Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

Розрахункова графічна робота
"Виконання кусочно-лінійної апроксимації"

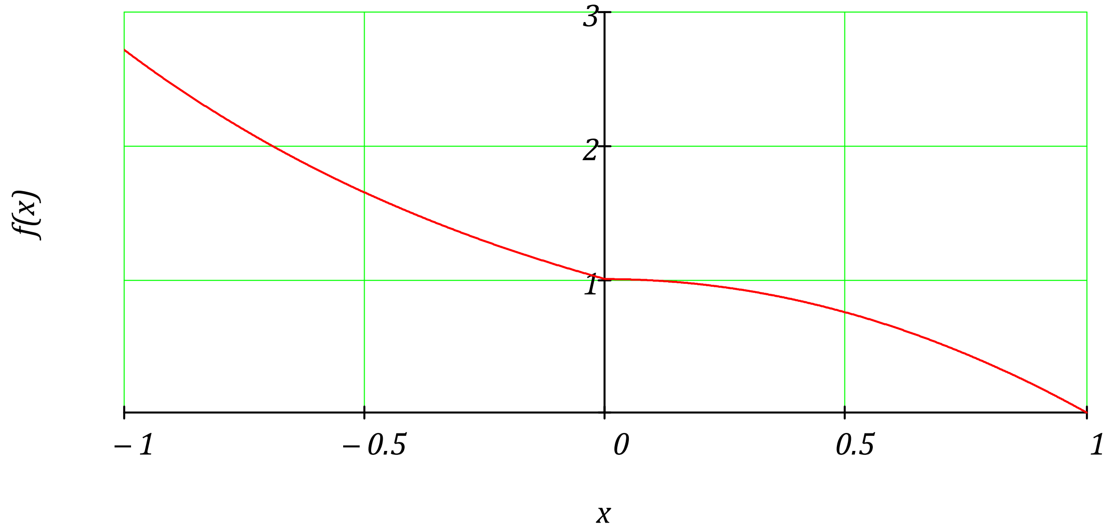
Варіант №155

Виконав
студент групи ІО-93
Верцанов Святослав

Київ - 2021

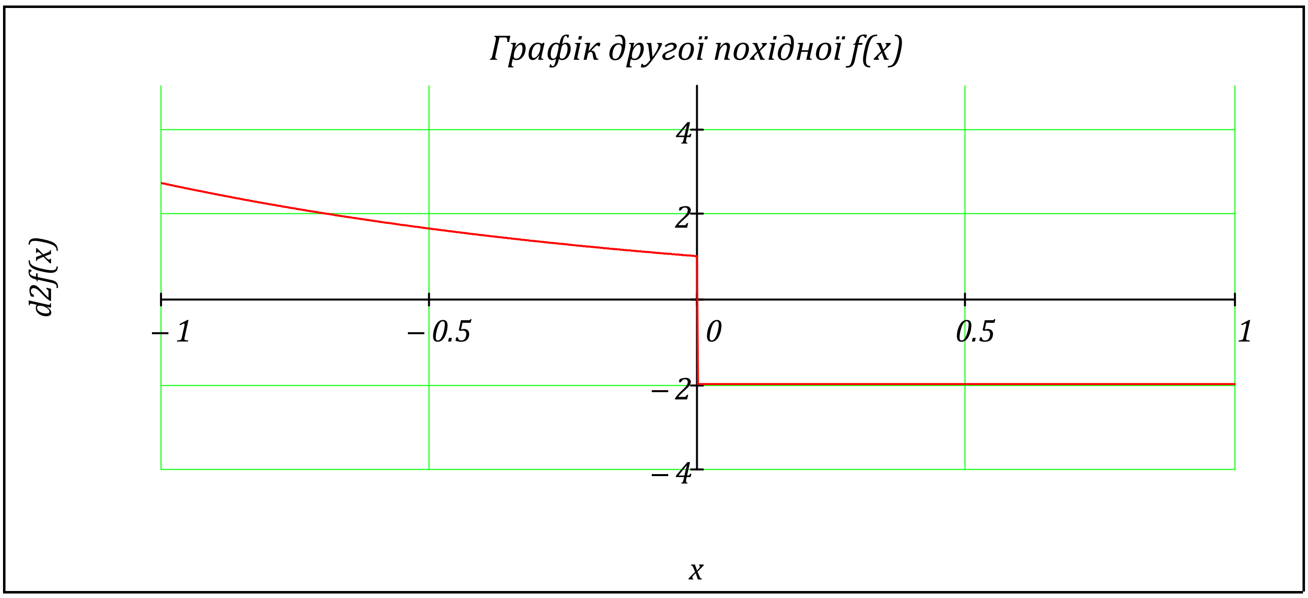
1. Побудувати графік функції $y=f(x)$ для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$.
Значення $y=f(x)$, x_{min} та x_{max} узяти з таблиці варіантів.

$$f(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{if } x \ge 0 \end{cases} \qquad x_{min} := -1 \qquad x_{max} := 1$$

