Venerdì 23/10/2021

SUCCESSIONI

DEFINIZIONE: Una Successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ oppure un suo sottoinsieme illimitato.

• ES: Scrivo: $a_n = \sqrt{n^2+1}$, intendo la funzione (definita come) $1 \mapsto \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$
$2 \mapsto \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$

▷ Per indicare la Successione posso anche scrivere:

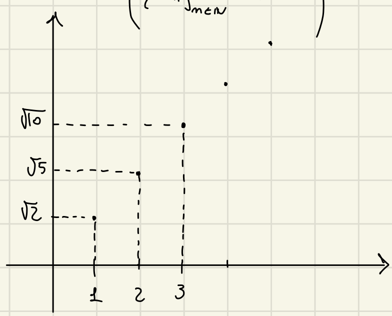
(1) $a_1, a_2, a_3, \dots$

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

(3) $\{a_n\}$

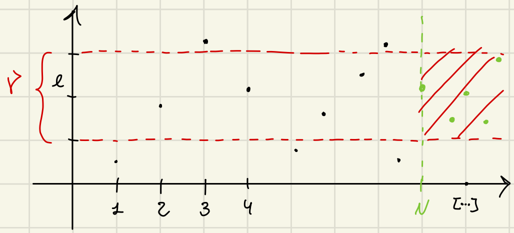
(graficamente:)

$\left(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sqrt{n^2+1}\right)$

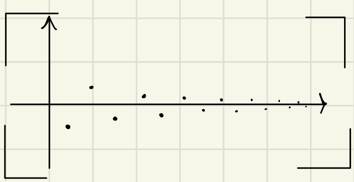


▷ Se il dominio è $\mathbb{R}$ o un suo sottoinsieme la successione si chiama successione reale.

DEFINIZIONE: Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se $\forall\, V$ intorno di ℓ, $\exists\, U = (N, +\infty)$ intorno di $+\infty$ tale che $a_1 \in V \;\forall n \in U \cap \mathbb{N}$, ovvero $\forall n > N$.



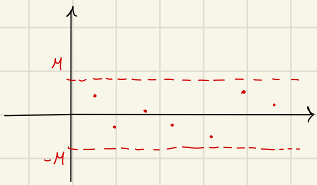
• ES: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, ovvero: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$



DEFINIZIONE: Se $\{a_n\}$ ha limite finito ($l \in \mathbb{R}$), allora diciamo che a_n e' <u>convergente</u>

DEFINIZIONE: Diciamo che $\{a_n\}$ è <u>limitata</u> se $\exists M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

• <u>ES</u>: $a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin(n)$ sono limitate.



• <u>ES</u>: $a_n = n^2$ non è limitata.

PROPOSIZIONE: Se $\{a_n\}$ è convergente, allora è limitata (DIMOSTRA PER CASA)

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI LIMITE:

Se $l \in \mathbb{R}$ diciamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > N$

<u>OSSERVAZIONE</u>: <u>DEFINIZIONI ANALOGHE PER "$l = \pm\infty$"</u>

DEFINIZIONE: $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

• <u>ES</u>: $0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

▷ Chiaramente, $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$

• <u>ES</u>: $a_n = \dfrac{n^k}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge? <u>Ovvio</u>. $\lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Chi tra "n^k" e "$n!$" va a $+\infty$ più rapidamente? Vince $n!$.

$$a_n = \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ volte}}}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n-2)} \cdot [\ldots] \cdot \frac{n}{n-k+1}}_{k \text{ fattori}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-k} \cdot [\ldots] \cdot \frac{1}{1}}_{n-k \text{ fattori}}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: $\dfrac{n}{n} < \dfrac{n}{n-1} < \ldots < \dfrac{n}{n-k+1} = 1 + \dfrac{k-1}{n-k+1} \leq 1 + k - 1 = k$

$$\Rightarrow a_n \le k^k \cdot \frac{1}{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot[\dots]\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \overbrace{k^k}^{\text{Quantità finita}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\to 0} \longrightarrow 0.$$

Quindi $n! >> n^k$ per $n \to +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\left(o\ \forall k \in \mathbb{R}\right)$, ovvero $n^k = o(n!)$ per $n \to +\infty$.

- ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$ (vince di nuovo il fattoriale)

$$\frac{n!}{2^n} = \underbrace{\frac{n}{2}}_{n/2} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot [\dots] \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2}}_{\ge 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{=1/2} \ge \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} =$$

$= \frac{n}{4} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \frac{n!}{2^n} \longrightarrow +\infty$. Quindi $2^n = o(n!)$ per $n \to +\infty$.

▷ In maniera simile si dimostra che: $b^n = o(n!)$ $\forall b > 0$, per $n \to +\infty$.

- ESERCIZIO: Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$. $\left\{ \text{Idea: } \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{(n-1)} \cdot [\dots] \cdot \frac{n}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \right\}$

Quindi $n! = o(n^n)$ per $n \to +\infty$.

▷ Abbiamo anche: $n^k = o(b^n)$ $\forall k \in \mathbb{R}$, $b > 1$, per $n \to +\infty$.

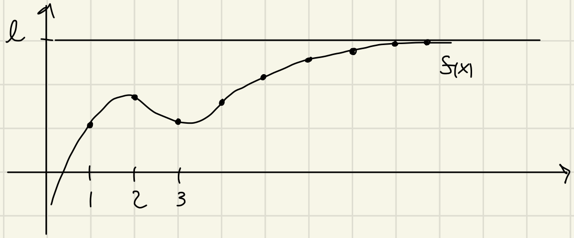
$\log_a n = o(n^k)$ [...]

In sintesi:

$$\boxed{\log_a n \ll n^k \ll b^n \ll n! \ll n^n}, \quad \forall a > 1, b > 1, \overset{(\text{o anche } k>0)}{k \ge 1}, \text{ per } n \to +\infty$$

▷ Per calcolare limiti di successioni, spesso si usa la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE: Se vale "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$" allora (vale) "$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell$."



• ES: $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = ?$.

Osservo che: $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0} \cos(y) = 1. \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

• ES: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2}{-2n^2+n-4} = -\frac{1}{2}$ (lo so fare con "x" al posto di "n")

• ES: $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{\to+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{(y=\frac{1}{x})}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ (limite notevole)

POSSO ANCHE SCRIVERE:

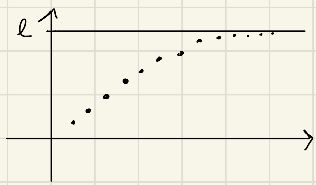
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{(y=\frac{1}{n})}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

▷ | Teoremi di:

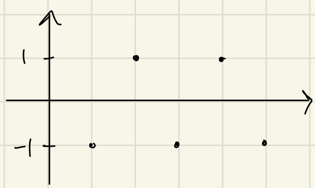
1) PERMANENZA DEL SEGNO
2) CONFRONTO
3) 2 CARABINIERI

Valgono anche per le successioni.

PROPOSIZIONE: Ogni successione monotona (crescente o decrescente) ha limite. Ad esempio, una successione crescente ha limite finito o $+\infty$, ma non può non avere limite.



• ES: $(-1)^n$ non ha limite; ed infatti non è monotona.
(Grafico)

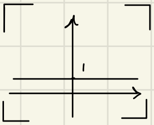


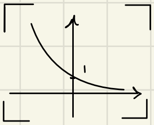
• ES: La successione geometrica:

r^n, ove "r" = ragione della successione.

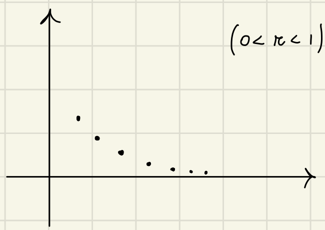
$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } r>1 \\ 1 & \text{se } r=1 \\ 0 & \text{se } -1<r<1 \\ \nexists & \text{se } r\le -1\end{cases}$$

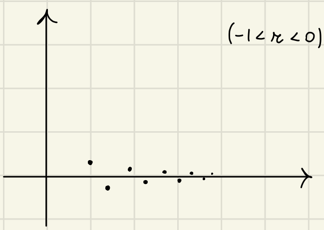
Si può confrontare con: $\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } 0<b<1\end{cases}$





(GRAFICAMENTE:)





BONUS: IL COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$