# Venerdì 03/12/2021

(Fin ora abbiamo visto:) (Per lo studio di funzione)

**LIMITI**

**DERIVATE** → monotonia, convessità

**POLINOMI DI TAYLOR** ⟶ approssimazione

• **ES**: $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Studiare $f(x)$ e disegnarne il grafico.

**(1) DOMINIO NATURALE**:

$x \neq 0$ perché si trova al denominatore

$\frac{x-1}{x} > 0$ perché si trova nel logaritmo. Quindi: $x-1>0 \iff x>1$

$x>0$

| | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Quindi il dominio naturale è $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

**(2) ESTREMI DEL DOMINIO**:

Gli estremi del dominio in cui calcolare i limiti sono: $-\infty, 0, 1, +\infty$.

(a) $\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \underbrace{\ln \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}}}_{\to 0}$ = Forma indeterminata =

$= \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} -x + o(x) = \mp\infty$

Osservazione: $\ln(1+y) = y + o(y)$ per $y \to 0$. Quindi:

$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, ove "$-\frac{1}{x}$" è la nostra "$y$".

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, per $x \to +\infty$

(b) Cerco gli asintoti obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x+o(x)}{x} = -1 = m$.

Per verificare se ho un asintoto obliquo devo verificare che esiste finito:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + x = \lim_{x\to\pm\infty} -\cancel{x} + o(x) + \cancel{x} = \lim_{x\to\pm\infty} o(x)$ = Problema;

Ci sono tante funzioni che sono $o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Ad esempio: $\sqrt{|x|} = o(x)$, $1 = o(x)$, $\frac{1}{x} = o(x)$, $\sin x = o(x)$. Per calcolare "$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$" serviranno i polinomi di Taylor.

Se ad esempio sapessimo che "$\ln(1+y) = y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$". Allora:

$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln\left(1 \underbrace{- \frac{1}{x}}_{=y}\right) = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=y} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)^2}_{=y^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} \underbrace{- \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x}\right)}$ per $x \to +\infty$ =

$= -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$. (In questo modo) Ho scritto il termine di errore $o\left(\frac{1}{x}\right)$ in maniera più precisa. Ora: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} -\cancel{x} - \frac{1}{2} + o(1) + \cancel{x} = -\frac{1}{2} = q.$

$\Rightarrow$ Effettivamente ho l'asintoto obliquo " $-x-\frac{1}{2}$ " per $x \to \pm\infty$.

(c) $\lim_{x\to 0} \overset{\to 0}{x^2} \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to\infty}$ ; Osservo che tra un polinomio ($x^2$) che va a zero ed un log che va a $\pm\infty$,

(= $x \to 0^-$) vince il polinomio: $\lim_{y\to 0} y^\alpha \ln y = 0$, $\forall \alpha > 0$. Quindi: $\lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$.

$\Rightarrow$ No asintoto verticale per $x \to 0$.

(d) $\lim_{x\to 1^+} \overset{\to 1}{x^2} \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to -\infty} = -\infty$. Quindi abbiamo un asintoto verticale per $x \to 1^+$.

(3) SEGNO DI $f(x)$:

- $x^2 > 0$, $\forall x$
- $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) > 0 \iff \frac{x-1}{x} > 1$. Per $x > 0$ moltiplico per $x$ e ottengo " $x-1 > x$ ", ovvero " $-1 > 0$ " che non è mai vero.

Per $x < 0$ moltiplico per $x$ e cambio segno: $\cancel{x} - 1 < \cancel{x} \iff -1 < 0$ che è sempre vero, quindi $\frac{x-1}{x} > 1$ se e solo se $x < 0$.