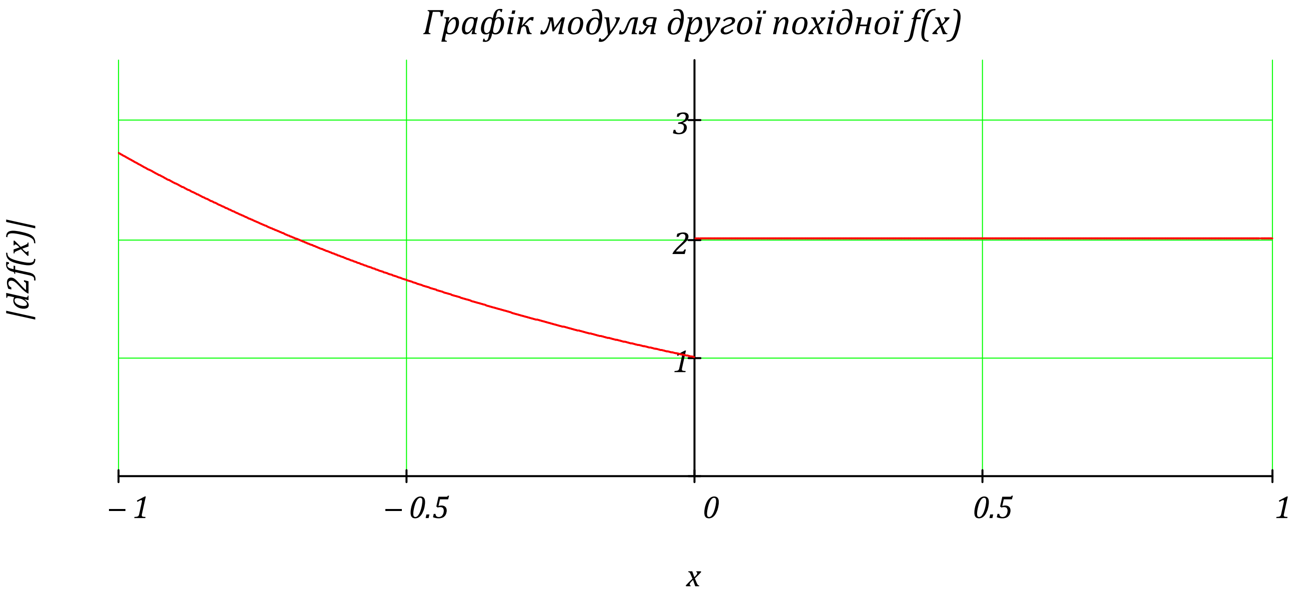


2. Визначити другу похідну функції $\frac{d^2y}{dx^2}$ та побудувати її графік для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$.

$$d2f(x) := \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) & \text{if } x \le 0 \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) & \text{if } x \ge 0 \end{cases} \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \rightarrow e^{-x} \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \rightarrow -2$$



3. Побудувати графік модулю другої похідної функції $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ для діапазону зміни аргументу x_{min}<=x<=x_{max}.



4.1 Точки перегину

4. Проаналізувати графік неліниної залежності функції y=f(x), з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегинання та наявність точок розриву першого роду другої похідної функції.

Функція має точку перегину *x = 0*

4.2 Опуклість та вгнутість

f(x) вгнута на відрізку [x_{min} ; 0].

f(x) вигнута на відрізку [0 ; x_{max}].

4.3 Точки розриву першого роду другої похідної функції

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \to 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \to -2$$

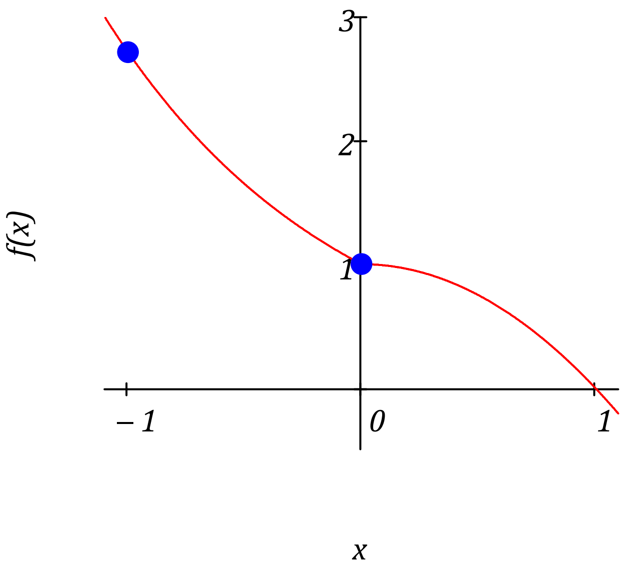
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \to 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \to -2$$

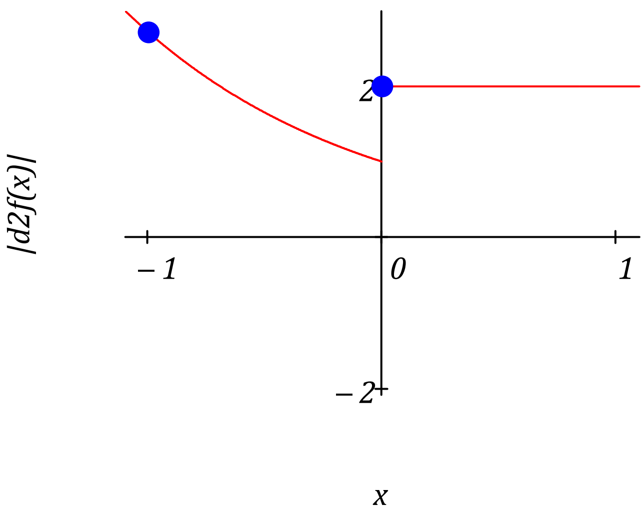
Функція не має точок розриву на відрізку $[x_{min}; x_{max}]$.

5. Обрати початкову точку(або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках $y = f(x)$ та $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$, визначивши абсцису цієї початкової точки (або абсциси початкових точок $x_0^{\,1}, x_0^{\,2}$ тощо).

