Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

Розрахункова графічна робота
"Виконання кусочно-лінійної апроксимації"

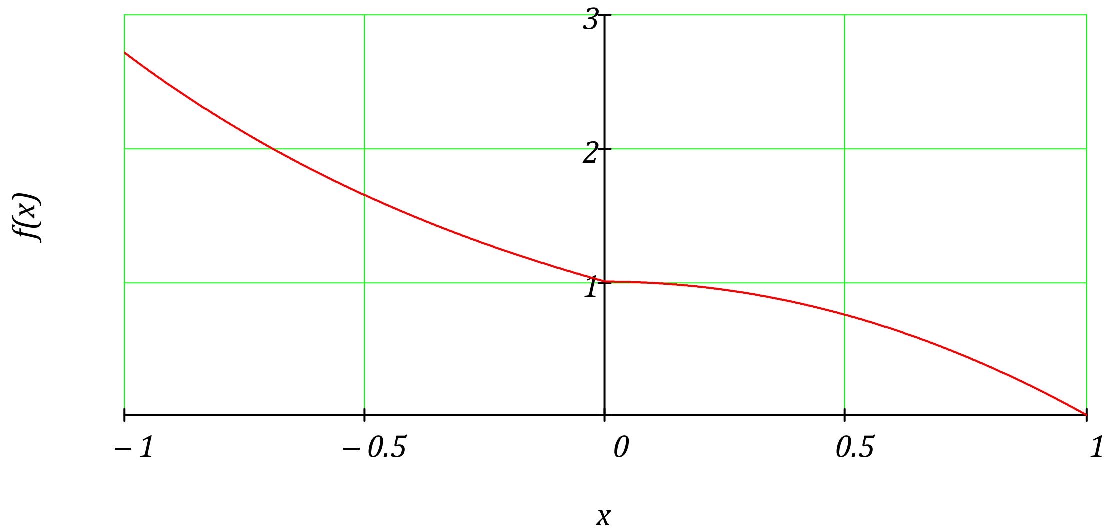
Варіант №155

Виконав
студент групи ІО-93
Верцанов Святослав

Київ - 2021

1. Побудувати графік функції *y=f(x)* для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$.
Значення *y=f(x)*, x_{min} та x_{max} узяти з таблиці варіантів.

$$f(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{if } x \ge 0 \end{cases} \qquad x_{min} := -1 \qquad x_{max} := 1$$

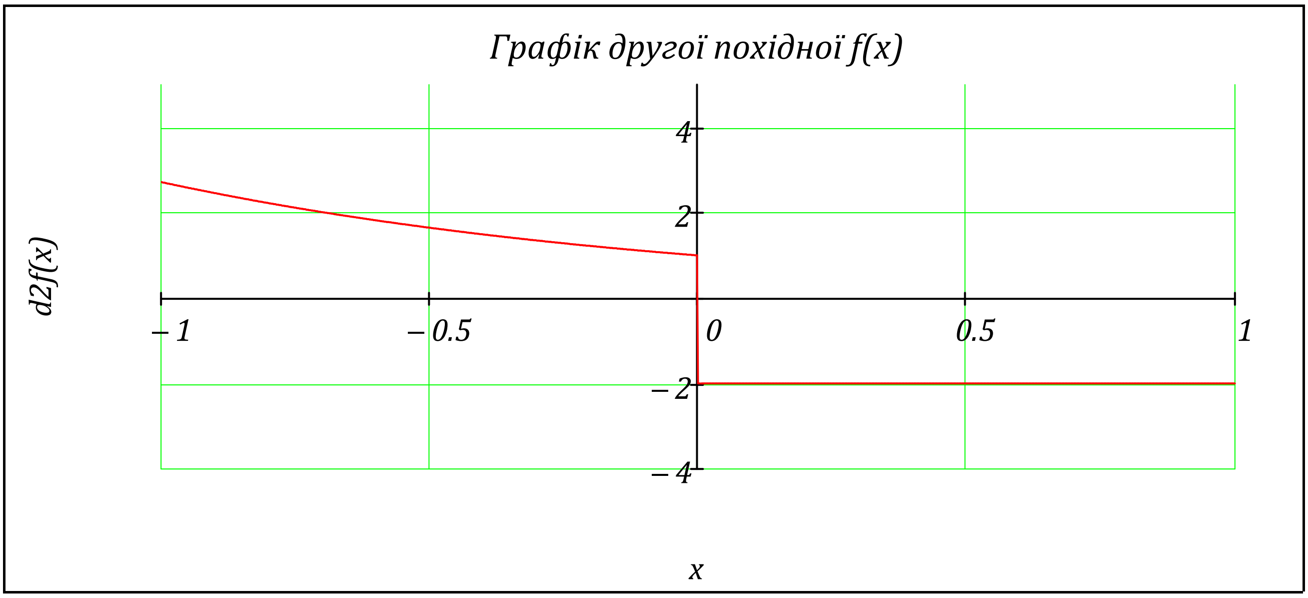


2. Визначити другу похідну функції $\frac{d^2y}{dx^2}$ та побудувати її графік для діапазону зміни аргументу $x_{min}<=x<=x_{max}$.

