

Analyse fréquentielle

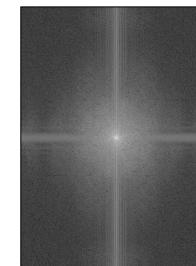
UPEM - Master 1

Vincent Nozick



Analyse fréquentielle

La transformée de Fourier fait peur :



- on commence par plus simple : DCT
- ensuite la transformée de Fourier
- puis les ondelettes

Transformée en cosinus discrète

DCT :

- en anglais : *Discrete Cosine Transform*
- exprime un signal d'entrée dans une base de fonctions
- base de fonctions : cosinus
- représentation fréquentielle
- transformation irreversible

Base de fonctions

Point dans une base de vecteurs ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) de dimension 2 :

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

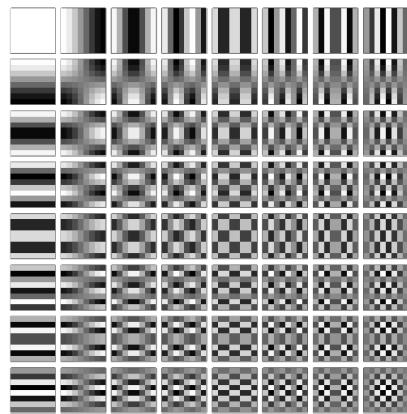
Fonction dans une base de fonctions (f_1, f_2) de dimension 2 :

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

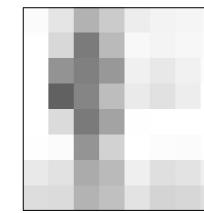
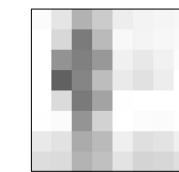
avec par exemple $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = \cos(x)$

DCT : avec les mains

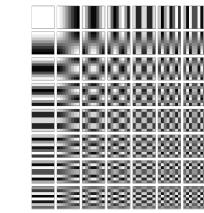
Une base de fonctions discrètes :



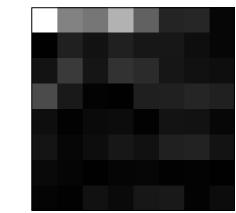
DCT : avec les mains



image

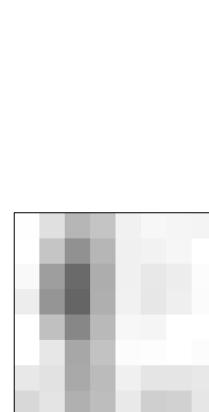


base de fonctions

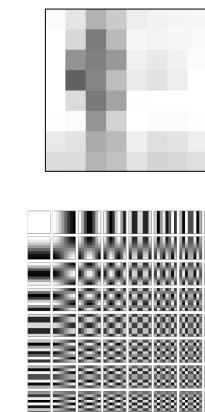


coefficients

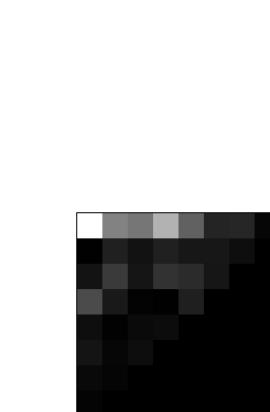
DCT : avec les mains



image

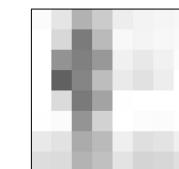


base de fonctions

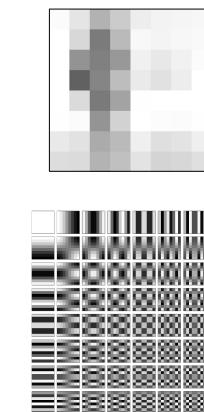


coefficients

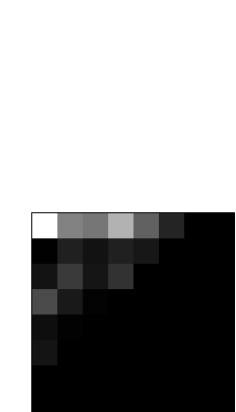
DCT : avec les mains



image



base de fonctions

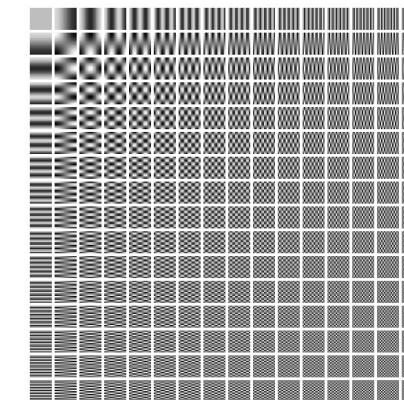


coefficients

DCT : avec les mains

image = base de fonctions \otimes coefficients

DCT : avec les mains



On peut prendre une base de fonctions plus grande.

