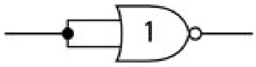
Lezione 8

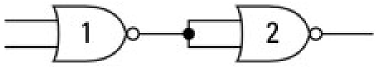
NOR - Universalità

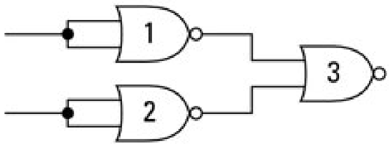
$\overline{a} = \overline{a + a}$

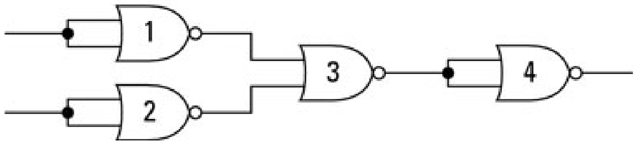
$a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a + b} + \overline{a + b}}$

$a * b = \overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{\overline{a + a} + \overline{b + b}}$

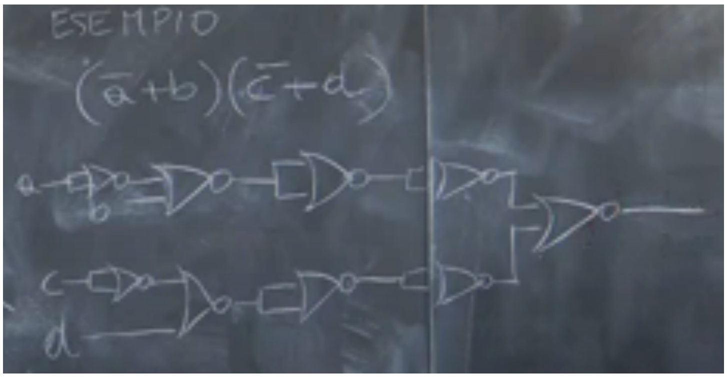
NOT 

OR 

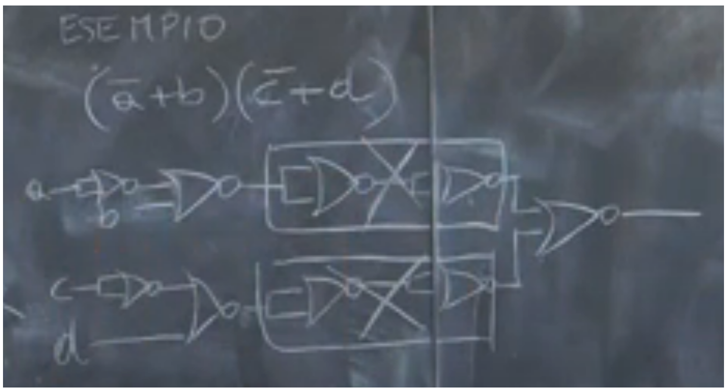
AND 

NAND 

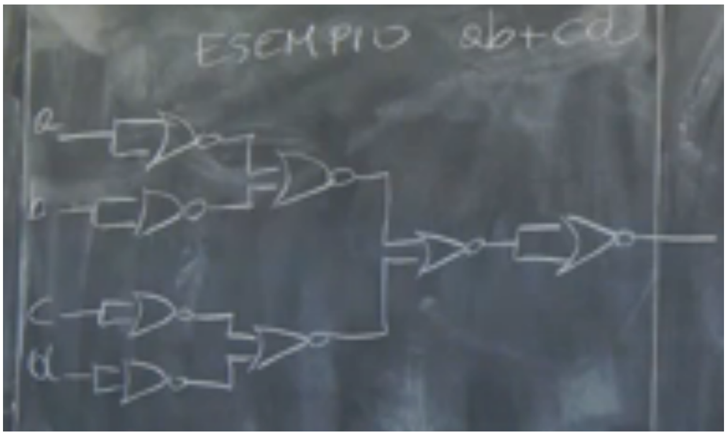
Esempio 1



Doppia negazione si può togliere



Esempio 2



> ⚠️ Come possiamo vedere abbiamo utilizzato 8 porte NOR.

Efficienza NAND o NOR

È efficiente utilizzare le NAND se partiamo utilizzando un'espressione SOP (Somma di prodotti) mentre è efficiente utilizzare le NOR se partiamo da un'espressione POS (Prodotti di somme)

Ricavare la tavola di verità da una specifica verbale

Esempio

Richiesta: f vale 1 se almeno metà delle variabili vale 1

Tavola della verità con 3 variabili

abc	f
000	0
001	0
010	0

abc	f
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

E da qui possiamo ricavarci la SOP o la POS in base a quanti 0 o 1 abbiamo, in questo caso il conteggio è 4 per entrambi e abbiamo la libertà di scelta.

