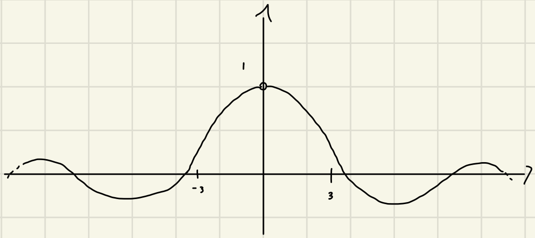
Lunedì 11/10/202

- **ES:** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

  In $x = 0$, f non è definita. Il grafico di f è circa:



Vedremo che in questo caso: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- **ES:** $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 4}$

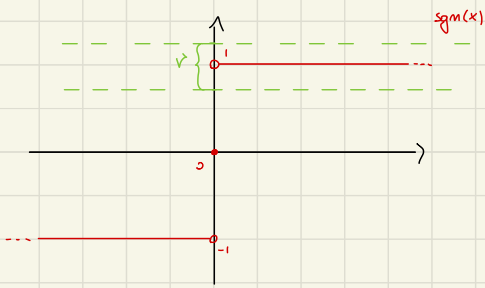
  Voglio studiare il comportamento di f per $x \to \infty$. Non ha senso scrivere "$f(\infty)$", però si può calcolare: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

>>> RICORDIAMO LA DEFINIZIONE DI LIMITE:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $\forall V$ intorno di l, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in (\text{dominio } f) \cap (U \setminus \{x_0\})$.

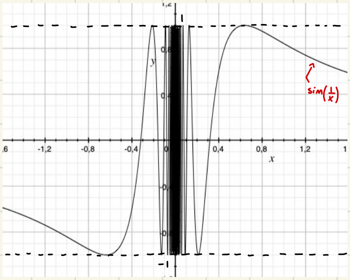
- **ES:** Funzione $\mathrm{sgn}(x)$ definita come:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



OSSERVAZIONE: $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ NON ESISTE. (Non è verificata la definizione, ad esempio V in figura)

· ES: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



▶ $\lim_{x \to \pm\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+ \\ \lim_{x \to -\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0^- \end{cases}$

(Tende a 0)

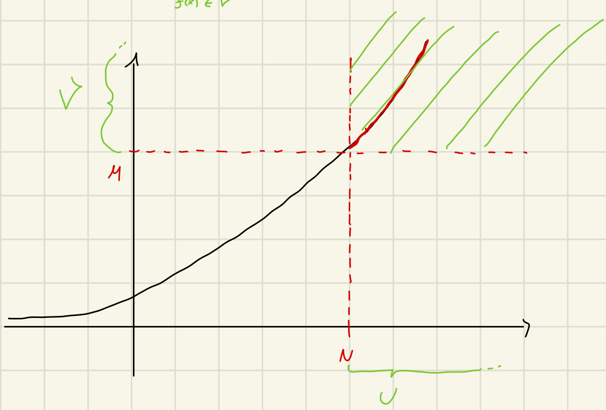
(tende a 0 da)

▶ $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$ NON ESISTE

CASO 1: $x_0, \ell = +\infty$ $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$

La definizione di limite è equivalente a:

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{f(x) > M}_{f(x) \in V}$ $\forall x \in$ dominio f, con $\underbrace{x > N}_{x \in U}$



· ES: $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Fisso N grande a piacere (più grande scelgo N, più piccolo è il "bersaglio"/ Intorno V). Cerco $N \in \mathbb{R}$ t.c. $e^x > M$ per $x > N$.

(1) Se $M \leq 0$, osservo che $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi posso scegliere N arbitrario.

(2) Se $M > 0$, osserviamo che $e^x > M$ equivale a: $\ln e^x > \ln M \iff x > \ln M$. Quindi se scelgo $N = \ln M$, la condizione "$x > N$" (ovvero $x \in U = (N, +\infty)$) implica $e^x > M$ ($x \in V = (M, +\infty)$).

CASO 2: $x_0 = -\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\right)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $\forall x \in$ dominio f, con $x < N$

- **ES**: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

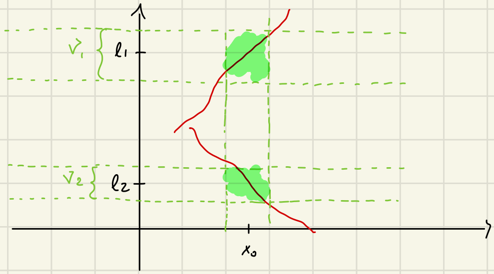
- **ES**: $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

  $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

(IMPORTANTE PER ESAME)

TEOREMA: Se il limite esiste, allora è unico.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che esistono due valori, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, con $l_1 \neq l_2$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = l_2$.



$\Rightarrow$ Dalla definizione: dato V_1 intorno di l_1, $\exists$ U_1 intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_1$ $\forall x \in \text{dom}. f \cap (U_1 \setminus \{x_0\})$.