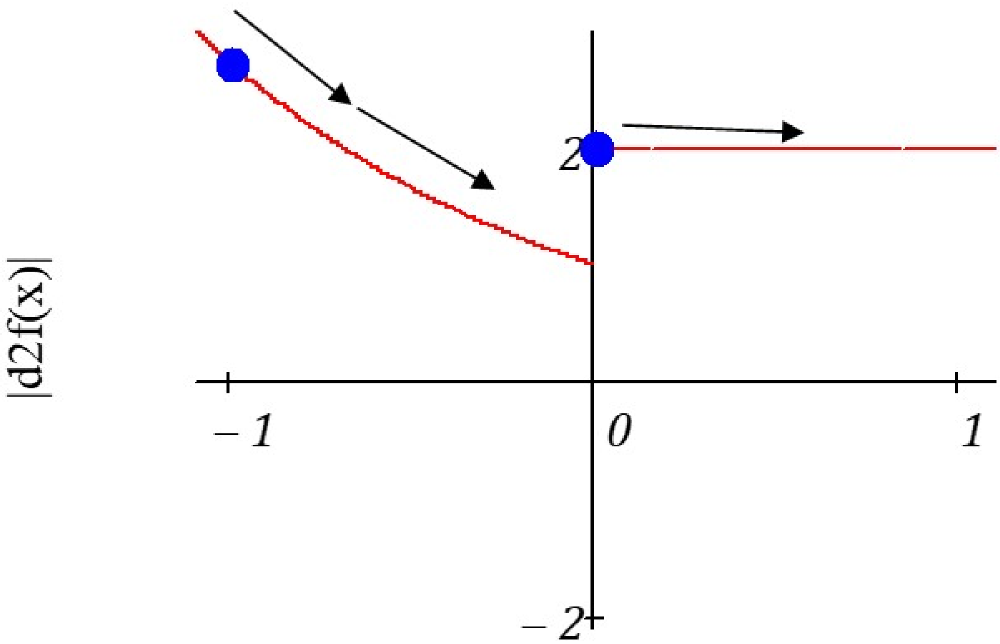
$x_{01} := -1 \quad y_{11} := f(x_{01}) = 2.7183 \qquad y_{21} := |d2f(x_{01})| = 2.7183$

$x_{02} := 0 \quad y_{12} := f(x_{02}) = 1 \qquad y_{22} := |d2f(x_{02})| = 2$





6. По графіку $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень $h_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1,n) від початкової точки(або від початкових точок) та зазначити його(або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$.



7. Визначити методику розрахунку значень h_i (i=1,n) та обрати формулу для розрахунку значень: $h_i = \sqrt{\frac{8\Delta f_{max}}{A_i}}$ або $h_i = \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$, де A_i - максимальне по модулю значення другої похідної на і-й частині ломаної лінії, що розраховується.

Для розрахунку на діапазоні x:=[-1;0) h_i (i=1,n) обираємо формулу $\sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$.

На проміжку [0; 1] ми апроксимуємо пряму.

8. Підібрати таке значення похибки Δf_{max}, при якому в результаті розрахунків h_i (i=1,n) отримаємо n=8 або n=9, тобто отримаємо апроксимуючу ломану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень h_i (i=1,n) та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера 0.

Для лівої частини:

$\Delta f_{max} := 0.0076059$ $\quad X_0 := x_{min} = -1$ $\quad A_1 := \left|d2f\left(X_0\right)\right| = 2.7183$

$h_1 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_1}} = 0.2116$ $\quad X_1 := X_0 + h_1 = -0.7884$ $\quad A_2 := \left|d2f\left(X_1\right)\right| = 2.1999$

$h_2 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_2}} = 0.2352$ $\quad X_2 := X_1 + h_2 = -0.5532$ $\quad A_3 := \left|d2f\left(X_2\right)\right| = 1.7388$

$h_3 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_3}} = 0.2645$ $\quad X_3 := X_2 + h_3 = -0.2887$ $\quad A_4 := \left|d2f\left(X_3\right)\right| = 1.3346$

Для правої частини: (X_4 - друга точка відліку):

$$h_4 := \sqrt{\frac{8\Delta f_{max}}{A_4}} = 0.2135 \qquad X_4 := 0 \qquad A_5 := \left|d2f\left(X_4\right)\right| = 2$$

$$h_5 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_5}} = 0.2467 \qquad X_5 := X_4 + h_5 = 0.2467 \qquad A_6 := \left|d2f\left(X_5\right)\right| = 2$$

$$h_6 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_6}} = 0.2467 \qquad X_6 := X_5 + h_6 = 0.4933 \qquad A_7 := \left|d2f\left(X_6\right)\right| = 2$$

$$h_7 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_7}} = 0.2467 \qquad X_7 := X_6 + h_7 = 0.74 \qquad A_8 := \left|d2f\left(X_7\right)\right| = 2$$

$$h_8 := \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_8}} = 0.2467 \qquad X_8 := X_7 + h_8 = 0.9867 \qquad A8 := \left|d2f\left(X_7\right)\right| = 2$$

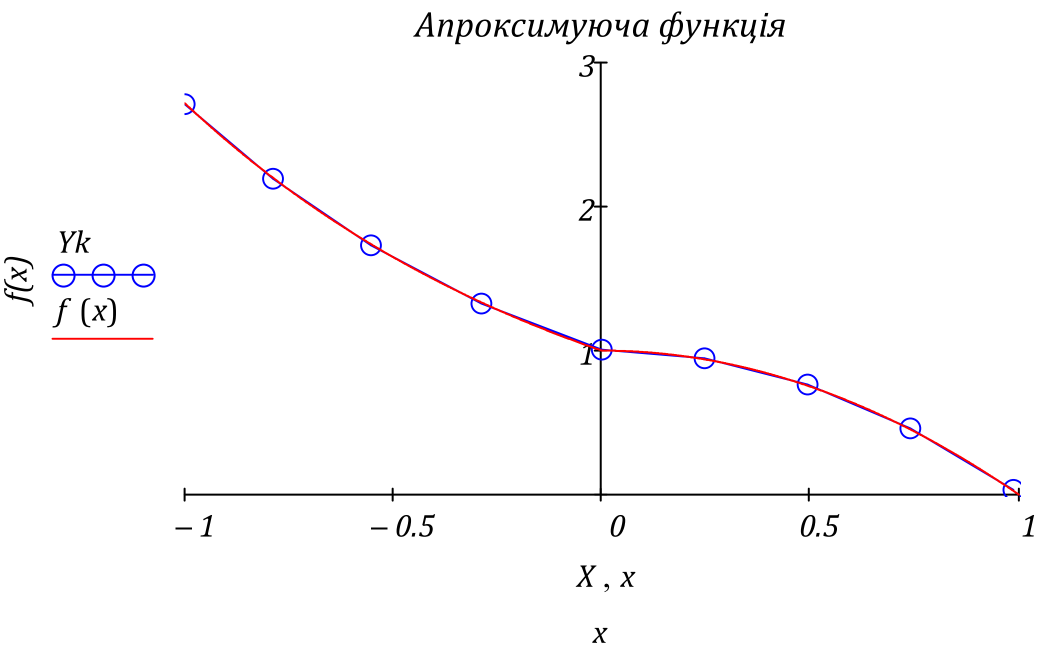
9. Здійснити розрахунок абсцис x_i $(1\ ,\ n)$, починаючи з x_0, початкових ординат $y_i^p(0,n)$, вузлів апроксимації(вершин ломаної лінії), що належать функції y=f(x), та кінцевих ординат $y_i^k(0,n)$, вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

