomposição de Cholesky

Teorema:

Dada uma matriz simétrica e definida positiva A, existe uma única matriz triangular inferior L tal que $A = LL^T$.

Exemplo:

Vamos calcular a decomposição de Cholesky para a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Cholesky

Inicialize L como uma matriz triangular inferior de zeros.

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^{*} L_{j,k}},$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^{*} L_{i,k} \right) \quad \text{para } i > j.$$

Demonstração da Decomposição de Cholesky:

Existência e Unicidade

1. Caso $n = 1$:

Para uma matriz 1×1, seja: $A = [a_{11}]$.
Como A é definida positiva, $a_{11} > 0$, então pode definir $L = [l_{11}]$ tal que:

$$A = LL^T \implies [a_{11}] = [l_{11}][l_{11}]^T = [l_{11}^2]$$

e, portanto, $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ existe e é único.

2. Passo Indutivo:

Assuma que qualquer matriz simétrica e definida positiva de ordem k pode ser decomposta como $A_k = L_k L_k^T$, onde L_k é triangular inferior única com entradas positivas na diagonal.

Considere agora uma matriz simétrica e definida positiva A_{k+1} de ordem $k+1$:

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix}$$

onde A_k é uma matriz $k \times k$ simétrica e definida positiva, $\mathbf{b}$ é um vetor coluna $k \times 1$, e c é um escalar positivo.

3. Decomposição de A_{k+1}:

Queremos encontrar L_{k+1} tal que: $A_{k+1} = L_{k+1}L_{k+1}^T$
Onde L_{k+1} tem a forma:

$$L_{k+1} = \begin{bmatrix} L_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^T & l_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$$

Multiplicando $L_{k+1}L_{k+1}^T$:

$$L_{k+1}L_{k+1}^T = \begin{bmatrix} L_k L_k^T & L_k\mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T L_k^T & \mathbf{d}^T\mathbf{d} + l_{k+1,k+1}^2 \end{bmatrix}$$

Comparando com A_{k+1}:

$$\begin{cases} A_k = L_k L_k^T \\ \mathbf{b} = L_k\mathbf{d} \\ c = \mathbf{d}^T\mathbf{d} + l_{k+1,k+1}^2 \end{cases}$$

4. Resolução para $\mathbf{d}$ e $l_{k+1,k+1}$:

- **Encontrando $\mathbf{d}$:**

$$\mathbf{d} = L_k^{-1}\mathbf{b}$$

Como L_k é triangular inferior não singular (devido a A_k ser definida positiva), $\mathbf{d}$ existe e é único.

- **Encontrando $l_{k+1,k+1}$:**

$$l_{k+1,k+1} = \sqrt{c - \mathbf{d}^T\mathbf{d}}$$

Como A_{k+1} é definida positiva, o menor valor de c satisfaz:

$$c > \mathbf{d}^T\mathbf{d}$$

Portanto, $l_{k+1,k+1}$ é real e positivo.

Exercícios

1. Implemente a função `naive_cholesky` em C.

```c
void naive_cholesky(
  double** A, // matriz simétrica e definida positiva
  int n,      // ordem da matriz
  double** L  // matriz triangular inferior
);
```

2. Qual é a complexidade computacional da função `naive_cholesky`?

PERGUNTAS?