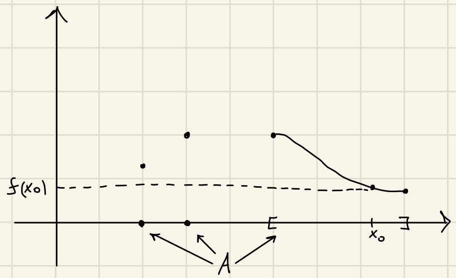
Lunedì 08/11/2021

FUNZIONI CONTINUE

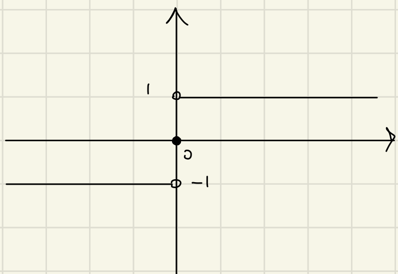
DEFINIZIONE: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ si dice <u>continua in $x_0 \in A$</u> se:

(1) o x_0 è un punto isolato di A, ovvero $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $U \cap A = \{x_0\}$.

(2) oppure x_0 è un punto di accumulazione per A e vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



• ES: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Questa funzione è continua in ogni $x_0 \neq 0$, ma non in $x_0 = 0$, perchè non vale "$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(0) = 0$".

DEFINIZIONE: Se $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 $\forall x_0 \in A$, allora f si dice <u>continua</u>. Si scrive: $C^0(A) = \{ f: A \to \mathbb{R} : f \text{ è continua} \}$.

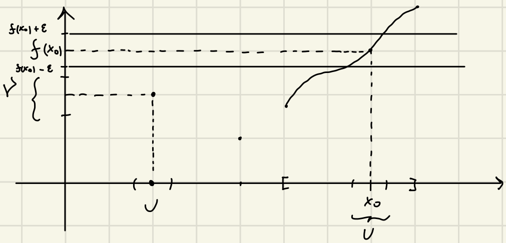
▶ Se f non è continua in x_0, diciamo che è <u>discontinua in x_0</u>. Diciamo che x_0 è un punto di discontinuità per f.

IMPORTANTE

↳ **OSSERVAZIONE:** Per parlare di continuità in x_0 serve che $x_0 \in$ dominio di f.
Ad esempio $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, è continua.
$f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

DEFINIZIONE: AFFERMATIVA:

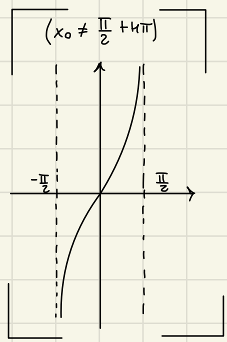
Sia $x_0 \in A =$ dominio di f. Allora f è continua in x_0 se e solo se $\forall\, V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap A$.



- Equivalentemente f è continua in x_0 se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in$ dominio di f t.c. $|x - x_0| < \delta$.

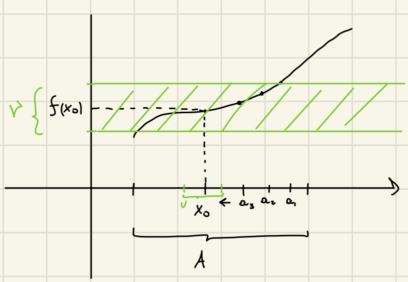
Abbiamo visto che "$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ $\forall P$ polinomio. Quindi:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \cos x &= \cos x_0 \\ \text{"} \quad \sin x &= \sin x_0 \\ \text{"} \quad \tan x &= \tan x_0 \\ \text{"} \quad a^x &= a^{x_0} \\ \text{"} \quad \ln x &= \ln x_0 \end{aligned}\right\} \text{Sono tutte funzioni continue.}$$



TEOREMA

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in$ dom. A e x_0 punto di accumulazione per A. Allora f è continua in x_0 <u>se e solo se</u> $\forall$ successione $\{a_n\} \subset A$, con $a_n \to x_0$, vale che: $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$.



ovvero che $\forall\, V$ intorno di $f(x_0)$, $\exists\, N$ t.c. $f(a_n) \in V$ $\forall n > N$. Dalla continuità di f, dato V, $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap A$.

