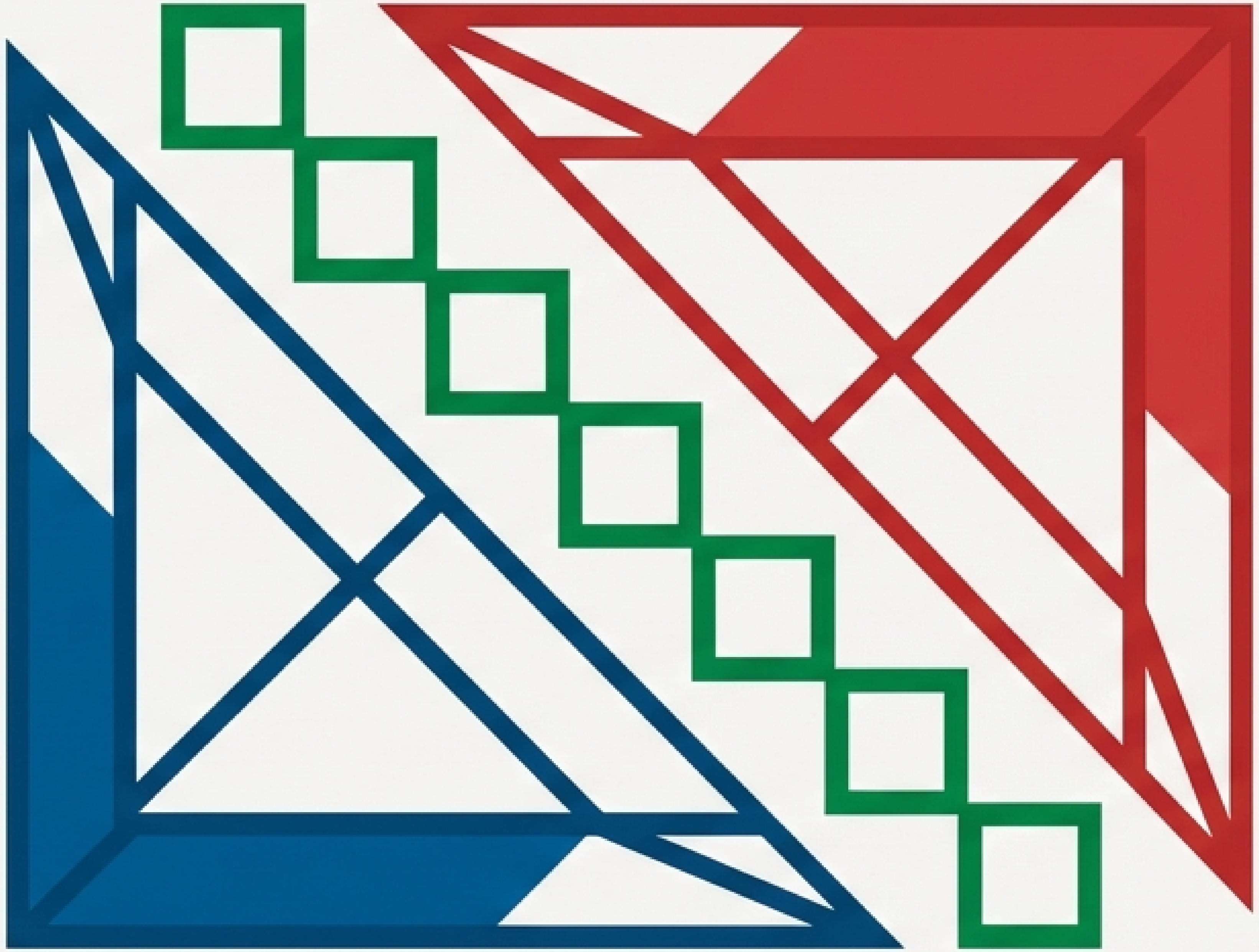
# LDU-разложение: Элегантная симметрия матриц

От LU к более совершенной форме



# Мы знаем LU-разложение. Это мощный инструмент.

Любую матрицу A (при определённых условиях) можно разложить на произведение нижней и верхней треугольных матриц: **A = L * Ũ**

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \mathbf{1} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \mathbf{1} \end{bmatrix}} \underset{\tilde{U}}{\begin{bmatrix} \mathbf{u_{11}} & \mathbf{u_{12}} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & \mathbf{u_{22}} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{u_{33}} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u_{44}} \end{bmatrix}}$$

# Но есть нюанс: диагонали L и Ũ несимметричны по своей сути.

**Чистая структура**

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \mathbf{1} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Диагональ состоит из единиц. Матрица содержит только информацию о шагах метода исключения.

