TD n°6 : Moments de force et principe fondamental de la statique

Exercice 1. Notions de cours

a. Quelle notion reflète l'aptitude d'une force à faire tourner un corps autour d'un axe donné ?

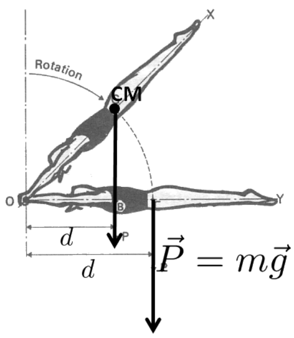
b. Pour des mouvements plans, comment calcule-t-on le moment d'une force par rapport à un axe ou un pivot ?

c. Que dit le principe fondamental de la statique pour un corps rigide (sachant qu'un corps est au repos complet s'il n'y a ni mouvement de translation, ni mouvement de rotation) ?

Corrigé de l'exercice 1.

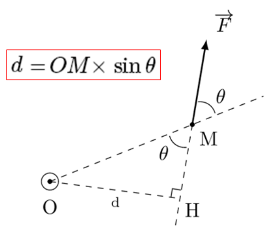
a. C'est la notion de moment d'une force *par rapport à un axe ou un pivot*. La norme du moment d'une force est $M = Fd$ où d est le bras de levier. Le bras de levier est la distance entre la ligne d'action de la force et l'axe de rotation. Sur un schéma, on peut donner l'exemple de la barre fixe où c'est le moment du poids qui fait tourner le gymnaste. Moment du poids : $M = mgd$.

Le moment algébrique est le moment « signé », suivant le sens de rotation produit (négatif dans sens horaire vs positif dans sens anti-horaire ou trigonométrique).



Noter qu'on se restreint en L1 à des mouvements plans et qu'en réalité le moment d'une force est un vecteur parallèle à l'axe de rotation. En L1, on n'étudiera que la valeur algébrique de la norme de ce vecteur.

b. On trace d'abord la ligne d'action de la force (une droite), puis on trouve la distance de l'axe (ou de manière équivalente du pivot) à la ligne d'action, ce qui correspond au bras de levier. Au final, cela revient à faire un peu de trigonométrie dans le triangle rectangle, cf. schéma :



c. Le principe fondamental de la statique stipule que la somme des forces et la somme des moments des forces doivent être égaux à zéro.

A retenir donc : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum M(\vec{F}_{ext}) = 0$ (en vrai cette dernière équation est vectorielle, mais on ne considère que des systèmes se déplaçant dans un plan en L1. Les moments algébriques sont à prendre en compte cependant dans cette dernière équations...).

Exercice 2. Moment d'une force lors d'un exercice de fitness

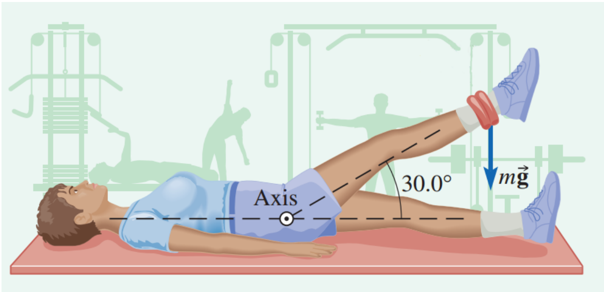
Une personne est allongée sur le dos et fait un exercice de lever de jambe. Une masse de 9 kg est attachée à sa cheville et on suppose que sa jambe effectue un angle de 30° avec l'horizontale. La longueur entre la hanche (axe de rotation) et la masse est de 84 cm. Le but est de calculer le moment du poids créé par la masse.

a. Quelle est la longueur du bras de levier ?

b. En déduire le moment du poids à la cheville (préciser l'unité).

c. Ce moment est-il positif (on orientera toujours le sens de rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, aussi appelé sens trigonométrique) ?

d. Si la masse était placée au niveau du genou, l'exercice serait-il plus dur ou plus facile ? Pourquoi ? [recalculer le moment en supposant que le genou est situé au milieu du segment hanche-cheville]



Corrigé de l'exercice 2.

a. Le bras de levier vaut : $d = 0.84\cos 30° = 0.73\,m$.