Tavola della verità con 4 variabili

abcd	f
0000	0
0001	0
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	1
0111	1
1000	0
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	1
1110	1
1111	1

$f = M_0 * M_1 * M_2 * M_4 * M_8$ → POS dato che gli 0 sono minori

Forma canonica POS → $(a+b+c+d)(a+b+c+\overline{d})(a+b+\overline{c}+d)(a+\overline{b}+c+d)(\overline{a}+b+c+d)$

Esercizio completo

Input = $x_0, x_1, x_2 \in [0,7]$

$y = x - 2$ in ca2

Min numero di bit = 4

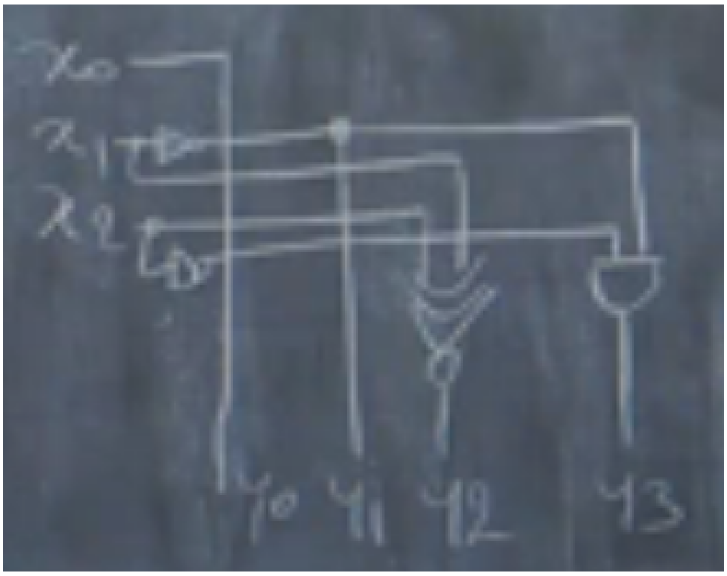
Tavola della verità

x0,x1,x2	Y3,Y2,Y1,Y0 (ca2)	Y (x-2)
000	1110	-2
001	1111	-1
010	0000	0
011	0001	1
100	0010	2
101	0011	3
110	0100	4
111	0101	5

Se notiamo:

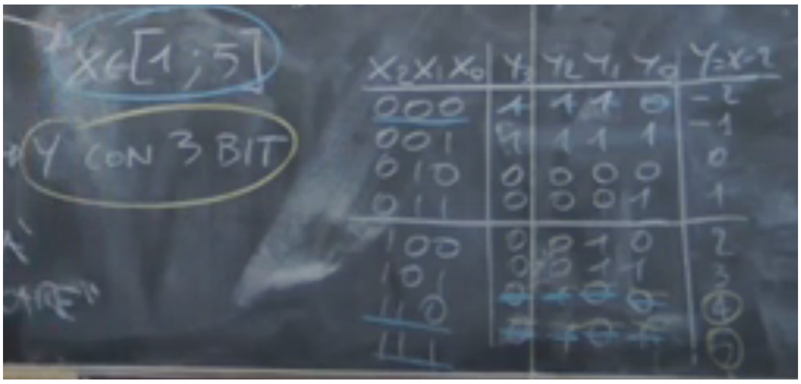
- $Y_0 = x_0$
- $Y_1 = \overline{x_1}$
- $Y_2 = \overline{x_2 \oplus x_1}$
- $Y_3 = \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0 + \overline{x}_2\overline{x}_1x_0$ = $\overline{x}_2\overline{x}_1(\overline{x}_0 + x_0) = \overline{x}_2\overline{x}_1$

