Lunedì 27/09/2021

# I NUMERI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI

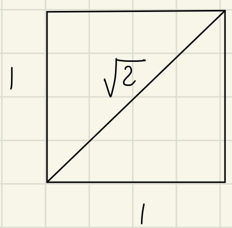
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$ RAZIONALI

- Esempio: $-\frac{7}{10}, \frac{3}{4}, 2, 1.5, \dots \in \mathbb{Q}$

▸ Crisi pitagorica




Problema: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nel senso che

Teorema: $\nexists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Dimostrazione:

Per assurdo: assumiamo che $\exists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Possiamo assumere $p, q \in \mathbb{N}$ e, a meno di semplificare, assumiamo che m.c.d. $(p, q) = 1$ (ovvero che $p, q$ sono primi tra loro).

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff \frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = \underbrace{2q^2}_{\text{PARI}}$$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari.

(Se) $p$ pari $\Rightarrow$ $p = 2m$, per qualche $m \in \mathbb{N}$.

$$p^2 = 2q^2 \iff (2m)^2 = 2q^2 \iff \cancel{4}^{\,2} m^2 = \cancel{2} q^2$$

$$\iff \underbrace{2m^2}_{\text{PARI}} = q^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \Rightarrow q \text{ è pari.}$$

Sia $p$ che $q$ sono pari, quindi entrambi divisibili per 2.
Questo contraddice m.c.d. $(p, q) = 1$. $\square$

$\mathbb{R} = \{ \text{allineamenti decimali} \}$ REALI

- ES:
  - $2,56731\ldots$ (n. reale)
  - $-3,4\ldots = -3,400\ldots$ (n. reale)
  - $\sqrt{2} = 1,4142$ (n. reale)
  - $27 = 27,000\ldots$ (n. reale)
  - $0,4\overline{2} = 0,4222\ldots$ (n. reale)
  - $\pi = 3,14\ldots$ (n. reale)
  - $e = 2,7\ldots$ (n. reale)

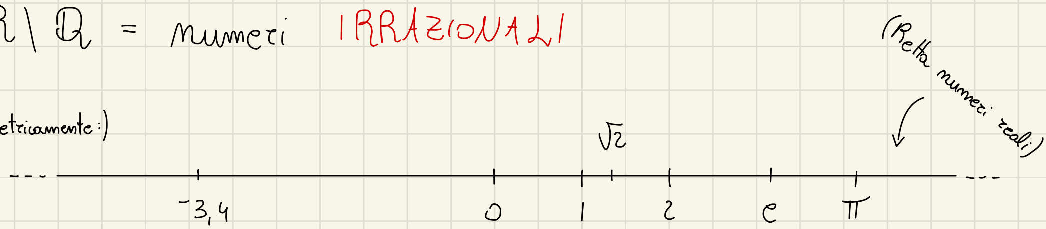
oss: $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 1$
{allineamenti decimali diversi che indicano la stessa cifra.}

(Quindi:)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = numeri IRRAZIONALI

(Geometricamente:)



(Relazioni d'ordine:)

$x > y$ se $x$ si trova a destra sulla retta reale.

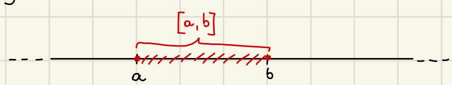
- ES: $5 > 3$
  $-3 > -5$
  $3 < 5$
  $3 \leq 5$
  $3 \leq 3$

## INTERVALLI:

(DEF:) Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e $a, b$ = estremi dell'intervallo, denotiamo:

### Limitati

- $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ intervallo chiuso.




- $(a, b) = ]a, b[ = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ intervallo aperto
- $[a, b) = [a, b[ = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ intervallo né chiuso né aperto
- $(a, b] = ]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ // // // //.

### Illimitati

(semirette:)

- $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$ semiretta chiusa. È anch'essa un intervallo.

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ // //.
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ // //.
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ // //
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ è un intervallo.

---

## MODULO (o valore assoluto)

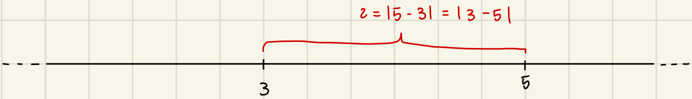
Dato $x \in \mathbb{R}$ definisco $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- Es: $|\pi| = \pi$

  $|-5| = -|-5| = 5$

Definizione:

La distanza tra $a, b \in \mathbb{R}$ è $|a-b| = |b-a|$.




## DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Teorema: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

① Prova a dimostrare (o fai esempi).

Dimostrazione:

> Posso sostituire valori arbitrari di $x, y \in \mathbb{R}$ e verificare queste disuguaglianze.

