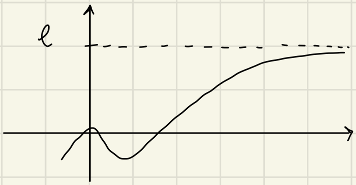
Lunedì 29/11/2021

STUDI DI FUNZIONE

Preliminare: studio degli asintoti per $x \to \pm\infty$.

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, allora abbiamo un asintoto orizzontale.



ESEMPIO: $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

ESEMPIO: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^2-3} = \frac{1}{2}$

Osservazione: Idem per "$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$".

2) Asintoto obliquo.

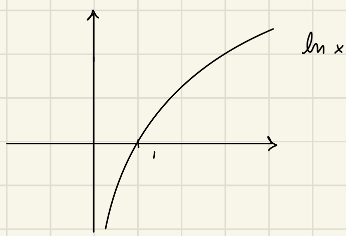
Supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$. Proviamo a calcolare "$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$".

(a) Se il limite esiste ed è finito, $\neq 0$, lo chiamo "m". Questo "m" è la pendenza di un eventuale asintoto obliquo.

(start) Se $m=0$ non abbiamo un asintoto obliquo, ma nemmeno orizzontale, perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• ES: $f(x) = \ln x$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$



(end)

(Start) Se $m = +\infty$ non abbiamo un asintoto obliquo e la funzione cresce più rapidamente di qualunque retta "$ax+b$".

• ES: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$,
$f(x) = x^3 + 3x + \sin x + \dots$, [...]

(end)

(start) Se $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ancora non è detto che ci sia un asintoto obliquo. Per verificarlo devo calcolare "$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$".

Se il limite esiste finito, lo chiamo q

e l'asintoto obliquo in questo caso esiste ed è "$mx+q$".

• ES: Se $q = \pm\infty$, l'asintoto obliquo non esiste: $f(x) = 3x + \sqrt{x}$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 = m$. Quindi: $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

• ES: $f(x) = \frac{x^2-2}{x-3}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Quindi: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$.
Quindi:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-2-(\cancel{x^2}-3x)}{x-3} = 3$. L'asintoto obliquo è: $x+3$.

NOTA: { E' probabile che nello studio di funzione, all'esame, ci sia un A.O. }

OSSERVAZIONE: lo stesso per $x \to -\infty$.
• ES: $f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$. Calcoliamo: (1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ {$\Rightarrow$ no asintoto orizzontale.}

(2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ {Possibile asintoto obliquo.}

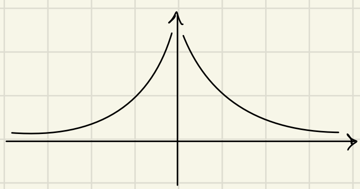
$\Rightarrow$ (3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2-3x(x-1)}{x-1} =$
$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2+3x}{x-1} = 3$.

$\Rightarrow$ Asintoto obliquo: $3x+3$. }. (end)

3) Se non c'è né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, diciamo semplicemente che non c'è asintoto orizzontale o obliquo per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$).

4) Asintoto verticale.
Se $x_0 \notin$ dominio f, ma x_0 è punto di accumulazione di dom. f, e "$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($o -\infty$)".
Allora abbiamo un asintoto verticale per $x \to x_0$.

• ES: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, con dominio $f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $x_0 = 0$. Quindi: $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$.
$\Rightarrow$ asintoto verticale per $x \to 0$.

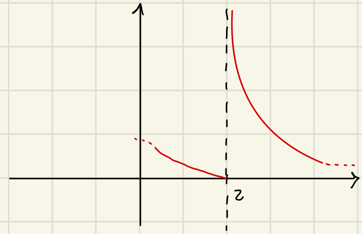


• ES: $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$, con dominio $f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Calcoliamo il limite da destra e da sinistra di $x_0 = 2$. Quindi:

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} \overset{(y=x-2)}{=} \lim_{y\to 0^+} e^{\overset{+\infty}{\frac{1}{y}}} \overset{(z=\frac{1}{y})}{=} \lim_{z\to +\infty} e^{z} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \overset{(y=x-2)}{=} \lim_{y\to 0^-} e^{\overset{-\infty}{\frac{1}{y}}} \overset{(z=\frac{1}{y})}{=} \lim_{z\to -\infty} e^{z} = 0 .$$

In questo caso c'è asintoto verticale per $x \to 2^+$.