b. Le moment de la force vaut : $M = Pd = mgd = 9 \times 9.8 \times 0.73 = 64.4\,N.m$

c. Ce moment est négatif car il aura tendance à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Donc le moment signé vaut : $M = -64.4\,N.m$.

d. Ce serait plus facile car le bras de levier de la masse diminuerait. Le poids créerait donc un moment moins important.
Précisément, si la masse est attachée au niveau du genou, on aurait : $d = 0.42\cos 30° = 0.36\,m$, donc $M = mgd = 9 \times 9.8 \times 0.36 = 31.8\,N.m$ (toujours négatif si on prend le moment algébrique)

Exercice 3. Amplitude des forces musculaires

Le but de cet exercice est d'évaluer la force du biceps, nécessaire au maintien de l'équilibre statique de l'avant-bras. On suppose que la distance entre le centre de masse de l'avant-bras et l'axe du coude est de 16 cm et que la masse de l'avant-bras est de 1,5 kg. Le biceps s'insère sur le radius à 3,5 cm de l'axe du coude et l'angle que fait la force du biceps avec la verticale est supposé égal à 30°.

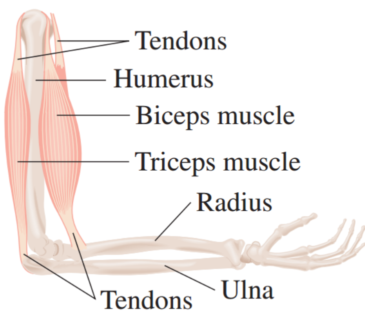
a. En se basant sur le schéma, faire le bilan des forces qui s'appliquent au système {avant-bras}.

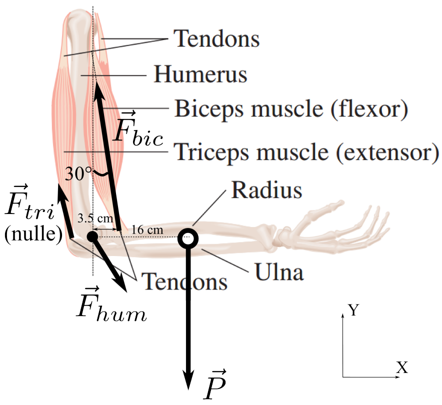
b. En supposant que le triceps est relâché et n'exerce aucune force, écrire le principe fondamental de la statique.

c. Calculer les moments des forces par rapport à un axe passant par le coude.

d. En déduire la force musculaire exercée par le biceps.

e. *[facultatif]* En déduire la force de réaction de l'humérus.





Corrigé de l'exercice 3.

a. Il y a **4 forces** s'appliquant au système : le poids $\vec{P}$, la force du biceps $\vec{F}_{bic}$, la force du triceps $\vec{F}_{tri}$, et la réaction de l'humérus $\vec{F}_{hum}$ (contact osseux).

b. Par hypothèse, $\vec{F}_{tri} = \vec{0}$.
Le principe fondamental de la statique donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_{bic} + \vec{F}_{hum} = \vec{0}$$

$$M(\vec{P}) + M(\vec{F}_{bic}) + M(\vec{F}_{hum}) = 0$$

c. On prend les moments des forces par rapport à un axe de rotation passant par le coude (orthogonal à la feuille).
Ceci permet d'avoir $M(\vec{F}_{hum}) = 0$ car bras de levier nul (la ligne d'action passe par le coude).
Le moment du poids : $M(\vec{P}) = 0.16 \times 1.5 \times 9.8 = 2.35\, N.m$ (signe négatif car fait tourner dans l'autre sens).
Enfin : $M(\vec{F}_{bic}) = 0.035 \cos 30° \times F_{bic} = 0.03 F_{bic}\, N.m$ (signe positif).

d. Comme $0.03F_{bic} + 2.35 = 0$, on en déduit : $F_{bic} = \dfrac{2.35}{0.03} = 78\, N$.

e. On va utiliser la loi de Newton cette fois.
Dans un repère (OXY) orienté vers la droite et vers le haut, les composantes des forces sont :

$$\vec{F}_{bic} = \begin{pmatrix} -F_{bic} \sin 30° \\ F_{bic} \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39.2 \\ 67.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \times 9.8 \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{P} + \vec{F}_{bic} + \vec{F}_{hum} = \vec{0}$, on en déduit :

$$\vec{F}_{hum} = -\vec{P} - \vec{F}_{bic} = \begin{pmatrix} 39.2 \\ 1.5 \times 9.8 - 67.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39.2 \\ -52.8 \end{pmatrix}.$$

Sa norme est alors : $65.8\, N$ (c'est la force exercée par l'humérus sur les os ulna et radius).

