Esercitazione Sistemi Digitali

18/10/2022

Circuito 1- Traccia

a. **Disegnare il circuito logico corrispondente alla seguente funzione Booleana, senza semplificarla**

$$Y_1 = A \cdot \overline{(B + \bar{C})} + \overline{(B + \bar{C})} \cdot B$$

b. **Data la funzione** $Y_2 = \bar{A}BCD + ABCD + A\bar{B}CD$**:**
   1. Disegnare circuito corrispondente
   2. Semplificare F usando proprietà e teoremi dell'Algebra di Boole.
   3. Disegnare nuovo circuito ottenibile da funzione semplificata

Table 2.2 Boolean theorems of one variable

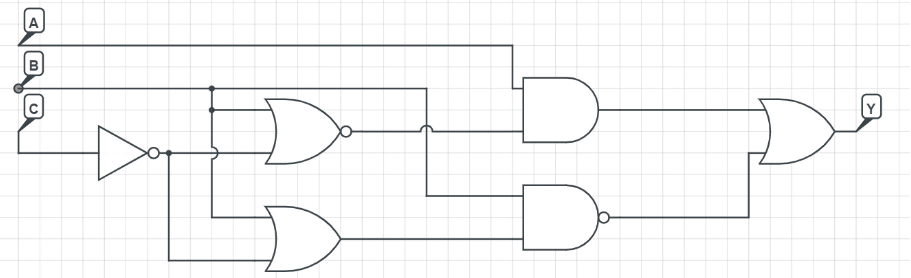
	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	Complements

Table 2.3 Boolean theorems of several variables

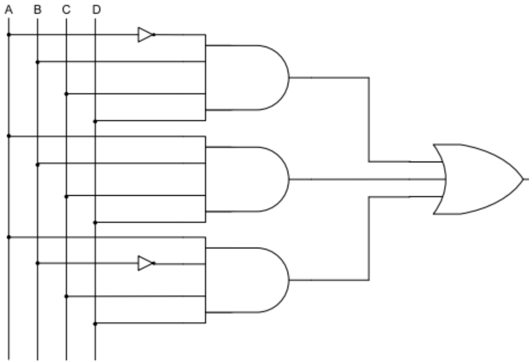
	Theorem		Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6′	$B + C = C + B$	Commutativity
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7′	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Associativity
T8	$(B \bullet C) + (B \bullet D) = B \bullet (C + D)$	T8′	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	Distributivity
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9′	$B + (B \bullet C) = B$	Covering
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10′	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Combining
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) = B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11′	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D) = (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Consensus
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots)$	T12′	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots)$	De Morgan's Theorem

Soluzione punto a

$$Y = A \cdot \overline{(B + \bar{C})} + \overline{(B + \bar{C}) \cdot B}$$



Soluzione punto b (1)



Soluzione punto b (2-3)

- Per idempotenza ABCD=ABCD+ABCD

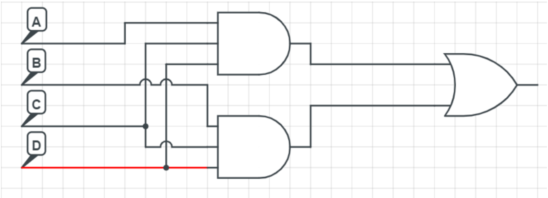
$$Y_2 = \bar{A}BCD + ABCD + ABCD + A\bar{B}CD$$