Fonctions orthogonales

Vecteurs orthogonaux :

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_i x_i \cdot y_i = 0$$

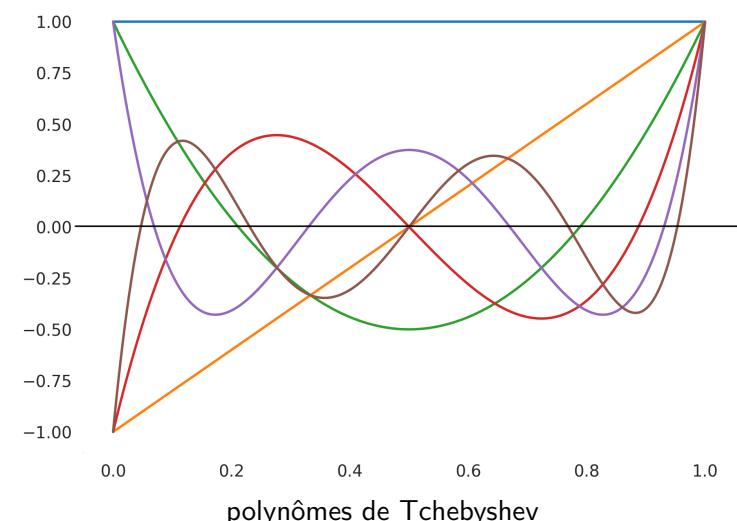
Fonctions orthogonales sur un domaine de définition \mathcal{D} :

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

Fonctions discrètes orthogonales :

$$\sum_i f[i] \cdot g[i] = 0$$

Fonctions orthogonales (exemple)



DCT 1D

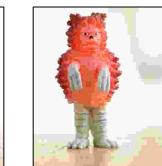
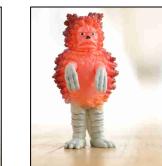
Base de fonctions sinusoïdales :

- base de fonctions :
 - $f_n(x) = \cos(nx)$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $n \in \mathbb{Z}$
 - inclue $f_0(x) = 1$

- orthogonales sur $[-\pi, \pi]$, avec $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{\pi \sin(m-n)}{2(m-n)} - \frac{\pi \sin(m+n)}{2(m+n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

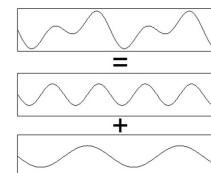
- fonctions orthogonales \Rightarrow unicité de la décomposition d'une fonction f dans cette base.



Applications :

- jpeg
- mpeg
- mp3
- ...

Transformée de Fourier



Analyse de Fourier :

- exprime une fonction comme une somme pondérée de sinusoïdes :
 - à décalage de phase
 - avec une amplitude
 - et à fréquence variable
- les poids et les phases associées aux fréquences caractérisent le signal dans le domaine des fréquences.

Transformée de Fourier 1D

Principe :

- transforme une fonction f (intégrable sur \mathbb{R}) en une fonction F décrivant le spectre fréquentiel de f .
- plusieurs formulations dont :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi tx} dx$$

- équivalent dans un espace discret :

$$F[t] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] e^{-i2\pi \frac{tx}{N}}$$

Transformée de Fourier Discrète

Espace 2D continue :

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Espace 2D discret :

$$F[u, v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x, y] e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

pour une image $M \times N$, il faut une base de MN fonctions.

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Discrète : DFT

$$F[u, v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x, y] e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Transformée inverse : IDFT

$$I[x, y] = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F[u, v] e^{i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Transformée de Fourier Discrète

$$F[u, v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I[x, y] e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Là encore :

la fonction $F[u, v]$ a 2 composantes :

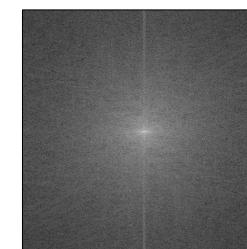
- une composante réelle
- une composante imaginaire

Pour l'affichage, on préfère les coordonnées polaires :

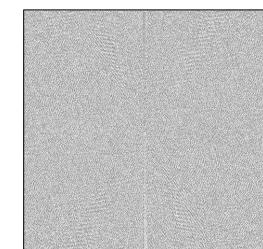
- la magnitude $Mag = \sqrt{Re^2 + Im^2}$
- la phase : $\phi = \arctan(Im/Re)$



image

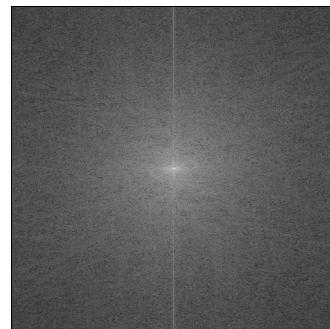


magnitude



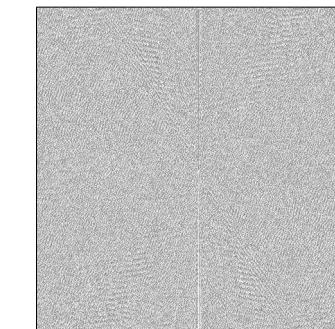
phase

Transformée de Fourier Discrète



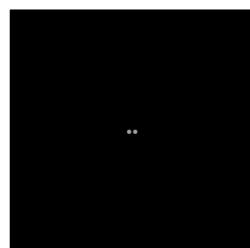
Magnitude : symétrie centrale ($\cos^2 + \sin^2$ est une fonction paire)

Transformée de Fourier Discrète

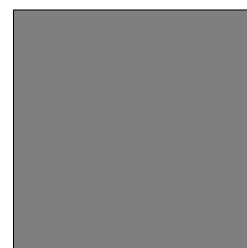


Phase : anti-symétrie centrale

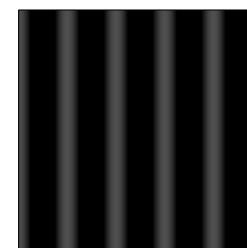
Magnitude



magnitude



phase



image

en $x = \pm 5 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

Magnitude



magnitude



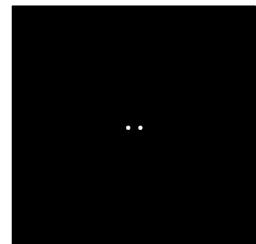
phase



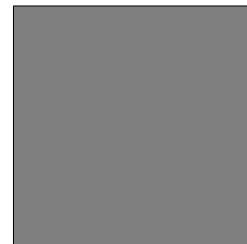
image

magnitude forte \leftrightarrow sinusoïde plus contrastée.