**Структура + Масштаб**

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Диагональ содержит ведущие элементы (пивоты). Матрица смешивает в себе и структуру, и коэффициенты масштаби-рования.

# Идея: Выделим масштабирование в отдельную диагональную матрицу $D$.

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U} = D * U$$

NotebookLM

# Результат: A = LDU — идеально сбалансированная форма.

$$A = LDU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**L**: **Нижняя треугольная** матрица с единицами на диагонали.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

**D**: **Диагональная** матрица. Её элементы — это **ведущие элементы** (**пивоты**) из процесса исключения Гаусса.
Гаусса. D = diag(d_1, d_2, ..., d_n).

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ .. & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**U**: **Верхняя треугольная** матрица с единицами на диагонали.

Это разложение **симметрично по структуре**: L и U имеют одинаковую форму, а вся информация о масштабе сосредоточена в D.

# Как получить LDU из LU? Два простых шага.

Дано разложение $A = L * \tilde{U}$.

**Шаг 1:** Извлечь $D$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ 0 & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{33} & \tilde{u}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u}_{44} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u}_{44} \end{bmatrix}$$

**Описание**: Создаём диагональную матрицу $D$ из диагональных элементов $\tilde{U}$.

$$D = \operatorname{diag}(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{22}, \ldots, \tilde{u}_{nn})$$

**Шаг 2:** Нормализовать $U$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{u}_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{u}_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{u}_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{u}_{44}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ 0 & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{33} & \tilde{u}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u}_{44} \end{bmatrix} = U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tilde{u}_{12}}{\tilde{u}_{11}} & \frac{\tilde{u}_{13}}{\tilde{u}_{11}} & \frac{\tilde{u}_{14}}{\tilde{u}_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{\tilde{u}_{23}}{\tilde{u}_{22}} & \frac{\tilde{u}_{24}}{\tilde{u}_{22}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\tilde{u}_{34}}{\tilde{u}_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Описание**: Делим каждую строку $\tilde{U}$ на соответствующий диагональный элемент (умножаем на $D^{-1}$).

$$U = D^{-1} * \tilde{U}$$

В итоге, $A = L * \tilde{U} = L * (D * U) = LDU$.

# Преимущество №1: Раскрытие истинной симметрии

Для симметричной матрицы A (где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), разложение принимает вид:

$$\mathbf{A = LDL^T}$$

$$\tilde{U} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & 1 & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{bmatrix} L^T$$

Верхняя треугольная матрица **U** оказывается просто транспонированной матрицей **L**. (**U** = **L**$^T$). матрицей **L**. (**U** = **L**$^T$).

# Преимущество №2: Упрощение вычисления определителя.

$$\det(A) = \underbrace{\boxed{\det(L)}}_{\substack{= 1 \text{ (т.к. единицы} \\ \text{на диагонали)} \\ 1}} * \underbrace{\det(D)}_{D} * \underbrace{\boxed{\det(U)}}_{\substack{= 1 \text{ (т.к. единицы} \\ \text{на диагонали)} \\ 1}}$$

$$\det(A) = \det(D) = d_1 * d_2 * \ldots * d_n$$

Определитель — это просто **произведение ведущих элементов.**

# Пример: Преобразование LU в LDU

Дано LU-разложение: $\mathbf{A = L * \tilde{U}}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

**Выделяем диагональ из $\tilde{U}$**

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{bmatrix} \longrightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

**Нормализуем $U = D^{-1} * \tilde{U}$**

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Пример: Магия $LDL^T$ для симметричных матриц.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

LU Decomposition

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Проверяем: $U = L^T$ ?**

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark \quad L^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LDU Components

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Пример: Вычисление определителя.

Для матрицы из первого примера.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = d_1 * d_2 * d_3 = 2 * (-1) * (-4)$$

$$\det(A) = 8$$

Результат подтверждается прямым вычислением определителя A.

# LDU-разложение: Структура, отделённая от масштаба.

### Симметричная форма

$A = LDU$ представляет матрицу в виде трёх сбалансированных компонент, где $L$ и $U$ имеют единичные диагонали.

### Глубокая структура

Форма $A = LDL^T$ элегантно раскрывает внутреннюю структуру симметричных матриц.

### Вычислительная простота

Определитель матрицы — это простое произведение диагональных элементов $D$, $\det(A) = \prod d_i$.

# Вопросы?