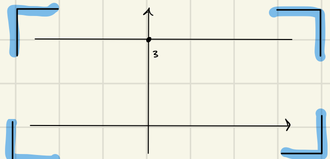
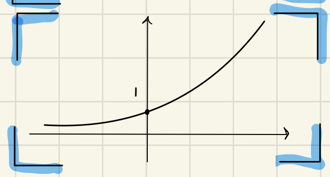
Lunedì 15/11/2021

CALCOLO DIFFERENZIALE

- La DERIVATA di una funzione è la velocità con cui cambia il valore della funzione al variare della variabile dipendente.



- ES 1: $f(x) = 3$. $f(x)$ non varia al variare di x e la sua derivata sarà zero.

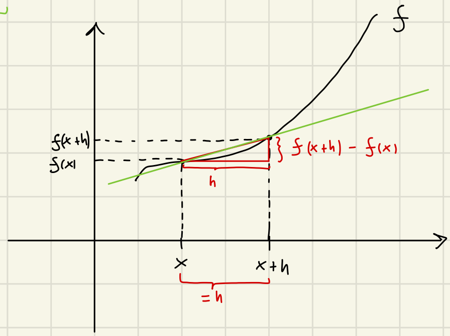


- ES 2: $f(x) = e^x$. Se sposto x verso destra, $f(x)$ cresce e la sua derivata sarà > 0

- ES 3: $f(x) = \sin x$. Il valore di $f(x)$ un po' sale e un po' scende. La sua derivata sarà un po' positiva, un po' negativa.

- Per misurare quanto la funzione cresce o decresce usiamo i rapporti incrementali.

▶ Dato $x \in$ dominio f, $h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in$ dominio f, chiamo rapporto incrementale la quantità: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{\underbrace{(x+h) - x}_{=h}}$.



" $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ è la pendenza della "retta secante" che passa per i punti $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$. Se questa pendenza è positiva, f è crescente.

Per eliminare la dipendenza dal valore dell'incremento h, si prende il limite per h che tende a zero.

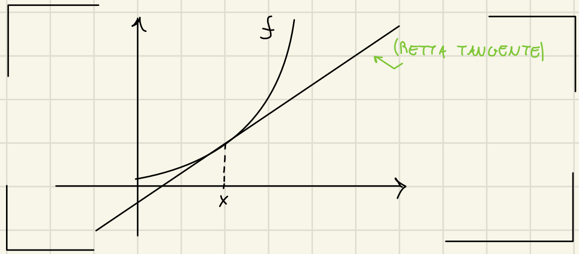
DEFINIZIONE

Data $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x punto interno di A (cioè $\exists\, U$ intorno di x contenuto in A) definiamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

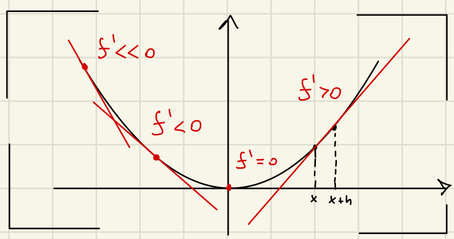
e lo chiamiamo "derivata di f in x".

- $f'(x)$ è la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$.



OSSERVAZIONE 1: Non è detto che la derivata esista (però nelle applicazioni in genere sì).

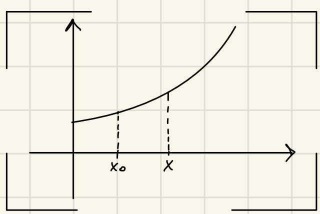
ES: $f(x) = x^2$.



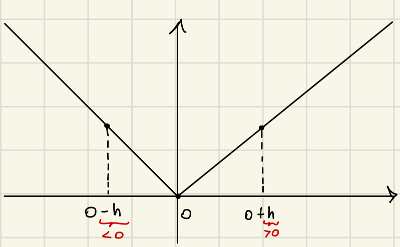
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x.$$

OSSERVAZIONE 2: Come notazione si può anche scrivere x_0 al posto di x e x al posto di "$x+h$" e si scrive: $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



ES: $f(x) = |x|$. $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ ← NON ESISTE.



Infatti, $\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$.

DEFINIZIONE

Se "$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$" esiste, diciamo che la funzione è derivabile in x (e il valore del limite è la derivata $f'(x)$), mentre se il limite non esiste diciamo che f non è derivabile in x.

OSSERVAZIONE 3: Data $f(x)$, per ogni x (punto interno del dominio) posso calcolare $f'(x)$. Quindi $f'(x)$ è una funzione che dipende da x. (ESEMPIO: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$). Si chiama derivata perché si ottiene (deriva) dalla funzione f.