- Per proprietà distributiva

$$Y_2 = (\bar{A} + A)BCD + ACD(B + \bar{B})$$

- Per complemento

$$Y_2 = (\bar{A} + A)BCD + ACD(B + \bar{B}) = BCD + ACD$$



Circuito 2- Traccia

- **Minimizzare il seguente circuito**

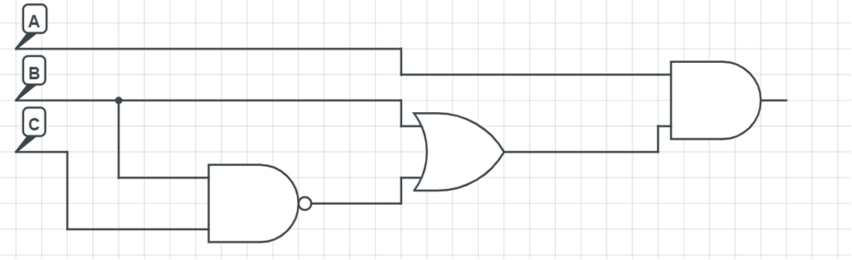


Table 2.2 Boolean theorems of one variable

	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	Complements

Table 2.3 Boolean theorems of several variables

	Theorem		Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6′	$B + C = C + B$	Commutativity
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7′	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Associativity
T8	$(B \bullet C) + (B \bullet D) = B \bullet (C + D)$	T8′	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	Distributivity
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9′	$B + (B \bullet C) = B$	Covering
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10′	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Combining
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D)$ $= B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11′	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D)$ $= (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Consensus
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots)$	T12′	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots)$	De Morgan's Theorem

Circuito 2- Soluzione

- Espressione booleana:
  $A \cdot (B + \overline{B \cdot C})$
- Semplificazione:
  $A \cdot (B + \overline{B \cdot C}) = A \cdot (B + \bar{B} + \bar{C}) = A \cdot 1 = A$

Applicando i teoremi dell’algebra di Boole, verificare se la seguente espressione ‘e vera o falsa:

$$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (\bar{A} \cdot C) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C)$$

Table 2.2 **Boolean theorems of one variable**

	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	Complements

Table 2.3 **Boolean theorems of several variables**

	Theorem		Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6′	$B + C = C + B$	Commutativity
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7′	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Associativity
T8	$(B \bullet C) + (B \bullet D) = B \bullet (C + D)$	T8′	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	Distributivity
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9′	$B + (B \bullet C) = B$	Covering
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10′	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Combining
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D)$ $= B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11′	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D)$ $= (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Consensus
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots)$	T12′	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots}$ $= (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots)$	De Morgan’s Theorem

Algebra Boole- Soluzione Teorema del consenso

- Applichiamo T1 (identità) e T5'(complemento) a $BC = 1(BC) = (A + \bar{A})BC$. Parte sinistra diventa:

$$A \cdot B + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C = A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C$$

- Dato che:
  1. $A \cdot B + A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot (1 + C) = A \cdot B \cdot 1 = A \cdot B$
  2. $\bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C = \bar{A} \cdot C \cdot (B + 1) = \bar{A} \cdot C \cdot 1 = \bar{A} \cdot C$

  Otteniamo che:

$$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (\bar{A} \cdot C) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C)$$

Algebra Boole- Verifica uguaglianza

Dimostrare se la seguente uguaglianza è vera o falsa:

$$\overline{A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

Table 2.2 Boolean theorems of one variable

	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	Complements

Table 2.3 Boolean theorems of several variables

	Theorem		Dual	Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6′	$B + C = C + B$	Commutativity
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7′	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Associativity
T8	$(B \bullet C) + (B \bullet D) = B \bullet (C + D)$	T8′	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	Distributivity
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9′	$B + (B \bullet C) = B$	Covering
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10′	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Combining
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) = B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11′	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D) = (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Consensus
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots)$	T12′	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots)$	De Morgan's Theorem

Soluzione

Considerando la parte sinistra:

- **Applichiamo De Morgan:**

$$\overline{A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{B \cdot C} \cdot \overline{A \cdot C} =$$

$$(\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) =$$

- **Sviluppando il primo prodotto:**

$$(\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) =$$

- **Per T9' (covering) $\bar{A}\bar{B} + \bar{B} = \bar{B}$ e $\bar{B}\bar{C} + \bar{B} = \bar{B}$:**

$$(\bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) = (\bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) =$$