Виходячи з 8-го завдання, шукаємо ординати вершин ломаної лінії:

$$j := 0..8 \qquad Yp_j := f\left(X_j\right) \qquad Yk_j := \left| \begin{array}{l} Yp_j - \Delta f_{max} \quad \text{if} \quad X_j \le 0 \\ Yp_j + \Delta f_{max} \quad \text{if} \quad X_j \ge 0 \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.7884 \\ -0.5532 \\ -0.2887 \\ 0 \\ 0.2467 \\ 0.4933 \\ 0.74 \\ 0.9867 \end{pmatrix} \qquad Yp = \begin{pmatrix} 2.7183 \\ 2.1999 \\ 1.7388 \\ 1.3346 \\ 1 \\ 0.9392 \\ 0.7566 \\ 0.4524 \\ 0.0264 \end{pmatrix} \qquad Yk = \begin{pmatrix} 2.7107 \\ 2.1923 \\ 1.7312 \\ 1.327 \\ 1.0076 \\ 0.9468 \\ 0.7642 \\ 0.46 \\ 0.0341 \end{pmatrix}$$

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) $y=\varphi(x)$, використовуючи отримані значення x_i $(1\ ,\ n)$ та $y_i^k(0,n)$.



11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу), $k_i(i=1,n)$ лінійних частин ломаної лінії.

Знаходимо кутові коефіцієнти шляхом ділення різниці ординат на різницю абсцис:

$i := 0 .. 7$ $\qquad k_i := \dfrac{Yk_i - Yk_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}$ $\qquad k_i =$

$k = tg(\alpha)$

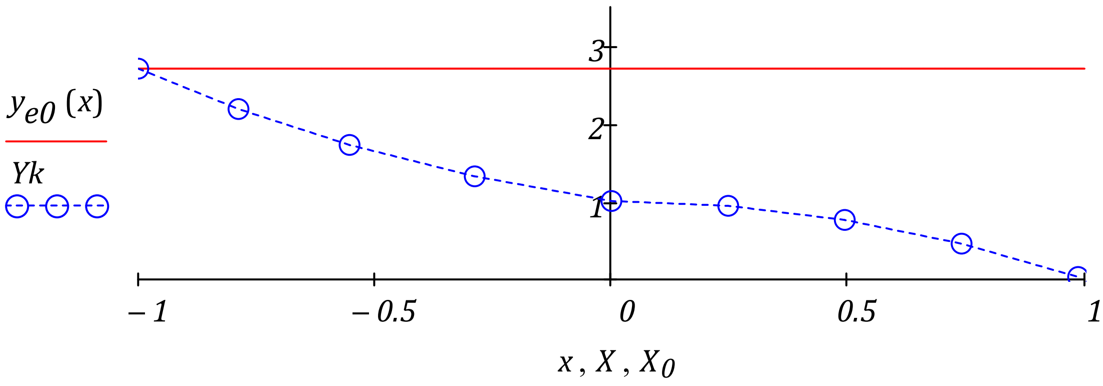
-2.45
-1.9603
-1.5278
-1.1066
-0.2467
-0.74
-1.2334
-1.7267

12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ломаної лінії) $y=\varphi(x)$ на окремі доданки (лінійні та елементарні нелінійні {лінійні з обмеженням на нульовому рівні}}, починаючи з точки, яка має абсцису x_0^a. Значення x_0^a узяти з таблиці варіантів.

13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (I, II, III, IV) та режим {на відкривання (на В) чи на закривання (на З)}

$$x_{a_0} := X_0$$

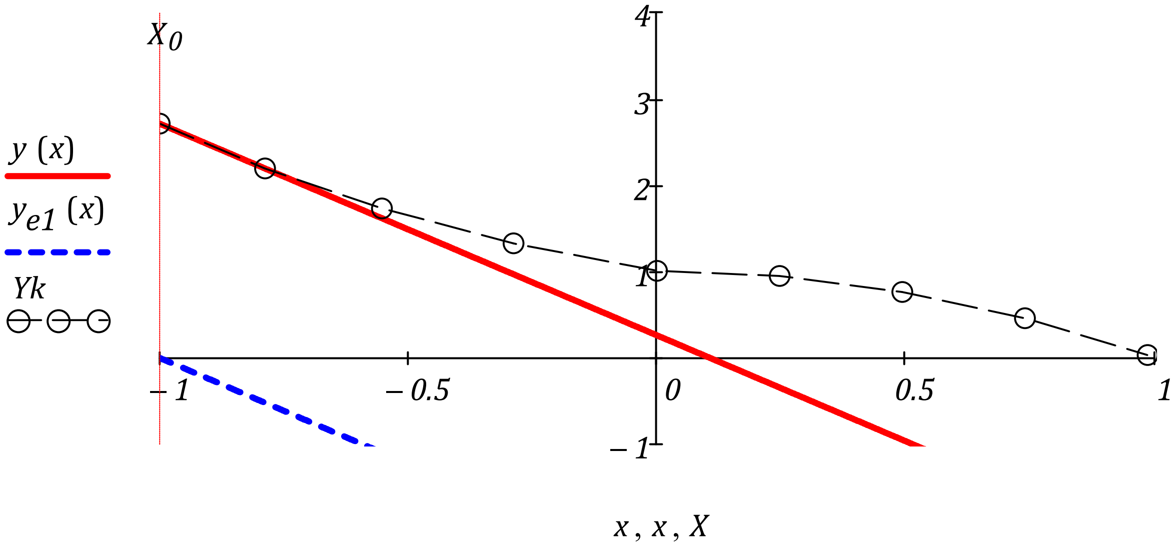
$$y_{e0}(x) := Yk_0 \qquad y(x) := y_{e0}(x)$$