• ES: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, con dominio $f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. "$\lim_{x\to 0^\pm} \sin\frac{1}{x}$" non esiste e non ho asintoto verticale per $x \to 0^\pm$.

▶ Per fare uno studio di funzione, si determinano il dominio, i limiti agli estremi del dominio (asintoti), il segno, la derivata, la monotonia, massimi e minimi (locali e globali), la derivata seconda, la convessità.

PASSI FONDAMENTALI:

1) Dominio ed eventuali simmetrie $\left(f(x) = f(-x) \text{ oppure } f(x) = -f(-x)\right)$

• ES: $f(x) = \sqrt{x-1}$. Dominio $f = [1, +\infty)$ ed $f(x)$ non ha simmetrie.

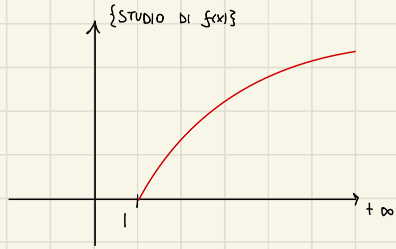
2) Si calcolano limiti agli estremi del dominio, ovvero gli "$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$" tale che x_0 non interni al dominio di f, ma x_0 è punto di accumulazione del dominio f.

• ES: $f(x) = \sqrt{x-1}$. Gli estremi del dominio "$[1,+\infty)$" sono $x_0 = 1$, $x_0 = +\infty$. Calcoliamo quindi:

(•) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0$. (⇒ no asintoto verticale).

(•) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$. (⇒ no asintoto orizzontale).

(•) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 0$. (⇒ no asintoto obliquo).



3) Segno di f: dove f è positiva, dove è negativa.

4) Si calcola la derivata e si vede se dove è positiva.

• ES: $f(x) = \sqrt{x-1}$. Quindi: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. ⇒ $f'(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$.

5) Dal segno della derivata si deducono gli intervalli di monotonia e usando anche i limiti agli estremi del dominio si determinano i punti di massimo e minimo locale e globale.

• ES: $f(x) = \sqrt{x-1}$. Quindi: $f'(x) > 0$. ⇒ f è crescente. Inoltre "$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$". In $x = 1$ c'è un punto di minimo assoluto; non ci sono punti di massimo né locale, né globale.

6) Calcolo la derivata seconda e dal suo segno deduco la convessità.

• es: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(\sqrt{x-1})^3} =$

$= -\dfrac{1}{4(x-1)^{3/2}} < 0. \Rightarrow f$ è concava.

ESEMPIO

$f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$. Dominio $f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Gli estremi del dominio di f sono "$\pm\infty$", "0". Calcoliamo i limiti agli estremi:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{(2x+1)}^{\to+\infty}\underbrace{e^{\cancel{\frac{1}{x}}\nearrow 0}}_{\to 1} = +\infty$. $\Rightarrow$ No asintoto orizzontale.

(b) Potrebbe esserci un asintoto obliquo. Per verificarlo calcolo "$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2x}\cancel{-1}^{+2}}{\cancel{x}}\cdot\cancel{e^{\frac{1}{x}}}^{1} = 2$".

(c) Potrebbe esserci un asintoto obliquo con pendenza "$m=2$". Calcolo quindi: $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x =$
$\lim_{x\to+\infty}\left((2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{2x}_{\to+\infty}\underbrace{(e^{\cancel{\frac{1}{x}}\nearrow 0}-1)}_{\to 0} - \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(\cancel{1}+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\cancel{-1}\right) - 1 =$

Questo per l'espansione asinto.:
$e^y = 1 + y + o(y)$, per $y\to 0$.
$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, per $x\to+\infty$.

$= \lim_{x\to+\infty} 2 + o(1) - 1 = 2 - 1 = 1 = q$. Quindi ho l'asintoto obliquo "$2x+1$".

(Effettuo lo stesso per "$x\to-\infty$":)

(d) $\lim_{x\to-\infty} \overbrace{(2x-1)}^{\to-\infty}\underbrace{e^{\cancel{\frac{1}{x}}\nearrow 0}}_{\to 1} = -\infty$. $\Rightarrow$ No asintoto orizzontale.