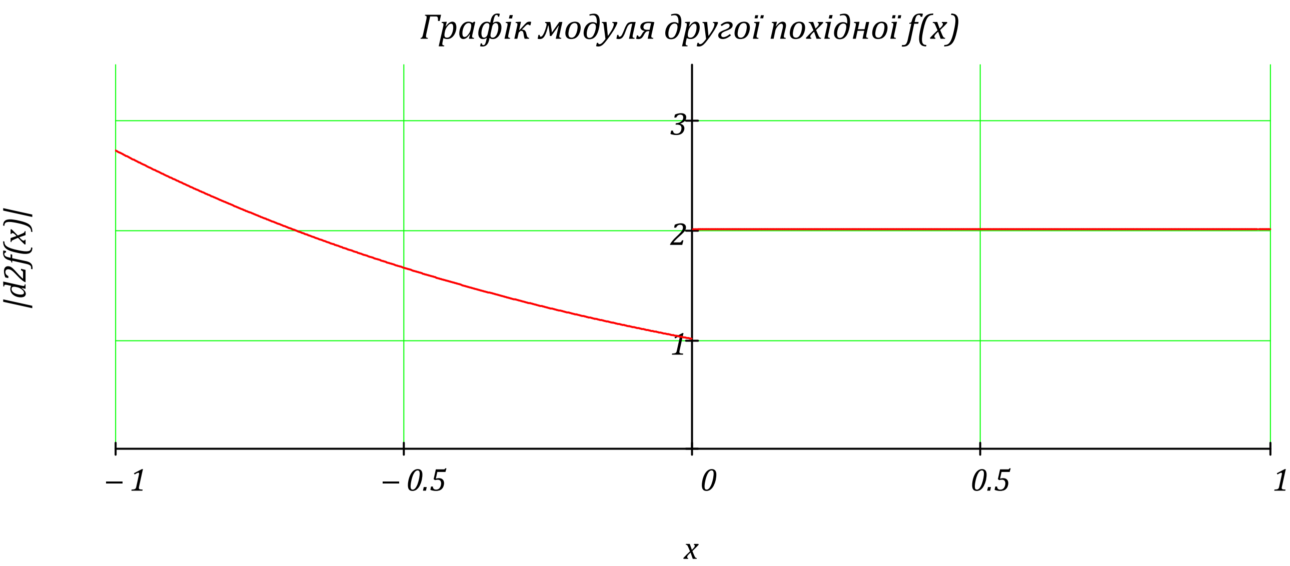
$$d2f(x) := \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) & \text{if } x \le 0 \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \rightarrow e^{-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \rightarrow -2$$



3. Побудувати графік модулю другої похідної функції $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$
для діапазону зміни аргументу x_{min}<=x<=x_{max}.



4.1 Точки перегину

4. Проаналізувати графік нелініної залежності функції y=f(x), з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегинання та наявність

точок розриву першого роду другої похідної функції.

Функція не має точок перегину так як друга похідна не змінює знак на відрізку [x_{min} ; x_{max}].

4.2 Опуклість та вгнутість

f(x) вгнута на відрізку [x_{min} ; 0].
f(x) вигнута на відрізку [0 ; x_{max}].

4.3 Точки розриву першого роду другої похідної функції

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \to 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \to -2$$

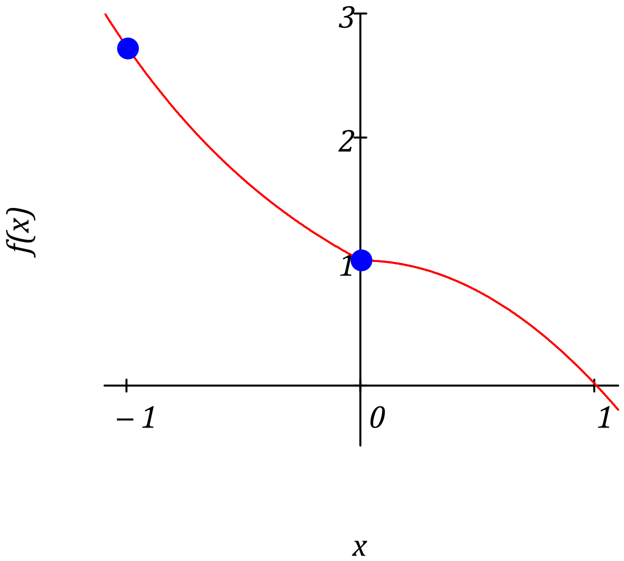
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\right) \to 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(1 - x^2\right) \to -2$$

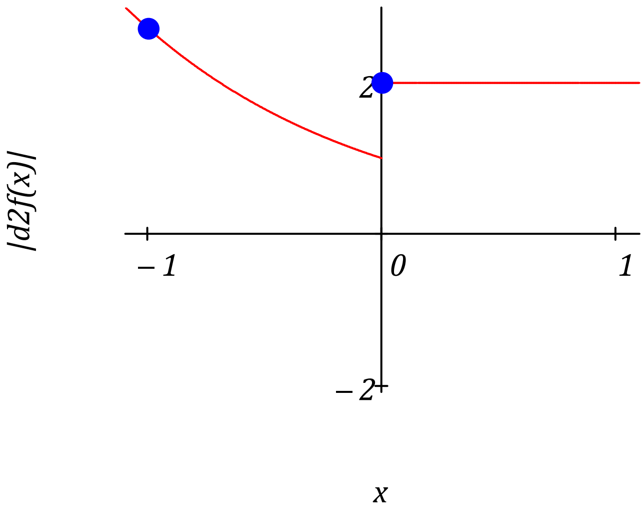
Функція не має точок розриву на відрізку [x_{min} ; x_{max}].

5. Обрати початкову точку(або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках $y = f(x)$ та $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$, визначивши абсцису цієї початкової точки (або абсциси початкових точок x_0^1, x_0^2 тощо).

