Sistemas Lineares Triangulares

Substituição para Frente (*Forward Substitution*)

Há um lado prático ainda mais predominante da álgebra linear. Em termos mais simples, **problemas lineares são solucionáveis**, enquanto problemas **não lineares não são**. É claro que alguns problemas não lineares com um pequeno número de variáveis podem ser resolvidos, mas **99,99% dos problemas não lineares multivariáveis só podem ser resolvidos ao serem reformulados como sistemas lineares**.

Tucker, Alan. "The growing importance of linear algebra in undergraduate mathematics." The college mathematics journal 24.1 (1993): 3-9.

Motivação

Qual dos sistemas abaixo é mais fácil de resolver? Justifique.

$$\begin{cases} 2y_1 & & & = 4 \\ 3y_1 & + y_2 & & = 5 \\ 2y_1 & + 2y_2 & + y_3 & = 6 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 2y_1 & + y_2 & - 3y_3 & = 4 \\ 3y_1 & + y_2 & + 2y_3 & = 5 \\ 2y_1 & + 2y_2 & + y_3 & = 6 \end{cases}$$

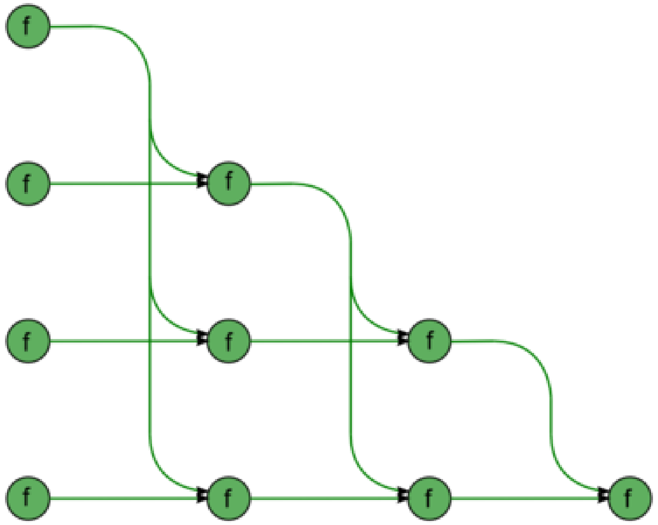
Substituição para Frente (Forward Substitution)

A **Substituição para Frente** é um método utilizado para resolver sistemas de equações lineares na forma:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Onde:

- L é uma matriz triangular inferior.
- $\mathbf{y}$ é o vetor de incógnitas intermediárias.
- $\mathbf{b}$ é o vetor de termos constantes (lado direito).



Teorema 1.3.1

Seja G uma matrix triangular. Então, G é invertível se, e somente se, todos os elementos da diagonal principal de G são diferentes de zero.

Prova

Lembre-se que $det(G) \neq 0$ se, e somente se, G é invertível. Se G é triangular, então $det(G) = g_{11}g_{22} \ldots g_{nn}$. Portanto, G é invertível se, e somente se, $g_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Conceitos Relacionados

- ***Expansão de Laplace*** Fórmula de cálculo do determinante de uma matriz quadrada.
- ***Regra de Cramer*** Resolução de sistemas lineares utilizando determinantes.

Watkins, David S. Fundamentals of matrix computations. John Wiley & Sons, 2004.

Teorema 1.3.1

Seja G uma matrix triangular. Então, G é invertível se, e somente se, todos os elementos da diagonal principal de G são diferentes de zero.

Prova

Lembre-se que $det(G) \neq 0$ se, e somente se, G é invertível. Se G é triangular, então $det(G) = g_{11}g_{22}\dots g_{nn}$. Portanto, G é invertível se, e somente se, $g_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Algoritmo de Substituição

1. **Início:**
   Defina $y_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}$.

2. **Iteração:**
   Para $i = 2$ até n:

$$y_i = \frac{1}{l_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}y_j\right)$$

Watkins, David S. Fundamentals of matrix computations. John Wiley & Sons, 2004.

Exercícios

1. Implemente a função `forwardSubstitution` em C.

```c
void forwardSubstitution(
  double** L, // matriz triangular inferior
  double* b,  // vetor de termos constantes
  double* y,  // vetor de incógnitas
  int n       // tamanho da matriz
);
```

2. Faça um gráfico do tempo de execução da função `forwardSubstitution` em função do tamanho da matriz L.
3. Qual é a complexidade computacional da função `forwardSubstitution`?
4. Compare a performance da função `forwardSubstitution` com a função `dtrsv` da biblioteca LAPACK.

PERGUNTAS?