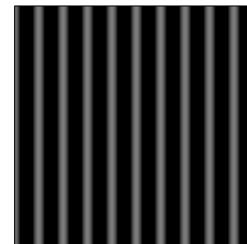
Magnitude



magnitude



phase



image

en $x = \pm 10 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

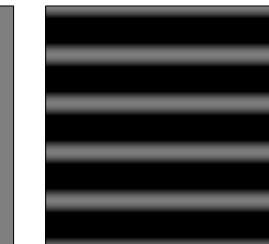
Magnitude



magnitude



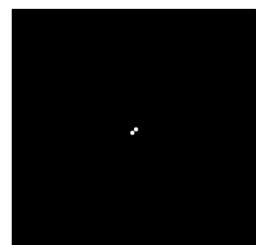
phase



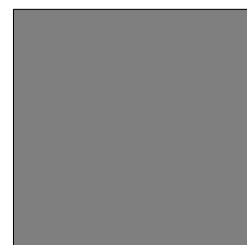
image

en $y = \pm 5 \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

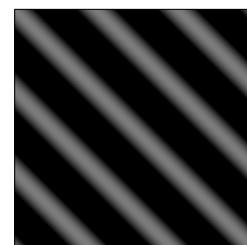
Magnitude



magnitude



phase



image

en $\pm(-3, 3) \rightarrow$ génère une sinusoïde sur l'image.

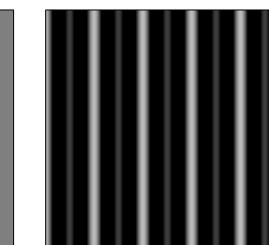
Magnitude



magnitude



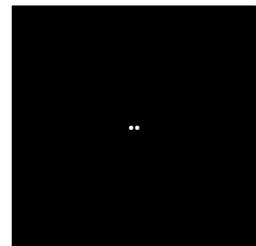
phase



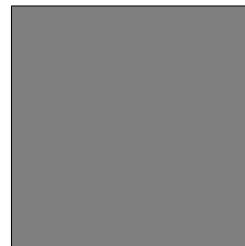
image

2 points

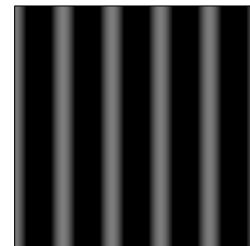
Phase



magnitude



phase



image

sans phase

Phase



magnitude



phase



image

avec phase

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
- d'une image qu'on translate ?
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
→ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

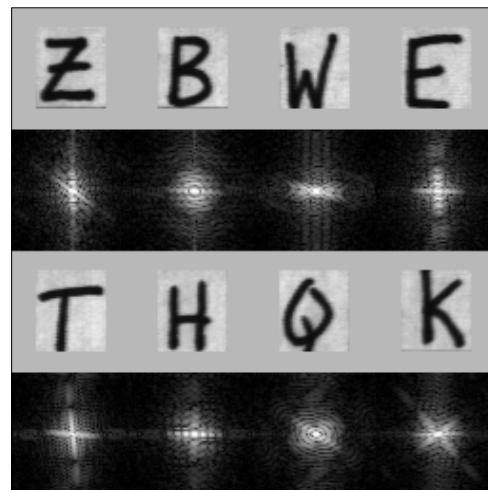
- d'une image qu'on rotate ?
idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
→ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
idéalement, seule la phase change.
- d'une image qu'on scale de moitié ?

Quizz

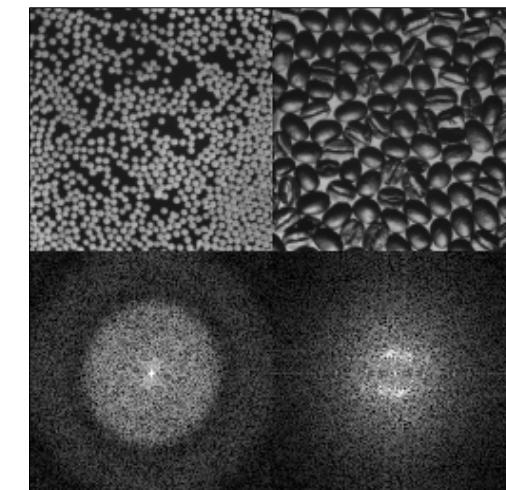
Que se passe-t-il sur la transformée de Fourier :

- d'une image qu'on rotate ?
idéalement, rotation de la magnitude et de la phase
→ en pratique, effets de bords.
- d'une image qu'on translate ?
idéalement, seule la phase change.
- d'une image qu'on scale de moitié ?
magnitude cropée.