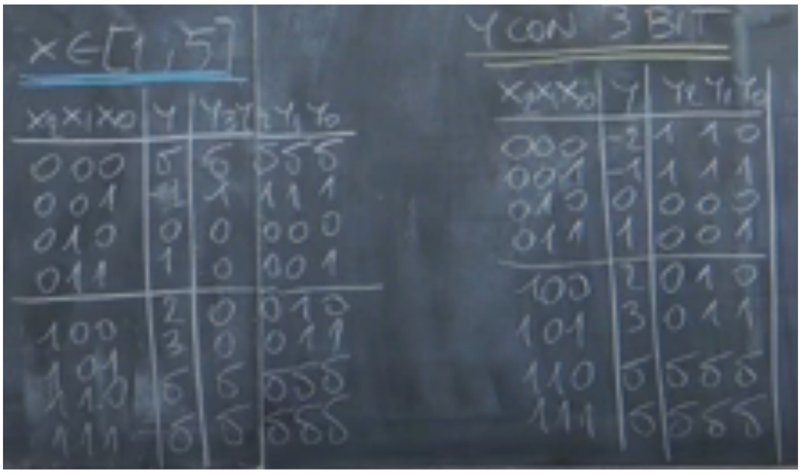
Ciò ci serve per costruire un circuito basato su una funzione



Funzioni non completamente specificate

- Non tutte le combinazioni in ingresso sono ammissibili
- Non è possibile esprimere tutti gli output
- Nella tavola di verità si scrive $\delta \rightarrow$ "Don't care"





Espressione minimale

Espressioni SOP → Circuiti AND-to-OR

Espressioni POS → Circuiti OR-to-AND

Criterio di ottimalità

- Una rete AND-to-OR (o OR-to-AND) è minimale se:
    1. Il numero minimo di porte AND (o OR)
    2. Il minimo numero di ingressi per ogni porta AND
- Una espressione SOP (POS) è mininale se:
    1. Contiene il nuemro minimo di prodotti(somme)
    2. Contiene il minimo numero di Letterali in ogni prodotto (somma)

es.

$$\overline{x}_2\overline{x}_1x_0 + \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0 = \overline{x}_2\overline{x}_1(\overline{x}_0 + x_0) = \overline{x}_2\overline{x}_1$$

Minimizzazione di espressioni booleane con le Mappe di Karnaugh (K-Mappe)

