Lezione 3

💡 Ripetendo, la relazione è l'insieme di coppie di oggetti. Per esempio quando pensiamo al < è l'insieme di tutte le coppie in cui il primo elemento è minore del secondo.

Chiusura transitiva

Data $R \subseteq A \times A$

$\overline{R}$ → la più piccola relazione transitiva e contiene R

La chiusura transitiva non sono gli oggetti che bisogna aggiungere, ma tutto quanto.

Es. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

→ $\overline{R} = \{(1, 2), (2, 3)\} \cup \{(1, 3)\}$

Es. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

→ $\overline{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \cup \{(1, 3), (2, 4), (1, 4)\}$

Funzioni

Le funzioni sono delle relazioni. Quando parliamo di funzioni parliamo di argomento e valore.

D = Dominio

C = Codominio

$f : D \implies C$ la si può vedere come → $f \subseteq D \times C$ → ovvero come un sotto insime di un prodotto cartesiano

$\exists!$ = Esiste un solo

→ $\forall d \in D \; \exists! \; c \in C$

Ovvero per ogni elemento deve esistere una sola e unica corrispondenza.

Tipi di funzione

Iniettiva

Una funzione è iniettiva quando non capita mai che da due argomenti si ottiene lo stesso valore

Esempio di non iniettiva:

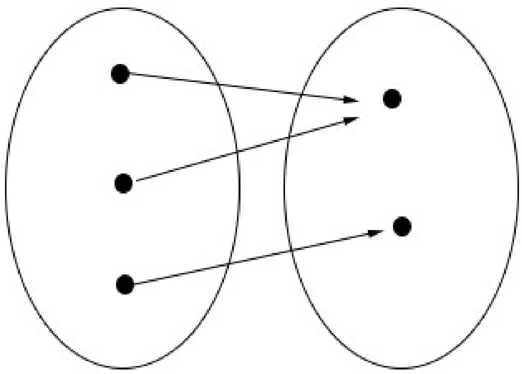
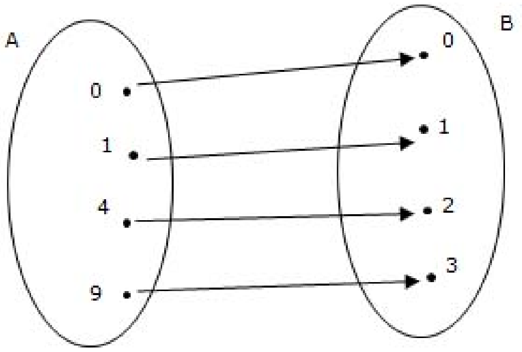


Figura 2

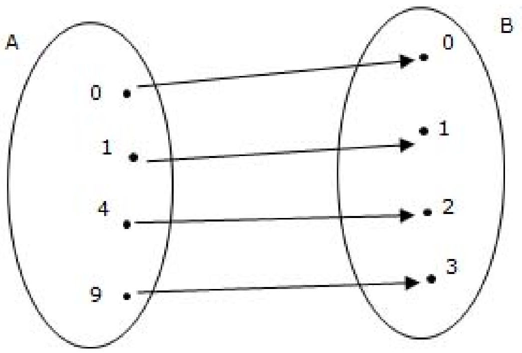
Suriettiva

Una funzione è suriettiva quando per ogni elemento di B c'è immagine di qualche elemento di A. Ovvero se esistono elementi di B che non hanno un'immagine di uno o più elementi di A allora non è suriettiva



Biettiva o corrispondenza biunivoca

Quando è iniettiva e suriettiva



Stessa cardinalità

Due insiemi hanno al stessa cardinalità quando hanno una corrispondenza biunivoca

es. $\mathbb{N} \supseteq P(pari)$

P è numerabile → Essere numerabile vuol dire essere in corrispondenza biunivoca , in questo caso, con l'insieme dei numeri naturali.

Numerabilità

Nella teoria degli insiemi, un insieme viene detto numerabile se i suoi elementi sono in numero finito oppure se possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

Esempi Numerabilità

$\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$ → é numerabile?

Per dimostrare se un'insieme è numerabile bisogna verificare se esiste una corrispondenza biunivoca. Ne basta trovarne una di corrispondenza biunivoca, una volta che ne troviamo una ce ne sono infinite.

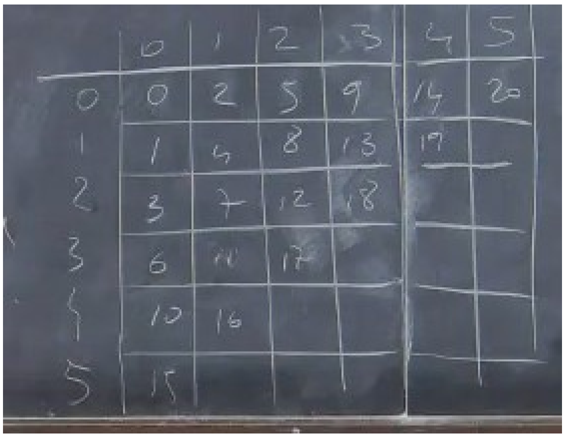
→ $\{(a, b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in A \text{ e } b = a + 4\}$ → $\{(0, 4), (1, 5), (2, 6), ...\}$

Esempio di dimostrazione che non funziona

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile?

→ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..\}$

→ Dimostrazione non funzionante di biunicità → $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$→ si ma se $\mathbb{N}$ è infinito (1,0) quando arriva? Non è possibile lasciare un oggetto infinitamente prolungato



Questo metodo (anche chiamato Coda di colomba o Dovetaking) dimostra che qualunque coppia di valore prima o poi arriva una corrispondenza biunivioca e non viene lasciato indietro.