CM2 : Biomécanique
Rappels sur dérivation et intégration

Dorian Verdel

Année universitaire 2020-2021

Contact :

Université Paris-Saclay, CIAMS, 91405 Orsay, France.
dorian.verdel@universite-paris-saclay.fr

Introduction

- **Dérivation :**
  - Opération mathématiques analysant le taux de variation
  - Nécessaire dans **absolument tous** les domaines scientifiques
  - Base de l'analyse du mouvement et de la cinématique

- **Intégration :**
  - Opération « inverse » de la dérivation
  - Nécessaire dans **absolument tous** les domaines scientifiques
  - Opération nécessaire pour obtenir une trajectoire depuis les équations de Newton

I. Nombre dérivé

Définitions

- **Taux d'accroissement :**
  - Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient 2 réels x_0 et $h \neq 0$ tels que $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.
  - Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est le nombre :

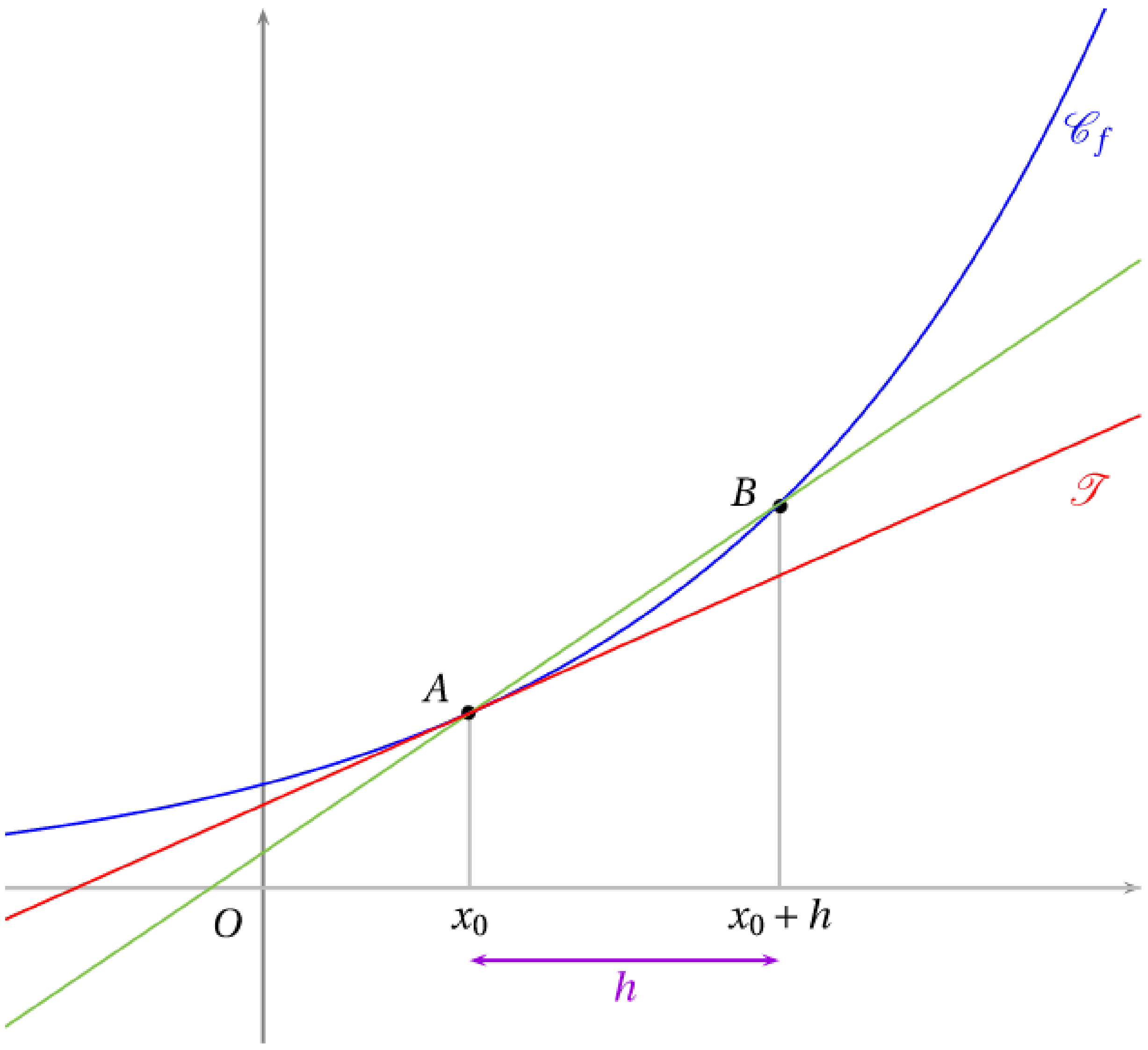
$$T = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Dérivabilité :**
  - Une fonction réelle f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \to 0} T = l \in \mathfrak{R}$. On appelle alors l le nombre dérivé de f en x_0.
  - Ce nombre est noté $f'(x_0)$

