Marius Grigoroiu

2108656

Compito n. 46

Vero/Falso	**16**
Aperte	**13**
Voto	**29**

Risposte del vero/falso:

F V V V F V V F V V F V V F V F

Punteggio delle domande aperte:

5A) 0 **5B)** 2 **5C)** 2 **5D)** 1 **6A)** 2 **6B)** 2 **6C)** 2 **6D)** 2

Calcolo differenziale — Primo compito di esonero
13 Novembre 2023 — Compito n. 00046

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Marius

Cognome: Grigoroiu

Matricola: 2108656

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V		X	X	X		X	X		X	X		X	X		X	
F	X				X			X			X			X		X
C																

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 36\}.$$

1A) L'insieme E è un intervallo.
1B) L'insieme E non è limitato.
1C) Non esiste il massimo di $F = E \cap [0, +\infty)$.
1D) Non esiste il massimo di $G = E \setminus [10, +\infty)$.

2) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(\sqrt{x-6})$ è $\{x \geq 6\}$.
2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-3}{x\,(x^2-14x+48)}$ è $\{x \neq 0\,,\ x \neq 6\,,\ x \neq 8\}$.
2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{(x-4)\,(x-7)}$ è $(-\infty, 4] \cup [7, +\infty)$.
2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[2]{\log(x-9)}$ è $\{x > 9\}$.

3) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1 + \frac{n^6}{3^n+4}\right) = 0\,.$$

3B)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{11^n+n^2}} = \frac{5}{11}\,.$$

3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\,3^n}{n!} = +\infty\,.$$

3D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{7}{n!}\right)^{3^n} = 1\,.$$

4) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{4}{n^4}\right) = 0\,.$$

4B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{4}{n}} - 1\right)^2}{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 4\,.$$

4C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{1 - \cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{8}{25}\,.$$

4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n^6}\left(e^{\frac{3}{6^n}} - 1\right) = 3\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

Cognome Grigoroiu Nome Marius Matricola 2408656 Compito 00046

5) Siano

$$a_n = \frac{3^n}{3^n+7}, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad f(x) = \log\left(\frac{x-6}{10-x}\right).$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona crescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio dom(f) della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme dom(f), specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Dato l'insieme E composto dagli elementi a_n per ogni $n \in \mathbb{N}$:

Dimostriamo che $a_n \nearrow$ sapendo che $a_n < a_{n+1}$:

a_0 (primo elem. della ~~1° insieme~~ successione) $= \frac{1}{8}$ $\quad a_1 = \frac{3}{10} \quad \frac{1}{8} < \frac{3}{10}$

non basta a dim che $a_n \nearrow$

inoltre, $a_0 < \lim_{n\to+\infty} a_n$: $a_0 = \frac{1}{8} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ ok

L'estremo superiore ~~dell'insieme~~ della successione crescente monotona sarà il limite di $n(\in\mathbb{N})$ che tende ad infinito:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3^n}{3^n+7} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n} \to 1 \qquad \sup(E) = 1$ ok

sup(E) non è massimo, perché a_n tende a 1, non c'è alcun elem. nell'insieme equivalente a 1. ok

inf(E) è uguale ad a_0 : $\inf(E) = \frac{1}{8}$ ok

inf(E) = min(E) perché a_0 è un elem. dell'insieme ok

Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x-6}{10-x}\right)$, sappiamo che $\frac{x-6}{10-x} > 0$, dividendo il dominio in due casi diversi:

$$\begin{cases} x-6>0 \\ 10-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>6 \\ x<10 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x-6<0 \\ 10-x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x>6}\ x<6 \\ x>10 \end{cases}$$

	6	10
+	+	
+	−	
+	−	

$\Rightarrow 6 < x < 10$

	6	10	
N	+	−	−
D	−	−	+
N/D		+	−

$\Rightarrow 6 < x < 10$

In entrambi i casi l'intervallo ~~che~~ sarà $6<x<10 = (6,10)$

In più, sappiamo che $10-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 10$, data la sottofunzione $\frac{x-6}{10-x}$, ma poco conta dato che $10 \notin (6,10)$

