Marius Grigoroiu

2108656

Compito n. 199

Vero/Falso	**13**
Aperte	**9**
Voto	**22**

Risposte del vero/falso:

V	F	V	-	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V

Punteggio delle domande aperte:

5A) 2	**5B)** 0	**5C)** 0	**5D)** 0	**6A)** 2	**6B)** 2	**6C)** 2	**6D)** 1

Calcolo differenziale — Secondo compito di esonero
8 Gennaio 2024 — Compito n. 00199

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Marius

Cognome: Grigoraiu

Matricola: 2 1 0 8 6 5 6

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☒	☐	☐	☒	☒
F	☐	☒	☐	☐	☒	☒	☐	☒	☐	☒	☒	☐	☒	☒	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3\,x^2)}{e^{4\,x^2}-1} = 0\,.$$

1B)
$$\lim_{x\to 8} \frac{\sin(x^2-13x+40)}{\arcsin(3\,(x-8))} = 0\,.$$

1C)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5\,x^2-2\,x^3}{7\,x^3+2^x} = 0\,.$$

1D)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2+3^x}{1+3^x}\right)^{4\cdot(3^x)} = +\infty\,.$$

2) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 7\,x^2-4\,x^3 & \text{se } x \geq 0,\\ \dfrac{\log(1+7\,x^4)}{x} & \text{se } x < 0.\end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x=0$.
2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x=0$.
2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = \log(8)$.
2D) Non esiste $\xi > 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.

3) Sia
$$f(x) = \begin{cases} (x+6)\,e^{5\,x} & \text{se } x \geq 0,\\ x^3+12\,x^2+48\,x & \text{se } x < 0.\end{cases}$$

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0,+\infty)$.
3B) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty,0)$.
3C) La funzione $f(x)$ non è crescente su $\mathbb{R}$.
3D) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$T_2(\cos(6\,x^2);0) = 1-3\,x^2\,.$$

4B)
$$T_3\Big(\frac{x^2}{1-5\,x};0\Big) = x^2-5\,x^3\,.$$

4C)
$$3\,x\,e^{9\,x^2} - \sin(3\,x) = \frac{45}{2}\,x^3 + o(x^3)\,.$$

4D)
$$\frac{e^{5\,x^3}-1}{x} = 5\,x^2 + o(x^2)\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ Cognome Grigoroiu Nome Marius Matricola 2108656 Compito 00199

5) Sia

$$f(x) = \frac{x^2\,(x^2-81)}{|x^2-36|}\,.$$

a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare i limiti di $f(x)$ in 6 e in -6.
c) Dimostrare che esiste il massimo di $f(x)$ su $(-6,6)$.
d) Dimostrare che $f((6,+\infty)) = \mathbb{R}$.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

serve sempre pos. quindi tanto vale togliere il modo

ok

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

~~b) $\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{y\to 0} \frac{(y+36)(y-45)}{y} = \frac{y(1+\frac{36}{y})(-\frac{45}{y})}{y} =$~~

~~$(y = x^2-36)$~~

~~$(x = \sqrt{y+36})$~~

~~$= \frac{y^2-45y+36y-(36\cdot 45)}{y} =$~~

~~$= \lim_{y\to 0} y-45+36-\frac{(36\cdot 45)}{y} = \lim_{y\to 0}$~~

~~$= 36-45 = -9$~~

~~$\lim_{x\to -6} f(x) = -9$~~

~~c)~~

~~b) $\lim_{x\to 6} f(x) = \dots$~~

Cognome Grigoraiu Nome Marius Matricola 2408656 Compito 00199

6) Sia

$$f(x) = f(x) = (x^2 - 2x - 11)\, e^{2x}\,.$$

a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare $T_2(f(x);0)$, il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$ in $x_0 = 0$.
c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ e studiarne la natura.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[-4, 5]$.

