МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Отчёт по практикуму на ЭВМ задание 2

Уравнение теплопроводности

Выполнил:
студент 4 курса 408 группы
Мироненко А.В.

Москва, 2021 г.

Вариант 22

Постановка задачи

Требуется методом конечных разностей в области $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\}$ приближённо решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

с начальным $u(x,0) = u_0(x)$ при $t = 0$ и краевыми условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при $\forall t \geq 0$. Сетка в области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ задаётся равномерной по обеим переменным, т.е.

$$x_m = mh, \quad m = 0,1,\ldots,M, \quad Mh = 1; t^n = n\tau, \quad n = 0,1,\ldots,N, \quad N\tau = 1$$

и используются обозначения: для сеточной функции u в точке $(x_m, t^n) - u_m^n$, а для разностного аналога оператора

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } x = x_m \text{ выражение } \Lambda u_m = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2}.$$

Вариант задания 22: метод левой прогонки и схема для $1 \leq m \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N-1$

$$\frac{1}{6}\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + \frac{2}{3}\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{6}\frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n}{\tau} = \Lambda u_m^{n+1} + \varphi_m$$

Разложение и погрешность аппроксимации

Данной схеме соответствует точка разложения $(x = x_m, t = t^{n+1})$.

Правая часть $\varphi_m = f(x_m, t^{n+1})$

Тогда погрешность аппроксимации будет выглядеть так:

$$ERR = \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{O}\left(\tau + n^2\right)$$

Устойчивость

Была рассмотрена вспомогательная задача на собственные значения: $\Lambda v_m = -\mu v_m, 1 \leq m \leq M-1, v_0 = v_M = 0, Mh = 1$ Её решением является набор собственных векторов и значений

$$v_m^{(k)} = \sqrt{2}\sin(\pi kmh), \mu^{(k)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}, 1 \leq k \leq M-1$$

Что позволяет выразить собственные значения исходной разностной схемы:

$$\lambda = \frac{cos(\pi kh) + 2}{cos(\pi kh) + 2 + \mu^{(k)} 3\tau}$$

Отсюда получаем, что при всех τ, h, k верно $|\lambda| \leq 1$. Следовательно, схема абсолютно устойчива.

Таблицы погрешностей

Для $u_1(x,t) = \sqrt{30}tx(1-x), \quad f_1(x,t) = \sqrt{30}\,(x - x^2 + 2t)$

$\downarrow NM \rightarrow$	10	100	1000
10	$1.665e-03$	$1.665e-05$	$1.665e-07$
100	$1.666e-03$	$1.667e-05$	$1.667e-07$
1000	$1.666e-03$	$1.667e-05$	$1.667e-07$

Для $u_2(x,t) = \sqrt{105}e^{-t+1}x^2(1-x), \quad f_2(x,t) = \sqrt{105}e^{1-t}\,(x^2(x-1) - 2 + 6x)$

$\downarrow NM \rightarrow$	10	100	1000
10	$3.683e-03$	$5.468e-03$	$5.468e-03$
100	$1.333e-03$	$5.130e-04$	$5.307e-04$
1000	$1.784e-03$	$3.540e-05$	$5.273e-05$

Для $u_3(x,t) = \sqrt{630}tx^2(1-x)^2, \quad f_3(x,t) = -\sqrt{630}\,(-x^2 + 2x^3 - x^4 + 2t - 12tx + 12tx^2)$

$\downarrow NM \rightarrow$	10	100	1000
10	$4.286e-02$	$4.283e-04$	$4.283e-06$
100	$4.286e-02$	$4.283e-04$	$4.283e-06$
1000	$4.286e-02$	$4.283e-04$	$4.283e-06$

Для $u_4(x,t) = \sqrt{2}e^{-\pi^2(t-1)}\sin(\pi x), \quad f_4(x,t) = 0$

$\downarrow NM \rightarrow$	10	100	1000
10	$1.835e+01$	$1.915e+01$	$1.916e+01$
100	$4.668e-01$	$5.785e-01$	$5.796e-01$
1000	$3.174e-02$	$4.873e-02$	$4.957e-02$