$\text{dom}(f(x)) = (6,10)$

ok

1) $\inf(E) = \lim_{x\to 6} f(x) = \frac{6-6}{10-6} \Rightarrow 0$

$\sup(E) = \lim_{x\to 10} f(x) = \frac{10-6}{10-10} = \frac{4}{0} \longrightarrow +\infty$ (quando $10-x=0^+$)

no $\underset{\parallel}{6}$ $\underset{\parallel}{10}$ inf e sup del dominio! non di f

$\inf(E)$ non può essere il minimo e $\sup(E)$ non può essere il massimo perché $x=6 \notin E$ e $x=10 \notin E$

☐☐☐☐☐☐☐☐ Cognome Grigoroiu Nome Marius Matricola 2408656 Compito 00046

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to+\infty} n\left[\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}\right], \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^6}{n!+n^{11}},$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4-6}, \qquad \text{d)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\log^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\arctan^3\left(\frac{5}{n}\right)}.$$

---

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}\right] = \lim \ldots\ n\,\dfrac{\left(\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}\right)\left(\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9}\right)}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9}} =$

$= n \ldots n\,\dfrac{\cancel{(n^2+9)(n^2-9)}\ (n^2+9)-(n^2-9)}{\sqrt{n^2}\left(\sqrt{1+9/n^2}+\sqrt{1-9/n^2}\right)} \sim \lim\limits_{n\to+\infty} n\,\dfrac{18}{\sqrt{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{18n}{2n} \to \cancel{18}\quad 9$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+n^6}{n!+n^{11}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n\left(1+\frac{n^6}{3^n}\right)}{n!\left(1+\frac{n^{11}}{n!}\right)} = \dfrac{3^n}{n!} \to 0$ ok

(3^n annulla n^6
$n!$ annulla n^{11})

$n!$ annulla 3^n

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{9}{n^4+5}\right)^{n^4-6}$

sapendo che $\left(1-\dfrac{9}{a_n}\right)^{a_n} \to e^{\overset{A}{a_n}}$ (se $a_n\to+\infty$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \left[\left(1-\dfrac{9}{n^4+5}\right)^{n^4+5}\right]^{\frac{n^4-6}{n^4+5}}$ $\underset{\sim}{\ }$ $\left(\dfrac{n^4-6}{n^4+5}\to 1\right)$ $\cancel{\underline{\pi}}\ \underset{\sim}{\ }$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{9}{n^4+5}\right)^{n^4+5}\right]^1 \to$

$\to e^{-9}$ ok

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(2/n)\log^2(1+5/n)}{\arctan^3(5/n)}$

sapendo che (se $a_n \to 0$): $\dfrac{\text{sen}(a_n)}{a_n} \to 1$, $\dfrac{\log(1+a_n)}{a_n} \to 1$

$\dfrac{\arctan(a_n)}{a_n} \to 1$ (di conseguenza, $\dfrac{a_n}{\arctan(a_n)} \to 1$)

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2/n}{2/n}\,\frac{(5/n)^5}{(5/n)^5}\,\frac{\sin(2/n)\log^2(1+5/n)}{\arctan^3(5/n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin(2/n)}{2/n}\,\frac{\log^2(1+5/n)}{(5/n)^2}\,\frac{(5/n)^3}{\arctan^3(5/n)}}_{\downarrow\ 1}\,\frac{(5/n)^2}{(5/n)^3}\cdot\frac{2}{n} \sim$$

$$\sim \lim_{n\to+\infty} \frac{(5/n)^2}{(5/n)^3}\,\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{50/n^3}{125/n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{50}{\cancel{n^3}}\cdot\frac{\cancel{n^3}}{125} \to \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$$

ok

Soluzioni del compito 00046

1) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 36\}\,.$$

Risolvendo la disequazione $x^2 \geq 36$ si ha che deve essere $x \geq 6$, oppure $x \leq -6$. Pertanto,
$$E = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)\,. \tag{1}$$

1A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Dalla (1) segue che E non è un intervallo, e che è l'unione di due intervalli disgiunti.