Exercice 4. Détermination de la position du centre de masse d'un individu

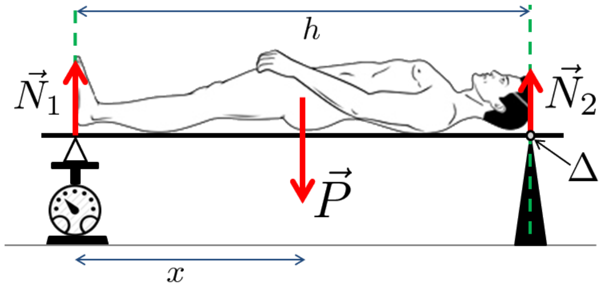
Le but de cet exercice est de déterminer expérimentalement la position du centre de masse (CM) d'un individu. L'individu est allongé sur un plateau qui ne peut tourner qu'autour d'un axe Δ *[delta]*, situé au niveau de sa tête. Une balance est placée à l'autre extrémité du plateau, c-à-d au niveau de ses pieds. On considère que la planche a une masse négligeable et on étudie le système {individu+planche}.

a. Quelle est la condition d'équilibre statique du système ?

b. Calculer les moments des forces par rapport à Δ et en déduire l'expression de la position du CM, notée x (c'est le point où s'applique le poids)

c. Quel est le lien entre la normale $\vec{N}_1$ et la mesure affichée par la balance ? Pourquoi et par quel principe ?

d. Si l'individu mesure 1,75 m pour 75 kg et que la balance indique 33 kg lors de l'expérience, à quelle hauteur est situé son ce



Corrigé de l'exercice 4.

a. Le principe fondamental de la statique s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$.

b. La première relation ne nous sert pas ici. Écrivons la deuxième par rapport à l'axe Δ.

$$M(\vec{P}) + M(\vec{N}_1) + M(\vec{N}_2) = 0$$

On remarque que $M(\vec{N}_2) = 0$ et sachant que « $M = Fd$ » et en tenant compte des signes des moments,

$$(h - x)mg - hN_1 = 0 \Rightarrow x = h - \frac{hN_1}{mg}$$

c. Par le principe d'action-réaction : le sujet applique une force sur la balance qui mesure une certaine masse m_1. En fait, une balance mesure un poids $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, et donc $\vec{N}_1 = -m_1\vec{g}$.

d. A.N. : $x = h - \dfrac{hN_1}{mg} = 1.75 - \dfrac{1.75 \times 33g}{75g} = 0.98\ m$. Le centre de masse est situé à une hauteur de 98 cm du sol quand le sujet se tient debout.

Exercice 5. La croix de fer aux anneaux *(travail personnel)*

Le but de cet exercice est de déterminer la force musculaire développée lors de la croix de fer aux anneaux. Un gymnaste réalise une croix de fer et reste immobile. Les principaux muscles impliqués sont le grand dorsal (latissimus dorsi : "lats") et le grand pectoral (pectoralis major : "pecs"). Pour simplifier, on suppose que ces muscles exercent une force résultante commune, appelée force musculaire $\vec{F}_m$, orientée à 45° par rapport au bras et s'appliquant sur l'humérus à 4,5 cm de l'axe de rotation de l'épaule. Chaque anneau applique une force de réaction normale au niveau de la main, égale à la moitié du poids du gymnaste ($-0.5\vec{P}$). Une autre force de réaction provient de la scapula qui renvoie la force de poussée de l'humérus [l'humérus vient en fait buter sur la cavité glénoïdale de la scapula]. Le gymnaste fait 70 kg et son bras à une longueur de 60 cm.