CALCOLO DI ALCUNE DERIVATE IMPORTANTI

(1) $f(x) = x^n$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (*)$$

Ricordiamo il Binomio di Newton:

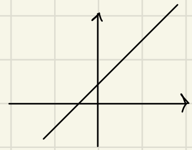
$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-1} b^i.$$

Inoltre: $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$. Quindi abbiamo che:

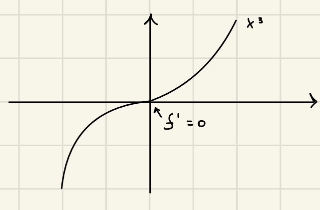
$$(*) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-1} h^i - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{(1\cdot x^n \cdot h^0)} + n\cdot x^{n-1} h + \underbrace{o(h)}_{=\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i} x^{n-i} h^i} - \cancel{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{n x^{n-1} h + o(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{n x^{n-1} \cancel{h}}{\cancel{h}} + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\to 0} \right) = n x^{n-1}.$$

$\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Per $n=1$, $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$.



• ES: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Graficamente:



NOTAZIONE: Si scrive anche "$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$.

$\{\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2\}$

• ES: $\frac{d}{dx} \sin x := \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = (**)$. Ricordo che:

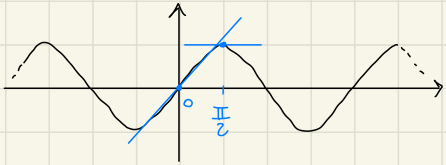
(α) $\lim_{h\to 0} \frac{\cosh - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{h}{h} = 0.$ ($h \to 0$)

(β) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, ottengo che:

$(**) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} =$

$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$.

$\Rightarrow f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$.



(•) $\frac{d}{dx} \sin(0) = \cos(0) = 1$

(•) $\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

• ES: $\frac{d}{dx} \cos x := \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$. Ricordiamo la formula di addizione del coseno:

(•) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$.

Quindi:

$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h + \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right) =$

$= -\sin x$.

$\Rightarrow f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$.

$(e^{a+b} = e^a \cdot e^b)$

• ES: $\frac{d}{dx} e^x := \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \cancel{\frac{e^h - 1}{h}}^{\,1} = e^x$

$\Rightarrow f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$.

ES: Per $a \neq e$, $\dfrac{d}{dx} a^x = \dfrac{d}{dx} e^{\ln a^x} = \dfrac{d}{dx} e^{x \ln a} = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^{(x+h)\ln a} - e^{x \ln a}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x\ln a} \cdot e^{h \ln a} - e^{x \ln a}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x \ln a} \left(\frac{e^{h \ln a} - 1}{h} \right) = \lim_{h \to 0} e^{x \ln a} \overbrace{\frac{e^{h\ln a} - 1}{h \ln a}}^{\to 1} \cdot \ln a =$$

(EFFETTUO UN CAMBIO DI VARIABILE, $y = h \ln a \to 0$.)

$$= e^{x \ln a} \cdot 1 \cdot \ln a = e^{\ln a^x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$\Rightarrow f(x) = a^x$, con $a \neq e$; $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

(MOLTO SIMILE AL LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$)

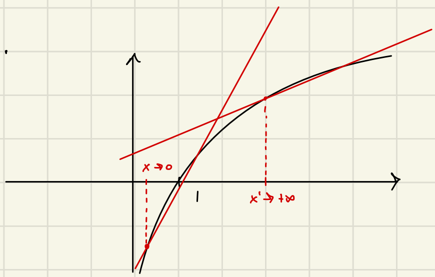
$(\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b}))$

ES: $\dfrac{d}{dx} \ln x := \lim_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = (*)$.

Poiché x è fissato, $h \to 0$, potrei avere che "$y = \frac{h}{x} \to 0$". Quindi:

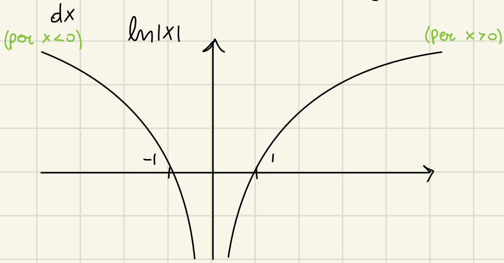
$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} \underset{\left(y = \frac{h}{x}\right)}{=} \lim_{y \to 0} \cancel{\frac{\ln(1+y)}{y}}^{\,1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

$\Rightarrow f(x) = \ln x$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.



