Venerdì 26/11/2021

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Quando deriviamo una funzione $f(x)$ otteniamo una nuova funzione $f'(x)$.
(ES: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$). Questa può essere derivata e otteniamo $(f'(x))' = f''(x)$.
$f''(x)$ si chiama derivata seconda di x. Continuando a derivare si ottengono $f'''(x) =$
$= (f''(x))' = f^{(3)}(x)$, $f''''(x) = (f'''(x))' = (f^{(3)}(x))'$, [...], $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

• ES: $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$. $\Rightarrow f''(x) = -\sin x$.
$f^{(3)}(x) = -\cos x$
[...]

(In generale:)

▶ $C^n(A) = \{ f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f è derivabile n volte, e $f^{(n)}(x)$ è una funzione continua$\}$.

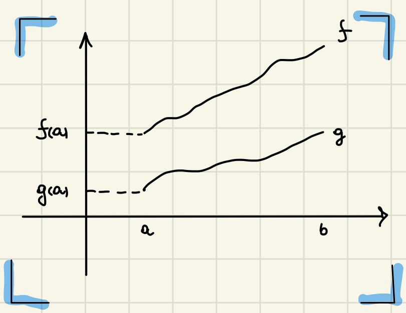
▶ $C^\infty(A) = \{ f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili infinite volte $\}$.

• ES: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$ sono tutte C^∞.

Ricordiamo: Se f é derivabile in un intervallo I allora "f" é crescente se e solo se "$f' \geq 0$".

PROPOSIZIONE

Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili. Supponiamo:



1) $f(a) \geq g(a)$
2) $f'(x) \geq g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$

Allora $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

DIMOSTRAZIONE

$h(x) := f(x) - g(x)$. $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$. $\Rightarrow h$ è monotona crescente.
$\Rightarrow h(x) \geq h(a)$ $\forall x \in [a,b]$.

Però sappiamo anche che "$h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$". (da "1)")
$\Rightarrow h(x) \geq h(a) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Ma $h(x) \geq 0 \iff f(x) \geq g(x)$. ■

APPLICAZIONE

Abbiamo affermato che (1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Per dimostrarlo è sufficiente provare la seguente cosa:

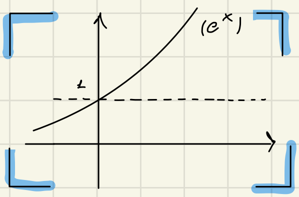
$$e^x \geq \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Se prendo "$n > \alpha$" ottengo "$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^n}}_{\geq \frac{1}{n!}} \cdot \overbrace{\frac{x^n}{x^\alpha}}^{= x^{n-\alpha} \to +\infty} = +\infty$

▷ Dobbiamo dimostrare: $e^x \geq \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \geq 0.$ (P_n) ("Proprietà n")

① Per $n = 0$ abbiamo: $e^x \geq \frac{x^0}{0!} = 1, \quad \forall x \geq 0.$ (P_0)

(Mi chiedo) E' vera (P_0) ? Si.



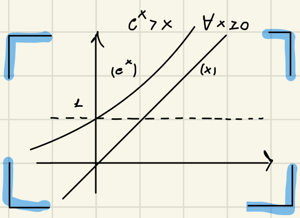
Infatti:

(1) $e^0 = 1$

(2) $(e^x)' = e^x > 0 = (1)' \quad \forall x \geq 0.$

Quindi applico la proposizione con $f(x) = e^x$, $g(x) = 1$, in un intervallo $[0, b]$, per un $b > 0$ qualunque. Ottengo $f(x) \geq g(x)$ in $[0, b]$ $\forall b > 0$, quindi in $[0, +\infty)$, ovvero (P_0).

② Ora dimostriamo (P_1):



Abbiamo che:

(1) $e^0 = 1 \geq 0.$

(2) $(e^x)' = e^x \overset{(\text{da } (P_0))}{\geq} 1 = (x)', \quad \forall x \geq 0.$

Applico la proposizione a $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ e ottengo $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \geq 0$, ovvero (P_1).

③ Per dimostrare (P_2), ovvero: $\overbrace{e^x}^{f(x)} = \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{g(x)}$. Abbiamo che:

(1) $f(0) = e^0 = 1 \geq 0 = g(0)$

(2) $f'(x) = e^x \overset{(\text{da } P_1)}{\geq} x = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = g'(x) \quad \forall x \geq 0.$

Sto procedendo per induzione, ovvero ho dimostrato che vale (P_0) e dimostro che

$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$. Allora (P_n) deve valere $\forall n$. Per vedere che $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$ scrivo $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. (Applico di nuovo la proposizione, tale che:)

(1) $f(0) = e^0 = 1 \geq 0 = g(0)$

(2) $f'(x) = e^x \overset{\{da\ (P_n)\}}{\geq} \frac{x^n}{n!} = g'(x)$.

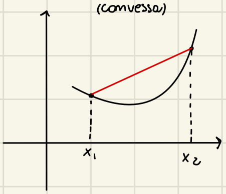
Dalla proprietà precedente ottengo "$e^x = f(x) \geq g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$". (P_{n+1}) ■

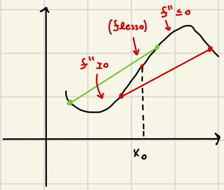
• ES. PER CASA: Dimostrare che "$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$", $\forall x \geq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

DEFINIZIONE

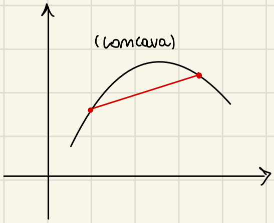
Una funzione $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice convessa se unendo con un segmento due punti qualunque del grafico di f, tale grafico si trova sotto il segmento.