- **Sviluppando il prodotto:**

$$\bar{B} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$$

$$\bar{B} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

Esercizio 1- Da tavola a forme POS/SOP

- Calcolare forme canoniche SOP e POS partendo dalla seguente tabella

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Determinare tabella di verità e forme canoniche SOP e POS di una funzione a tre inputs che dà 1 in output sse riceve un numero pari di 1 in input

Soluzione 1

- Sommando i mintermini della funzione:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

- Il prodotto dei maxtermini è:

$$Y = (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

Soluzione 2

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- SOP: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$
- POS: $(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

Esercizio 2- Da specifica verbale a funzione

Si progetti il circuito di controllo di un ascensore che rilevi i seguenti eventi:

- chiusura delle porte difettosa
- arresto brusco al piano
- tempo di risposta alla chiamata lento
- fermata improvvisa durante la corsa

e che dia in output un segnale di warning ogni volta che si verificano almeno due di questi eventi simultaneamente (cioè nella stessa corsa dell'ascensore).

1. Determinare tabella di verità
2. Determinare la forma canonica POS

Soluzione 1

Associamo ad ogni evento una variabile booleana:

- Porte difettose- Variabile C
- Arresto brusco- Variabile A
- Tempo risposta lento- Variabile T
- Fermata improvvisa-Variabile F
- Warning- Variabile W

Soluzione 2

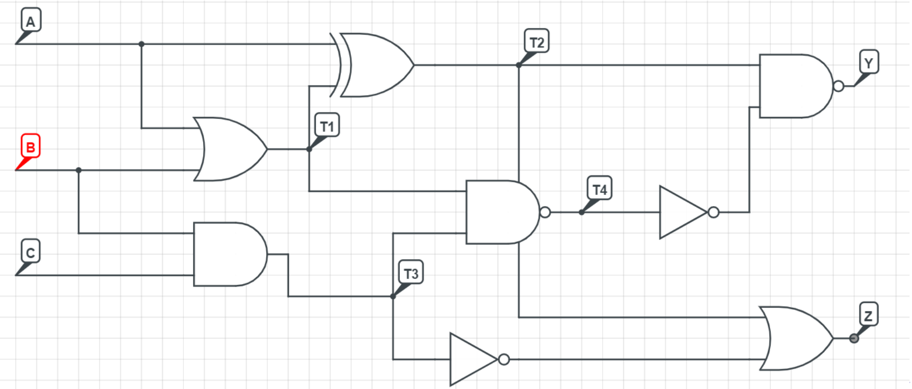
C	A	T	F	W
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

- POS: $(C + A + T + F)(C + A + T + \bar{F})(C + A + \bar{T} + F)(C + \bar{A} + T + F)(\bar{C} + A + T + F)$

Traccia vecchio esonero

Analizzare il seguente circuito seguendo i passaggi:

- Determinare le espressioni booleane di T1, T2, T3, e T4, ciascuna OPPORTUNAMENTE SEMPLIFICATA secondo i teoremi dell'algebra booleana
- Determinare le espressioni booleane semplificate in forma normale SOP di Y e Z



Soluzione

- T1=A+B
- T2=$A \oplus T1 = A \cdot (\overline{A+B}) + \bar{A}(A+B) = A \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B}) + \bar{A}B = \bar{A}B$
- T3= $B \cdot C$
- T4=$\overline{(A+B) \cdot B \cdot C} = \overline{ABC + BC} = \overline{B \cdot C \cdot (A+1)} = \overline{B \cdot C}$
- Y=$\overline{(\bar{A} \cdot B) \cdot B \cdot C} = \overline{\bar{A} \cdot B \cdot C} = A + \bar{B} + \bar{C}$
- Z=$\overline{B \cdot C} + \bar{A}B = \bar{B} + \bar{C} + \bar{A} \cdot B$