Interprétation graphique

- Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f

- L'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est :
  $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Applications

- **Nombres dérivés :**
  - $f(x) = x^2, en\ x_0 = 0\,;1\,;3\,;10$
  - $g(x) = 3x^2 + 5x - 8\,, en\ x_0 = 0\,;1\,;3$
  - $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, en\ x_0 \in \Re$

x^2 : 0 ; 2 ; 6 ; 20

$g(x)$: 5 ; 11 ; 23

$h'(x = x_0) = 3a{x_0}^2 + 2bx_0 + c$

- **Tangentes:**
  - $f(x) = x^2, en\ x_0 = 0\,;1\,;3$
  - $g(x) = 3x^2 + 5x - 8\,, en\ x_0 = 0\,;1$
  - $h(x) = ax^2 + bx + c, en\ x_0$

$T(x,0) = 0\,; T(x,1) = 2x - 1\,; T(x,3) = 6x - 9$

$T(x,0) = 5x - 8\,; T(x,1) = 11(x - 1)$

$T(x,x_0) = h'(x = x_0)(x - x_0) + h(x_0)$

II. Fonction dérivée

Définition

- **Fonction dérivée:**
  - Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable si et seulement si $\forall x \in I, f'(x)\ existe$
  - La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la **fonction dérivée** et se note f'

  - On la note:

$$f' : I \rightarrow \Re$$
$$x \rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$k \ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

A connaître par cœur !!!

Propriétés basiques

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku \ \ (k \in \mathbb{R})$	ku'
$\frac{1}{u}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)	$-\frac{u'}{u^2}$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ (avec $u \geqslant 0$ sur I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ lorsque $u>0$

A connaître par cœur !!!

Applications

- **Démonstrations trois premières dérivées usuelles**

- **Fonctions composées:**
  - $f(x) = 6x^2$
  - $g(x) = 3x^2 + 5x - 8$
  - $h(x) = ax^2 + bx + c$
  - $f_1(x) = \frac{2x^2-8x+5}{3x+2}$
  - $f_2(x) = (6x+8)^3$
  - $f_3(x) = \frac{2x^3-6x+4\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}},\ x > 0$

Applications – Dérivée usuelle 1

- **Première dérivée usuelle :** Soit $f(x) = k, k \in \Re$ alors $f'(x) = 0$

- **Démonstration:**
  - Soit f une fonction qui à x associe $k, k \in \Re$
  - Sa dérivée est définie par : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  - Ce qui donne : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0$

Applications – Dérivée usuelle 2

- **Première dérivée usuelle :** Soit $f(x) = kx, k \in \mathfrak{R}$ alors $f'(x) = k$

- **Démonstration:**
  - Soit f une fonction qui à x associe $kx, k \in \mathfrak{R}$
  - Sa dérivée est définie par : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  - Ce qui donne : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{k(x+h) - kx}{h} \right)$

  - D'où on tire : $f'(x) = k$

Applications – Dérivée usuelle 3

- **Première dérivée usuelle :** Soit $f(x) = x^n, n \in \Re$ alors

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

- **Démonstration:**
  - Soit f une fonction qui à x associe $x^n, n \in \Re$
  - Sa dérivée est définie par : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  - Ce qui donne : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right)$

  - D'où on tire : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{x^n + nx^{n-1}h + a_1 x^{n-2} h^2 + \cdots + a_{n-2} x h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \right) = nx^{n-1}$

Applications – Fonctions composées

- **Démonstrations trois premières dérivées usuelles**

- **Fonctions composées:**
  - $f(x) = 6x^2$
  - $g(x) = 3x^2 + 5x - 8$
  - $h(x) = ax^2 + bx + c$
  - $f_1(x) = \frac{2x^2-8x+5}{3x+2}$
  - $f_2(x) = (6x+8)^3$
  - $f_3(x) = \frac{2x^3-6x+4\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}, \; x > 0$