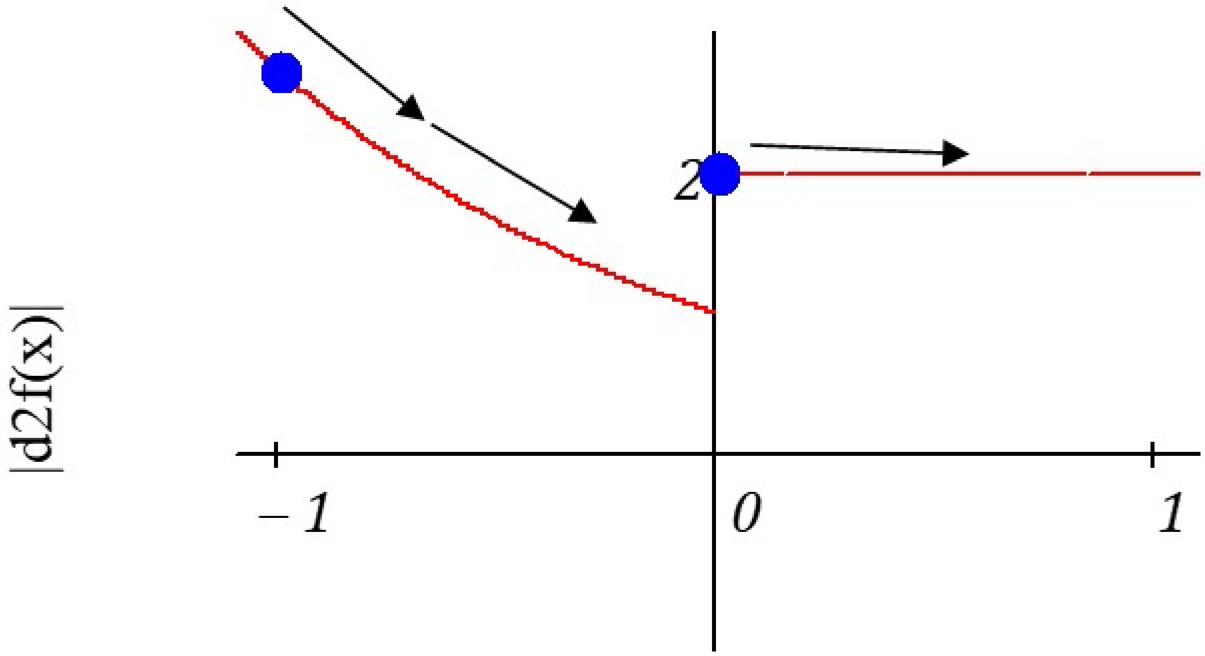
$x_{01} := -1 \quad y_{11} := f\left(x_{01}\right) = 2.7183 \qquad y_{21} := \left|d2f\left(x_{01}\right)\right| = 2.7183$

$x_{02} := 0 \quad y_{12} := f\left(x_{02}\right) = 1 \qquad y_{22} := \left|d2f\left(x_{02}\right)\right| = 2$





6. По графіку $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень $h_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1,n) від початкової точки(або від початкових точок) та зазначити його(або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$.



7. Визначити методику розрахунку значень h_i (i=1,n) та обрати формулу для розрахунку значень: $h_i = \sqrt{\frac{8\Delta f_{max}}{A_i}}$ або $h_i = \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$, де A_i - максимальне по модулю значення другої похідної на i-й частині ломаної лінії, що розраховується.

Для розрахунку на діапазоні x:=[-1;0] h (i=1,n) обираємо формулу $\sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{}}$.

i $\sqrt{}$ A_1

На проміжку [0; 1] ми апроксимуємо пряму.

8. Підібрати таке значення похибки Δf_{max}, при якому в результаті розрахунків h_i (i=1,n) отримаємо n=8 або n=9, тобто отримаємо апроксимуючу ломану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень h_i (i=1,n) та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера 0.

Для лівої частини:

$\Delta f_{max} := 0.0076059$ $\quad X_0 := x_{min} = -1$ $\quad A_1 := \left|d2f\left(X_0\right)\right| = 2.718$

$h_1 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_1}} = 0.2116$ $\quad X_1 := X_0 + h_1 = -0.7884$ $\quad A_2 := \left|d2f\left(X_1\right)\right| = 2.199$

$h_2 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_2}} = 0.2352$ $\quad X_2 := X_1 + h_2 = -0.5532$ $\quad A_3 := \left|d2f\left(X_2\right)\right| = 1.738$

$h_3 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_3}} = 0.2645$ $\quad X_3 := X_2 + h_3 = -0.2887$ $\quad A_4 := \left|d2f\left(X_3\right)\right| = 1.334$

$h_4 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_4}} = 0.302$ $\quad X_4 := X_3 + h_4 = 0.0133$ $\quad A_5 := \left|d2f\left(X_4\right)\right| = 2$

$h_5 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_5}} = 0.2467$ $\quad X_5 := X_4 + h_5 = 0.26$ $\quad A_6 := \left|d2f\left(X_5\right)\right| = 2$

$h_6 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_6}} = 0.2467$ $\quad X_6 := X_5 + h_6 = 0.5066$ $\quad A_7 := \left|d2f\left(X_6\right)\right| = 2$

$h_7 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_7}} = 0.2467$ $\quad X_7 := X_6 + h_7 = 0.7533$ $\quad A_8 := \left|d2f\left(X_7\right)\right| = 2$

$h_8 := \sqrt{\dfrac{16\Delta f_{max}}{A_8}} = 0.2467$ $\quad X_8 := X_7 + h_8 = 1$ $\quad A8 := \left|d2f\left(X_7\right)\right| = 2$

9. Здійснити розрахунок абсцис $x_i\,(1\ ,\ n)$, починаючи з x_0, початкових ординат y_i^p(0,n),

