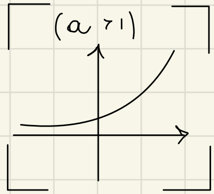
Lunedì 18/10/2021

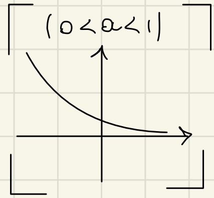
METODI PER CALCOLARE LIMITI

Sappiamo che:

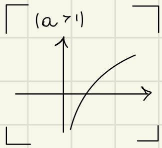
(1) $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ = 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$



(2) $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$



(3) $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$



(4) $\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$

(5) $\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Per calcolare limiti di funzioni più complicate si usano la somma, prodotto, quoziente e composizione (o cambio di variabile).

TEOREMA : CAMBIO DI VARIABILE

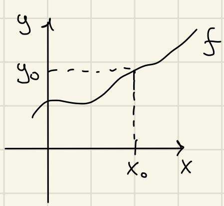
Siano $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A, $f(A \setminus \{x_0\}) \subset B$ tali che:

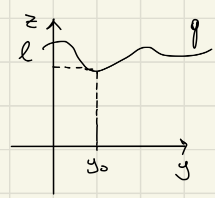
(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(b) $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

(c) $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$ (non serve se $g(y_0) = \ell$)

Allora: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$.





• **ES**: $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$. $\quad e^{\frac{1}{x}} = g(f(x))$, ove $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(y) = e^y$.

▷ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ (= y_0)$

▷ $\lim_{y \to \underbrace{+\infty}_{y_0}} g(y) = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$.

Si può scrivere: $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{(y = \frac{1}{x})}{=} \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$.

• **ES**: $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{(y = \frac{1}{x})}{=} \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$.

• **ES**: $\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 1) \underset{(y = x^2 - 1)}{=} \lim_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$

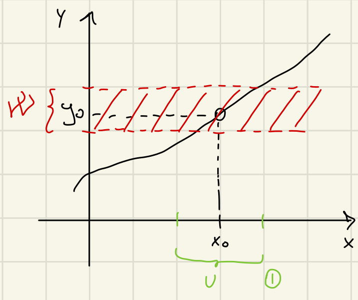
$\left\{ f(x) = x^2 - 1. \text{ Quindi: } \lim_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty \right\}$

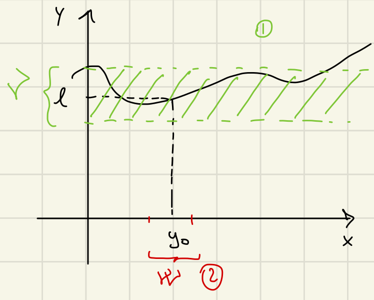
• **ES**: $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{2x^2 - 3}\right) \underset{(y = \frac{x}{2x^2-3})}{=} \lim_{y \to 0} \ln(y) = -\infty$.

$\left\{ f(x) = \frac{x}{2x^2 - 3}. \text{ Quindi: } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \right\}$

DIMOSTRAZIONE: TEOREMA CAMBIO DI VARIABILE

Vogliamo dimostrare che "$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$", ovvero che: $\forall V$ intorno di ℓ, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $g(f(x)) \in V \ \forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$.





- Dall'ipotesi (b), dato V intorno di ℓ, $\exists$ W intorno di y_0 t.c. $g(y) \in V \ \forall y \in B \cap (W \setminus \{y_0\})$.
- Ora usando l'ipotesi (a), dato l'intorno W di y_0 appena trovato, $\exists$ U_1 intorno di x_0 t.c. $f(x) \in W$, $\forall x \in A \cap (U_1 \setminus \{x_0\})$.
- Dall'ipotesi (c) abbiamo anche che $\exists$ U_0 intorno di x_0 t.c. $f(x) \neq y_0$ per $x \in A \cap (U_0 \setminus \{x_0\})$. Ora scelgo "$U_2 = U_0 \cap U_1$".

