Soluzioni metodi matematici

Andrea Princic 1837592

22 Gennaio 2019

NOTA BENE: questo esame è praticamente identico a quello del 15 Gennaio 2018

Es. 1

A. F

B. F

C. F

D. V: $x = 0, y = \{0\}, z = \{0, 1\}$

Es. 2

A. F: $\{3\} \notin 2^Q$

B. V: $\{12\} \in 2^T \cap 2^Q$

C. V

D. F

Es. 3

A. F: se $|A| = 1$

B. V

C. V: se contiene (u, v) allora contiene anche (v, u) essendo simmetrica

D. V: $A \times A$

Es. 4

$\{(a, a)\} \cup \{b, c, d\} \times \{b, c, d\}$

Insieme quoziente:

$\{[a], [b]\}$

Es. 5

Dim $\forall\ n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Caso base: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

Passo induttivo: $n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \quad + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$1 + \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} =$$

$$1 - \frac{1}{n+2}$$

Es. 6

Una formula è soddisfacibile se almeno un'interpretazione la verifica.

Es. 7

A. SF

B. TS

C. SF

D. TS

E. TS

Es. 8

$(\exists y P(y) \land \exists z Q(z)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$
La formula significa che se esistono y e z (non necessariamente distinti) che soddisfano rispettivamente P e Q, allora esiste una x che soddisfa sia P che Q. Ovviamente la formula non è valida in un caso basilare come ad esempio:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x)$: x è pari
$Q(x)$: x è dispari
Dal momento che esistono y e z che soddisfano P e Q, ma non esiste x che soddisfa sia P che Q.

Un'interpretazione che la verifica può essere:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x)$: x è multiplo di 3
$Q(x)$: x è multiplo di 4

Es. 9

A. Una relazione di ordine totale è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Inoltre, per ogni coppia di elementi, si ha che almeno uno dei due è in relazione con l'altro. Ci basta dunque formalizzare queste quattro condizioni e metterle in $\land$:

$$\begin{aligned}
&(\forall x\ R(x,x)) && \text{(riflessiva)}\\
&\land && ()\\
&(\forall x\ \forall y\ R(x,y) \land R(y,x) \to x = y) && \text{(antisimmetrica)}\\
&\land && ()\\
&(\forall x\ \forall y\ \forall z\ R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) && \text{(transitiva)}\\
&\land && ()\\
&(\forall x\ \forall y\ R(x,y) \lor R(y,x)) && \text{(totale)}
\end{aligned}$$

B. Basta scrivere la definizione di proprietà simmetrica e poi negarla:

$$\neg\forall x\ \forall y\ R(x,y) \to R(y,x)$$

C. Basta scrivere la definizione di minimo e poi negarla:

$$\neg\exists x\ \forall y\ R(x,y)$$