---

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-2x-11)e^{2x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{2x} = +\infty$ ok

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{2x} = \lim_{\substack{y\to+\infty \\ (y=-x)}} (-y)^2 \cdot e^{-2y} = \frac{(-y)^2}{e^{2y}} = 0$

e^{2y} annulla $(-y)^2$ o y^2 ok

b) $f'(x) = e^{2x}(2x^2-2x-24)$ ok

$f''(x) = e^{2x}(4x^2-50)$

$T_2(f(x);0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -11 - 24x - 25x^2$ // ok

c) ~~$f(x)=0$~~

~~$(x^2-2x-11)e^{2x}=0$~~

~~$e^{2x}=0$ $\varnothing$~~

~~(e^{2x} non sarà mai $=0$ nell'insieme dei num. reali)~~

~~$x^2-2x-11=0$ $\Delta = b^2-4ac = 4+44 = 48$~~

~~$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{48}}{2} = \frac{2\pm4\sqrt{3}}{2}$ $\nearrow 1+2\sqrt{3}$ $\searrow 1-2\sqrt{3}$~~

$f'(x)=0$

$e^{2x}(2x^2-2x-24)=0$

$\nearrow e^{2x} = 0$ $\varnothing$ (e^{2x} nell'insieme dei num. reali non sarà mai $=0$)

$\searrow x^2-x-12=0$ $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm7}{2}$ $\nearrow 4$ $\searrow -3$ ok

cresc./decr.

$f'(x)>0 \Rightarrow e^{2x}$ sempre >0

$x^2-x-12>0 \Rightarrow -3>x \vee x>4$ $\swarrow$ $f'(x)$ positiva ($f(x)$ crescente) quando $x<-3$ o $x>4$ ok

$f(-3) = $ ~~M~~ M rel $\quad f(4) = $ ~~Ma~~ m rel

$-3 \quad 4$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

d. $f([4,5])$: $f(4) = (16-8-11)e^{8} = -3e^{8}$

$f(5) = (25-10-11)e^{10} = 4e^{10}$

non ci sono punti stazionari se non $f(4)$ quindi: $Mass[4,5] = f(5)$

$mass[4,5] = f(4)$

OK

max/min relativi ?

Soluzioni del compito 00199

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3\,x^2)}{e^{4\,x^2}-1} = 0\,.$$

Vero: Ricordando che quando t tende a zero si ha $\arctan(t) \approx t$, e $e^t - 1 \approx t$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3\,x^2)}{e^{4\,x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(3\,x^2)^2}{4\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3^2}{4}\,x^2 = \frac{9}{4}\cdot 0 = 0\,.$$

1B)

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sin(x^2-13x+40)}{\arcsin(3\,(x-8))} = 0\,.$$

Falso: Si ha

$$x^2 - 13x + 40 = (x-5)\,(x-8)\,.$$

Pertanto, ricordando che $\sin(t) \approx t$ e che $\arcsin(t) \approx t$ quando t tende a zero, si ha

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sin(x^2-13x+40)}{\arcsin(3\,(x-8))} = \lim_{x\to 8} \frac{(x-5)\,(x-8)}{3\,(x-8)} = \lim_{x\to 8} \frac{x-5}{3} = 1 \neq 0\,.$$

1C)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5\,x^2 - 2\,x^3}{7\,x^3 + 2^x} = 0\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\lim_{x\to \infty} x^3 = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -\infty} 2^x = 0\,,$$

e dato che x^3 x^2, si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5\,x^2 - 2\,x^3}{7\,x^3 + 2^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3}\,\frac{-2+\frac{5}{x}}{7+\frac{2^x}{x^3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2+\frac{5}{x}}{7+\frac{2^x}{x^3}} = \frac{-2+0}{7+0} = -\frac{2}{7} \neq 0\,.$$

1D)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2+3^x}{1+3^x}\right)^{4\cdot(3^x)} = +\infty\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{3^x+2}{3^x+1} = \frac{3^x+1+1}{3^x+1} = 1 + \frac{1}{3^x+1}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{t\to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\,,$$

e che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x}{3^x+1} = 1\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3^x+2}{3^x+1}\right)^{4\cdot(3^x)} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3^x+1}\right)^{3^x+1}\right]^{4\,\frac{3^x}{3^x+1}} = [e]^4 = e^4 \neq +\infty\,.$$

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 7\,x^2 - 4\,x^3 & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{\log(1 + 7\,x^4)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x = 0$.