$$f'(x) = 12x$$
$$g'(x) = 6x + 5$$
$$h'(x) = 2ax + b$$

$$f_1'(x) = \frac{6x^2 + 8x - 31}{(3x+2)^2}$$

$$f_2' = 18(6x+8)^2$$

$$f_3'(x) = \frac{8x^3 - 5x^{5/2} - \sqrt{x}}{(2x - \sqrt{x})^2}$$

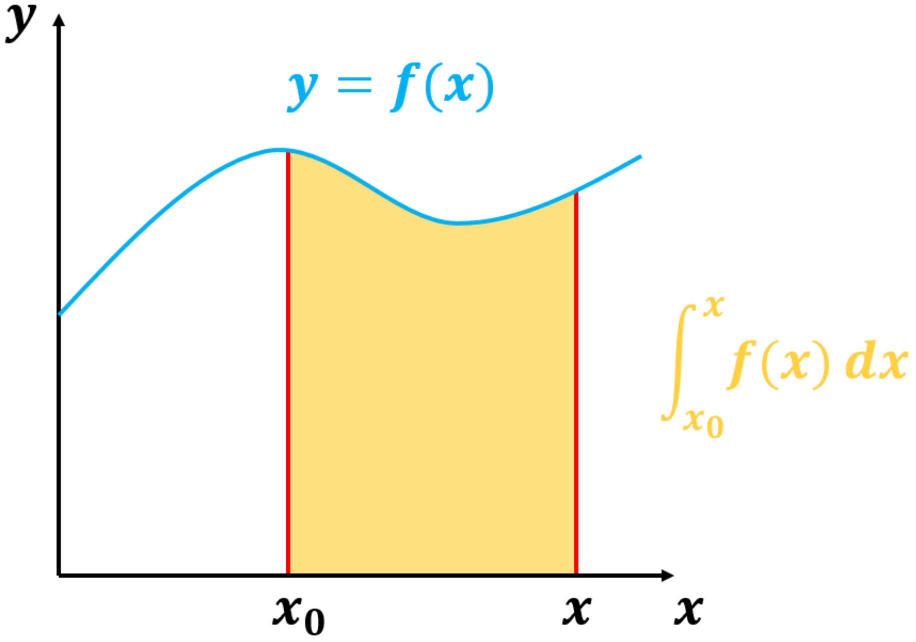
III. Bases d’intégration

Définitions

- **Intégrale :**
  - Opération « inverse » de la dérivée
  - L'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ se note:

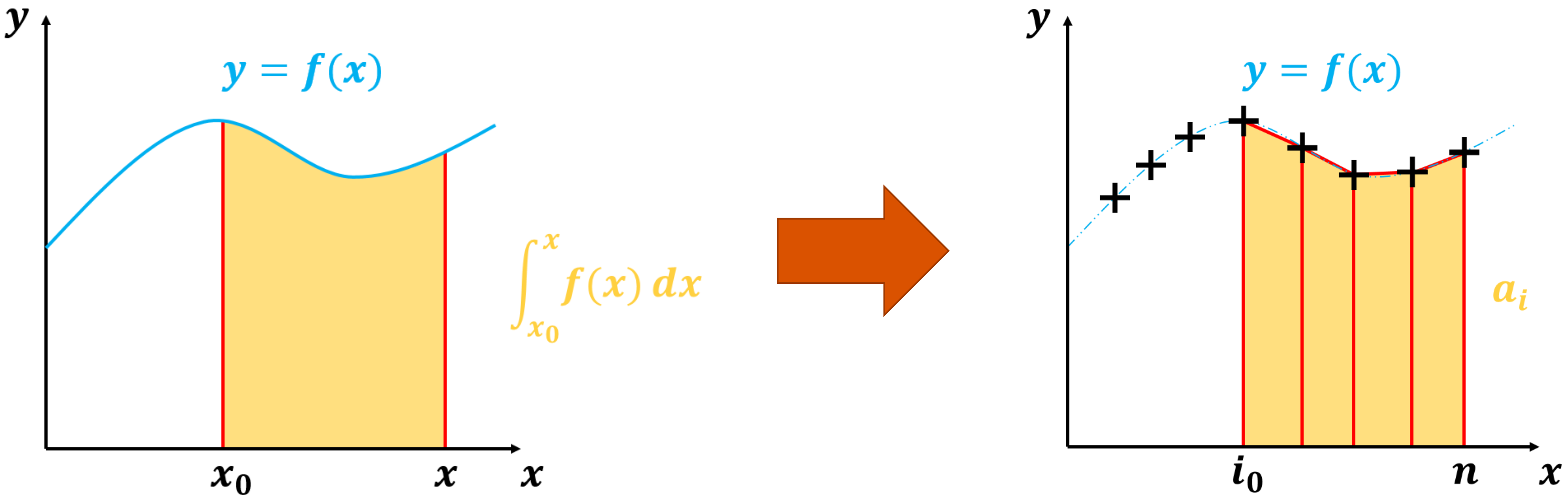
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- **Représentation graphique :**



Intégration numérique

- **Représentation graphique :**



Primitives usuelles

Fonction	Primitives	Domaine
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C,\ C \in \mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$	

A connaître par cœur !!!

Applications: Calculer les primitives en 0 $(C = 0)$:

- $f(x) = 3x^2 - 5x$
- $g(x) = k, k \in \mathfrak{R}$

Questions ?