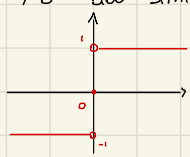
$\Rightarrow$ Dalla definizione: dato V_2, intorno di l_2, $\exists$ U_2 intorno di x_0 t.c. $f x \in V_2$, $\forall x \in \text{dom}. f \cap (U_2 \setminus \{x_0\})$.

Se scelgo V_1 e V_2 abbastanza piccoli, in modo che "$V_1 \cap V_2 = \emptyset$", e definisco "$U = U_1 + U_2$", ottengo che per $x \in \text{dom}. f \cap (U \setminus \{x_0\})$ vale che $f(x) \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

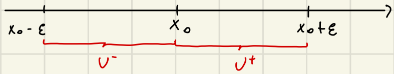
Contraddizione. ■

LIMITE DESTRO/SINISTRO

- **ES**: La funzione $\text{Sgn}(x)$ si avvicina ad "1" per $x \to 0$ da destra; si avvicina a "-1" per $x \to 0$ da sinistra.



Definisco gli intorni destri di x_0 come gli intervalli $U^+ = [x_0, x_0+\varepsilon)$ e gli intorni sinistri come $U^- = (x_0-\varepsilon, x_0]$



(Si legge: limite per x che tende a x_0 da destra.)

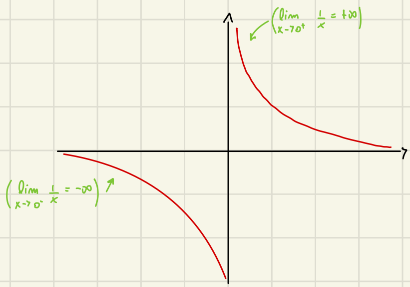
DEFINIZIONE: • $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ se $\forall\, V$ intorno di ℓ, $\exists\, U^+$ intorno destro di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in \text{dom.} f \wedge (U^+ \setminus \{x_0\})$.

• Idem per $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, usando U^- al posto di U^+.

• ES: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

▶ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

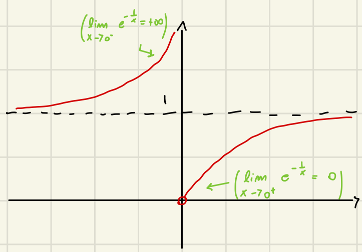
▶ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$



• ES: $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

▶ $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ($-\frac{1}{x} \to -\infty$)

▶ $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ ($-\frac{1}{x} \to +\infty$)



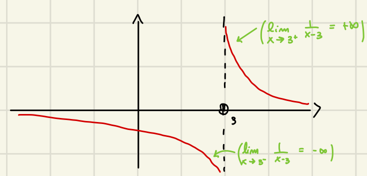
(IMPORTANTE)

TEOREMA: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste se e solo se esistono e son uguali: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

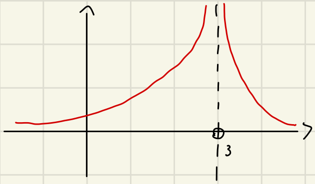
• ES: $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$ NON ESISTE perché $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.

• ESERCIZIO: $\lim\limits_{x \to 3^\pm} \dfrac{1}{x-3} = \pm\infty$. Questo significa: ▶ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ e ▶ $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^\pm} \dfrac{1}{x-3}$ NON ESISTE.



• ESERCIZIO: $\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$



$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^{\pm}} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ ESISTE.

OSSERVAZIONE: E' equivalente scrivere: $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$ (oppure)

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

PROPOSIZIONE: Siano $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$; $f_1, f_2 : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e supponiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$, con $i = 1, 2$. Allora:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x) \big) = l_1 + l_2$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = l_1 \cdot l_2$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$.

• ES: Vogliamo calcolare: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x + 3$.

Scrivo: $f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) = f_1(x)\, f_2(x)$, con $x \neq 0$.

$\Rightarrow f_1(x) = x^2 \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

$\Rightarrow f_2(x) = \underbrace{1}_{(\to 1)} - \underbrace{\dfrac{2}{x}}_{(\to 0)} + \underbrace{\dfrac{3}{x^2}}_{(\to 0)} \to 1$ per $x \to +\infty$

Con una piccola estensione della proposizione (nel caso in cui $l_1 = +\infty$, $l_2 = 1$) ottengo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f_1(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

• ES: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 5}{3x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{x}}^{\,0} + \cancel{\frac{5}{x^2}}^{\,0}\right)}{\cancel{x^2}\left(3 - \cancel{\frac{4}{x^2}}_{\,0}\right)} = \dfrac{1}{3}$

· ES: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

$f_1(x) = \sin x$; $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0$

$f_2(x) = x$; $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_2(x) = 0$

Quindi l_1, l_2 sono entrambi 0 e non posso applicare la proprietà precedente per calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

=> Si tratta di una forma indeterminata: " $\frac{0}{0}$ ".