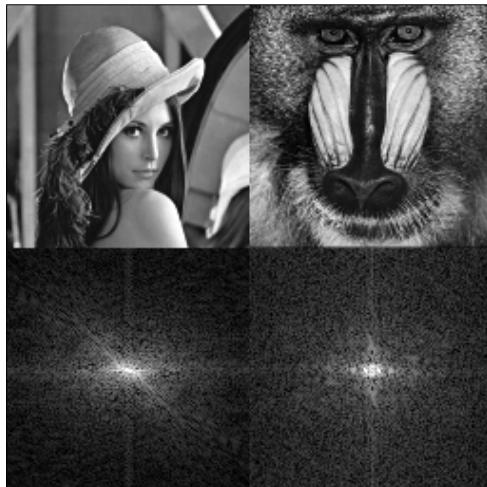
Exemples



Exemples



Exemples

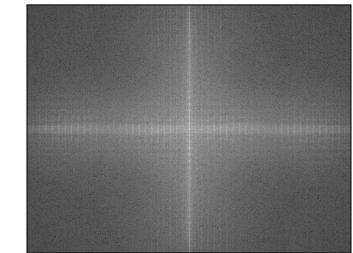
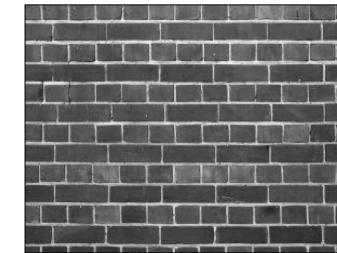


Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

38 / 86

Exemples

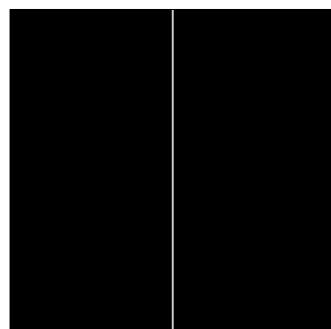


Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

39 / 86

Exemples

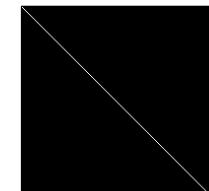


Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

40 / 86

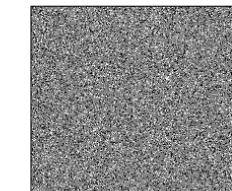
Quizz 2



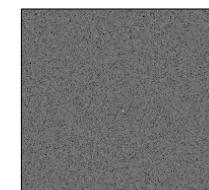
(a)



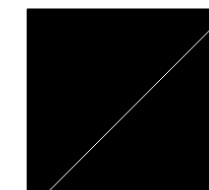
(b)



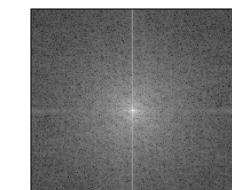
(c)



(1)



(2)



(3)

Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

41 / 86

Filtrage

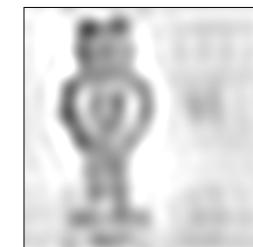
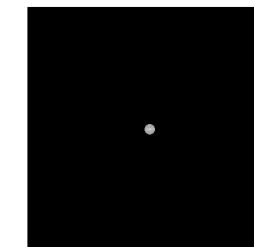
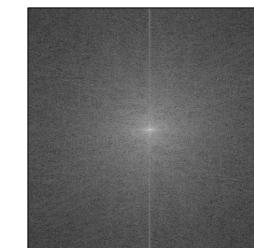


Filtre fréquentiels :

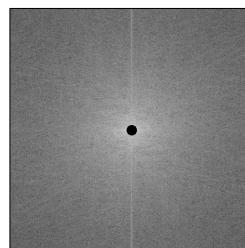
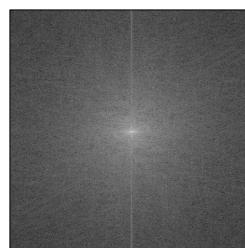
La transformée de Fourier permet essentiellement de faire du filtrage fréquentiel.

↪ on annule l'amplitude de certaines fréquences.

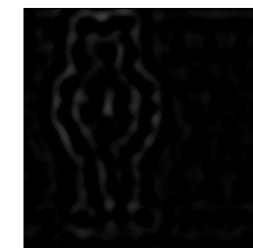
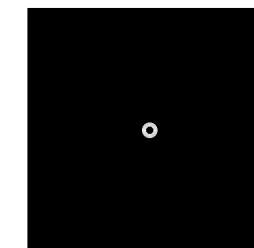
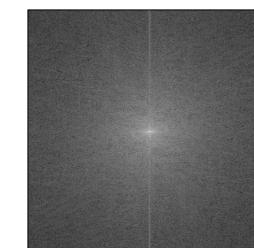
Filtre passe bas



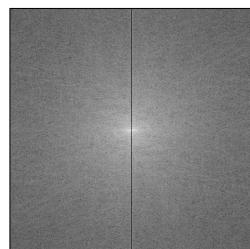
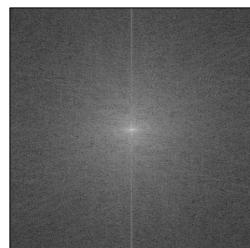
Filtre passe haut



Filtre passe bande



Filtre vertical

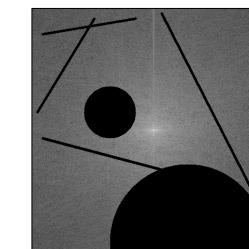
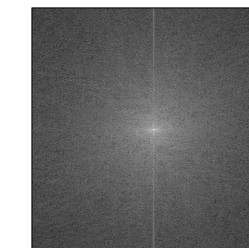


Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

46 / 86

Filtre chelou



Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

47 / 86

Convolutions

Théorème de convolution :

la convolution de 2 fonctions dans le domaine spatial est équivalente à la multiplication terme à terme dans le domaine fréquentiel.

