Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00011

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4\,x^2 + \cos^2(6\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 0$.
1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(2) < 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)
$$\int_0^1 (12x^2 + 10x + 3)\,dx = 0\,.$$

2B)
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 24\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = 6\,.$$

2C)
$$\int_0^{6\,\pi} \cos(9\,x)\,dx = 0\,.$$

2D)
$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{6\,x}{5 + x^2}\,dx = 6\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\int_{-6}^{6} [8\,x^3 + \sin(4\,x)]\,dx = 0\,.$$

3B)
$$\int_{-9}^{9} [6\,x^2 + 4\,x\,|x|]\,dx < 0\,.$$

3C)
$$\int_{-4}^{5} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx = 0\,.$$

3D)
$$\int_{-6}^{5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\int_{12}^{32} \frac{dx}{x-2} = \log(3)\,.$$

4B)
$$\int_9^{27} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{8}\,.$$

4C)
$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

4D)
$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \frac{\pi}{4}\,.$$

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00011**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\mathbf{a})\ f(x) = x\,\sin(15\,x)\,, \quad \int_0^{17\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{b})\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{7\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{3}} g(x)\,dx\,,$$

$$\mathbf{c})\ h(x) = (8x^2 + 23x + 7)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{7}{8}}^0 h(x)\,dx\,, \qquad \mathbf{d})\ k(x) = \frac{1}{1 + 9\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Cognome	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00011**

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{10})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00011

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4\,x^2 + \cos^2(6\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 4\,x^2 + \cos^2(6\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 4\,x^2 + \cos^2(6\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 0$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4\,t^2 + \cos^2(6\,t)$, si ha $F'(0) = 1 \neq 0$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4\,t^2 + \cos^2(6\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(2) < 0$.

Falso: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(2) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (12x^2 + 10x + 3)\,dx = 0\,.$$

Falso: Dato che

$$\int (12x^2 + 10x + 3)\,dx = \frac{12}{3}\,x^3 + \frac{10}{2}\,x^2 + 3\,x = 4\,x^3 + 5\,x^2 + 3\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (12x^2 + 10x + 3)\,dx = 4\,x^3 + 5\,x^2 + 3\,x\Big|_0^1 = 4 + 5 + 3 = 12 \neq 0\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 24\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = 6\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x$, da cui $dy = 2\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 24\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = 6\int_0^{\frac{1}{2}} (2\,x)\,\mathrm{e}^{2\,x}\,(2\,dx) = 6\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 24\,x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,dx = 6\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 6\,.$$

2C)

$$\int_0^{6\,\pi} \cos(9\,x)\,dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^{6\,\pi} \cos(9\,x)\,dx = \frac{\sin(9\,x)}{9}\Big|_0^{6\,\pi} = \frac{\sin(54\,\pi) - \sin(0)}{9} = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{6\,x}{5 + x^2}\,dx = 6\,\log(2)\,.$$

Falso: Dato che

$$\frac{6\,x}{5 + x^2} = 3\,\frac{2x}{5 + x^2} = 3\,\frac{(5 + x^2)'}{5 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{6\,x}{5 + x^2}\,dx = 3\,\log(5 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{5}} = 3\,[\log(10) - \log(5)] = 3\,\log(10/5) = 3\,\log(2) \neq 6\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [8\,x^3 + \sin(4\,x)]\,dx = 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-9}^{9} [6\,x^2 + 4\,x\,|x|]\,dx < 0\,.$$

Falso: La funzione $x \mapsto 6\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 4\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-9}^{9} [6\,x^2 + 4\,x\,|x|]\,dx = \int_{-9}^{9} 6\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{9} 6\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{5} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx = 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^{5} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx = \int_{-4}^{4} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx + \int_{4}^{5} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx = \int_{4}^{5} [2\,x^3 + 8\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-6}^{5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-6}^{5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-6}^{-5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx + \int_{-5}^{5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-6}^{-5} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{12}^{32} \frac{dx}{x-2} = \log(3)\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{12}^{32} \frac{dx}{x-2} = \log(|x-2|)\Big|_{12}^{32} = \log(30) - \log(10) = \log(30/10) = \log(3)\,.$$

4B)

$$\int_{9}^{27} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{8}\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_{9}^{27} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{3-x}\Big|_{9}^{27} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8}\,.$$

4C)

$$\int_{9}^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

Falso: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x-6}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-6)\,(x-8)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-6) + B\,(x-8)\,.$$

Scegliendo $x = 6$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 8$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-6}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log\Big(\Big|\frac{x-8}{x-6}\Big|\Big) + c\,,$$

cosicché

$$\int_{9}^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2) \neq \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva sull'intervallo di integrazione, l'integrale non poteva essere negativo.

4D)

$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 + 16\,x + 65 = (x+8)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \int \frac{dx}{1 + (x+8)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 8$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x + 8) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-8}^{-7} \frac{dx}{x^2 + 16\,x + 65} = \arctan(x + 8)\Big|_{-8}^{-7} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(15\,x)\,, \quad \int_0^{17\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{7\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{3}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (8x^2 + 23x + 7)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{7}{8}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 9\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(15\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(15\,x)}{15}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(15\,x) = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \int 1 \cdot \frac{\cos(15\,x)}{15}\,dx = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \frac{\sin(15\,x)}{225} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{17\,\pi} x\,\sin(15\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \frac{\sin(15\,x)}{225}\Big|_0^{17\,\pi} = -\frac{17\,\pi\,\cos(255\,\pi)}{15} = \frac{17}{15}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x^3$, da cui $dy = 21\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{21}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{7\,x^3}\,dx = \frac{1}{21}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{21} + c = \frac{\mathrm{e}^{7\,x^3}}{21} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2\,\mathrm{e}^{7\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{7\,x^3}}{21}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{\mathrm{e}^{21} - 1}{21}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a + b)\,x + b + c = 8x^2 + 23x + 7\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 8$, $2a + b = 23$ e $b + c = 7$; risolvendo, si trova $a = 8$, $b = 7$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (8x^2 + 23x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (8x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{7}{8}}^{0} (8x^2 + 23x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (8x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{7}{8}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{3}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 9\,x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{3} + c = \frac{\arctan(3\,x)}{3} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 9\,x^2} = \frac{\arctan(3\,x)}{3}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(3)}{3}\,.$$

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\, dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{10})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

(1) $$F'(t) = f(t) = 5\,\mathrm{e}^{t^2} + 4\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

b) Si ha
$$F(0) = \int_0^0 [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\, dx = 0\,,$$
e, per la (1),
$$F'(\sqrt{10}) = f(\sqrt{10}) = 5\,\mathrm{e}^{10} + 4\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,
$$F(-t) = \int_0^{-t} [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\, dx = -\int_0^t [5\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 4]\, dy = -\int_0^t [5\,\mathrm{e}^{y^2} + 4]\, dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 4$,
$$F(t) = \int_0^t [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 4]\, dx \geq \int_0^t 4\, dx = 4\,t\,,$$
da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 4\,t = +\infty\,.$$