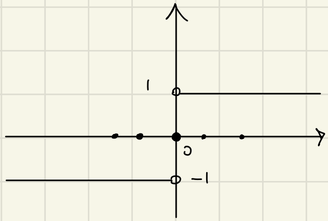
Poiché "$\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$", dato U intorno di x_0, $\exists\, N$ t.c. $a_n \in U$ $\forall n > N$. Quindi $f(a_n) \in V$

$\forall n > N$, quindi "$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$". ■

{Adesso andrebbe dimostrato che se f è discontinua in x_0, allora $\exists$ almeno una successione $a_n \to x_0$ con $a_n \in A$ t.c. non vale che "$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$".}

Facciamo solo un esempio:

$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Quindi: $a_n = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \to 0$.



$$f(a_n) = \mathrm{sgn}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Allora non vale:

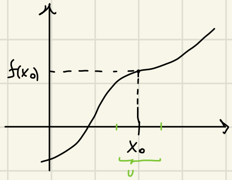
$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(0) = 0$ perché

$\lim_{n \to +\infty} f(a_n)$ non esiste. ■

▶ I Teoremi sui limiti ora diventano teoremi sulle funzioni continue.

TEOREMA: PERMANENZA DEL SEGNO

Sia f continua in x_0 con $f(x_0) > 0$. Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) > 0$, $\forall x \in U \cap A$.



TEOREMA

Se f e g sono continue in x_0, allora $f+g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$, sono continue in x_0 (nel caso di $\frac{f}{g}$ bisogna assumere "$g(x_0) \neq 0$").

TEOREMA

Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

• ES: $\dfrac{e^{\cos x}}{\ln x \cdot \tan x}$ è continua (in tutto il suo dominio).

TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, sia x_0 punto di accumulazione del dominio di $g \circ f$ e supponiamo:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

$e^y = e^0 = 1$

(b) g continua in y_0.

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y_0).$$

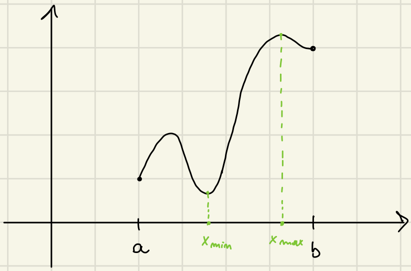
· ES: $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\sin x}{x}\to 0} = \lim_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f \in C^0([a,b])$, con $a<b$ e $a,b \in \mathbb{R}$. Allora f ha massimo e minimo, ovvero esistono "x_{min}" e "x_{max}" t.c.:

(1) $f(x_{min}) = \min_{[a,b]} f(x)$;

(2) $f(x_{max}) = \max_{[a,b]} f(x)$.



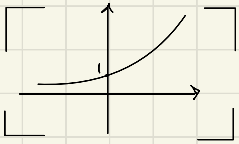
Ricordiamo che, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, esiste sempre l'estremo superiore di A ($\sup A$), ma non sempre esiste il massimo di A ($\max A$).

· ES: $A = (1,3)$, $\sup A = 3$; $\max A$ = non esiste.

· ES: $A = [0,+\infty)$, $\sup A = +\infty$; $\max A$ = non esiste.

▶ Allo stesso modo, se prendo $f: (1,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, allora $\sup_{(a,b)} f(x) = 3$, ma f non ha massimo. In modo simile, $\inf_{(a,b)} f(x) = 1$, ma f non ha minimo.
Qui f è continua ma l'intervallo (a,b) non è chiuso.

• ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

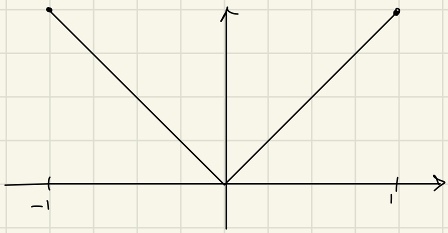


$\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 0$

$\inf\limits_{\mathbb{R}} f = 0$

ma in nessun punto la funzione e^x vale 0, oppure $+\infty$. Questa funzione non ha massimo né minimo.
Qui il problema è che il dominio è $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, che non è limitato.

• ES: $f(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} f = 1 = \sup\limits_{[-1,1]} f$. Però $\inf\limits_{[-1,1]} f = 0$, ma $\exists\, x \in [-1,1]$ t.c. $f(x) = 0$. Quindi

f non ha minimo. Il problema è che f non è continua.

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE

(1) Si costruisce una successione minimizzante, ovvero $\{a_n\} \subset [a,b]$ t.c. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \inf\limits_{[a,b]} f = I$.

(2) Non è detto che $\{a_n\}$ converga ⚠. Ma, poiché $[a,b]$ è limitato, anche $\{a_n\}$ è limitata, quindi per il teorema di Bolzano - Weierstrass $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione $\{a_{n'}\}$ convergente: $\lim\limits_{n' \to +\infty} a_{n'} = x_0$.

(3) Poiché $[a,b]$ è chiuso, si verifica che $x_0 \in [a,b]$.

(4) Per il teorema ponte sulle funzioni continue, $\lim\limits_{n' \to +\infty} f(a_{n'}) = f(x_0)$.

(5) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = I \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n' \to +\infty} f(a_{n'})}_{= f(x_0),\ \text{dal punto (4).}} = I \Rightarrow f(x_0) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Chiamo $x_0 = x_{min}$ e ho $f(x_{min}) = \inf\limits_{[a,b]} f(x) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. ■

Quindi $x_0 = x_{min}$ é un punto in cui l'estremo inferiore viene "assunto" o "realizzato".

ESERCIZI

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^4}$. Sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}.$$

Quindi: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\underset{\to-\infty}{n}}\right)^{n^4} \underset{(n=-m)}{=} \lim\limits_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{(-m)^4} =$

$$= \lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m^4} = \lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot m^3} = \lim_{m\to-\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]}_{\to e}^{m^3} = e^{-\infty} = 0.$$

(z) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)!-n!}{(3n^2+1)n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}-\cancel{n!}}{(3n^2+1)\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+2-1}{3n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\cancel{o(n^2)}}{3n^2+\cancel{o(n^2)}} = \frac{1}{3}.$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}+1}{\sqrt[4]{n}+2\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{2}}+1}{n^{\frac{1}{4}}+2n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{\frac{1}{2}}+o(\cancel{n^{\frac{1}{2}}})}{2n^{\frac{1}{2}}+o(\cancel{n^{\frac{1}{2}}})} = -\frac{1}{2}$$

(u) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{3n^2}\right)$. Usiamo l'espansione asintotica: $\sin x = x+o(x)$ per $x\to 0$.

Quindi: $\sin\frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{3n^2}\right)$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\cancel{n^2}\left(\frac{1}{3\cancel{n^2}}+o\left(\frac{1}{3\cancel{n^2}}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}+o(1) = \frac{1}{3}$$

Analogamente:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{3n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot 3n^2\sin\left(\frac{1}{3n^2}\right) \underset{\left(x=\frac{1}{3n^2}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}\cdot\sin x}^{\to 1} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

(w) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,\frac{1-e^{\frac{1}{2n}}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$. Espansione asintotica: $e^x = 1+x+o(x)$ per $x\to 0$ e $\sin x = x+o(x)$ per $x\to 0$. Quindi:

$$e^{\frac{1}{2n}} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right),\quad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi: $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\cancel{1}-(\cancel{1}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{2n}))}{\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cancel{\sqrt{n}}\,\frac{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}(1+o(1))} = \lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2n} = 0$$

- PER CASA: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{2n}}}{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = -\frac{1}{2}$.