{ METODO ALTERNATIVO: $\frac{x-1}{x} > 1 \iff \frac{x-1}{x} - 1 > 0 \iff \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{x} > 0 \iff -\frac{1}{x} > 0 \iff -x > 0 \iff x < 0$. }

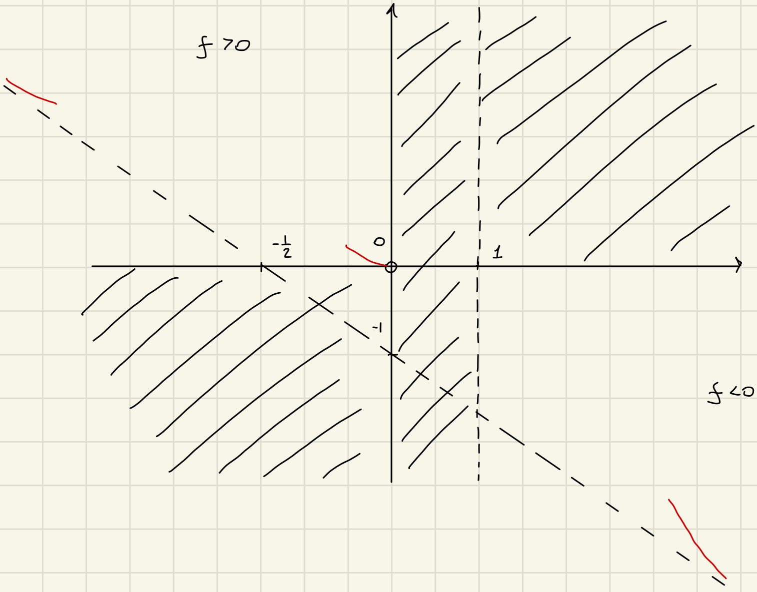
(4) MONOTONIA: Calcoliamo ora:

$$f'(x) = \left(x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = 2x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + x^2\left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = (*).$$

$$\left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = \frac{x}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{\cancel{x}}{x-1} \cdot \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x^{\cancel{2}}} = +\frac{1}{x(x-1)}$$

$$(*) = 2x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{x(x-1)} = 2x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{x}{x-1}.$$

▶ Di questa funzione non possiamo calcolare gli zeri, quindi l'esercizio finisce qui.



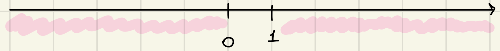

• ES: $f(x) = \ln\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

(1) DOMINIO NATURALE:

(a) $x \neq 0$ perché si trova al denominatore.

(b) $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ porché si trova nella radice.

(c) Ma in realtà, poiché l'argomento del logaritmo deve essere $> 0$, allora anche $1 - \frac{1}{x} > 0$ $\Leftrightarrow$ $1 > \frac{1}{x}$. Se $x > 0$, moltiplico: $x > 1$. Se $x < 0$, moltiplico: $x < 1$.



Quindi $1 - \frac{1}{x} > 0$ $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Da qui dovrei togliere "$x = 0$", ma già non appartiene a "$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$".

(2) ESTREMI: Gli estremi di dominio $f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ sono: $-\infty, 0, 1, +\infty$. Quindi:

$\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(\sqrt{\underbrace{1 - \frac{1}{x}}_{\to 1}}\right) = 0$. Quindi ho un asintoto orizzontale.

$\lim_{x \to 0^-} \ln\overbrace{\sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}}}^{\to +\infty} = +\infty$. Quindi ho un asintoto verticale per $x \to 0^-$.

$\lim_{x \to 1^+} \ln\sqrt{\underbrace{1 - \frac{1}{x}}_{\to 0^+}} = -\infty$. Quindi ho un asintoto verticale per $x \to 1^+$.