Una funzione derivabile $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se la derivata (prima) $f'(x)$ è monotona crescente. Se f è derivabile due volte abbiamo f convessa $\Leftrightarrow f'$ crescente $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Una funzione $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice concava se "$-f$" è convessa. f concava $\Leftrightarrow f'$ decrescente $\Leftrightarrow f'' \leq 0$.



DEFINIZIONE

Data $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di I si dice punto di flesso se f è concava in un intorno sinistro di x_0 e convessa in un intorno destro di x_0 o viceversa. Se f è derivabile due volte, allora $f''(x_0) = 0$.

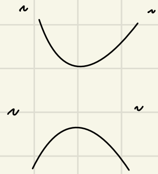
• ES: $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow e^x$ è convessa.

• **ES**: $\ln x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \ln x$ è concava.

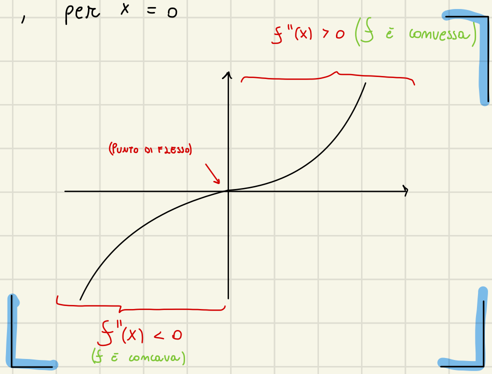
• **ES**: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ho due possibilità:

① Se $a > 0$, $f''(x) = 2a > 0$. $\Rightarrow f(x)$ è convessa.

② Se $a < 0$, $f''(x) = 2a < 0$. $\Rightarrow f(x)$ è concava.



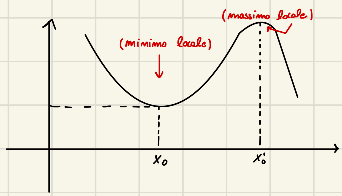
• **ES**: $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$. $f''(x) = 6x \begin{cases} > 0, & \text{per } x > 0 \\ < 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$



PUNTI DI MASSIMO/MINIMO E DERIVATA SECONDA

PROPOSIZIONE

Sia $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ punto critico $(f'(x_0) = 0)$ e $f''(x_0) > 0$ (oppure $f''(x_0) < 0$). Allora x_0 è un punto di minimo (o punto di massimo) locale.

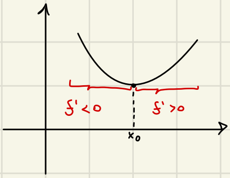


DIMOSTRAZIONE

Se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ allora $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x - x_0} > 0$.

Per il teorema della permanenza del segno,
$\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, $\forall x \in U \cap (I \setminus \{x_0\})$.

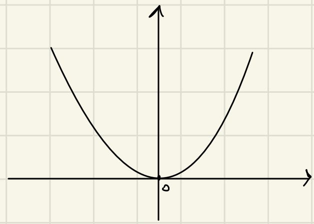
Allora per $x > x_0$, $x \in U \cap I$, $\frac{f'(x)}{\underbrace{(x - x_0)}_{>0}} > 0$. $\Rightarrow f'(x) > 0$. $\Rightarrow f$ è crescente a destra di x_0 almeno per un po'.



Per $x < x_0$, $\dfrac{f'(x)}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ è decrescente in un intorno sinistro di x_0. ■

Osservazione: Se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ non si può dire se abbiamo un massimo o un minimo locale, oppure né l'uno né l'altro.

• Es: $f(x) = x^3 \rightarrow x_0$ è punto critico. $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$. Però 0 non è né punto di massimo locale, né punto di minimo locale.



• Es: $f(x) = x^4$. $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$. Quindi: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$.
Quindi $x_0 = 0$ è punto di minimo globale, ma questo non lo vediamo dalla derivata seconda.

• Esercizio: $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{1+x^2}$. Dove è concava e (dove è) convessa?

(a) $$f'(x) = \left(\arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} - \left((1+x^2)^{-1}\right)' = \frac{1}{1+x^2} - \left[-1(1+x^2)^{-2} \cdot 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x+1)^2}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \geq 0$$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$.

$\Rightarrow f$ è crescente con un solo punto critico.

(b) $f''(x) = \left(\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2\right)'$. Sia $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; allora $f''(x) = \left(g(x)^2\right)' g'(x) = 2\, g(x)\, g'(x)$.

$$g'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

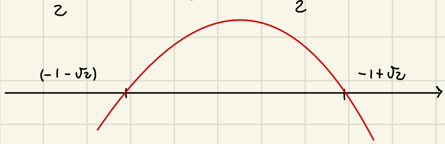
Quindi: $$f''(x) = 2 \cdot \frac{x+1}{x^2+1} \cdot \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{(x+1)(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3}.$$

Devo calcolare quando $f''(x) > 0$ (o $f''(x) < 0$). (1) Il denominatore è >0, quindi lo ignoro. (2) Per il numeratore:

(•) $x+1 > 0 \iff x > -1$

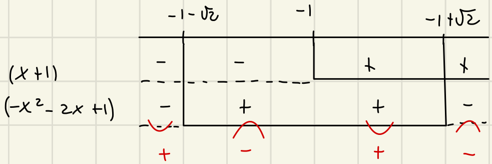
(•) $-x^2-2x+1 > 0$; Calcolo gli zeri tale che: $x_{1,2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} =$

$x_{1,2} = -\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \iff x_{1,2} = -\dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -(1 \pm \sqrt{2})$.



$\Rightarrow -x^2 - 2x + 1 > 0 \iff x^2 + 2x - 1 < 0 \iff -1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$

Quindi:



(Graficamente:)