1B) L'insieme E non è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che E è illimitato, sia superiormente che inferiormente.

1C) Non esiste il massimo di $F = E \cap [0, +\infty)$.

Vero: Dalla (1) si ha che
$$F = ((-\infty, -6] \cup [6, +\infty)) \cap [0, +\infty) = [6, +\infty)\,.$$
Dato che F è illimitato superiormente, il suo estremo superiore è $+\infty$, e quindi il massimo di F non esiste.

1D) Non esiste il massimo di $G = E \setminus [10, +\infty)$.

Vero: Dalla (1) si ha
$$G = ((-\infty, -6] \cup [6, +\infty)) \setminus [10, +\infty) = (-\infty, -6] \cup [6, 10)\,.$$
Si ha quindi che l'estremo superiore di G è $S = 10$; dato che S non appartiene a G, non esiste il massimo di G.

---

2) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(\sqrt{x-6})$ è $\{x \geq 6\}$.

Falso: Affinché il logaritmo sia definito, deve essere definito e positivo il suo argomento. Affinché il suo argomento $f_1(x) = \sqrt{x-6}$ sia ben definito e positivo, deve essere $x - 6 > 0$, ovvero $x > 6$. Ne segue che

$$\mathrm{dom}(f) = \{x > 6\} \neq \{x \geq 6\}\,.$$

2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-3}{x\,(x^2 - 14x + 48)}$ è $\{x \neq 0\,,\ x \neq 6\,,\ x \neq 8\}$.

Vero: Affinché la funzione $g(x)$ sia definita, il denominatore deve essere diverso da zero. Si ha

$$g_2(x) = x\,(x^2 - 14x + 48) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \neq 0\,,\ x^2 - 14x + 48 \neq 0\,.$$

Dato che $x^2 - 14x + 48 = 0$ per $x = 6$ e $x = 8$, si ha

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \neq 0\,,\ x \neq 6\,,\ x \neq 8\}\,.$$

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{(x-4)\,(x-7)}$ è $(-\infty, 4] \cup [7, +\infty)$.

Vero: Affinché la radice sia definita, deve essere positivo il suo argomento

$$h_1(x) = (x-4)\,(x-7)\,.$$

Risolvendo la disequazione $h_1(x) \geq 0$ si trova che deve essere $x \leq 4$, ovvero $x \geq 7$. Pertanto,

$$\mathrm{dom}(h) = (-\infty, 4] \cup [7, +\infty)\,.$$

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[2]{\log(x-9)}$ è $\{x > 9\}$.

Falso: Affinché la radice sia definita, deve essere positivo l'argomento del logaritmo (e quindi $x > 9$) e inoltre deve essere

$$\log(x-9) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\log(x-9)} \geq \mathrm{e}^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 9 \geq 1\,,$$

da cui segue che

$$\mathrm{dom}(k) = \{x \geq 10\} \neq \{x > 9\}\,.$$

---

3) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{n^6}{3^n+4}\right) = 0\,.$$

Vero: Per la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{3^n+4} = 0\,.$$

Pertanto, ricordando che $\log(1+b_n)$ tende a zero se b_n tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{n^6}{3^n+4}\right) = 0\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{11^n+n^2}} = \frac{5}{11}\,.$$

Vero: Si ha

$$\frac{5^n}{11^n+n^2} = \frac{5^n}{11^n}\,\frac{1}{1+\frac{n^2}{11^n}}\,,$$

e quindi

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{11^n+n^2}} = \frac{5}{11}\,\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{n^2}{11^n}}} = \frac{5}{11}\left(\frac{1}{1+\frac{n^2}{11^n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dato che $n^2/11^n$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{11^n+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{11}\left(\frac{1}{1+\frac{n^2}{11^n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{5}{11}\cdot 1^0 = \frac{5}{11}\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\,3^n}{n!} = +\infty\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{n^4\,3^n}{n!} = \frac{n^4}{3^n}\,\frac{3^n\cdot 3^n}{n!} = \frac{n^4}{3^n}\,\frac{9^n}{n!}\,.$$