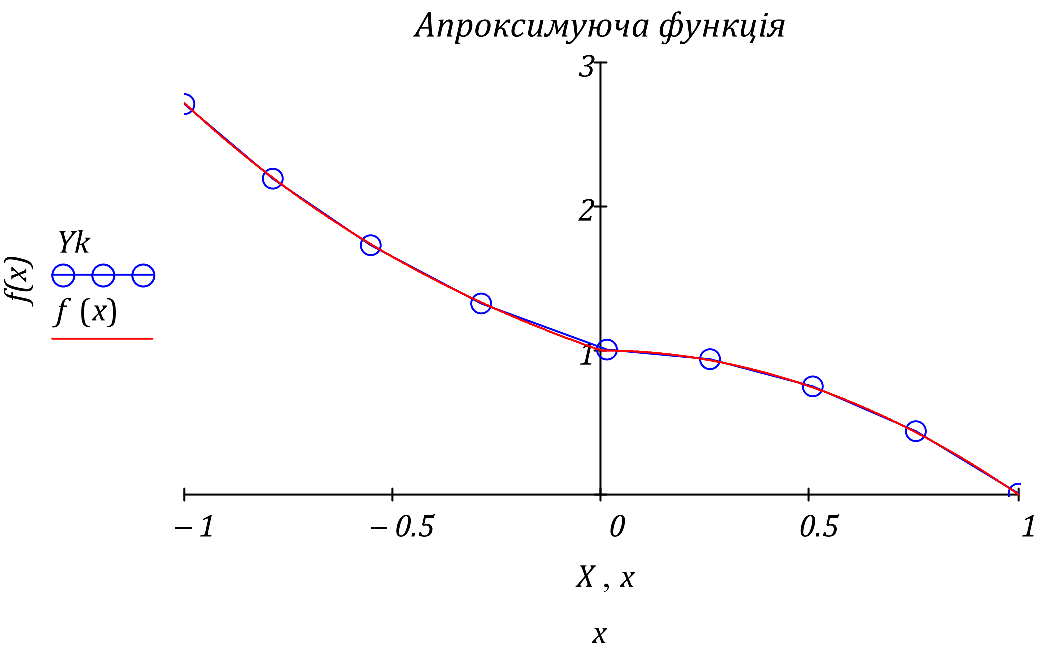
вузлів апроксимації(вершин ломаної лінії), що належать функції y=f(x), та кінцевих ординат $y_i^k(0,n)$, вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

Виходячи з 8-го завдання, шукаємо ординати вершин ломаної лінії:

$$j := 0..8 \quad Yp_j := f\left(X_j\right) \qquad Yk_j := \begin{array}{|l} Yp_j - \Delta f_{max} \quad \text{if} \quad X_j \le 0 \\ Yp_j + \Delta f_{max} \quad \text{if} \quad X_j \ge 0 \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.7884 \\ -0.5532 \\ -0.2887 \\ 0.0133 \\ 0.26 \\ 0.5066 \\ 0.7533 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Yp = \begin{pmatrix} 2.7183 \\ 2.1999 \\ 1.7388 \\ 1.3346 \\ 0.9998 \\ 0.9324 \\ 0.7433 \\ 0.4325 \\ 3.1288 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad Yk = \begin{pmatrix} 2.7107 \\ 2.1923 \\ 1.7312 \\ 1.327 \\ 1.0074 \\ 0.94 \\ 0.7509 \\ 0.4401 \\ 7.6372 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x), використовуючи отримані значення $x_i(1, n)$ та $y_i^k(0,n)$.



11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу), $k_i(i=1,n)$ лінійних частин ломаної лінії.

Знаходимо кутові коефіцієнти шляхом ділення різниці ординат на різницю абсцис:

$i := 0 .. 7$

$k = tg(\alpha)$ $\quad k_i := \dfrac{Yk_i - Yk_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}$ $\quad k_i =$

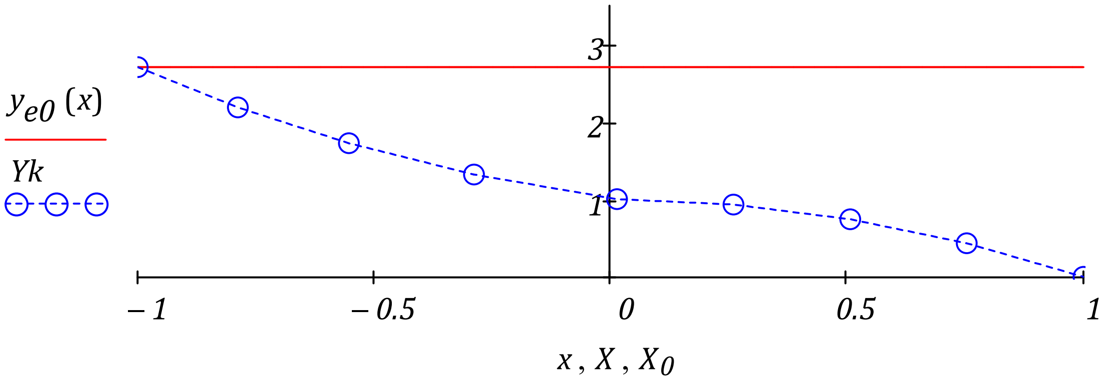
-2.45
-1.9603
-1.5278
-1.0585
-0.2733
-0.7666
-1.26
-1.7533

$k_0 = -2.45$

12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ломаної лінії) $y=\varphi(x)$ на окремі доданки (лінійні та елементарні нелінійні {лінійні з обмеженням на нульовому рівні)}, починаючи з точки, яка має абсцису x_0^a. Значення x_0^a узяти з таблиці варіантів.
13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (I, II, III, IV) та режим {на відкривання (на В) чи на закривання (на З)}

$x_{a_0} := X_0$

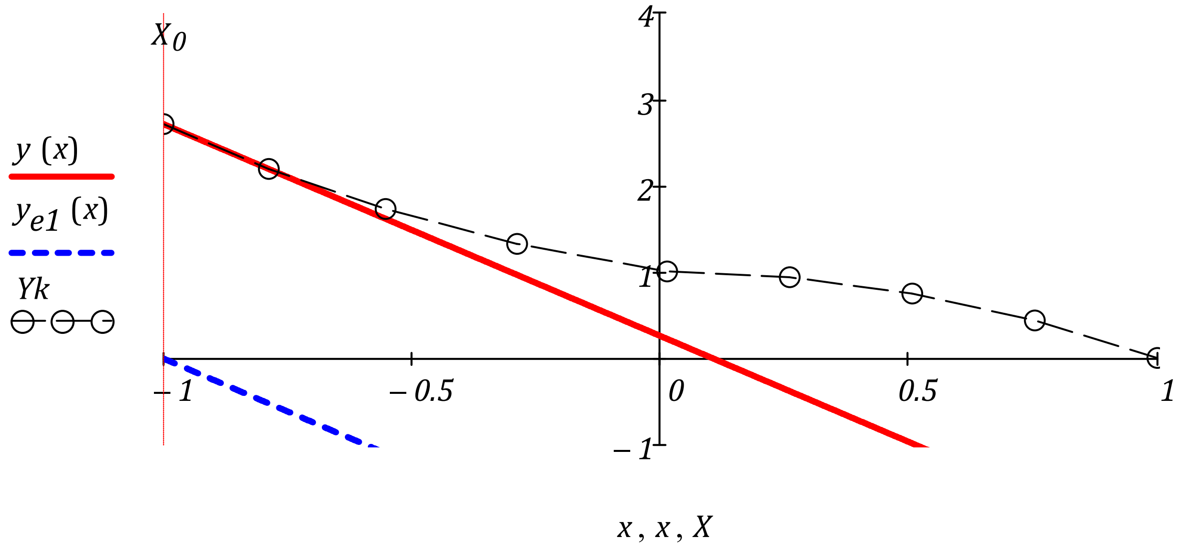
$y_{e0}(x) := Yk_0 \qquad y(x) := y_{e0}(x)$