Vale solamente solamente fino a quattro variabili

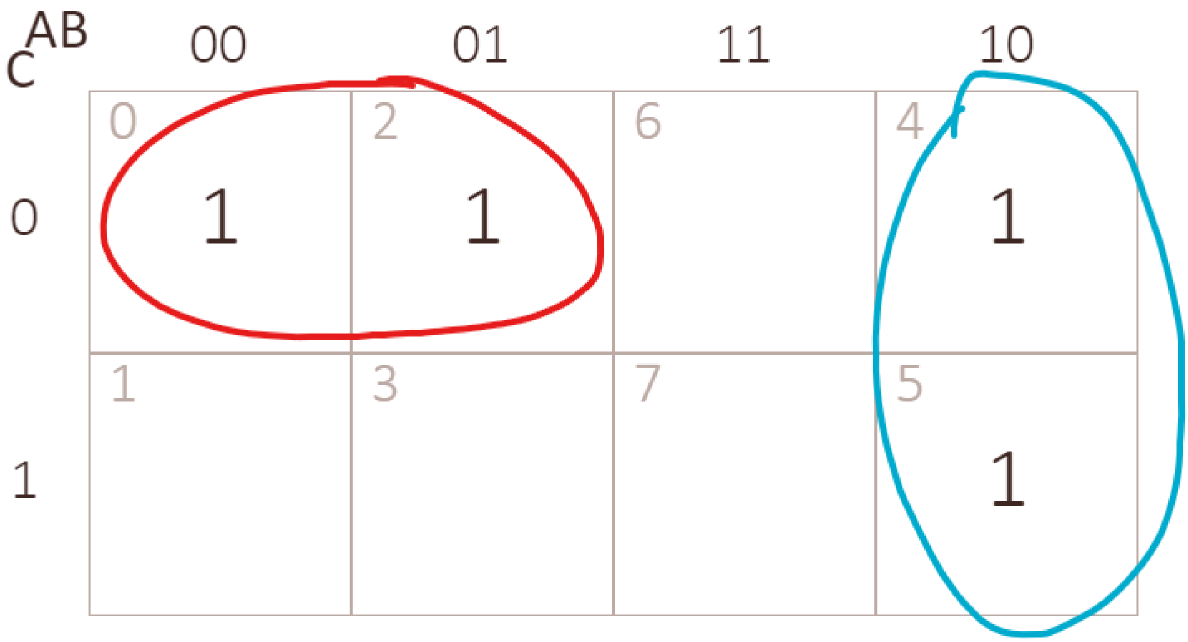
Esempio

Tavola della verità

abc	f
000	1
001	0
010	1
011	0
100	1
101	1
110	0
111	0

C \ AB	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6	4 1
1	1	3	7	5 1

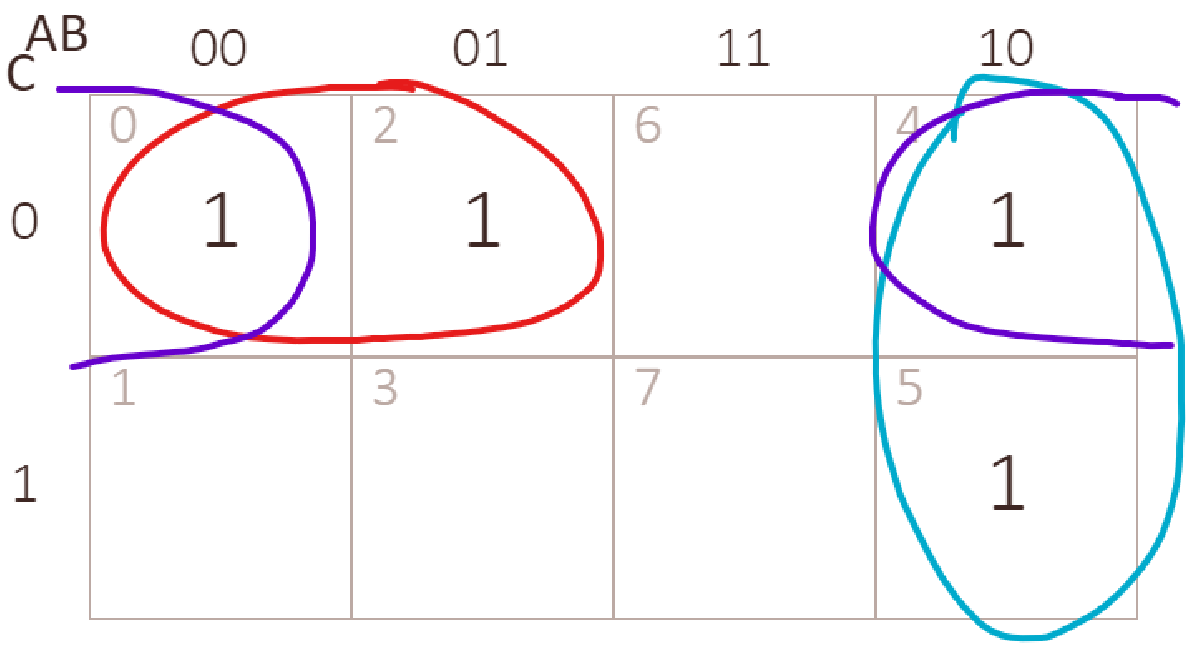
Possiamo unire gli 1 solo se essi siano adiacenti:



Bisogna scrivere le variabili che non cambiano quindi per il ROSSO scriviamo $\overline{a}\ \overline{c}$ (negati perchè sono uguali a 0). Sempre per i rosso avremmo $\overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} = \overline{a}\ \overline{c}$ senza il passaggio algebrico abbiamo subito ricavato il valore semplificato.

Mentre per il BLU avremo $a\overline{b}$

Però importante sapere che gli 1 si possono raccogliere anche in questo modo



Però se lo facciamo in questo caso esprimerei qualcosa che so già, ovvero esprimerei i mintermini che ho già nella mia espressione. Quindi non li prenderemo, come risultato avremo

→ $f = \overline{a}\,\overline{c} + a\overline{b}$

Procedura di minimizzazione

- Stendere la K-Mappa
- Per ogni 1 della Mappa determinare il cubo massimale (insieme di 1 adiacenti) che ha dimensione 2^i
- Se 1 è coperto da un solo cubo si include il termine corrispondente nell'espressione
- Si determina l'insieme minimale di cubi
- Si scrive l'espressione corrispondente