Osservo che: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\pm x \leq |x|$ e $\pm y \leq |y|$.

ⓐ $x + y \leq |x| + |y|$.

ⓑ $-(x+y) = -x - y \leq |x| + |y|$.

$\Rightarrow |x+y| = \max\{x+y, -x-y\} \leq |x| + |y|$. ∎

# SOMMATORIA

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

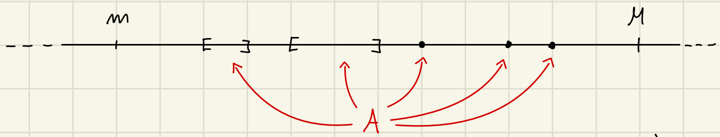
$\left(\underline{\text{Notazione}}: \sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3\right)$

## Definizione:

$A \subset \mathbb{R}$ si dice <u>limitato</u> se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$m \leq x \leq M \,, \quad \forall x \in A$$

(graficamente:)




(<u>oss</u>: $m, M \in \mathbb{R}$, non necessariamente ad $A$)

- <u>ES</u>: $[a, b]$ è limitato.
  $\mathbb{N}$ non è limitato.

## Definizione:

$A \subset \mathbb{R}$ si dice <u>limitato superiormente</u> se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x \leq M \,, \quad \forall x \in A . \qquad (1)$$

- Ogni $M$ che soddisfa la (1) si chiama <u>maggiorante</u> di $A$.

## Definizione:

$A \subset \mathbb{R}$ si dice <u>limitato inferiormente</u> se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$m \leq x \,, \quad \forall x \in A \qquad (2)$$

• Ogni $m$ che soddisfa la (2) si chiama <u>minorante</u> di $A$.

## Definizione:

▷ Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto. Se $M \in A$ è un maggiorante, allora $M$ si chiama <u>massimo</u> di $A$.

• <u>Es</u>: $A = [1,3]$; "3" $\in A$ ed è maggiorante. Quindi "3" è <u>il</u> massimo di $A$.

▷ Idem per il minimo = minorante che appartiene ad $A$.

• <u>Es</u>: $A = [1,3]$; "1" è il minimo di $A$.

(<u>oss</u>: il massimo (o minimo), se esiste, è unico)

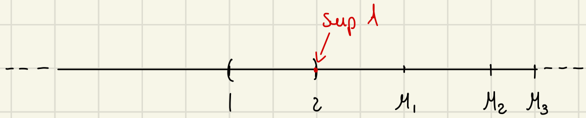
<u>oss</u>: $(1,2)$ è limitato, ma non ha massimo, né minimo.

## Definizione (*):

Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente ($\exists$ almeno un $M$) definisco <u>$S = \sup A$</u> il più piccolo dei maggioranti.

(<u>oss</u>: Se $A \subset \mathbb{R}$ ha un massimo $M = \max A$, allora $\max A = \sup A$)

• <u>Es</u>: $A = (1,2)$




Tutti i numeri $\geq 2$ sono maggioranti di $(1,2)$; il più piccolo è 2. Quindi $\sup(1,2) = 2$.

## Definizione: (*)

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitato inferiormente ($\exists$ almeno un $m$) definisco $s = \inf A \equiv$ estremo inferiore, il più grande dei minoranti.

- ES: $\inf(1, 2) = 1$

osservazione:

> Se $A$ non é limitato superiormente dico che $\sup A = +\infty$

- ES: $\sup \mathbb{N} = +\infty$

> Se $A$ non é limitato inferiormente allora $\inf A = -\infty$

- ES: $\inf \mathbb{Z} = -\infty$
  $\inf(-\infty, 5] = -\infty$

## Teorema:

(sempre)

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $A$ limitato superiormente (rispettivamente inferiormente) allora $\exists\, S \in \mathbb{R}$ t.c. $S = \sup A$ (rispettivamente $\exists\, I \in \mathbb{R}$ t.c. $I = \inf A$).

- Esercizio:

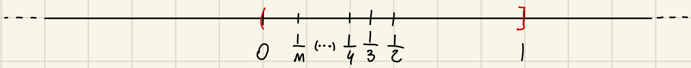
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \inf A = ? \qquad \sup A = ?$$

(svolgimento:)

① Riscrivo l'insieme $A$ elencando alcuni suoi elementi:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \underset{(n=1)}{1}, \underset{(n=2)}{\frac{1}{2}}, \underset{(n=3)}{\frac{1}{3}}, \underset{(n=4)}{\frac{1}{4}}, \dots, \underset{(n \to +\infty)}{\frac{1}{n}} \right\}$$

(graficamente:)



L'insieme $A$, quindi, tende ad avvicinarsi sempre di più a (senza mai diventare) zero.