Plus précisément :

soient $f(x, y)$ une image et $h(x, y)$ un filtre de convolution, alors :

$$\mathcal{F}(f(x, y) * h(x, y)) = \mathcal{F}(f(x, y))\mathcal{F}(h(x, y)) = F(u, v)H(u, v)$$

Note : ce théorème ne fonctionne pas pour la DCT.

Convolutions

En pratique :

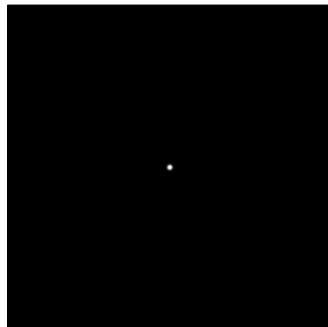
soient $f(x, y)$ une image et $h(x, y)$ un filtre de convolution, alors :

- ① $F = \text{DFT}(f)$
- ② redimensionner h à la résolution de f
- ③ $H = \text{DFT}(h)$
- ④ $F' = F \otimes H$ \otimes : multiplication magnitude terme à terme
- ⑤ $f' = \text{IDFT}(F')$

Filtre gaussien



image originale



kernel gaussien

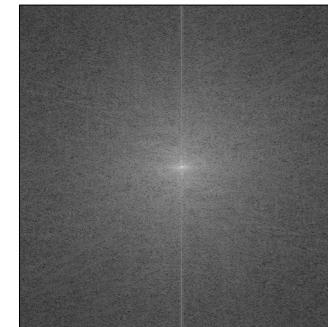
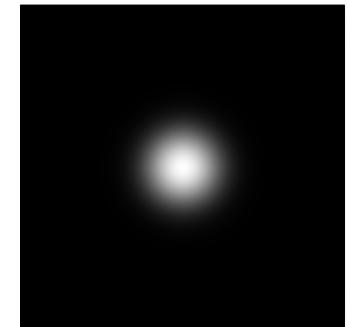


image Fourier



kernel Fourier

Filtre gaussien

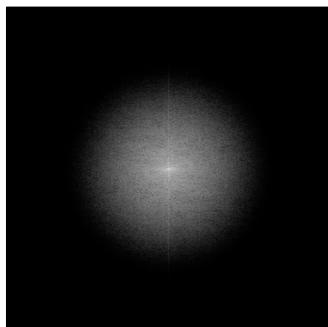
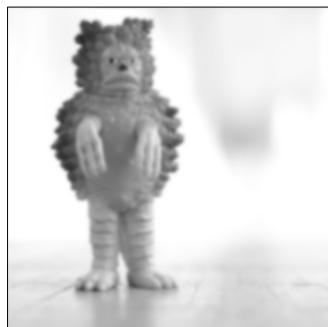
magnitude \otimes kernel

image filtrée

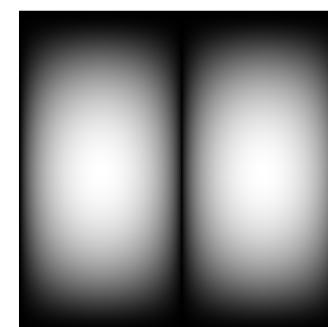
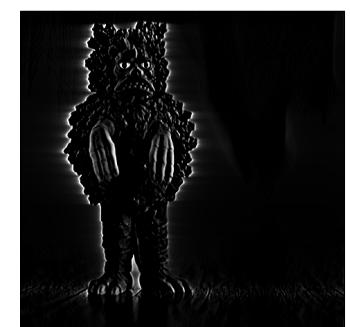
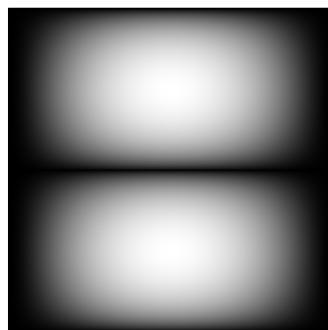
 $\mathcal{F}(\text{kernel})$ 

image filtrée

$$\mathcal{S}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Sobel y



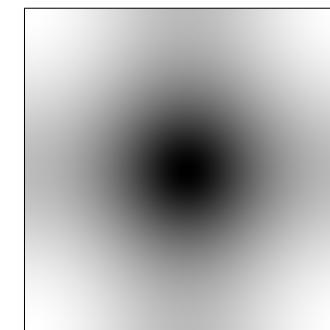
$\mathcal{F}(\text{kernel})$



image filtrée

$$\mathcal{S}_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Laplacien



$\mathcal{F}(\text{kernel})$

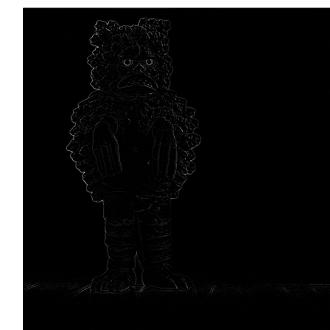


image filtrée

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Implémentation

Fast Fourier Transform (FFT) :

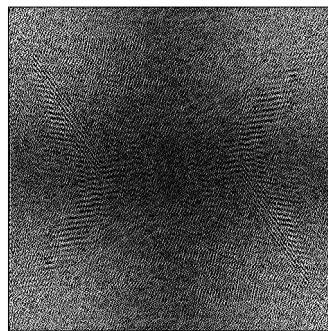
- transformation séparable : (plus rapide)
transformation 2D ($m \times n$) \leftrightarrow m transformation 1D (n)
- pour les images dont la taille est une puissance de 2 :
approche récursive
- complexité classique : $\mathcal{O}(n^2)$ \leftrightarrow FFT : $\mathcal{O}(n \log n)$
pour une grande nombre de pixels n : grosse différence
- implémentation gpu