Dato che sia $n^4/3^n$ che $9^n/n!$ tendono a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\,3^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{3^n}\,\frac{9^n}{n!} = 0\cdot 0 = 0 \neq +\infty\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n!}\right)^{3^n} = 1\,.$$

Vero: Si ha

$$\left(1+\frac{7}{n!}\right)^{3^n} = \left[\left(1+\frac{7}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{3^n}{n!}}.$$

Ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n!}\right)^{n!} = \mathrm{e}^7\,,$$

e che $3^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n!}\right)^{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{7}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{3^n}{n!}} = [\mathrm{e}^7]^0 = 1\,.$$

4) Si dica se i seguenti risultati sono veri o falsi.

4A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{4}{n^4}\right) = 0\,.$$

Vero: Ricordando che se a_n tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

scriviamo

$$n^3 \sin\left(\frac{4}{n^4}\right) = n^3\,\frac{4}{n^4}\,\frac{\sin\left(\frac{4}{n^4}\right)}{\frac{4}{n^4}} = \frac{4}{n}\,\frac{\sin\left(\frac{4}{n^4}\right)}{\frac{4}{n^4}}\,.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{4}{n^4}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\,\frac{\sin\left(\frac{4}{n^4}\right)}{\frac{4}{n^4}} = 0\cdot 1 = 0\,.$$

4B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1\right)^2}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 4\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1\,,$$

scriviamo

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1\right)^2}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1\right)^2}{\left(\frac{4}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}\,\frac{\frac{1}{n^2}}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 16\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1}{\frac{4}{n}}\right)^2 \frac{\frac{1}{n^2}}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1\right)^2}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 16\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{4}{n}}-1}{\frac{4}{n}}\right)^2 \frac{\frac{1}{n^2}}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 16\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1} = 16 \neq 4\,.$$

4C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{8}{25}\,.$$

Vero: Ricordando che se a_n tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

scriviamo

$$\frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{\frac{4}{n^8}}\,\frac{\frac{4}{n^8}}{\left(\frac{5}{n^4}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{5}{n^4}\right)^2}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{4}{25}\,\frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{\frac{4}{n^8}}\,\frac{\left(\frac{5}{n^4}\right)^2}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{25}\,\frac{\tan\left(\frac{4}{n^8}\right)}{\frac{4}{n^8}}\,\frac{\left(\frac{5}{n^4}\right)^2}{1-\cos\left(\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{4}{25}\cdot 1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{25}\,.$$

4D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n^6}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1\right) = 3\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n} = 1\,,$$

scriviamo

$$\frac{6^n}{n^6}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1\right) = \frac{6^n}{n^6}\,\frac{3}{6^n}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1}{\frac{3}{6^n}} = \frac{3}{n^6}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1}{\frac{3}{6^n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n^6}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^6}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{6^n}}-1}{\frac{3}{6^n}} = 0\cdot 1 = 0 \neq 3\,.$$

---

5) Siano

$$a_n = \frac{3^n}{3^n+7}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log\left(\frac{x-6}{10-x}\right).$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona crescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Soluzione:
a) Si ha

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+7} \geq \frac{3^n}{3^n+7}$$

che è equivalente a

$$3^{n+1}\,(3^n+7) \geq 3^n\,(3^{n+1}+7)\,.$$

Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere

$$3^{2n+1} + 7\cdot 3^{n+1} \geq 3^{2n+1} + 7\cdot 3^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7\cdot 3^{n+1} \geq 7\cdot 3^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \geq 1\,,$$

che è vero. La successione a_n è quindi monotona crescente.
Analogamente, si poteva osservare che

$$\begin{aligned} a_n = \frac{3^n}{3^n+7} = \frac{3^n+7-7}{3^n+7} &= 1 - \frac{7}{3^n+7} \leq 1 - \frac{7}{3^{n+1}+7} = \frac{3^{n+1}+7-7}{3^{n+1}+7} \\ &= \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+7} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione a_n è monotona crescente, si ha

$$\inf(E) = \min(E) = a_0 = \frac{1}{8}\,,$$

e

$$\sup(E) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n}\,\frac{1}{1+\frac{7}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{7}{3^n}} = \frac{1}{1+0} = 1\,.$$