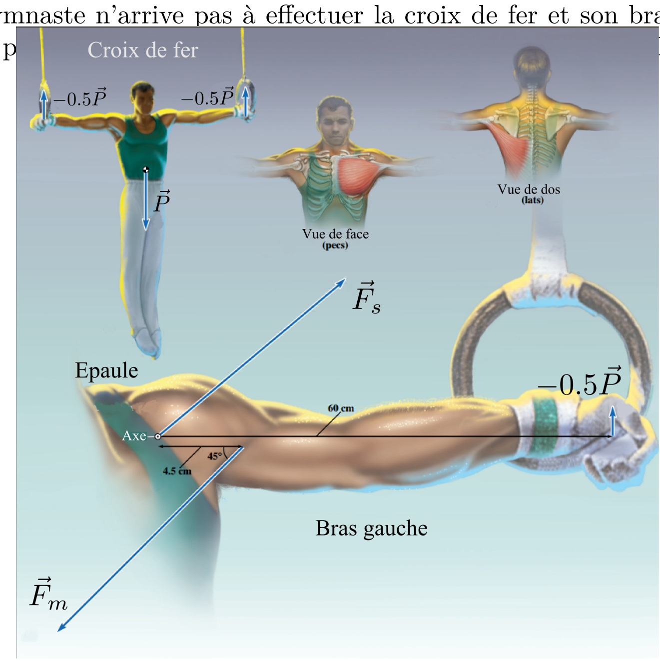
a. Vérifier que le système {gymnaste} est bien en équilibre statique.

b. On considère maintenant le système {bras gauche [humérus-ulna-radius]}. Écrire les conditions d'équilibre statique pour ce système. On négligera le poids propre du bras.

c. Quelle est la valeur de la force musculaire nécessaire pour réaliser la croix de fer ?

d. Comparer la valeur de la force musculaire par rapport au poids de l'athlète.

e. Supposons que le gymnaste n'arrive pas à effectuer la croix de fer et son bras fait un angle de 45° avec l'horizontale. Est-ce p … la force musculaire)



Corrigé de l'exercice 5.

a. Le principe fondamental de la statique s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum M(\vec{F}_{ext}) = 0$.
L'équilibre du gymnaste est bien vérifié. Pour le système {gymnaste} :
Somme des forces :$-\frac{1}{2}\vec{P} - \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{P} = \vec{0}$
Somme des moments (par rapport à un axe passant par le centre de masse) : $0.5P \times d - 0.5P \times d + 0 = 0$ (avec d le bras de levier, qui est inconnu mais reste le même pour gauche et droite ; le moment du poids est nul par rapport à cet axe).

b. Idem : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum M(\vec{F}_{ext}) = 0$ (pour les forces extérieures agissant sur le bras, à savoir réaction de la scapula, force musculaire et réaction de l'anneau.
On néglige le poids du bras pour simplifier.
Pour le système {bras gauche}, écrivons la somme des moments par rapport à un axe Δ passant par l'épaule et parallèle à l'axe antéro-postérieur du gymnaste :

$$M(-\frac{1}{2}\vec{P}) + M(\vec{F_s}) + M(\vec{F_m}) = 0$$

Or $M(\vec{F_s}) = 0$ (car ligne d'action passe par l'axe).
Et $M(-\frac{1}{2}\vec{P}) = \frac{0.6}{2}mg = \frac{0.6}{2} \times 70 \times 9.81 = 206\,N.m$ (fait tourner dans sens anti-horaire) et
$M(\vec{F_m}) = -F_m \times 0.045 \sin 45° = -0.0318 F_m\,N.m$ (fait tourner dans sens horaire).

$$206 - 0.0318 F_m = 0 \Rightarrow F_m = \frac{206}{0.0318} = 6474\,N$$

c. Sachant que le poids du sujet est $P = 686.7\,N$, les muscles doivent soulever $6474/686.7 = 9.4$ fois le poids total du gymnaste, ce qui est assez énorme et on comprend pourquoi c'est une figure difficile à réaliser !
Cela équivaut aussi à la force pour maintenir une masse de $6474/9.8 = 660.6$ kg à l'équilibre !

d. Si le gymnaste « triche » un peu, le moment $M(-\frac{1}{2}\vec{P})$ change et devient égal à : $\frac{0.6}{2}mg \cos 45° = 145.7\,N.m$.
Si tout le reste est identique, la force musculaire nécessaire devient :

$$F_m = \frac{145.7}{0.0318} = 4580\,N$$

soit seulement 6.7 fois son poids. Plus l'angle se rapproche de 90°, plus la force musculaire se rapproche de zéro et plus la tâche sera facile (en théorie et avec nos approximations)...