En pratique

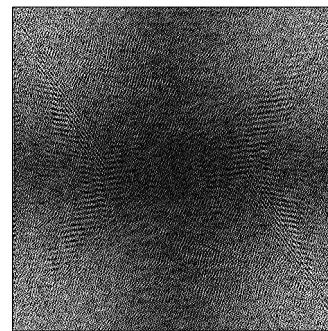


image de départ

DFT

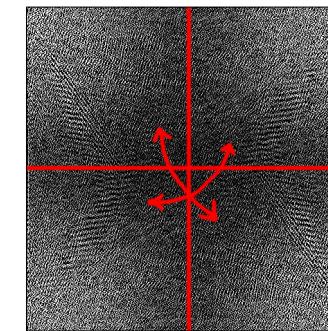


partie réelle

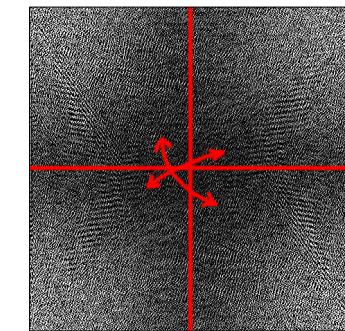


partie imaginaire

Recentrage

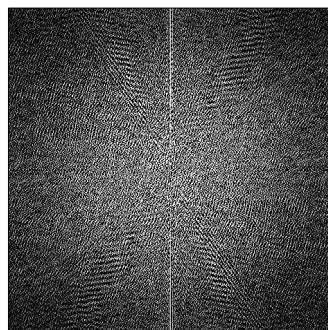


partie réelle

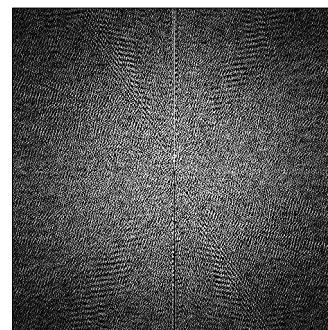


partie imaginaire

Recentrage

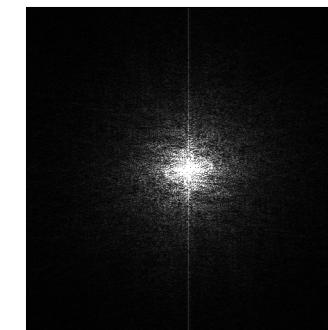
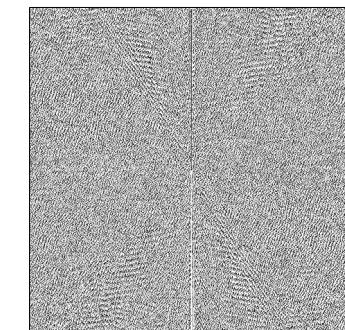


partie réelle

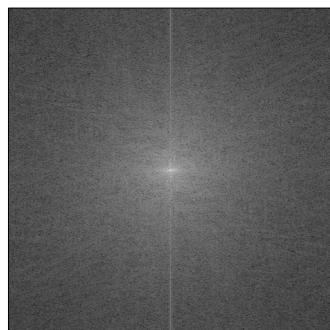


partie imaginaire

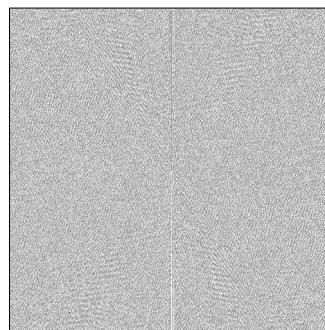
Cartésien → polaire

amplitude $\sqrt{Re^2 + Im^2}$ phase : $\phi = \text{atan}(Im/Re)$

Affichage



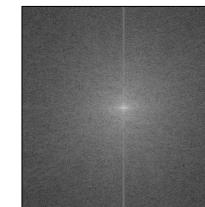
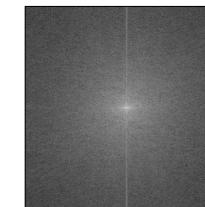
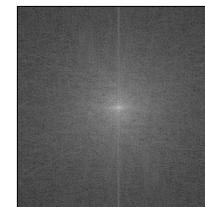
$255 \log(x + 1)/\max$



$255x/(2\max + 1) + 127$

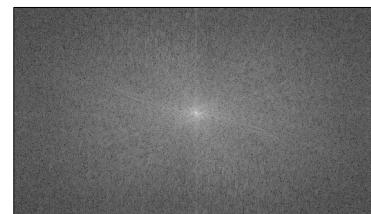
Et la couleur?

Couleur RGB :



Analyse fréquentielle

On n'a plus peur de la transformée de Fourier



Ondelettes

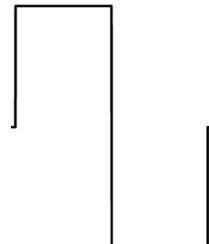
Principe

- concept plutôt récent (~ 1980)
- représentation spatiale et fréquentielle
- bases de fonction, plusieurs possibilités :
 - Haar
 - Morlet
 - Meyer
 - autres ...
- approche multirésolution