$b_0 := k_0$

$y_{e1}(x) := b_0(x - X_0)$

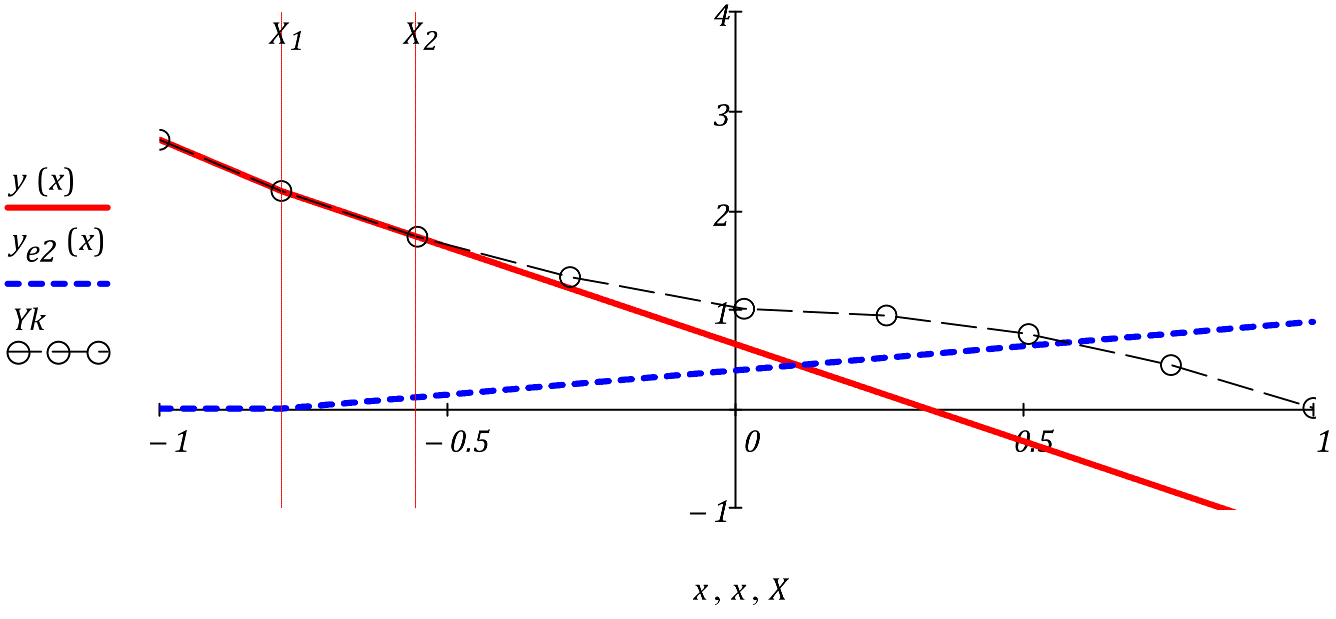
$y(x) := y(x) + y_{e1}(x)$



$$b_1 := k_1 - k_0$$

$$y_{e2}(x) := \begin{vmatrix} b_1 \cdot \left(x - X_1\right) & \text{if} \quad b_1 \cdot \left(x - X_1\right) \ge 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_1 \cdot \left(x - X_1\right) \le 0 \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e2}(x)$$