$$b_0 := k_0$$

$$y_{e1}(x) := b_0\left(x - X_0\right)$$

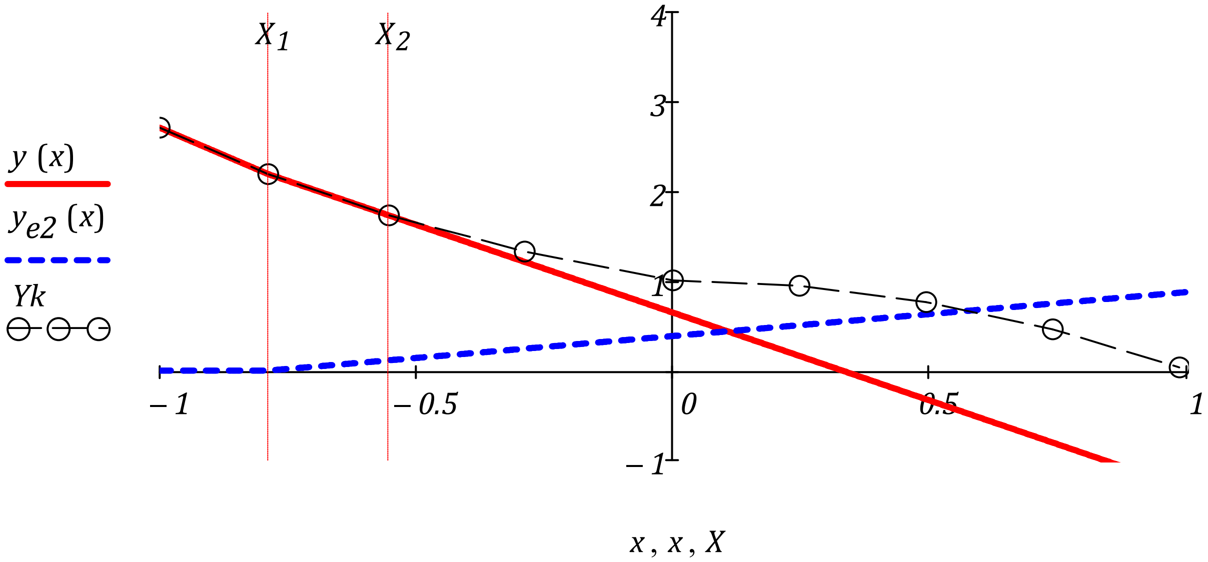
$$y(x) := y(x) + y_{e1}(x)$$



$$b_1 := k_1 - k_0$$

$$y_{e2}(x) := \begin{vmatrix} b_1 \cdot (x - X_1) & \text{if} \quad b_1 \cdot (x - X_1) \geq 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_1 \cdot (x - X_1) \leq 0 \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e2}(x)$$