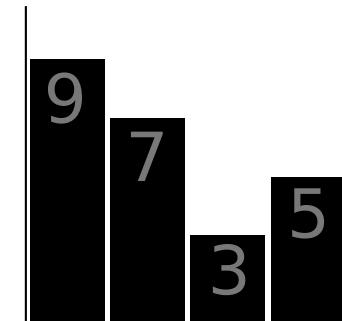
Ondelettes

Graphiquement

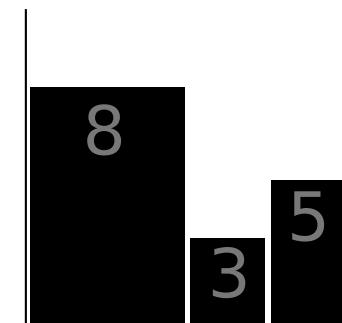
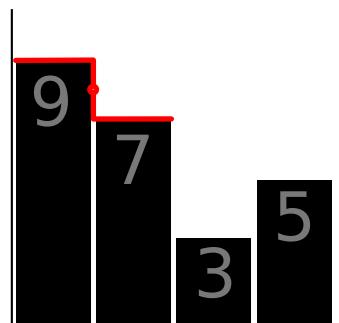
Haar :



+1 | -1



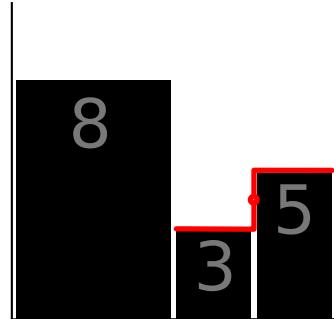
Graphiquement



Code :

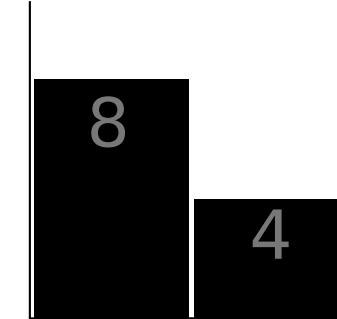
Code : 1

Graphiquement



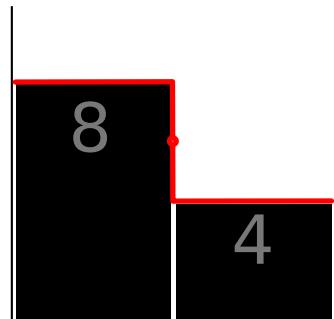
Code : 1

Graphiquement

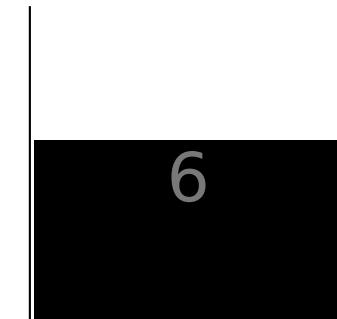


Code : 1 – 1

Graphiquement



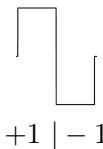
Code : 1 – 1



Code : 1 – 1 2 6

Graphiquement

Avec les mains



Signal original

9 7 3 5

résolution	moyennes	coefficients
1	9 7 3 5	-
2	8 4	1 -1
3	6	2

Avec les mains

résolution	moyennes	coefficients
1	9 7 3 5	-
2	8 4	1 -1
3	6	2

Résultat avec Haar :

signal original	signal transformé
9 7 3 5	6 2 1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6
2
1 -1

Avec les mains

Reconstruction du signal :

6
2
1 -1

Avec les mains**Reconstruction du signal :**

$$\begin{array}{r} 6 \quad 6 \ 6 \ 6 \ 6 \\ 2 \\ 1 \ -1 \end{array}$$

Avec les mains**Reconstruction du signal :**

$$\begin{array}{r} 6 \quad 6 \ 6 \ 6 \ 6 \\ 2 \quad 8 \ 8 \ 4 \ 4 \\ 1 \ -1 \end{array}$$

Avec les mains**Avec les mains****Reconstruction du signal :**

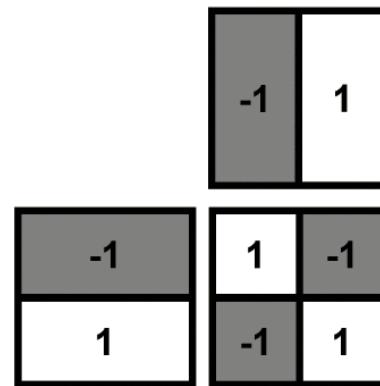
$$\begin{array}{r} 6 \quad 6 \ 6 \ 6 \ 6 \\ 2 \quad 8 \ 8 \ 4 \ 4 \\ 1 \ -1 \end{array}$$

Reconstruction du signal :

$$\begin{array}{r} 6 \quad 6 \ 6 \ 6 \ 6 \\ 2 \quad 8 \ 8 \ 4 \ 4 \\ 1 \ -1 \quad 9 \ 7 \ 3 \ 5 \end{array}$$

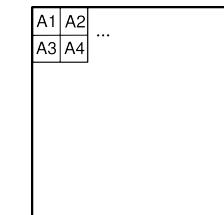
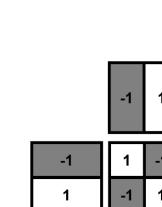
En 2d ?