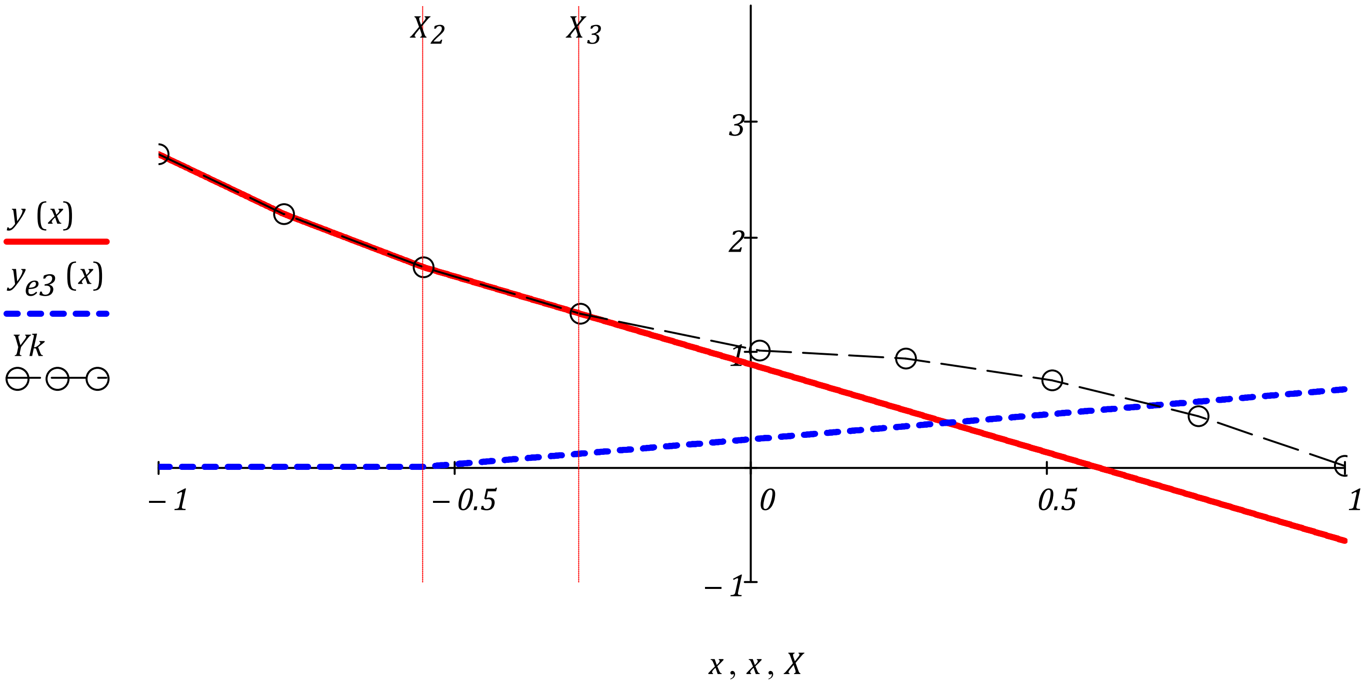


І квадрант, на відкривання

$$b_2 := k_2 - k_1$$

$$y_{e3}(x) := \begin{vmatrix} b_2 \cdot \left(x - X_2\right) & \text{if} \quad b_2 \cdot \left(x - X_2\right) \ge 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_2 \cdot \left(x - X_2\right) \le 0 \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e3}(x)$$

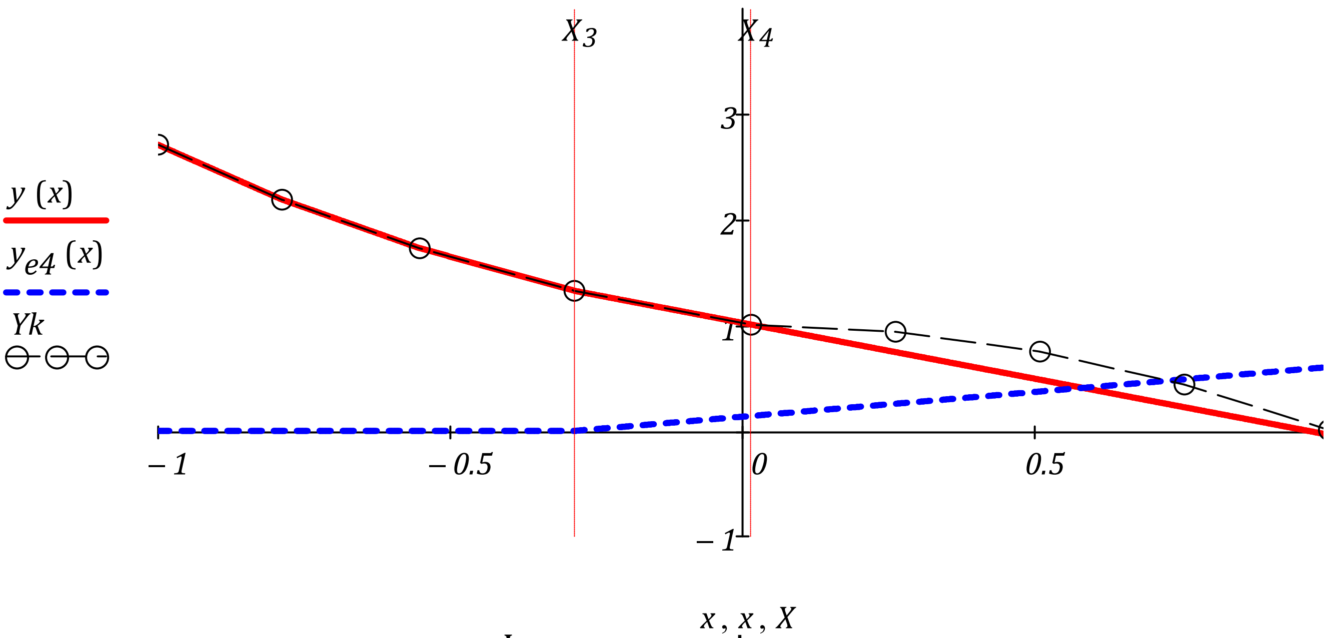


I квадрант, на відкривання

$$b_3 := k_3 - k_2$$

$$y_{e4}(x) := \begin{cases} b_3 \cdot (x - X_3) & \text{if } b_3 \cdot (x - X_3) \ge 0 \\ 0 & \text{if } b_3 \cdot (x - X_3) \le 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e4}(x)$$