Falso: Si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} [7\,x^2 - 4\,x^3] = 0 - 0 \cdot 0 = 0\,,$$

e

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\log(1 + 7\,x^4)}{x} = \lim_{x\to0^-} x^3\,\frac{\log(1 + 7\,x^4)}{x^4} = 0 \cdot 7 = 0\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)\,,$$

e quindi la funzione è continua in $x = 0$.

2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

Falso: Si ha

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{7\,h^2 - 4\,h^3}{h} = \lim_{h\to0^+} [7\,h - 4\,h^2] = 0 - 0 = 0\,,$$

e

$$\lim_{h\to0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{\log(1 + 7\,h^4)}{h^2} = \lim_{h\to0^+} h^2\,\frac{\log(1 + 7\,h^4)}{h^4} = 0 \cdot 7 = 0\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali (e finiti) la funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$, e si ha $f'(0) = 0$.

2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = \log(8)$.

Vero: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile su $(-\infty, 0]$. Inoltre, $f(0) = 0$ e

$$f(-1) = \frac{\log(1 + 7)}{-1} = -\log(8)\,.$$

Per il teorema di Lagrange, applicato all'intervallo $[-1, 0]$, esiste ξ in tale intervallo tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{\log(8)}{1} = \log(8)\,.$$

2D) Non esiste $\xi > 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Falso: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $[0, +\infty]$ ed è tale che $f(0) = 0$. Si ha poi, se $x > 0$,

$$f(x) = 7\,x^2 - 4\,x^3 = x^2\,(7 - 4\,x)\,,$$

da cui segue che $f(7/4) = 0$. Pertanto, per il teorema di Rolle applicato all'intervallo $[0, 7/4]$, esiste ξ in tale intervallo tale che $f'(\xi) = 0$.

---

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} (x+6)\,\mathrm{e}^{5\,x} & \text{se } x \geq 0, \\ x^3 + 12\,x^2 + 48\,x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

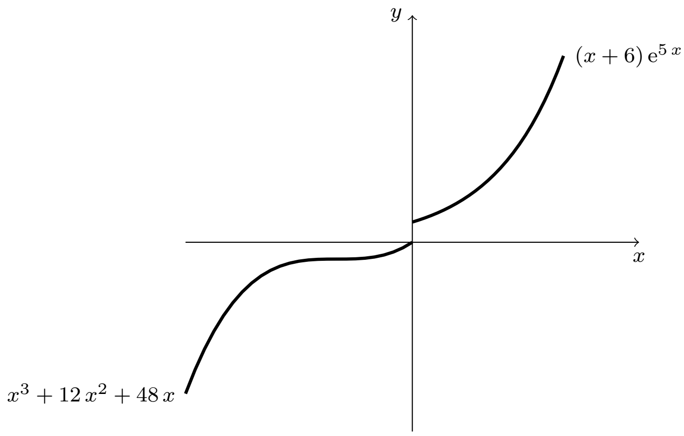


Grafico non in scala

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

Vero: Dato che $f(x) = (x+6)\,\mathrm{e}^{5\,x}$ per $x > 0$, si ha

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{5\,x} + 5\,(x+6)\,\mathrm{e}^{5\,x} = (5\,x + 31)\,\mathrm{e}^{5\,x}\,.$$

Dato che $f'(x) > 0$ per $x > 0$ (è il prodotto di due funzioni positive), $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

3B) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty, 0)$.

Falso: Dato che $f(x) = x^3 + 12\,x^2 + 48\,x$ per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = 3x^2 + 24\,x + 48 = 3\,(x^2 + 8\,x + 16) = 3\,(x+4)^2\,.$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x < 0$ (è un quadrato...), la funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0)$.