Haar :

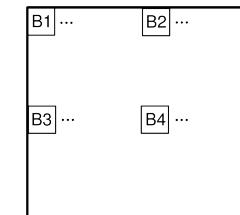


Pour les images

Haar :



Image



Haar

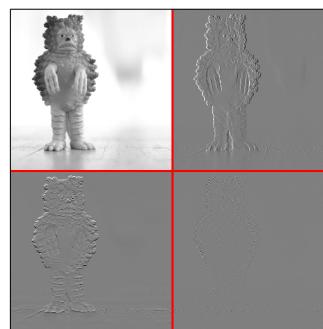
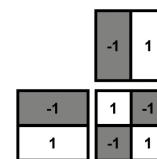
Transformation :

- $B1 = \frac{1}{4}(A1 + A2 + A3 + A4)$
- $B2 = \frac{1}{4}(A1 - A2 + A3 - A4)$
- $B3 = \frac{1}{4}(A1 + A2 - A3 - A4)$
- $B4 = \frac{1}{4}(A1 - A2 - A3 + A4)$

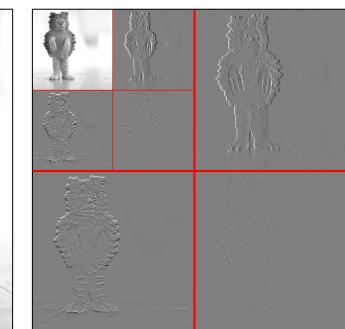
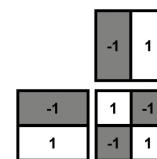
Transformation inverse :

- $A1 = B1 + B2 + B3 + B4$
- $A2 = B1 - B2 + B3 - B4$
- $A3 = B1 + B2 - B3 - B4$
- $A4 = B1 - B2 - B3 + B4$

Pour les images



Pour les images



Pour les images

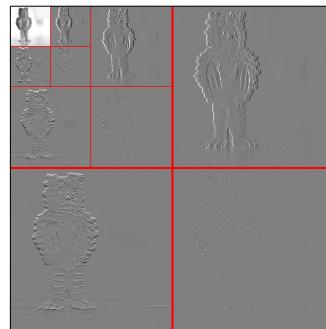
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

81 / 86



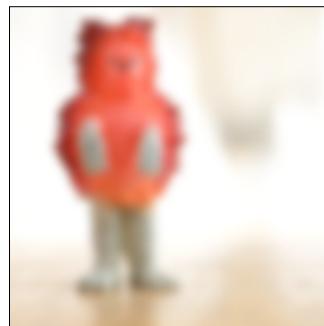
résidu

Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

82 / 86

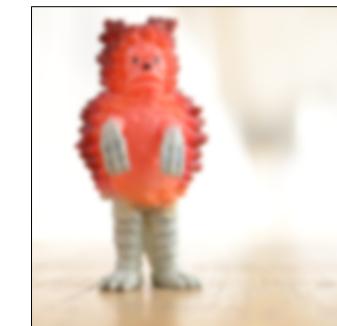
Pour les images



résidu



level 5



résidu



level 5



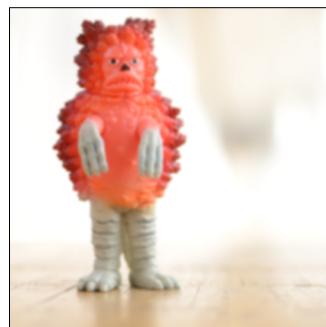
level 4

Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

82 / 86

Pour les images



résidu



level 5



level 4



level 3

Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

82 / 86

Pour les images



résidu



level 5



level 4



level 3



level 2

Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

82 / 86

Pour les images



résidu



level 5



level 4



level 3



level 2



level 1

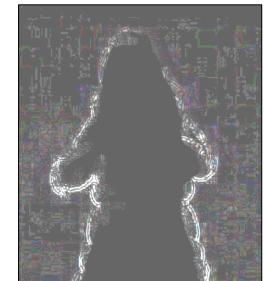
Vincent Nozick

Analyse fréquentielle

82 / 86

Pour les images

Débruitage : sur les niveaux 1 et 2

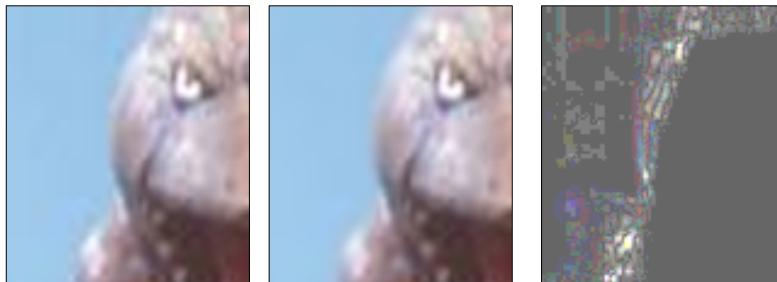


→ suppression de quelques artefacts jpeg.

83 / 86

Pour les images

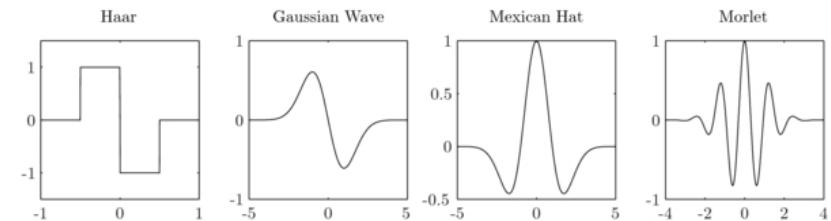
Débruitage : sur les niveaux 1 et 2



→ suppression de quelques artefacts jpeg.

Ondelettes

Autres fonctions :



Ondelettes vs. Fourier

Fourier 1D :

- 1 somme sur la base de fonctions

Ondelettes 1D :

- 1 somme sur les niveaux de résolution
- 1 somme sur l'espace

Ondelettes

Applications :

- compression d'images
- filtre de bruit
- détection (de visages, etc.)
- comparaison d'images
- ...