Calcolo Integrale

Corrado MASCIA

lezione 03

Criteri per serie
a termini positivi

Corso di laurea in Informatica

Contenuto della lezione

– Criterio del confronto asintotico

$$\text{se } \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0, \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

– Criterio della radice e criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} a_k^{1/k} = \ell \quad \text{o} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \ell \in (0,1) &\implies& \sum a_k < +\infty \\ &= \ell > 1 &\implies& \sum a_k = +\infty \end{aligned}$$

– La serie esponenziale

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Modificare un numero finito di valori

Le proprietà di convergenza di una serie $\sum a_k$ dipendono dall'andamento della "coda" della successione a_k.

Cambiare il valore di un numero finito di elementi di una serie, non modifica la convergenza/divergenza della serie stessa.

Osservazione

Siano $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *due serie tali che, per qualche* $N \in \mathbb{N}$, $b_k = a_k$ *per ogni* $k \geq N$. *Allora*

$$\sum a_k \quad \text{è convergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum b_k \quad \text{è convergente}$$

La proprietà di convergenza è la stessa ...il valore della somma, in genere, è diverso!

Variazione sul tema del confronto

Non è necessario ottenere una stima di a_k per ogni k,

basta stimare le "code" della serie.

Proposizione (Proprietà di confronto)

Siano $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *due serie a termini non negativi.*
Se, per esiste $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_k \leq b_k \quad \text{per ogni } k \geq N$$

allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

Rispetto al risultato di confronto presentato nella lezione precedente,

si perde la parte relativa alla stima del valore $\sum a_k$ tramite $\sum b_k$.

Confronto e rapporto

Se $b_k \neq 0$,

$$a_k \leq b_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_k}{b_k} \leq 1$$

Quindi, se $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che} \\ a_k \leq b_k \quad \text{per ogni } k \geq N \end{array}$$

Euristicamente, se $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad a_k \approx \ell \cdot b_k \quad \text{per } k \to +\infty$$

In questo caso, è ragionevole aspettarsi un legame tra
la convergenza della serie $\sum a_k$ e quella della serie $\sum b_k$.

Al limite

Proposizione (Criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *tali che* $a_k \geq 0$ *e* $b_k > 0$ *tali che*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell$$

Se $\ell > 0$, *allora*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

Di conseguenza, nelle stesse condizioni, si ha anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$$

Esercizio

Studiare la convergenza della serie $\sum \frac{1+2k}{3+4k^5}$.

La convergenza è determinata dell'andamento all'infinito dei termini a_k.
Per $k \to +\infty$, euristicamente si ha

$$\frac{1+2k}{3+4k^5} \approx \frac{2k}{4k^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^4}.$$

Dato che la serie $\sum 1/k^4$ è convergente,
ci aspettiamo che anche la serie proposta lo sia.
L'argomento diviene rigoroso con il *Criterio del confronto asintotico*:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(1+2k)/(3+4k^5)}{1/k^4} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(1+2k)k^4}{3+4k^5} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{-1}+2}{3k^{-5}+4} = \frac{1}{2},$$

che indica la convergenza della serie richiesta.

Esercizio

Siano P e Q, polinomi di grado p, e q, rispettivamente, e tali che $P(k) \geq 0$ e $Q(k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Studiare la convergenza di $\sum P(k)/Q(k)$ al variare di p e q.

Indicati con Ak^p e Bk^q i termini di grado massimo di P e Q,

$$\frac{P(k)}{Q(k)} \approx \frac{Ak^p}{Bk^q} = \frac{A}{B} \cdot k^{p-q} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{k^{q-p}}$$

Quindi, è naturale confrontare con la serie $\sum k^{p-q}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{P(k)/Q(k)}{k^{p-q}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{A + \dots}{B + \dots} = \frac{A}{B}$$

La serie armonica è convergente se e solo se il suo esponente è > 1, quindi la serie è convergente se e solo se $q > p + 1$.

Criterio del confronto asintotico, 2

Il confronto asintotico non è applicabile se il limite di a_k/b_k è nullo.

Proposizione (Criterio del confronto asintotico, 2)

Siano $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *tali che* $a_k \geq 0$ *e* $b_k > 0$ *tali che*

$$\lim_{k\to+\infty} a_k/b_k = 0$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$$

L'implicazione è "a senso unico"!

Esercizio

Dimostrare che la serie $\sum \dfrac{1}{k^\alpha \ln k}$ è convergente se $\alpha > 1$
ed è divergente se $\alpha < 1$.

Utilizziamo il confronto asintotico con la serie $\sum 1/k^\alpha$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/k^\alpha \ln k}{1/k^\alpha} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\ln k} = 0.$$

Quindi, se $\alpha > 1$, la serie è convergente.