3C) La funzione $f(x)$ non è crescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Già sappiamo (dagli esercizi **3A)** e **3B)**) che la funzione è crescente su $(0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0)$. Per dimostrare che è crescente su $\mathbb{R}$ rimane quindi da dimostrare che se $x < 0 \leq y$ allora $f(x) \leq f(y)$. Osserviamo che si ha $f(0) = 6 > 0$ e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [x^3 + 12\,x^2 + 48\,x] = 0\,.$$

Abbiamo quindi:

$$f(x) \leq_{[f(x) \nearrow \text{ su } (-\infty,0)]} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 < 6 = f(0) \leq_{[f(x) \nearrow \text{ su } [0,+\infty)]} f(y)\,,$$

come volevasi dimostrare.

3D) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

Vero: Dato che $f(x)$ è monotona crescente su $(0, +\infty)$, che $f(0) = 6$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+6)\,\mathrm{e}^{5\,x} = +\infty\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$f([0, +\infty)) = [6, +\infty)\,. \tag{1}$$

Dato che $f(x)$ è crescente anche su $(-\infty, 0)$, e che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x^3 + 12\,x^2 + 48\,x] = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [x^3 + 12\,x^2 + 48\,x] = 0\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)\,. \tag{2}$$

Da (1) e da (2) si ha quindi

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, 0) \cup [6, +\infty) \neq \mathbb{R}\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_2(\cos(6\,x^2);0) = 1 - 3\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, ponendo $t = 6\,x^2$,

$$\cos(6\,x^2) = 1 - \frac{(6\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) = 1 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

da cui segue che

$$T_2(\cos(6\,x^2);0) = 1 \neq 1 - 3\,x^2\,.$$

4B)

$$T_3\Big(\frac{x^2}{1-5\,x};0\Big) = x^2 - 5\,x^3\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, ponendo $t = 5\,x$,

$$\frac{1}{1-5\,x} = 1 + 5\,x + 25\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

e quindi

$$\frac{x^2}{1-5\,x} = x^2\,(1 + 5\,x + 25\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)) = x^2 + 5\,x^3 + 25\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) = x^2 + 5\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$T_3\Big(\frac{x^2}{1-5\,x};0\Big) = x^2 + 5\,x^3 \neq x^2 - 5\,x^3\,.$$

4C)

$$3\,x\,\mathrm{e}^{9\,x^2} - \sin(3\,x) = \frac{45}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,, \qquad \sin(s) = s - \frac{s^3}{6} + \mathrm{o}(s^3)\,,$$

si ha, ponendo $t = 9\,x^2$ e $s = 3\,x$,

$$\mathrm{e}^{9\,x^2} = 1 + 9\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \sin(3\,x) = 3\,x - \frac{(3\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} 3\,x\,\mathrm{e}^{9\,x^2} - \sin(3\,x) &= 3\,x\,(1 + 9\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)) - (3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)) \\ &= 3\,x + 27\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) - 3\,x + \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,, \\ &= \frac{63}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) \neq \frac{45}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,. \end{aligned}$$

4D)

$$\frac{\mathrm{e}^{5\,x^3} - 1}{x} = 5\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$e^t = 1 + t + o(t^2)\,,$$

si ha, ponendo $t = 5\,x^3$,

$$e^{5\,x^3} = 1 + 5\,x^3 + o(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{e^{5\,x^3} - 1}{x} = \frac{1 + 5\,x^3 + o(x^3) - 1}{x} = \frac{5\,x^3 + o(x^3)}{x} = 5\,x^2 + o(x^2)\,.$$

5) Sia

$$f(x) = \frac{x^2\,(x^2-81)}{|x^2-36|}\,.$$

a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare i limiti di $f(x)$ in 6 e in -6.
c) Dimostrare che esiste il massimo di $f(x)$ su $(-6,6)$.
d) Dimostrare che $f((6,+\infty)) = \mathbb{R}$.