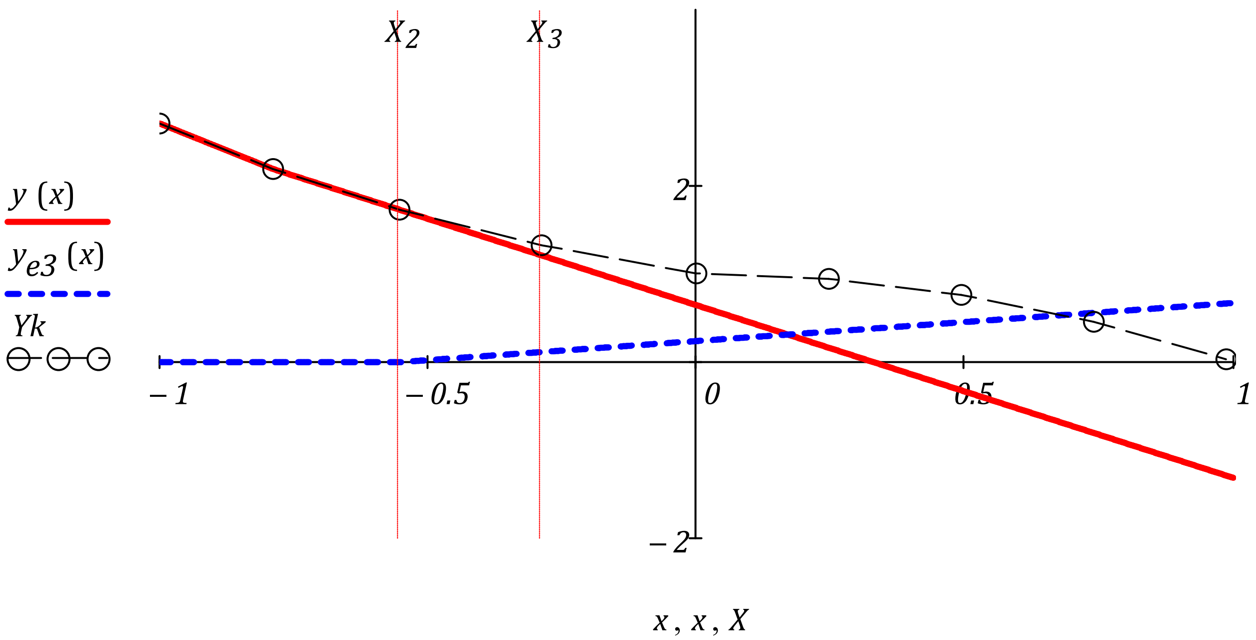


I квадрант, на відкривання

$$b_2 := k_2 - k_1$$

$$y_{e3}(x) := \begin{vmatrix} b_2 \cdot (x - X_2) & \text{if} \quad b_2 \cdot (x - X_2) \geq 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_2 \cdot (x - X_2) \leq 0 \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e3}(x)$$

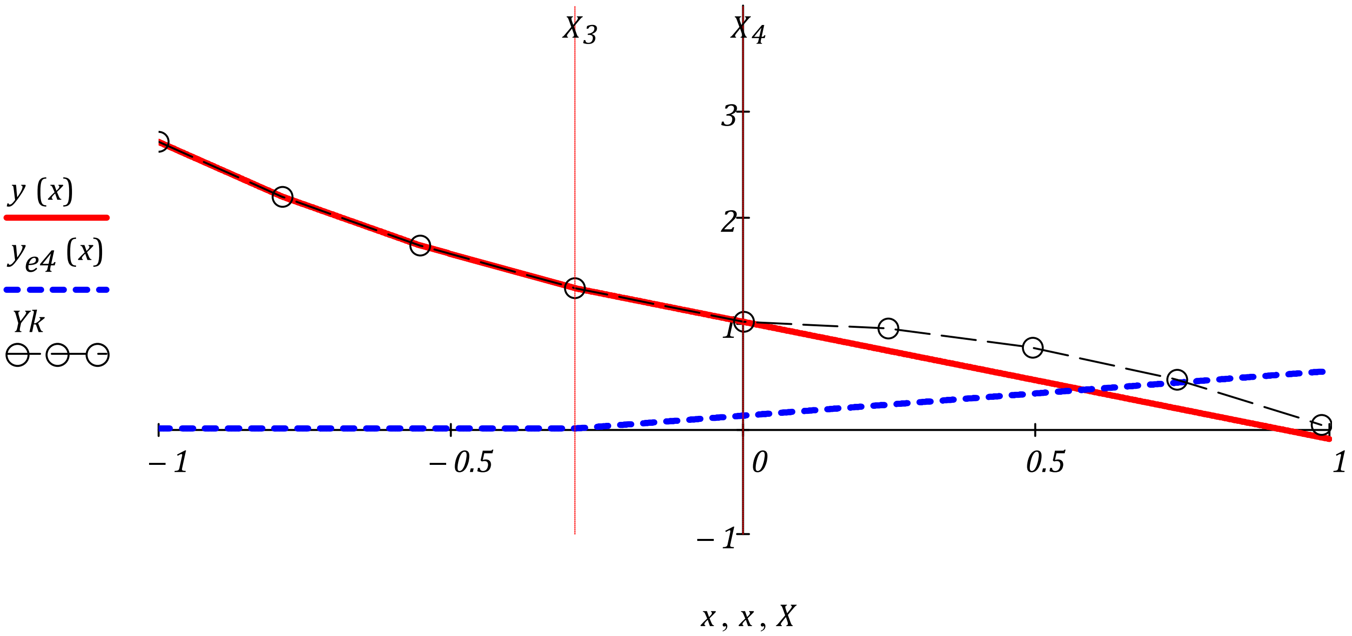


I квадрант, на відкривання

$$b_3 := k_3 - k_2$$

$$y_{e4}(x) := \begin{cases} b_3\cdot(x - X_3) & \text{if} \quad b_3\cdot(x - X_3) \geq 0 \\ 0 & \text{if} \quad b_3\cdot(x - X_3) \leq 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e4}(x)$$

