Lunedì 25/10/2021

GLI O-PICCOLI

DEFINIZIONE: $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Diciamo che "$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$"; scriviamo: "$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$" se vale che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. ①

(CREDO SIA PIÙ UN' OSSERVAZIONE)

- ES: Abbiamo usato la notazione "$o(1)$" per indicare che una funzione tende a 0. Nella definizione precedente si tratta di prendere $g(x) \equiv 1$; $f(x) = o(\underbrace{1}_{g(x)})$ per $x \to x_0$ vuol dire $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0}$

- ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-5}{2x^2+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\overbrace{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}^{o(1)\ \text{(VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE DI UNO)}})}{\cancel{x^2}(2+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{o(1)})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\cancel{o(1)}}{2+\cancel{o(1)}} = \frac{1}{2}$$

Un modo equivalente:

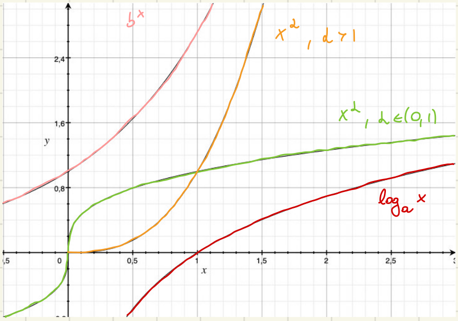
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-5}{2x^2+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(2+\frac{4}{x^2})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = [\dots] = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Qui sto osservando che "$\underbrace{3x}_{f(x)} = o(\underbrace{x^2}_{g(x)})$ per $x \to x_0$". Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{①}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$ Quindi $-5 = o(x^2)$ e $4 = o(x^2)$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI

① $\log_a x = \overbrace{o(x^\alpha)}^{(\log_a x \text{ va a } +\infty \text{ meno velocemente di } x^\alpha)}$ per $x \to +\infty$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$.



② $x^\alpha = o(b^x)$ per $x \to +\infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall b > 1$.

- ES: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^3}^{o(e^x)} - \overbrace{\log_3 x}^{o(e^x)} + e^x}{x^4 + \underbrace{\sin x}_{o(x^4)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \cancel{o(e^x)}}{x^4 + \cancel{o(x^4)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\underbrace{x^4}_{o(e^x)}} = +\infty$$

OSSERVAZIONE: Gli o-piccoli si possono moltiplicare. Per esempio:

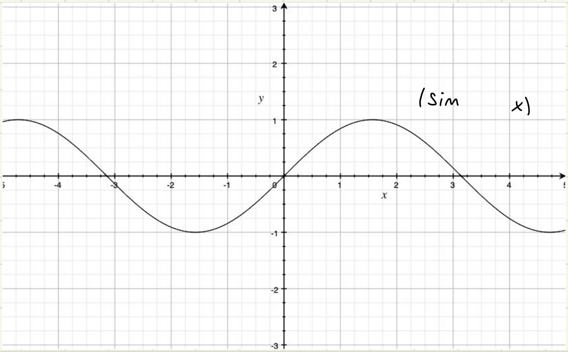
(1) $o(x)\cdot o(x) = o(x^2)$

(2) $x \cdot o(x) = o(x^2)$

(3) $x^2 \cdot o(1) = o(x^2)$

QUALCHE PICCOLA ESPANSIONE ASINTOTICA

• Abbiamo visto che "$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$", ovvero "$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$", ovvero "$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$", ovvero "$\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$", ovvero "$\sin x = x + o(x)$ per $\boxed{x \to 0}$". ($\equiv$ ESPANSIONE ASINTOTICA)



• Abbiamo visto: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\iff \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = 0$

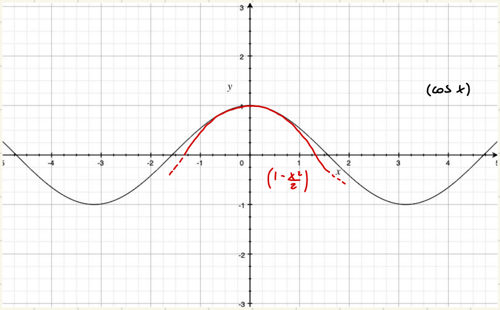
$\iff \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0$

$\iff 1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, per $x \to 0$

$\iff \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = -o(x^2) = o(x^2)$, per $x \to 0$

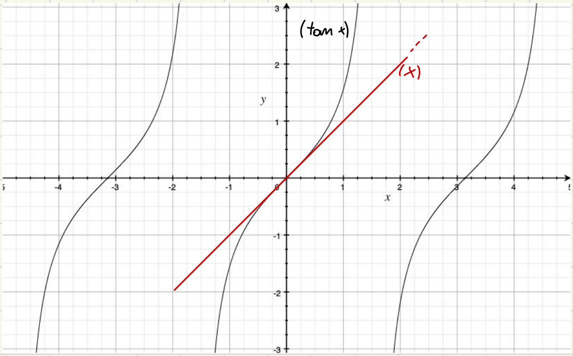
$\iff \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$.