Soluzione:
a) Si ha

$$f(x) = \frac{x^2\,(x^2-81)}{|x^2-36|} = \frac{x^4}{|x^2|}\,\frac{1-\frac{81}{x^2}}{\left|1-\frac{36}{x^2}\right|} = x^2\,\frac{1-\frac{81}{x^2}}{\left|1-\frac{36}{x^2}\right|}\,.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{1-\frac{81}{x^2}}{\left|1-\frac{36}{x^2}\right|} = (+\infty)\cdot\frac{1-0}{|1-0|} = +\infty\,,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\,\frac{1-\frac{81}{x^2}}{\left|1-\frac{36}{x^2}\right|} = (+\infty)\cdot\frac{1-0}{|1-0|} = +\infty\,.$$

b) Osserviamo che sia quando x tende a 6, che quando x tende a -6, il termine $|x^2-36|$ è positivo. Pertanto,

$$\lim_{x\to6}\frac{1}{|x^2-36|} = +\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-6}\frac{1}{|x^2-36} = +\infty\,.$$

Dato che

$$\lim_{x\to6} x^2\,(x^2-81) = 36\cdot(-45) = L < 0\,,$$

e che

$$\lim_{x\to-6} x^2\,(x^2-81) = 36\cdot(-45) = L < 0\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to6} f(x) = (L<0)\cdot(+\infty) = -\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-6} f(x) = (L<0)\cdot(+\infty) = -\infty\,.$$

c) Dal punto **b)** si ha che

$$\lim_{x\to-6^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to6^-} f(x) = -\infty\,.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, esiste il massimo di $f(x)$ sull'intervallo $(-6,6)$.

d) Dal punto **a)** si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

mentre dal punto **b)** si ha che

$$\lim_{x\to6^+} f(x) = -\infty\,.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha $f((6,+\infty)) = \mathbb{R}$.

6) Sia
$$f(x) = f(x) = (x^2 - 2x - 11)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$
a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare $T_2(f(x);0)$, il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$ in $x_0 = 0$.
c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ e studiarne la natura.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[-4, 5]$.

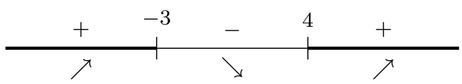
Soluzione:
a) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x - 11)\,\mathrm{e}^{2x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,.$$
Per il limite a meno infinito, poniamo $y = -x$; allora
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} ((-y)^2 - 2(-y) - 11)\,\mathrm{e}^{-2y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2 + 2y - 11}{\mathrm{e}^{2y}} = 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^{2y} \gg y^k$ per ogni k.

b) Derivando, si ha

(1) $$f'(x) = (2x-2)\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,(x^2 - 2x - 11)\,\mathrm{e}^{2x} = (2x^2 - 2x - 24)\,\mathrm{e}^{2x} = 2\,(x^2 - x - 12)\,\mathrm{e}^{2x}\,,$$

e, derivando ancora,
$$f''(x) = 2\,(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + 4\,(x^2 - x - 12)\,\mathrm{e}^{2x} = (4x^2 - 50)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$
Dato che $f(0) = -11$, che $f'(0) = -24$ e che $f''(0) = -50$, si ha
$$T_2(f(x);0) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = -11 - 24\,x - 25\,x^2\,.$$

c) Dalla (1) si ha $f'(x) = 2(x^2 - x - 12)\,\mathrm{e}^{2x}$, che si annulla se e solo se $x^2 - x - 12 = 0$, ovvero se e solo se $x = -3$ e $x = 4$. Studiando il segno di $f'(x)$ si ha il seguente schema:



da cui si deduce che $x = -3$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 4$ è di minimo relativo.

d) Dallo studio del segno della derivata prima, si ha che $x = -4$ è di minimo relativo (dato che $f'(-4) > 0$); che $x = -3$ è di massimo relativo (come già sapevamo); che $x = 4$ è di minimo relativo (come già sapevamo); che $x = 5$ è di massimo relativo (dato che $f'(5) > 0$).
Si ha poi
$$f(-4) = 13\,\mathrm{e}^{-8}\,, \qquad f(-3) = 4\,\mathrm{e}^{-6}\,, \qquad f(4) = -3\,\mathrm{e}^{8} \qquad f(5) = 4\,\mathrm{e}^{10}\,.$$
Confrontando questi valori, si ha
$$\max(\{f(x)\,,\ x \in [-4,5]\}) = f(5) = 4\,\mathrm{e}^{10}\,, \qquad \min(\{f(x)\,,\ x \in [-4,5]\}) = f(4) = -3\,\mathrm{e}^{8}\,.$$