(ESTENSIONE)

ES: $\dfrac{d}{dx} \ln|x|$. Osserviamo che:



Quindi, per $x < 0$, otteniamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln|\overbrace{x+h}^{<0}| - \ln|\overbrace{x}^{<0}|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(-x-h) - \ln(-x)}{h}$$

$\{$DA: $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}\}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{-x-h}{-x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}.$$

ES: $\dfrac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\forall x > 0$, con $\alpha \neq 0$. Questo lo vedremo.

▶ Ora sappiamo calcolare:

(1) $\dfrac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

(2) $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(Guarda dopo per "$\tan x$" e "$\cotan x$")

(3) $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(4) $\dfrac{d}{dx} = e^x = e^x$ $\left(\dfrac{d}{dx} a^x, \text{ con } a \neq e = a^x \cdot \ln a \right)$

(5) $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$

(6) $\frac{d}{dx} |x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

TEOREMA

Siano f, g due funzioni derivabili in x. Allora anche "$f+g$" e "$f \cdot g$" sono derivabili in x e vale:

(1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Se $g(x) \neq 0$, allora anche "$\frac{f}{g}$" è derivabile in x e vale:

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\frac{d}{dx} f(x) + g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h) - (f(x)+g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$

$= f'(x) + g'(x).$ ■

(Formula di Leibnitz)

(2) $\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}^{\text{(AGGIUNGO E SOTTRAGGO)}} - f(x)g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot g(x+\cancel{h}^{\,0}) + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$ ■

• ES: $\frac{d}{dx} \cos x \cdot e^x = -\sin x \cdot e^x + \cos x \, e^x.$

• ES: $\frac{d}{dx} = \ln x \cdot x^3 = \frac{1}{x} \cdot x^3 + \ln x \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2 \ln x = x^2(1+3\ln x).$

(3) $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}$. ② Osservo che: $g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1$. Prendo la derivata di ambo i membri e applico la regola (2):

$$1 = g(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \Rightarrow \overbrace{\frac{d}{dx}1}^{=0} = \frac{d}{dx}\left(g(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) \overset{\{\text{UTILIZZO LA (2)}\}}{\Rightarrow} 0 = g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{g(x)}\right)'\cdot g(x) = -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$$

(β) Per dimostrare la (3) applico la formula (2) al prodotto " $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ ".
Quindi:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{(2)}{=} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad \blacksquare$$

• ES: $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

• ES: $\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x(\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$

• ES: $\frac{d}{dx}x\cos x = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x.$

• ES: $\frac{d}{dx}(\ln x\cos x\cdot\sin x) = \frac{d}{dx}(\ln x\cdot(\cos x\cdot\sin x)) = (*).$

In generale se ho $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))$, allora:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$(*) = \frac{1}{x}(\cos x\cdot\sin x) + \ln x\,(\cos x\cdot\sin x)' = \frac{1}{x}\cos x\cdot\sin x + \ln x\,(-\sin x\cdot\sin x + \cos x\cdot\cos x)$$

$$= \frac{1}{x}(\cos x\cdot\sin x) + \ln x\,(-\sin^2 x + \cos^2 x).$$

UN'ALTRA DERIVATA FONDAMENTALE

Con $x>0$, $\frac{d}{dx}x^\alpha = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$. Ricordiamo che: $(1+y)^\alpha = 1+\alpha y + o(y)$, per $y\to0$.

Poiché $h\to0$, riscrivo: $\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to0}\frac{x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$

$(y = \frac{h}{x})$

$$= \lim_{h\to0}\frac{x^\alpha(1+y)^\alpha - x^\alpha}{h} \overset{\text{(ESPANSIO. ASINTOTICA)}}{=} \lim_{h\to0}\frac{x^\alpha\left(\cancel{1}+\alpha\frac{h}{x}+o\left(\frac{h}{x}\right)\right) - \cancel{x^\alpha}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\alpha\cancel{h}x^{\alpha-1}}{\cancel{h}} + \overbrace{\frac{x^\alpha o\left(\frac{h}{x}\right)}{h}}^{\to0} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$\Rightarrow f(x) = x^{\alpha}$, con $x > 0$; $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

• Es: $\alpha = \frac{1}{2}$. $x^{\alpha} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Quindi.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

• Es: $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx} = x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

• Es: $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} x^{-1} = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

• Es: $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$.

• Es: $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = \frac{d}{dx} x^{-m} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}}$