$o(x^2)$ si può vedere come un "termine di errore" nell'approssimazione: "$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, vicino a 0".

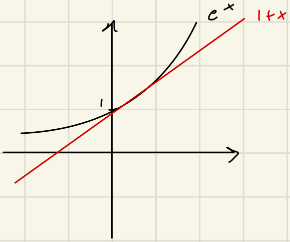


• <u>ESERCIZIO</u> (PER CASA): Verificare che: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \iff \tan x = x + o(x)$, per $x \to 0$.

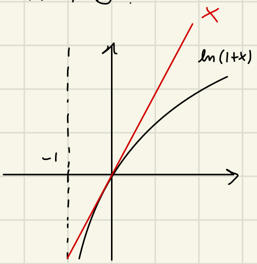
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Analogamente: } \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \\ \iff \arctan x = x + o(x), \text{ per } x \to 0 \end{array} \right\}$$



• <u>ES</u>: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x = 1 + x + o(x)$, per $x \to 0$



• <u>ES</u>: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \iff \ln(1+x) = x + o(x)$, per $x \to 0$.



▶ RICORDIAMO:

$$\boxed{f(x) = o(g(x)), \text{ per } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

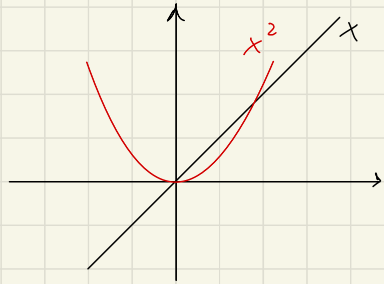
<u>OSSERVAZIONE</u>: Sia $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Allora: $c \cdot o(g(x)) = o(c\,g(x)) = o(g(x))$.

(Si possono ignorare le costanti moltiplicative negli o-piccoli.)

Infatti: $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = 0$

$\iff f(x) = o(c \cdot g(x))$.

• ESEMPIO IMPORTANTE DI O-PICCOLI "per $x \to 0$" e "per $x \to \pm\infty$": POLINOMI



(i) $x^\alpha = o(x^\beta)$, per $x \to 0$, $\forall \alpha > \beta$.

(ii) $x^\beta = o(x^\alpha)$, per $x \to +\infty$, $\forall \alpha > \beta$

(iii) $|x|^\beta = o(|x|^\alpha)$, per $x \to -\infty$, $\forall \alpha > \beta$

• ES: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-3x}{4x^5+x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\cancel{x}+\cancel{o(x)}}{-\cancel{x}+\cancel{o(x)}} = \frac{-3}{-1} = 3.$

• ES: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x-5}{x^3+x^2-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^4}+\cancel{o(x^4)}}{\cancel{x^3}+\cancel{o(x^3)}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$

• ES (limiti notevoli): $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 3(\ln(1+x))^2}{x}$ (1)

$$(1) \iff \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+o(x)-\cancel{x}+3(x+o(x))^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)+3(\overbrace{x^2}^{=o(x)}+\overbrace{2x\cdot o(x)}^{=o(x)}+\overbrace{o(x)\cdot o(x)}^{=o(x)})}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)+3\,o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$ (Per definizione di o-piccolo)

OSSERVAZIONE: Vale che:

(a) $o(g_1(x)) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x)\cdot g_2(x))$.

(b) $g_1(x) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x)\cdot g_2(x))$.

Ad esempio: $\underbrace{x}_{g_1(x)} \cdot \underbrace{o(x)}_{g_2(x)} = o(x^2)$, oppure, $o(x)\cdot o(x) = o(x^2)$.

Nell'esempio precedente avrei potuto scrivere:

$$(x+o(x))^2 = x^2+2x\cdot o(x)+o(x)\cdot o(x) = x^2+2\,o(x^2)+o(x^2) = x^2+o(x^2)$$

• ES: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(8\tan x - 3e^x+3)^2}{x^2}$. (2)

OSSERVAZIONE: $\left.\begin{array}{l}\tan x = x+o(x)\\ e^x = 1+x+o(x)\end{array}\right\}$ per $x\to 0$.

$$(2) = \lim_{x\to 0} \frac{(8(x+o(x))-3(1+x+o(x))+3)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(8x+\overbrace{8\,o(x)-\cancel{3}-3x-3\,o(x)}^{=5o(x)=o(x)}+\cancel{3})}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(5x+o(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{25x^2+10x\cdot o(x)+o(x)\cdot o(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{25x^2+10\,o(x^2)+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{25x^2+\cancel{o(x^2)}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{25\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 25.$$

FOGLIO 4 DI ESERCIZI

▶ ESERCIZIO 1:

(a)-(f), sono: "$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)}$" oppure "$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$".