A prima vista non sappiamo calcolare il limite, ma lo faremo con strumenti più raffinati.

· ES (Per casa).

· $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x - 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3}^{\,x}\left(1 + \overset{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}_{\,1}\left(1 + \underset{0}{\frac{1}{x}} - \underset{0}{\frac{5}{x^2}}\right)} = \begin{cases} +\infty & \text{per } x \to +\infty \\ -\infty & \text{per } x \to -\infty \end{cases}$$

· $$\lim_{x \to +\infty} \ln x + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \overset{+\infty}{\ln x} + \lim_{x \to +\infty} \overset{0}{\frac{1}{x^2}} = +\infty + 0 = +\infty.$$

· $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^3 - 4x^2 + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}\left(1 - \overset{0}{\frac{5}{x^2}}\right)}{\cancel{x^3}_{\,x}\left(1 - \underset{0}{\frac{4}{x}} + \underset{0}{\frac{2}{x^3}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ESERCIZI:

(201): $$\frac{2^x - 1}{8^x - 3} \leq 0$$

① $2^x - 1 \leq 0 \iff 2^x \leq 1 \iff 2^x \leq 2^0 \iff x \leq 0$

(oppure) $\log_2 2^x \leq \log_2 1 = 0 \iff x \leq 0$

$9^x - 3 < 0 \iff 9^x < 3 \iff \log_3 9^x < \log_3 3 \iff \log_3 3^{2x} < \log_3 3$

$\iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}$

(2)

		0		1/2	
$2^x - 1$	+		−		−
$9^x - 3$	+		+		−
	+		−		+

Quindi: $\frac{2^x - 1}{9^x - 3} \le 0$ per $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ (Insieme delle soluzioni).

CAMBIAMENTO DI BASE

$$\log_a x = \frac{\log_a x}{\log_b a}$$

- Es: $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}}$

(2.1): $\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right) > 0$.

① $\log_3$ è una funzione monotona crescente.

$\Rightarrow \log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right) > 0 \iff 3^{\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right)} > 3^0$

$\iff \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 1.$

(>>> In alternativa osservo che: 3^y è crescente, quindi ancora:
$3^{\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right)} > 3^0 = 1 \iff \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 1$)

② $\left(\frac{1}{3}\right)^y$ è decrescente. $\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 1$

$\iff \frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} < \frac{1}{3}^1 \iff x+2 < \frac{1}{3} \iff x < \frac{1}{3} - 2$

$\iff x < -5/3$

ATTENZIONE al Dominio della funzione. ③ Affinché $\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right)$ sia definita, serve che:

(α) $x+2>0 \iff x>-2$

(β) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)>0 \iff x+2<1 \iff x<-1$

④ L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione tra $(-\infty,-\frac{5}{6}) \cap (-2,-1)$; insieme soluzioni: $x \in \left(-2,-\frac{5}{3}\right)$.

(4c): $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x}$

$g(x)=x^2+1$

$\Rightarrow f\circ g(x)=f(g(x))=\dfrac{\sqrt{(x^2+1)-3}}{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x^2+1}$

• <u>ESERCIZIO</u>: Date le funzioni: $\cos(e^{3x^2})$, $\log(1+e^{2x})$, $e^{\arctan x}$, scriverle come composizione di funzioni elementari:

(1) $\cos(e^{3x^2})$.

$\Rightarrow f(x)=\cos x$
$g(y)=e^y$
$h(z)=3z$
$m(t)=t^2$

$\Rightarrow \cos(e^{3x^2})=f\circ g\circ h\circ m(t)$.

(2) $\log(1+e^{2x})$

$\Rightarrow f(x)=\log(x)$
$g(y)=1+y$
$h(z)=e^z$
$m(t)=2t$

$\Rightarrow \log(1+e^{2x})=f\circ g\circ h\circ m(t)$

(3) $e^{\arctan x}$

$\Rightarrow f(x) = e^x$

$g(y) = \arctan y \quad \Rightarrow \quad e^{\arctan x} = f \circ g(y).$

(ANCORA SUI LIMITI)

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

<u>Osservazione</u>: $-1 \leq \sin x \leq 1$. Posso allora scrivere:

$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \to 0.$

Quindi intuitivamente, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \to 0$ e anche $\frac{\sin x}{x} \to 0$.

$\Rightarrow$ Per essere rigorosi useremo il teorema dei carabinieri.

(2) $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty} + \sin x.$

<u>osservazione</u>:

ⓐ $|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1.$

ⓑ $\Rightarrow \underbrace{e^x - 1}_{\to +\infty} \leq e^x + \sin x \leq \underbrace{e^x + 1}_{\to +\infty} \Rightarrow e^x + \sin x \to +\infty.$

[Cose più difficili sono della forma "$+\infty - \infty$", ($\lim_{x \to +\infty} e^x - x^4$), "$\frac{0}{0}$", "$\frac{+\infty}{+\infty}$".]