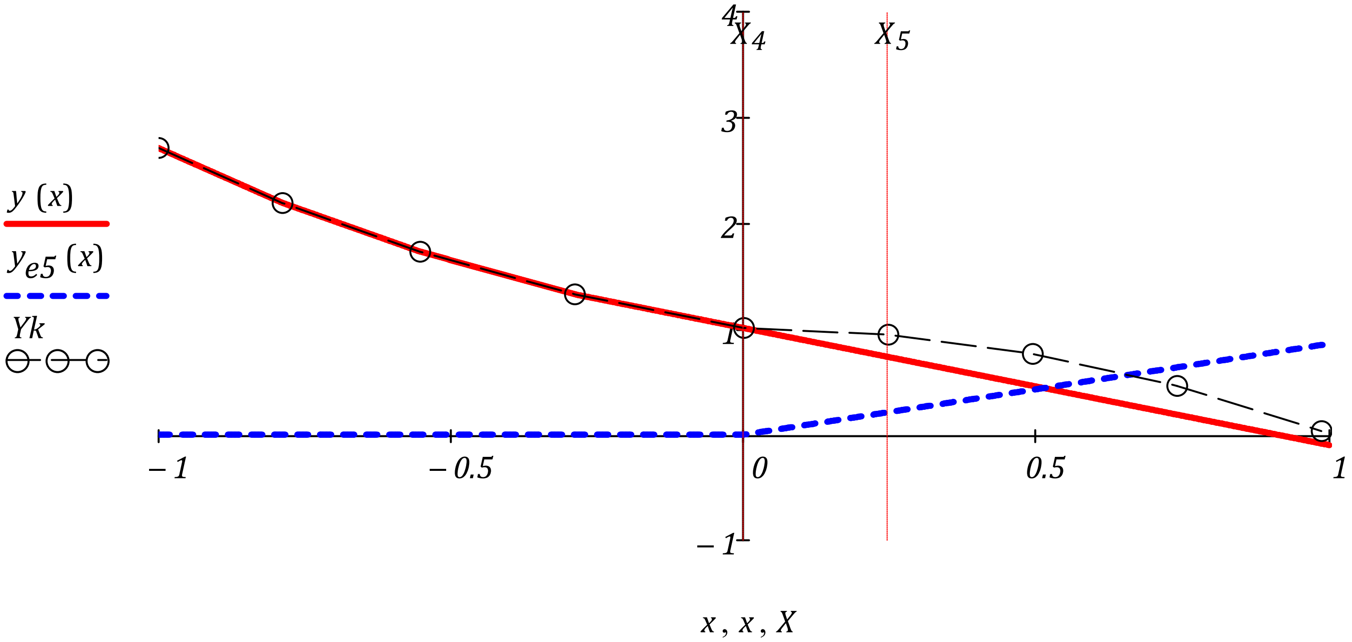


І квадрант, на відкривання

$$b_4 := k_4 - k_3$$

$$y_{e5}(x) := \begin{cases} b_4\cdot(x - X_4) & \text{if} \quad b_4\cdot(x - X_4) \geq 0 \\ 0 & \text{if} \quad b_4\cdot(x - X_4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e5}(x)$$

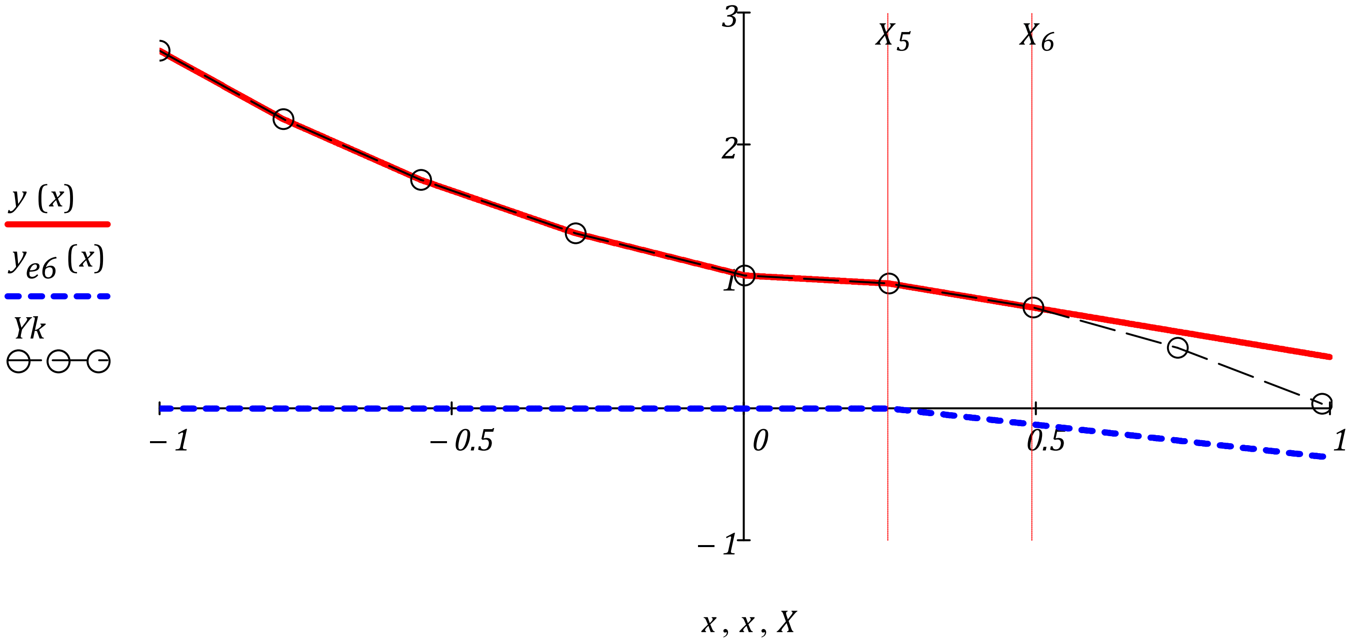


І квадрант, на закривання

$$b_5 := k_5 - k_4$$

$$y_{e6}(x) := \begin{cases} b_5 \cdot (x - X_5) & \text{if } b_5 \cdot (x - X_5) \le 0 \\ 0 & \text{if } b_5 \cdot (x - X_5) \ge 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e6}(x)$$