② Per il teorema di cui sopra, possiamo dire che, sicuramente, $A \neq \emptyset$ e $A$ è limitato. In particolare:

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } M \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. } m \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$\Rightarrow$ $\sup A = 1 \equiv \max A$
$\inf A = 0$

(Dimostrabile tramite caratterizzazione di inf e sup, non fatta a lezione.)

## POTENZE E RADICI n-ESIME

Teorema[(*)]:

Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Allora $\exists!\, r \geq 0$ t.c. $r^n = y$. Allora scrivo:

$$r = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}.$$

(• ES: $\sqrt[4]{16} = 2$ perché $2^4 = 16$)

## Dimostrazione (accenno): (*)

Si definisce $r = \sup \{ a \in \mathbb{R},\ a \geq 0 : a^n \leq y \}$

- **Potenze**: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n - \text{volte}}$

(Come risolvere) $a^{3/4} = ?$

$\{$ •) Proprietà (1)$^{*}$: $a^{n \cdot m} = (a^n)^m \}$

(In generale) $a^{p/q} = a^{p \cdot \frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, ipotizzando $a \geq 0$

Quindi posso calcolare $a^x$ $\forall x \in \mathbb{Q},\ x > 0,\ \forall a \geq 0$.

Domanda:

? Se $x$ è irrazionale $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $x \geq 0$, come definisco $a^x$ ?

(Per approssimazione dei numeri razionali.)

$2^{\pi} = ?$

$\pi = 3{,}141\ldots$ Quindi: $> 2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{31}$

$> 2^{3,14} = 2^{\frac{314}{100}} = \left(\sqrt[100]{2}\right)^{314}$

## Definizione:

$$a^r = \sup \{ a^s : s \in \mathbb{Q},\ s \leq r \} \quad \text{per } a \geq 1$$

OSS: Se $0 < a < 1$, $a^r = a^{-1 \cdot (-r)} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)}_{>1}^{-r} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^r\right)^{-1}$

## ▸ Proprietà delle potenze:

(1) $0^r = 0 \quad \forall r > 0$

(2) $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

(3) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(4) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

(5) $a^{rs} = (a^r)^s$ (Proprietà (1) ⊛)

(6) $a^{-1} = \frac{1}{a}$;

(7) $a^{-r} = a^{-1 \cdot r} = (a^{-1})^r = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1^r}{a^r} = \frac{1}{a^r}$

(8) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = a^r \cdot a^{-s}$.

## ▸ Esercizio:

$$2^{3/2} \overset{①}{=} (2^3)^{1/2} = \sqrt[2]{8}$$

$$\overset{②}{=} (2^{1/2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

## ▸ Esercizio: Semplificare:

$$\frac{\sqrt[3]{a^4 b^2 c}}{\sqrt[2]{a b c^3}} = \frac{(a^4 b^2 c)^{1/3}}{(abc^3)^{1/2}} = \frac{(a^4)^{1/3} \cdot (b^2)^{1/3} \cdot c^{1/3}}{a^{1/2} \cdot b^{1/2} \cdot (c^3)^{1/2}}$$

$$= \frac{a^{4/3} \cdot b^{2/3} \cdot c^{1/3}}{a^{1/2} \cdot b^{1/2} \cdot c^{3/2}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3} - \frac{3}{2}}$$

$$= a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{-7}{6}}.$$

OK.

▸ <u>Esercizio</u>: Semplificare:

$$\frac{\sqrt[3]{a^{12} \cdot b^{6} \cdot c^{7}}}{\sqrt[2]{a^{5} \cdot b^{3} \cdot c}} \qquad (*)$$

(Da fare Domani).

(> Guardare <u>pag 14</u> delle note su e-learning per esercizi)

(*)

$$\frac{\sqrt[3]{a^{12} \cdot b^{6} \cdot c^{7}}}{\sqrt[2]{a^{5} \cdot b^{3} \cdot c}} = \frac{(a^{12} \cdot b^{6} \cdot c^{7})^{\frac{1}{3}}}{(a^{5} \cdot b^{3} \cdot c)^{1/2}} = \frac{(a^{12})^{1/3} \cdot (b^{6})^{1/3} \cdot (c^{7})^{\frac{1}{3}}}{(a^{5})^{1/2} \cdot (b^{3})^{1/2} \cdot (c)^{1/2}}$$

$$= \frac{a^{4} \cdot b^{2} \cdot c^{7/3}}{a^{5/2} \cdot b^{3/2} \cdot c^{1/2}} = a^{(4-\frac{5}{2})} \cdot b^{(2-\frac{3}{2})} \cdot c^{(7/3 - 1/2)}$$

04

$$= a^{3/2} \cdot b^{1/2} \cdot c^{\frac{11}{6}}$$