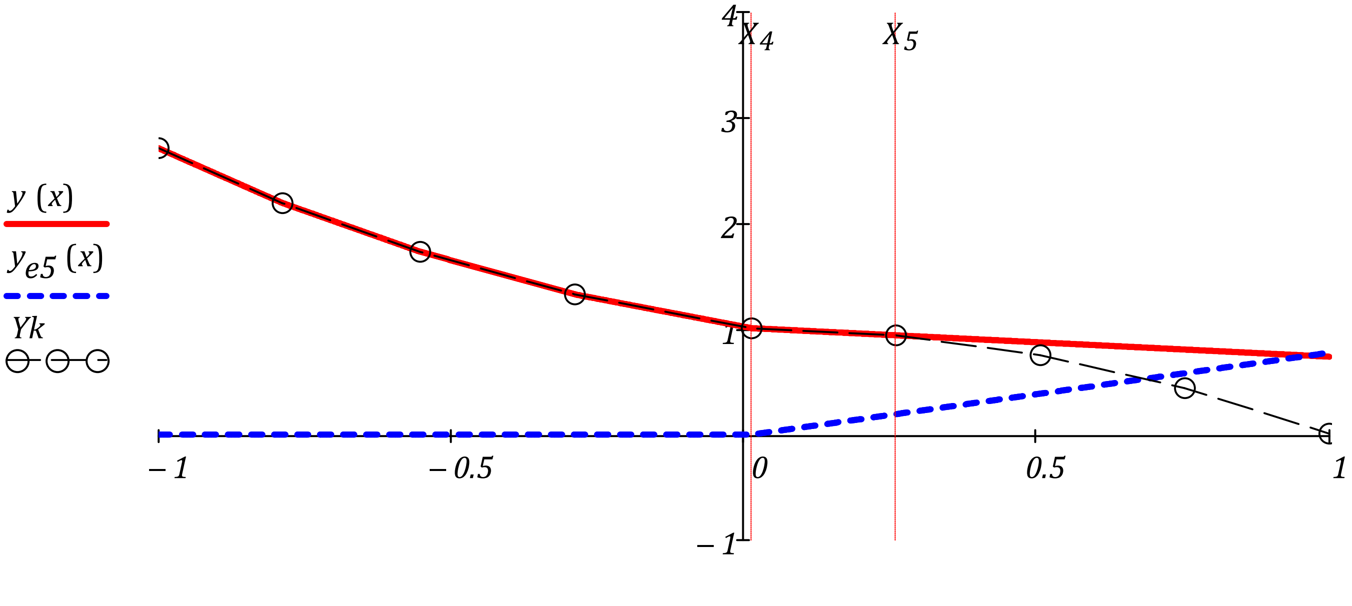


I квадрант, на відкривання

$$b_4 := k_4 - k_3$$

$$y_{e5}(x) := \begin{cases} b_4 \cdot (x - X_4) & \text{if } b_4 \cdot (x - X_4) \ge 0 \\ 0 & \text{if } b_4 \cdot (x - X_4) \le 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e5}(x)$$

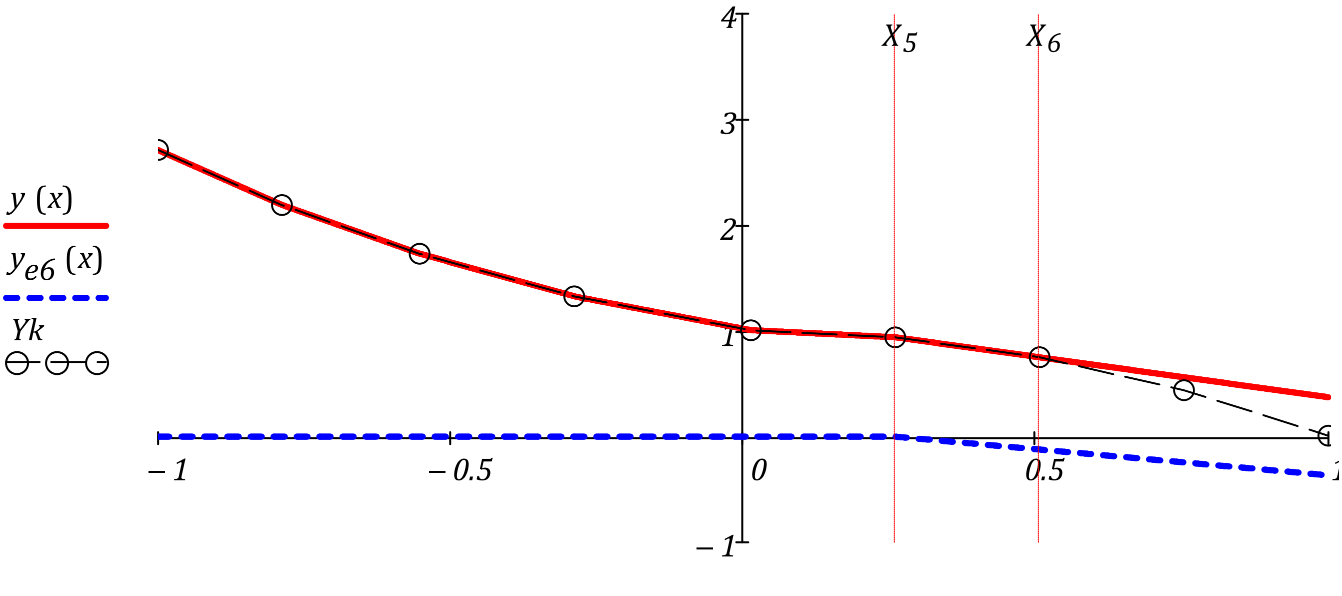


I квадрант, на закривання

$$b_5 := k_5 - k_4$$

$$y_{e6}(x) := \begin{cases} b_5 \cdot (x - X_5) & \text{if} \quad b_5 \cdot (x - X_5) \le 0 \\ 0 & \text{if} \quad b_5 \cdot (x - X_5) \ge 0 \end{cases}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e6}(x)$$

