Venerdì 22/10/2021

Siano: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Consideriamo il caso in cui l_1 o l_2 siano $+\infty$ o $-\infty$. O casi in cui il limite esista e sia $\pm\infty$ e l'altro non esista.

1) $l_1 = +\infty$, g inferiormente limitata. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty \qquad \left\{ \text{ES: } \lim_{x \to +\infty} (\underbrace{\ln x}_{\to +\infty} + \underbrace{\cos x}_{\geq -1}) = +\infty \right\}$$

2) $l_1 = -\infty$, g superiormente limitata. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \left\{ \text{ES: } \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\leq 1}\right) = -\infty \right\}$$

3) $l_1 = +\infty$, $l_2 = +\infty$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$$

4) $l_1 = -\infty$, $l_2 = -\infty$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = -\infty$$

5) $l_1 = +\infty$, $l_2 = -\infty$. Allora Siamo in un caso indeterminato $(+\infty - \infty)$.

$$\left\{ \text{ES: } \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} + \underbrace{(-x)}_{\to -\infty} = +\infty \quad (\text{Poiché } x^2 \text{ va a "}+\infty\text{" più velocemente di } x) \right\}$$

6) Supponiamo ora che $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, con $l_1 > 0$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}.$$

Per dimostrarlo usiamo un trucco importante. Usando che

$e^{\ln y} = y \quad \forall y > 0$, scrivo: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\underset{\substack{\parallel \\ \ell_2}}{g(x)} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ \ell_1}}{\ln f(x)}}$.

$\lim_{x \to x_0} \ln f(x) \underset{(y = f(x))}{=} \lim_{x \to \ell_1} \ln y = \ln(\ell_1)$. Per la regola del prodotto:

$\lim_{x \to x_0} \underbrace{g(x)}_{\to \ell_2} \cdot \underbrace{\ln f(x)}_{\to \ln(\ell_1)} = \ell_2 \cdot \ln(\ell_1)$.

$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\underbrace{g(x) \ln f(x)}_{\ell_2 \cdot \ln(\ell_1)}} = e^{\ell_2 \ln(\ell_1)} = \cancel{e}^{\cancel{\ln}(\ell_1)^{\ell_2}} = \ell_1^{\ell_2}$ ■

7) $\ell_1 = +\infty$, $g(x) \geq M > 0$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty.$$

(DIMOSTRIAMOLO:)
$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \underbrace{\ln f(x)}_{\to +\infty}}$, ovvero "$\ln f(x) \to +\infty$", e "$g(x) \geq M > 0$"

$\Rightarrow$ "$g(x) \ln(f(x)) \to +\infty$" $\Rightarrow$ "$\lim_{x \to x_0} e^{\underbrace{g(x) \ln(f(x))}_{\to +\infty}} = +\infty$" ■

TORNIAMO AI LIMITI NOTEVOLI

Abbiamo detto che: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71$ (N)

Analogamente: $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71$ (N')

Si può dimostrare (N') usando (N).

- ES: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a > 0$ =

$\underset{\substack{(y = \frac{x}{a}) \\ (x = ay)}}{=} \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}y}\right)^{ay} = \lim_{y \to +\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_{\to e}\right)^a \overset{(N)}{=} e^a$

- ES: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}_{\to e}\right)^x = +\infty$

▶ Da (N) e (N') otteniamo anche i seguenti limiti notevoli:

(1) $$\lim_{x \to 0^{\pm}} (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{\left(y=\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{y \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \text{"FORMA INDETERMINATA } \tfrac{0}{0}\text{"}.$$

Quindi: $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e} = \lim_{x \to 0} \ln e = 1$$

LOGARITMO:

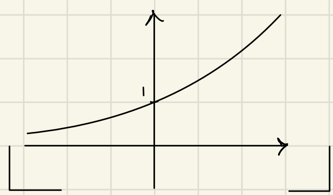
(3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} \underset{(x=\ln(y+1))}{\overset{(y=e^{x}-1)}{=}} \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)^{-1}}_{\to 1} = 1^{-1} = 1$$

(DAL LIMITE NOTEVOLE (2))

ESPONENZIALE:



ESERCIZI

• FOGLIO 3:

(c) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-5}{2x^2+2x-3} = 1$$ {con "$x \to \pm\infty$", contano i termini di GRADO MAGGIORE.}

(e) $$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3+x^2}{2x^5+2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}}(4x+1)}{2\cancel{x}(x^4+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0$$ {con "$x \to 0$", contano i termini di GRADO MINORE.}

(SUPPONIAMO DI RISOLVERE:)

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3+x}{2x^5+2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{2x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}$$ = NON ESISTE, perché:

(α) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$$

$\neq$

(β) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty$$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+8}\right)$, è un limite della forma "$\infty - \infty$".