$\Rightarrow f(x) \in W \setminus \{y_0\}, \ \forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$. ■

• ES: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x}$.

$\left\{ \text{osservazione: } \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \overset{(y = \frac{1}{x})}{=} \lim\limits_{y \to 0} \sin y = 0. \right\}$

Effettuiamo il cambio di variabile:

$y = \frac{1}{x}$ $\left(x = \frac{1}{y}\right)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{y} \sin y = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

• ES: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha \sin(\alpha x)}{\alpha x} \overset{(y = \alpha x)}{=} \lim\limits_{y \to 0} \alpha \underbrace{\frac{\sin(y)}{y}}_{\to 1} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$

• ES: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x + 2}{\ln x + 3} \overset{(y = \ln x)}{=} \lim\limits_{y \to -\infty} \frac{y+2}{y+3} = \lim\limits_{y \to -\infty} \frac{\cancel{y}\left(1 + \frac{2}{y}\right)}{\cancel{y}\left(1 + \frac{3}{y}\right)} = 1$

• ES: $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\sin x}} \overset{(y = \sin x)}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} e^{\frac{1}{y}} \overset{(z = \frac{1}{y})}{=} \lim\limits_{z \to +\infty} e^{z} = +\infty$

• PER CASA: $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{\sin x}}$. $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{\sin x}} \overset{(y = \sin x)}{=} \lim\limits_{y \to 0^-} e^{\frac{1}{y}} \overset{(z = \frac{1}{y})}{=} \lim\limits_{z \to -\infty} e^{z} = 0.$

• PER CASA: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \Big(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \arctan x}_{= y}\Big) = \lim\limits_{y \to 0} \ln y = -\infty$

$\left\{ \text{osservazione: } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2} - \cancelto{\frac{\pi}{2}}{\arctan x} = 0 \right\}$

• ES: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1 - \cos x} \overset{(y = 1 - \cos x)}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$

$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 - \cos x \to 0^+ \text{ per } x \to 0 \\ \text{poiché "} 1 - \cos x \geq 0 \text{ per } x \to 0 \text{".} \end{array} \right\}$

• PER CASA: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2+2}}$.

• PER CASA: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos(e^x)}{e^x}$.

• ES: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x \cdot x^2} \overset{(y = x^2)}{\underset{(x = \sqrt{y})}{=}} \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{\sqrt{y}\ y} = \lim\limits_{y \to 0^+} \cancelto{+\infty}{\frac{1}{\sqrt{y}}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\sin y}{y}} = +\infty.$

ALTERNATIVA $\rightarrow = \lim\limits_{x \to 0^+} \cancelto{+\infty}{\frac{1}{x}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = +\infty$.

SOMME, PRODOTTI E QUOZIENTI

Abbiamo visto che se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(y) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora:

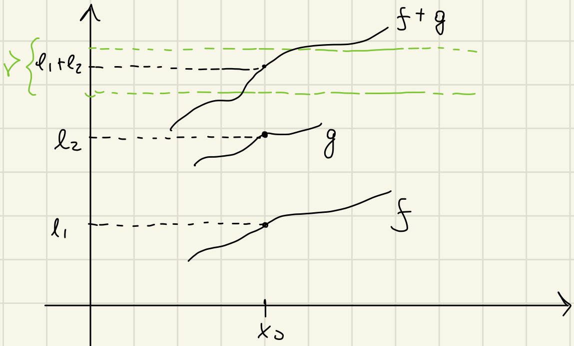
(a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = l_1 + l_2$

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE: CASO (a)

Poichè $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, anche $l_1 + l_2 \in \mathbb{R}$, e gli intorni di $l_1 + l_2$ sono della forma $V = (l_1 + l_2 - \varepsilon,\ l_1 + l_2 + \varepsilon)$. Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) + g(x) \in V$, ovvero $|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| < \varepsilon$, $\forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$.