(g), $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2-3x-1}$ (bisogna dividere per "$x-1$" al numeratore e al denominatore)

(h) MODIFICATO, $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot x-(x+1)(x+1)}{x(x+1)}\cdot \ln x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-2x\overbrace{-1}^{o(x)}}{x^2+\underbrace{x}_{o(x^2)}}\cdot \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+\cancel{o(x)}}{x^2+\cancel{o(x^2)}}\cdot \ln x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x}\cdot \ln x = 0$$ perché "$\ln x = o(x)$ per $x\to+\infty$", ovvero "$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$" (DEFINIZIONE)

(i), $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-2x}{x+1}$. $\left\{\text{si moltiplica per: } \frac{\sqrt{}+2x}{\sqrt{}+2x}.\right\}$

(j), $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x^2+4}}_{\to 1}\right) \overset{\text{PONENDO: } "y=\frac{x^2+x+1}{x^2+4}"}{=} \lim_{y\to 1} \ln(1+y) = \ln(2).$

(o)-(r), $e^{\frac{1}{x}}, e^{-\frac{1}{x}}$.

▶ ESERCIZIO 2:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\overset{0}{4x} - \overset{1}{e^{3x}}}{\underset{0}{x^2}+\underset{-\infty}{\ln x^4}} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\underbrace{(-x^8+x^6)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{-x^6}}_{\to 0}}_{\to 0} + \sin\overbrace{\left(-\pi + \frac{1}{x^9}\right)}^{\to 0} =$

LE ESPONENZIALI VINCONO:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^a}}{x^b} = +\infty, \ \forall a,b>0$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^a} \cdot x^b = 0, \ \forall a,b>0$

$\Rightarrow$ Per verificare questi fatti uso cambi di variabile per ricondurmi al caso: $x^\beta = o(b^x)$ per $x\to+\infty$, $\forall b>1$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Usiamo "$y = x^a$", quindi "$x = y^{\frac{1}{a}}$".

Quindi:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^a}}{x^b} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^y}{\left(y^{\frac{1}{a}}\right)^b} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^y}{\underbrace{y^{\frac{b}{a}=\beta}}_{\text{(E' DELLA FORMA "}x^\beta\text{")}}} = +\infty$ perché $y^\beta = o(e^y)$ per $y\to+\infty$.

Per la ②, con lo stesso cambio di variabile, ovvero "$y = x^a$", otteniamo:

$\lim\limits_{y\to+\infty} \underbrace{e^{-y}}_{\to 0} \cdot \underbrace{y^\beta}_{\to+\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\overbrace{y^\beta}^{o(e^y)}}{e^y} = 0$, perché $y^\beta = o(e^y)$

OSSERVAZIONE: Per $x\to-\infty$, e^x tende a zero più rapidamente di ogni potenza $\left(\frac{1}{x^{1000}}\right)$, ovvero: $e^x = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ per $x\to-\infty$. (Ciò significa che vince "$\frac{1}{|x|^\alpha}$".)

Infatti: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{|x|^\alpha}_{\to+\infty} \overset{\substack{\text{PONENDO:}\\ y=-x}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{|y|^\alpha}{e^y} = 0$

poiché $|y|^\alpha = o(e^y)$ per $y\to+\infty$.

Sempre con un cambio di variabile:

- $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} x^\alpha \underset{(y=\frac{1}{x})}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}}}{|x|^\alpha} \underset{(y=-\frac{1}{x})}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{|y|^\alpha}}$, con $\alpha>0$ $= \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\overbrace{y^\alpha}^{o(e^y) \text{ per } x\to+\infty}}{e^y} = 0$

In modo simile i logaritmi sono "meno forti" delle potenze non solo per $x \to +\infty$ $\left(\log_a x = o(x^\beta) \text{ per } x \to +\infty\right)$, ma anche in 0.

• ES: $\lim_{x \to 0} \underbrace{x^\alpha}_{\to 0} \underbrace{\log_a x}_{\to -\infty} = 0$, con $a > 1$, $\alpha > 0$.

Infatti: con $y = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha \log_a x = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log_a \frac{1}{y}}{y^\alpha} =$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log_a y}{y^\alpha} = 0, \text{ poiché } \log_a x = o(x^\beta) \text{ per } x \to +\infty.$$

Osservazione:

(**) $\boxed{\log_a x = o(x^\beta)}$ per $x \to +\infty$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $\beta > 0$. Segue che:

(*) $\boxed{x^\alpha = o(b^x)}$ per $x \to +\infty$, $\forall b > 1$, $\alpha > 0$.

$(y = \log_a x \iff x = a^y)$

Infatti (**) $\iff \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta}$, $a > 1$ $\iff \lim_{y \to +\infty} \frac{\log_a a^y}{(a^y)^\beta} =$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\underbrace{a^{y \cdot \beta}}_{a^{y\beta} = (a^\beta)^y}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\overbrace{y}^{o(b^y)}}{\underbrace{b^y}_{b = a^\beta}} \underset{(*)}{=} 0$$

(per la ... *)

{ Per dimostrare (*) ci servirà il calcolo differenziale; in particolare il teorema di Lagrange. }