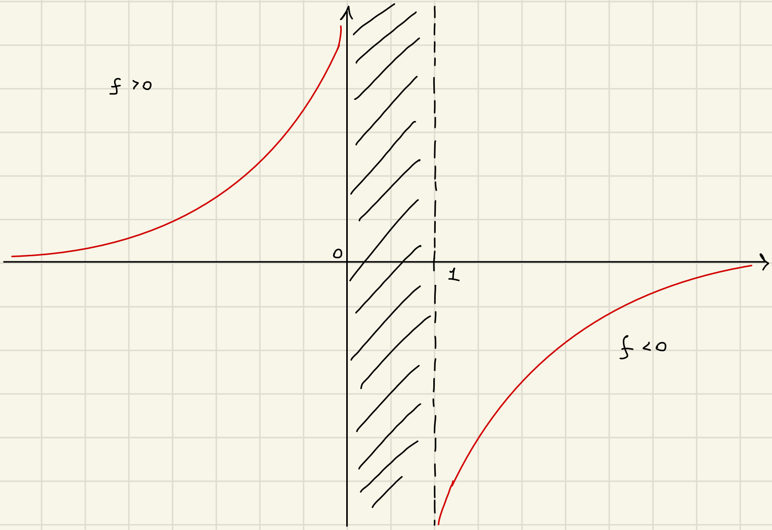
(3) SEGNO DI $f$ : Devo studiare $\ln\sqrt{1-\frac{1}{x}} > 0$.

$$\ln\sqrt{1-\frac{1}{x}} > 0 \iff \sqrt{1-\frac{1}{x}} > 1 \iff \cancel{1} - \frac{1}{x} > \cancel{1} \iff -\frac{1}{x} > 0 \iff x < 0$$

(4) MONOTONIA :

$$f'(x) = \left(\ln\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\underbrace{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{>0 \text{ nel dominio}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{x^2}_{>0}} > 0. \text{ Quindi:}$$

$\forall x$ nel dominio $\Rightarrow$ $f$ è sempre crescente negli intervalli del dominio. Non ci sono né massimi né minimi locali o globali.




· ES: $f(x) = -2 \cdot \ln(2x^2-3x+3)$.

(1) DOMINIO NATURALE :

$2x^2-3x+3 > 0$.

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{6}$ ; $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ non ci sono zeri in $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $2x^2-3x+3 > 0 \quad \forall x$. $\Rightarrow$ Dominio $f = \mathbb{R}$.

(2) ESTREMI : Gli estremi del dominio $f = \mathbb{R}$ sono: $-\infty, +\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} -2\ln\underbrace{(2x^2-3x+3)}_{\to +\infty} = -\infty.$$

Verifichiamo se ci sono asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2\ln(2x^2-3x+3)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2\ln\left(x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2\left[\ln x^{2} + \ln\left(\overbrace{2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}^{\to 0}\right)\right]}{x} =$$

(ln x << x, gerarchia infiniti)

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \overbrace{\frac{-4\ln x}{x}} - \frac{2\ln(2+o(1))}{x} = 0 \;.\; \Rightarrow \text{Non ci sono asintoti obliqui.}$$

(3) SEGNO

(Per via del segno "-")

$f(x) > 0 \iff \ln(2x^2-3x+3) < 0 \iff 2x^2-3x-3 \in (0,1)$.

Già sappiamo che $2x^2-3x+3>0 \;\forall x$. Dobbiamo verificare quando "$2x^2-3x+3<1$", ovvero "$2x^2-3x+2<0$". Troviamo gli zeri:

$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{\overset{<0}{9-16}}}{4}$; $\Delta<0 \Rightarrow$ Non ci sono zeri in $\mathbb{R}$. $\Rightarrow 2x^2-3x+2>0 \iff 2x^2-3x+3>1 \;\forall x$.

$\Rightarrow f(x)<0 \;\forall x\in\mathbb{R}$.

(4) MONOTONIA

$f'(x) = \frac{-2}{\underbrace{2x^2-3x+3}_{>0}} \cdot (4x-3)$. (Studiamo dove $f'(x)>0$).

$f'(x)>0 \iff -2(4x-3)>0 \iff 4x-3<0 \iff x<\frac{3}{4}$. Quindi $f$ è crescente in $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$, decrescente in $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$. Ne segue che "$x=\frac{3}{4}$" è un punto di massimo globale.
Non ci sono altri punti di massimo o minimo locali o globali.