Poichè "$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$", dato $\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists U_1$ t.c. $|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in A \cap (U_1 \setminus \{x_0\})$.
Idem con g. Dato $\varepsilon > 0\ \exists U_2$ intorno di x_0 t.c. $|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in A \cap (U_2 \setminus \{x_0\})$.
Fisso $U = U_1 + U_2$. Allora $\forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$ valgono: $|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. {DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $|a+b| \leq |a| + |b|$.}

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

FUNZIONI RAZIONALI

Sia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ove: $\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 \end{array}\right\}$ $n, m \in \mathbb{N}$ e $a_n, b_m \neq 0$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = ?$ Scrivo:

- $P(x) = x^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x^n}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0} \right)$
- $Q(x) = x^m \left(b_m + \underbrace{\frac{b_{m-1}}{x^m}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{b_0}{x^m}}_{\to 0} \right)$

(TERMINI CHE VANNO A ZERO)

Quindi: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^n (a_n + o(1))}{x^m (b_m + o(1))} = x^{n-m} \cdot \dfrac{(a_n + o(1))}{(b_m + o(1))}$. Ho tre casi:

CASO 1 : $n = m$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n + o(1)}{b_m + o(1)} \longrightarrow \frac{a_n}{b_m} \quad \text{per} \quad x \to \pm\infty.$$

• ES: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{-2x^2 + 7} = -\frac{3}{2}$.

CASO 2 : $n > m$.

(α) $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{\overset{>0}{n-m}}}_{\to +\infty} \frac{(a_n + o(1))}{(b_m + o(1))} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

• ES: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 3x + 7}{2x^3 - 4x} = +\infty$.

• ES: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x + 6}{-2x^2 + 5} = -\infty$.

(β) $\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^{n-m}}_{\to -\infty} \frac{(a_n + o(1))}{(b_m + o(1))} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n-m \text{ è PARI e } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ oppure} \\ & \text{se } n-m \text{ è DISPARI e } \frac{a_n}{b_m} < 0. \\ -\infty & \text{negli altri casi.} \end{cases}$

• ES: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{-2x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \frac{1}{-2} = +\infty$.

CASO 3 : $n < m$.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ perché si scrive $\frac{P(x)}{Q(x)} = \cancel{\frac{1}{x^{m-n}}}^{\to 0} \cdot \cancel{\frac{a_n + o(1)}{b_m + o(1)}}^{\frac{a_n}{b_m}}$ per $x \to \pm\infty$

Per $x \to 0$ cambia il ruolo degli esponenti perché x^α "diventa più piccolo se α è più grande" (per x piccolo, $|x^3| < |x^2|$).

Quindi in:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, il termine più importante è quello di grado più basso.

• ES: $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 2x^2} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1(-1 + \cancel{2x}^{0} + \cancel{3x^2}^{0})}{2x^2(1 + \cancel{2x}_{0})} = \lim_{x \to 0} \cancel{\frac{1}{x^2}}^{+\infty} \cdot \cancel{\frac{(-1 + o(1))}{(2 + o(1))}}^{-\frac{1}{2}} = -\infty$

• ES: $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{-1}{x} = \mp\infty$

TORNIAMO AI LIMITI NOTEVOLI

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (T2C)

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (SEGUE DA 1)

($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

(3) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

($y = \arctan x$)

(4) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\underbrace{x}_{x = \tan(\arctan x)}}} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{\tan y}{y}}_{\to 1}\Bigg)^{-1} = 1^{-1} = \boxed{1.}$

{Sto applicando il cambio di variabile "$z = \frac{\tan y}{y}$" t.c.: $\lim_{y \to 0} \left(\frac{\tan y}{y}\right)^{-1} = \lim_{z \to 1} (z)^{-1} = 1$}

OSSERVAZIONE: $\frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} = 1 = \cos(0).$

▶ Gli altri limiti notevoli si basano su: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$ (*)

La formula (*) contiene due fatti:

① $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ esiste ed è un numero reale positivo e maggiore di 2. È un limite della forma "1^∞".

② A questo limite diamo il nome "e" e lo chiamiamo "numero di Nepero".

Dal limite notevole (*) si calcolano:

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$