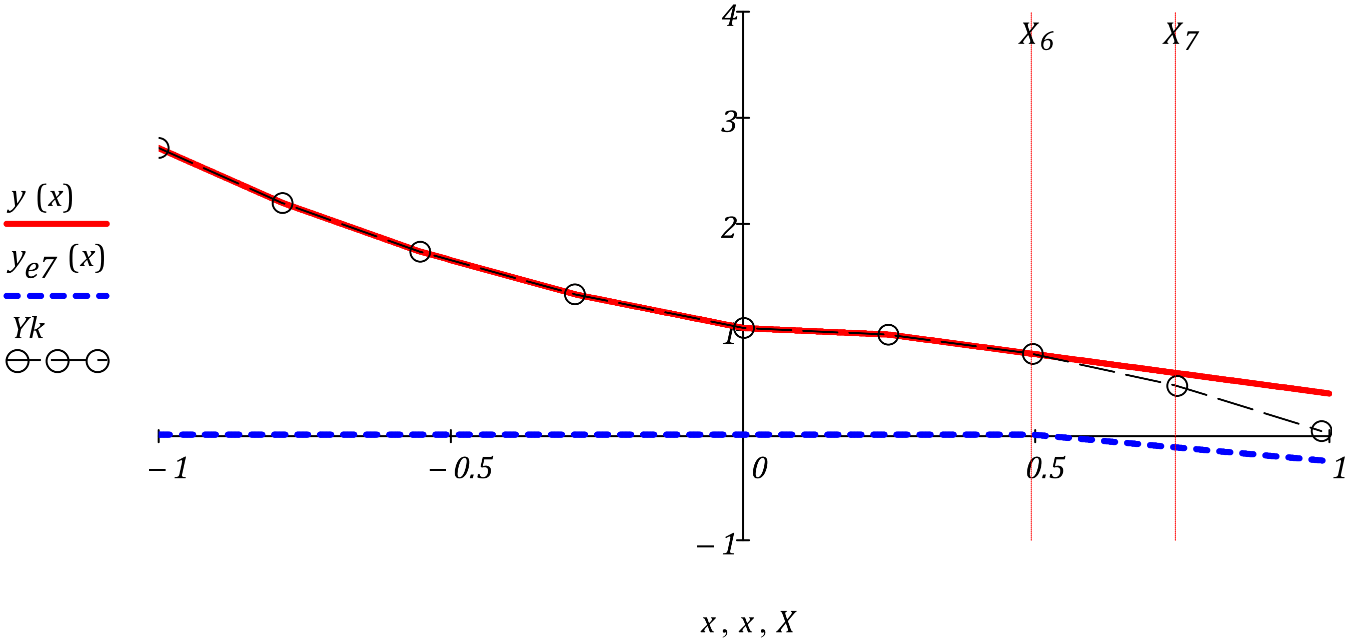


III квадрант, на закриваняя

$$b_6 := k_6 - k_5$$

$$y_{e7}(x) := \begin{cases} b_6 \cdot (x - X_6) & \text{if } b_6 \cdot (x - X_6) \le 0 \\ 0 & \text{if } b_6 \cdot (x - X_6) \ge 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e7}(x)$$

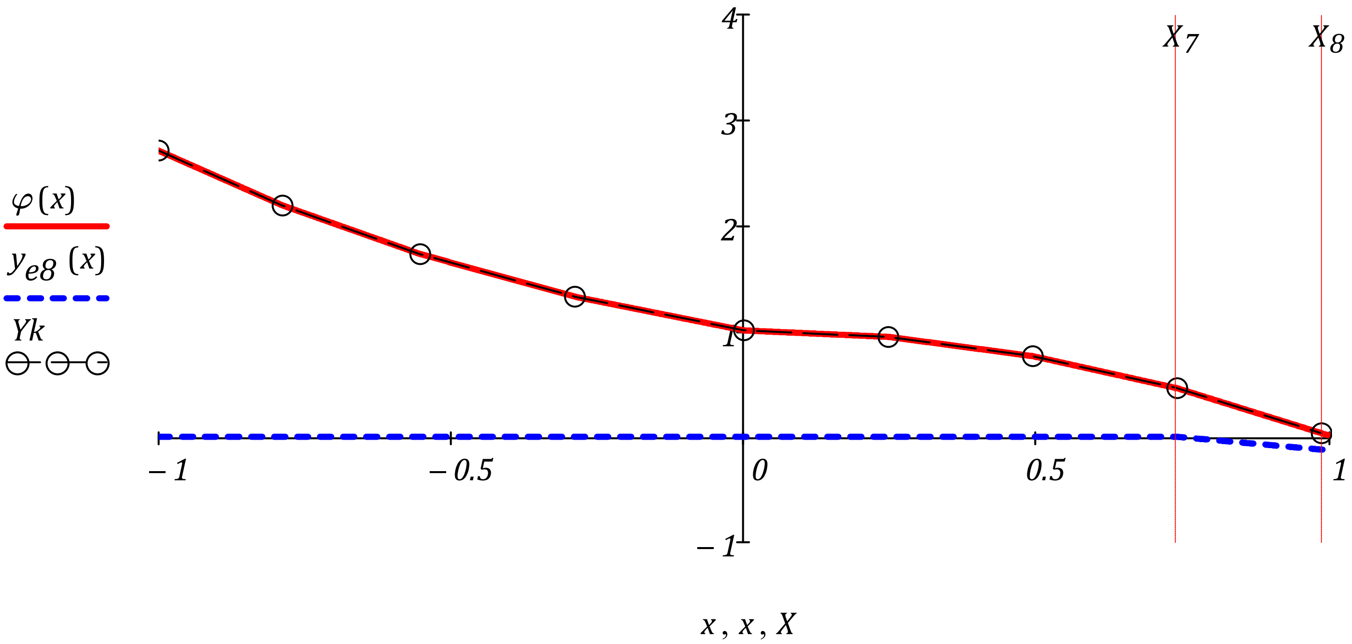


III квадрант, на закривання

$$b_7 := k_7 - k_6$$

$$y_{e8}(x) := \begin{cases} b_7 \cdot (x - X_7) & \text{if} \quad b_7 \cdot (x - X_7) \le 0 \\ 0 & \text{if} \quad b_7 \cdot (x - X_7) \ge 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x) := y(x) + y_{e8}(x)$$



III квадрант, на закривання

14. Здійснити розрахунок наступних значень:

- значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку
- значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку
- значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку

1) значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку:

$$\varphi\left(x_{a_0}\right) = 2.7107$$

2) значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку:

$$b_0 = -2.45 \qquad k_0 = -2.45 \qquad X_0 = -1$$

3) значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку:

$Xref_j := X_j$ $\qquad$ $j := 0 .. 8$

$i := 0 .. 7$

$b_i =$

-2.45
0.4896
0.4325
0.4213
0.8599
-0.4933
-0.4933
-0.4933

$Xref_j =$

-1
-0.7884
-0.5532
-0.2887
0
0.2467
0.4933
0.74
0.9867