Ricordiamo che: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Allora scriviamo:

$$\Big(\underbrace{\sqrt{x^2+2x}}_{a} - \underbrace{\sqrt{x^2+8}}_{b}\Big) \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+8}} = \frac{\cancel{x^2}+2x-(\cancel{x^2}+8)}{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+8}} = \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+8}} = (*)$$

Poiché "$x \to +\infty$", al denominatore mettiamo in evidenza i termini di grado maggiore, tale che:

$$(*) = \frac{2x-8}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}} \overset{\left\{\sqrt{x^2}=|x|,\ \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right\}}{=} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}} = \frac{2x-8}{|x|\underbrace{\left(\sqrt{1+o(1)}+\sqrt{1+o(1)}\right)}_{\to 2}}.$$

Quindi scriviamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+8}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{2x-8}^{=x\left(2-\frac{8}{x}\right)}}{|x|\underbrace{\left(\sqrt{1+o(1)}+\sqrt{1+o(1)}\right)}_{\to 2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

(j) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$, è un limite della forma "$-\infty(+\infty-\infty)$".

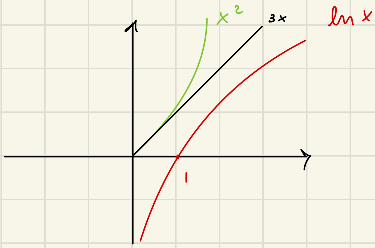
Quindi: $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim_{x \to -\infty} x \frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{|x|\sqrt{1+o(1)}} + \underbrace{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}_{|x|\sqrt{1+o(1)}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\underbrace{|x|}_{=-x}\underbrace{\left(\sqrt{1+o(1)}+\sqrt{1+o(1)}\right)}_{\to 2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{2x}}{-\cancel{2x}} = -1.$$

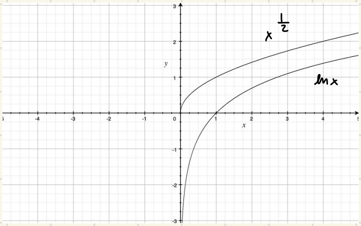
• ES: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3x+\ln x}{2x^2+\sqrt{x}}$.

Al numeratore abbiamo un problema di confronto di infiniti.
Chi cresce più rapidamente tra $\ln x$ e x^2?

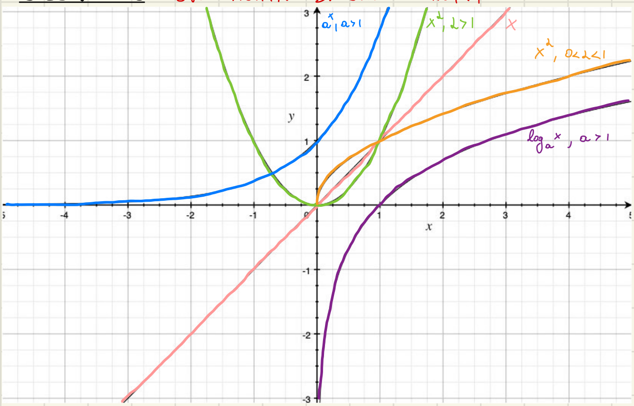


Accade che per $x \to +\infty$, $\ln x$ (o $\log_a x$, $a > 1$) cresce più lentamente di qualunque potenza (x^α, $\alpha > 0$). Ad esempio:

$\ln x \ll \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, per $x \to +\infty$. Più precisamente: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.



<u>Osservazione</u>: GERARCHIA DEGLI INFINITI



Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \cancel{3x} + \cancel{\ln x}}{x^2 + \cancel{\sqrt{x}}} = 1$$

$$\begin{cases} (N) \quad x^2 + 3x + \ln x = x^2 \left(1 + \cancel{\frac{3}{x}}^{\,0} + \cancel{\frac{\ln x}{x^2}}^{\,0}\right) = \\ \qquad\qquad = x^2(1 + o(1)). \\ (D) \quad x^2 + \sqrt{x} = x^2 \left(1 + \cancel{\frac{1}{x^{3/2}}}^{\,0}\right) = x^2(1 + o(1)) \end{cases}$$

- Quindi in sintesi:

$\boxed{\log_a x \ll x^\alpha \ll b^x}$, per $x \to +\infty$ con $a, b > 1$ e $\alpha > 0$.