Funzione di maggioranza a 4 variabili

Tavola della verità con 4 variabili

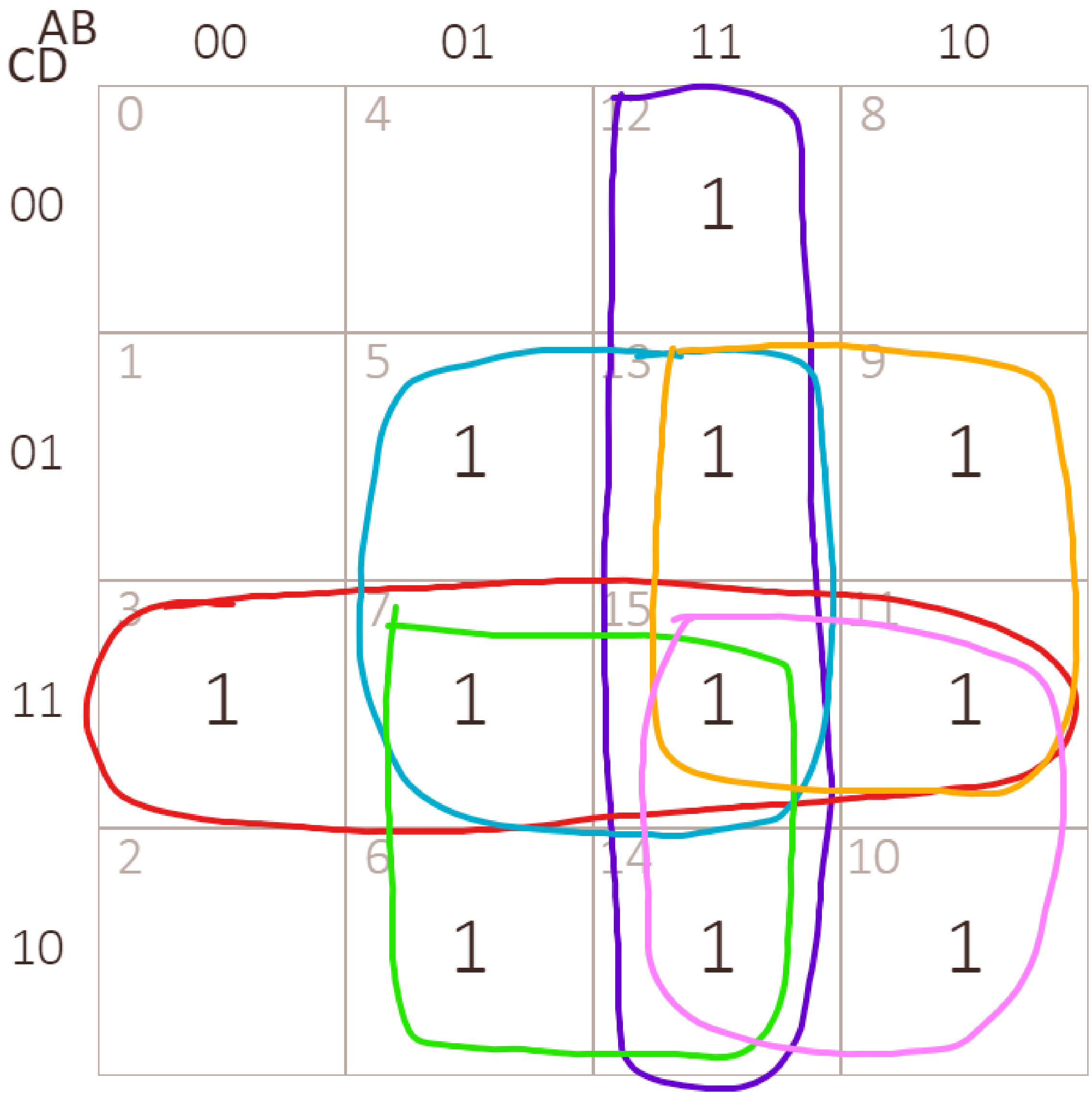
abcd	f
0000	0
0001	0
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	1
0111	1
1000	0
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	1
1110	1

abcd	f
1111	1

Avremo come mappa

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12 1	8
01	1	5 1	13 1	9 1
11	3 1	7 1	15 1	11 1
10	2	6 1	14 1	10 1

Se prendiamo gli uno adiacenti avremo



> 💡 È importante se possibile prendere un cubo di quattro 1 (ed avremo due variabili) piuttosto che due 1 (che invece ne avremo 3) o addirittura un 1 singolo (e avremo 4 variabili) .Con il cubo andiamo a massimizzare di più, in questo modo ottengo la funzione minima

Quindi avremo: $f = cd + ab + bd + bc + ad + ac$ → Minimale SOP

Esempio cubo adiacente

È possibile prendere il cubo in questo modo

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	4	12	8 1
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2 1	6	14	10 1