L'estremo inferiore non è un massimo dato che non esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. Infatti

$$a_n = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3^n}{3^n+7} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3^n = 3^n + 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7 = 0\,,$$

che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è definito e positivo; deve quindi essere

$$\frac{x-6}{10-x} > 0\,, \quad x \neq 10\,.$$

Risolviamo la disequazione studiando il segno dei due fattori: si ha $x - 6 > 0$ se e solo se $x > 6$, e $10 - x > 0$ se e solo se $x < 10$. Abbiamo quindi questo schema:

		6		10	
$x-6>0$	$-$		$+$		$+$
$10-x>0$	$+$		$+$		$-$
segno	$-$		$+$		$-$

da cui segue che

$$\mathrm{dom}(f) = (6, 10)\,.$$

d) Dato che $\mathrm{dom}(f) = (6, 10)$, si ha

$$\sup(\mathrm{dom}(f)) = 10\,, \qquad \inf(\mathrm{dom}(f)) = 6\,,$$

che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 10 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 6 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}]\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^6}{n!+n^{11}}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4-6}, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\log^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\arctan^3\left(\frac{5}{n}\right)}\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9} = \frac{(\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9})\,(\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9})}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9}} = \frac{n^2+9-(n^2-9)}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9}}\,,$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9} = \frac{18}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-9}}\,.$$

Mettendo in evidenza n^2 al denominatore (ed osservando che $\sqrt{n^2}=n$ dato che $n>0$), si ha

$$\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9} = \frac{18}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+9/n}+\sqrt{1-9/n}}\,.$$

Si ha pertanto

$$n\,[\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}] = n\,\frac{18}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+9/n}+\sqrt{1-9/n}} = \frac{18}{\sqrt{1+9/n}+\sqrt{1-9/n}}\,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-9}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{18}{\sqrt{1+9/n}+\sqrt{1-9/n}} = \frac{18}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 9\,.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza 3^n al numeratore e $n!$ al denominatore. Si ha

$$\frac{3^n+n^6}{n!+n^{11}} = \frac{3^n}{n!}\,\frac{1+\frac{n^6}{3^n}}{1+\frac{n^{11}}{n!}}\,.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{3^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{11}}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^6}{n!+n^{11}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!}\,\frac{1+\frac{n^6}{3^n}}{1+\frac{n^{11}}{n!}} = 0\cdot\frac{1+0}{1+0} = 0\,.$$

c) Ricordando che se a_n è una successione divergente a più infinito, e se A è un numero reale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}^A\,,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4-6} = \left[\left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4+5}\right]^{\frac{n^4-6}{n^4+5}}.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-6}{n^4+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot n^4-6}{1\cdot n^4+5} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4-6} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1-\frac{9}{n^4+5}\right)^{n^4+5}\right]^{\frac{n^4-6}{n^4+5}} = [\mathrm{e}^{-9}]^1 = \mathrm{e}^{-9}\,.$$

d) Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(a_n)}{a_n}=1\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n}=1\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(a_n)}{a_n}=1\,,$$

scriviamo

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\,\log^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\arctan^3\left(\frac{5}{n}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\,\log^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^2}\,\frac{\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^2}{\left(\frac{5}{n}\right)^3}\,\frac{\left(\frac{5}{n}\right)^3}{\arctan^3\left(\frac{5}{n}\right)}\\ &= \frac{2}{5}\,\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\left(\frac{\log\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\frac{5}{n}}\right)^2\left(\frac{\frac{5}{n}}{\arctan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^3.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\,\log^2\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\arctan^3\left(\frac{5}{n}\right)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{5}\,\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\left(\frac{\log\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\frac{5}{n}}\right)^2\left(\frac{\frac{5}{n}}{\arctan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^3\\ &= \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1^2\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^3=\frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$