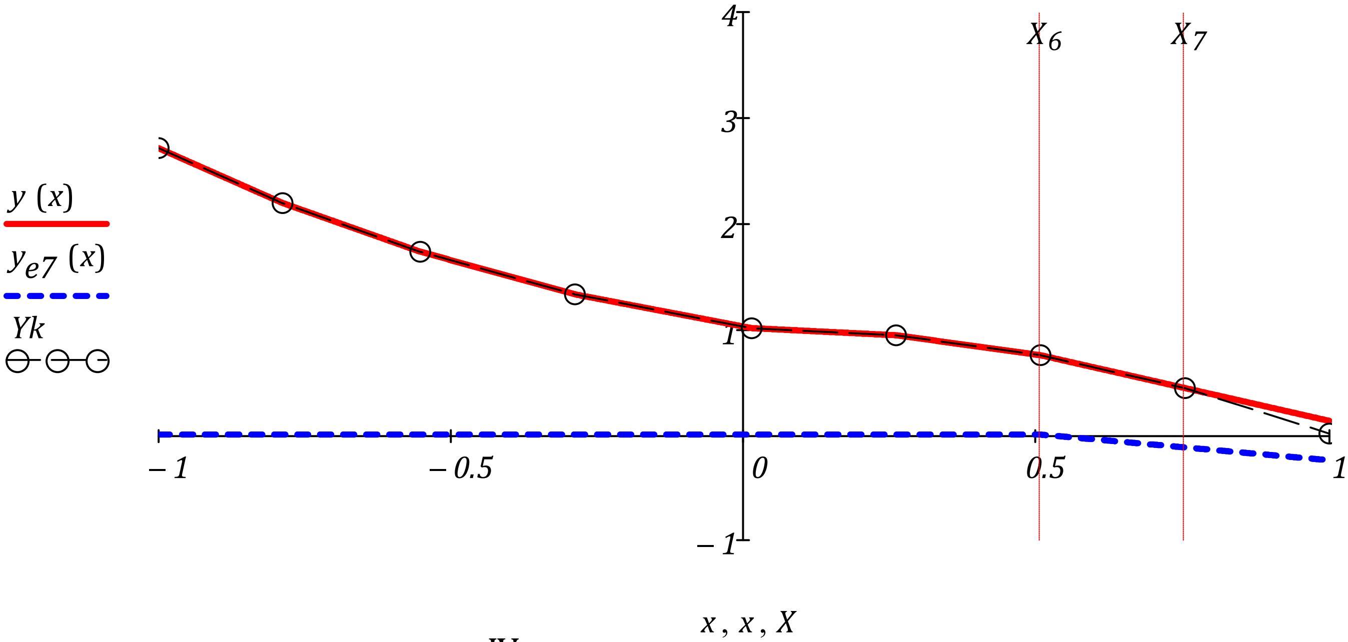


IV квадрант, на закриваняя

$$b_6 := k_6 - k_5$$

$$y_{e7}(x) := \begin{vmatrix} b_6 \cdot (x - X_6) & \text{if} \quad b_6 \cdot (x - X_6) \le 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_6 \cdot (x - X_6) \ge 0 \end{vmatrix}$$

$$y(x) := y(x) + y_{e7}(x)$$

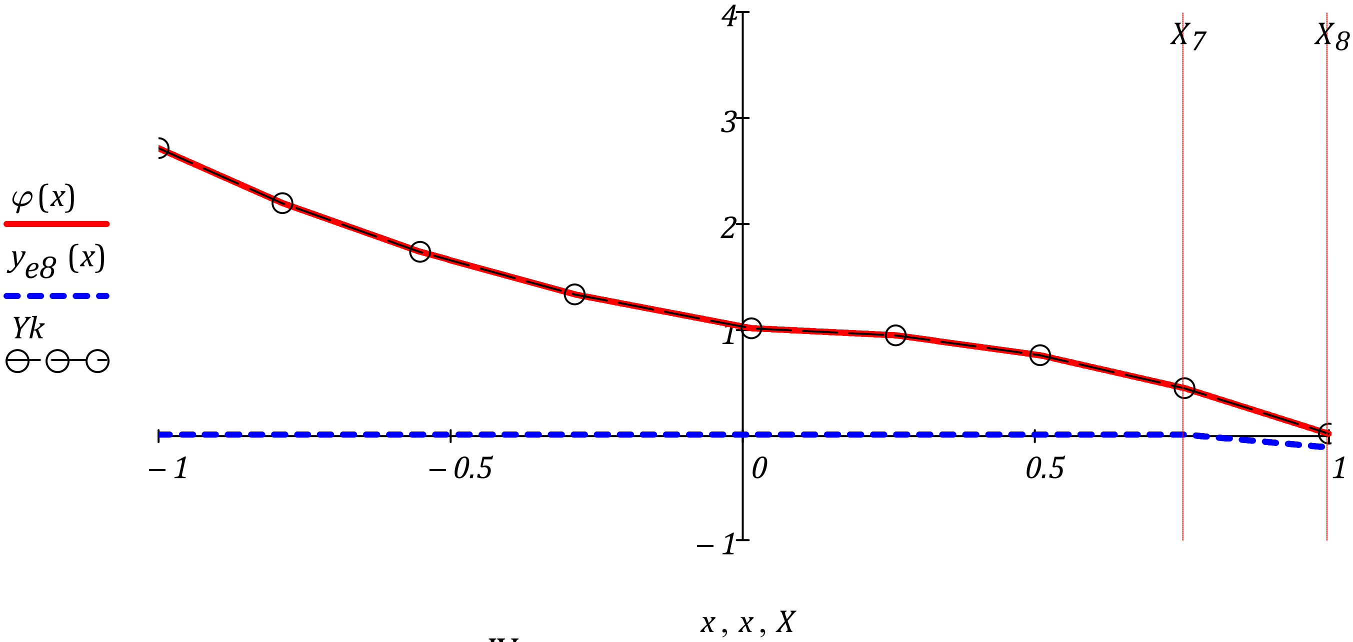


IV квадрант, на закривання

$$b_7 := k_7 - k_6$$

$$y_{e8}(x) := \begin{vmatrix} b_7 \cdot (x - X_7) & \text{if} \quad b_7 \cdot (x - X_7) \le 0 \\ 0 \quad \text{if} \quad b_7 \cdot (x - X_7) \ge 0 \end{vmatrix}$$

$$\varphi(x) := y(x) + y_{e8}(x)$$



IV квадрант, на закривання

14. Здійснити розрахунок наступних значень:

- значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку
- значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку
- значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку

1) значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку:

$$\varphi\left(x_{a_0}\right) = 2.7107$$

2) значення $b_0=k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку:

$$b_0 = -2.45 \qquad k_0 = -2.45 \qquad X_0 = -1$$

3) значення $b_i=k_i-k_{i-1}$ та X_{REFi} для кожного елементарного нелінійного доданку:

$Xref_j := X_j$ $\qquad j := 0..8$

$i := 0..7$

$b_i =$

-2.45
0.4896
0.4325
0.4694
0.7852
-0.4933
-0.4933
-0.4933

$Xref_j =$

-1
-0.7884
-0.5532
-0.2887
0.0133
0.26
0.5066
0.7533
1