Per $\alpha < 1$, confrontiamo con la serie $\sum 1/k^\beta$ con $\beta > \alpha$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/k^\beta}{1/k^\alpha \ln k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{k^{\beta-\alpha}} = 0.$$

Per $\beta < 1$, la serie $\sum 1/k^\beta$ è divergente.
Di conseguenza, è divergente anche $\sum 1/k^\alpha \ln k$.

Convergenza e decadimento

Sintesi.

1. Se la serie $\sum a_k$ è convergente, la successione a_k tende a zero. Non è vero il viceversa!

2. Se la successione a_k decade a zero *in maniera sufficientemente rapida*, la serie $\sum a_k$ è convergente.

3. Se il rapporto a_k/b_k tende ad $\ell \neq 0$, le successioni a_k e b_k hanno la stessa rapidità di decadimento. In tal caso, le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

4. Se il rapporto a_k/b_k tende ad 0, la successione a_k tende a 0 più rapidamente di b_k. In questo caso, se la serie $\sum b_k$ è convergente, allora anche la serie $\sum a_k$ è convergente.

Uso del simbolo di Landau

Il simbolo "o-piccolo" viene utilizzato per descrivere una quantità trascurabile rispetto ad un'altra. Date due successioni a_k e b_k,

$$a_k = o(b_k) \qquad \text{per} \quad k \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0.$$

Si legge così: *a_k è un "o-piccolo" di b_k*.

Osservazione (Riformulazione del confronto asintotico)

Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ tali che $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ tali che

$$a_k = o(b_k) \qquad \text{per} \quad k \to +\infty$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

Confronto con la serie geometrica

Il criterio del confronto asintotico presuppone una serie di riferimento con cui confrontare la serie sotto analisi.

Confronto con la serie geometrica: se esiste x tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{x^k} = \ell > 0$$

si può applicare il criterio del confronto asintotico.

Problema. Quando vale questa relazione? E per quale x?

Due strategie:

$$\text{se } a_k \approx \ell\, x^k \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{radice:} & a_k^{1/k} \approx \ell^{1/k}\, x \to x, \\ \text{rapporto:} & \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \approx \dfrac{\ell\, x^{k+1}}{\ell\, x^k} = x \end{array}$$

Criterio della radice

Proposizione (Criterio della radice)

Siano $\sum a_k$ *tali che* $a_k \geq 0$ *e*

$$\lim_{k \to +\infty} a_k^{1/k} = \ell.$$

$$\begin{aligned} &\text{Se} \quad \ell < 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty; \\ &\text{se} \quad \ell > 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty, \end{aligned}$$

Il criterio non è applicabile se $\ell = 1$.

Esercizio

Dimostrare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$.

Individuare una stima per eccesso della sua somma.

Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k^k}\right)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$$

la serie è convergente, grazie al criterio della radice.
Per la stima, osservando che $k^k \geq 2^k$ per ogni $k \geq 2$, si deduce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \leq \frac{3}{2}$$

Criterio del rapporto

Proposizione (Criterio del rapporto)

Siano $\sum a_k$ *tali che* $a_k > 0$ *e*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell.$$

Allora,

$$\text{Se} \quad \ell < 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty;$$

$$\text{se} \quad \ell > 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty,$$

Il criterio non è applicabile se $\ell = 1$.

Esercizio

Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

In vista dell'applicazione del criterio del rapporto, calcoliamo

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

la serie è convergente.

Informazione aggiuntiva. Per altre vie, si dimostra che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2,7182\ldots \qquad \text{(numero di Nepero)}$$

La serie esponenziale

Alla stessa maniera, si dimostra la convergenza di $\sum \frac{x^k}{k!}$ con $x \geq 0$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!} = \frac{k!}{(k+1)!}\frac{x^{k+1}}{x^k} = \frac{x}{k+1} \to 0.$$

Definizione (Funzione esponenziale per $x \geq 0$)

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \geq 0$$

Proprietà.

- **i.** $e^0 = 1$. Conseguenza diretta della Definizione.
- **ii.** e^x è crescente. $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^k/k! \leq y^k/k! \ldots$
- **iii.** $e^{x+y} = e^x e^y$. Occorre gestire il prodotto di serie!

Riassunto della lezione

– Criterio del confronto asintotico

$$\text{se } \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0, \ \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

– Criterio della radice e criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} a_k^{1/k} = \ell \quad \text{o} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \ell \in (0,1) &\implies& \quad \sum a_k < +\infty \\ &= \ell > 1 &\implies& \quad \sum a_k = +\infty \end{aligned}$$

– La serie esponenziale

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$