(e) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 2\cdot 1 = 2 = m$. Quindi: (f) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x = \lim_{x\to-\infty} 2x\underbrace{(e^{\frac{1}{x}}-1)}_{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} - e^{\frac{1}{x}} = 1$

Quindi "$2x+1$" è anche asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

▷ Verifico se ci sono asintoti verticali; calcolo:

(g) $\lim_{x\to 0^+}\overbrace{(2x-1)}^{\to -1}\underbrace{e^{\cancel{\frac{1}{x}}\nearrow 0}}_{\to 1} = -\infty$. $\Rightarrow$ Asintoto verticale per $x\to 0^+$.

(h) $\lim_{x\to 0^-}\overbrace{(2x-1)}^{\to -1}\underbrace{e^{\cancel{\frac{1}{x}}\nearrow -\infty}}_{\to 0} = 0$. $\Rightarrow$ No asintoto verticale per $x\to 0^-$.

▷ Derivata e monotonia:

$f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x-1)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(2+(2x-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0}\dfrac{2x^2-2x+1}{\underbrace{x^2}_{>0}}$. Verifico il segno del numeratore "$2x^2-2x+1$".

Calcolo quindi gli zeri della parabola "$2x^2-2x+1$":

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \overset{<0}{\sqrt{4-8}}}{4}$. La parabola non ha zeri $\Rightarrow$  (GRAFICAMENTE)

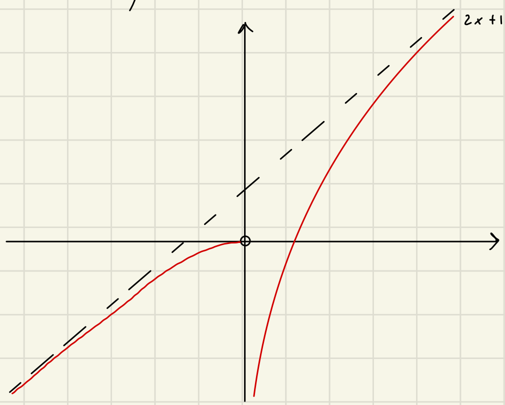
$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in$ dominio f. Quindi gli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ la funzione è crescente.

$\Rightarrow$ Nè massimi nè minimi locali.

▷ Per calcolare la convessità calcolo:

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}}\left(0 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\cancel{-2} + \cancel{\frac{2}{x}} - \frac{1}{x^2} + \cancel{2} - \cancel{\frac{2}{x}}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} < 0 \quad \Rightarrow f \text{ concava.}$$



ESERCIZIO

$f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$. Stesso dominio. (PER CASA:) Calcolare gli asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ (RISULTATO: $2x+3$).

▷ Verifico se ci sono asintoti verticali:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \overbrace{(2x+1)}^{\to 1} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty} = +\infty$. Asintoto verticale per $x \to 0^+$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \overbrace{(2x+1)}^{\to 1} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 0} = 0$. No Asintoto verticale per $x \to 0^-$.

▷ Derivata:

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x+1)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0} \frac{2x^2 - 2x - 1}{\underbrace{x^2}_{>0}}.$$

Calcoliamo gli zeri del numeratore "$2x^2 - 2x - 1$":

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \overbrace{\sqrt{4+8}}^{=\sqrt{12} = 2\sqrt{3}}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Quindi:

		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	
$e^{\frac{1}{x}}$	+		+		+		+
$\frac{1}{x^2}$	+		+		+		+
$2x^2-2x-1$	+		−		−		+
	↗		↘		↘		↗

$\Rightarrow$ il punto "$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$" corrisponde ad un massimo relativo.

$\Rightarrow$ il punto "$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$" corrisponde ad un minimo relativo.

▷ Per essere più precisi bisognerebbe calcolare $f''(x)$.

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}}\left(0+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\underbrace{\left(\cancel{-2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\cancel{2}+\frac{2}{x}\right)}_{\frac{4x+1}{x^2}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\underbrace{x^4}_{>0}}\underbrace{(4x+1)}_{>0 \text{ SE E SOLO SE } "x>-\frac{1}{4}".}$$