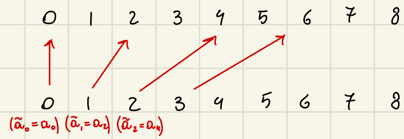
Venerdì 05/11/2021

DEFINIZIONE: SOTTOSUCCESSIONI

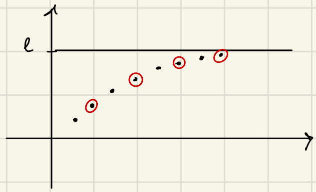
Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una sua sottosuccessione è una successione $\tilde{a}_n$ costruita così: (1) Si prende una funzione crescente $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e (2) si definisce $\tilde{a}_n : a_{h(n)}$. Spesso si scrive "$a_{n'}$":



- ES: $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$. $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, [\ldots]$.

$$h(n) = 2n \implies \tilde{a}_n = a_{h(n)} = a_{2n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, [\ldots].$$

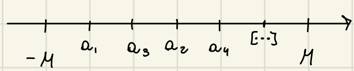
- PER CASA: Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per ogni sottosuccessione $a_{n'}$ vale: $\lim_{n' \to +\infty} a_{n'} = \ell$.



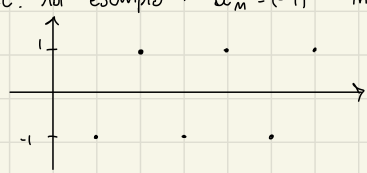
TEOREMA: BOLZANO - WEIERSTRASS

Ogni successione $\{a_n\}$ limitata ha una sottosuccessione convergente.

osservazione: $\{a_n\}$ limitata vuol dire che $\exists\, M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$, $\forall n$.



osservazione: In generale una successione limitata non ha sempre limite. Ad esempio: $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

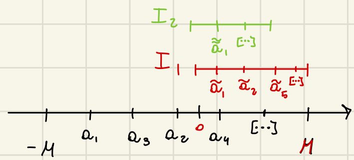


Però la sottosuccessione $\tilde{a}_n = a_{2n+1} = -1$. $\nearrow$ $\lim_{n \to +\infty} \tilde{a}_n = -1$.

(Analogamente) La sottosuccessione $\tilde{a}_n = a_{2n} = 1$. $\searrow$ $\lim_{n \to +\infty} \tilde{a}_n = 1$.

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE:

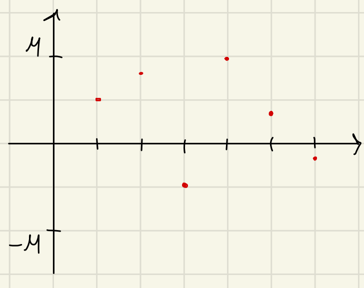
Dividiamo l'intervallo $[-M, M]$ in due punti uguali: $[-M, 0]$, $[0, M]$.
Almeno uno dei due intervalli contiene infiniti punti della successione. Lo chiamo (tale intervallo) I_1. Scelgo in I_1 un punto della successione, ovvero scelgo $\tilde{a}_1 = a_{n_1} = a_{n(1)}$ t.c. $\tilde{a}_1 \in I_1$. Divido I_1 in due parti uguali; chiamo I_2 uno di questi due intervalli, scelto in modo da contenere infiniti punti della successione. In I_2 scelgo $\tilde{a}_2 = a_{n_2} = a_{n(2)}$ t.c. $n_2 > n_1$.



Continuo a costruire sottointervalli, $I_1 > I_2 > I_3 > [...]$
Poiché la lunghezza di I_n è: $\frac{M}{2^{n-1}} \to 0$. Si verifica (si dimostra) che "$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{l\}$" (qui si usa la completezza dei reali).
Si verifica che "$\lim_{n \to +\infty} \tilde{a}_n = l$". ■

Questo teorema si usa nel teorema di Weierstrass.

Graficamente posso fare anche così:



ESERCIZI:

(b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 - 4n^2}{-2n^3 + 3n^5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + \cancel{o(n^3)}}{3n^5 + \cancel{o(n^5)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$

(?) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^5}{\sqrt{n^{10} + 1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^5}{\sqrt{n^{10}\left(1 + \frac{1}{n^{10}}\right)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^5}{n^5 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^{10}}\right)}} = \frac{1}{1} = 1$

(f) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} + 1}{n + 2\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}{n + o(n)} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Ricordiamo: $\underset{\downarrow\, 0}{a^{-n}} \ll \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n^{\alpha}}} \ll \underset{\downarrow\, +\infty}{\log_b n} \ll \underset{\downarrow\, +\infty}{n^{\alpha}} \ll \underset{\downarrow\, +\infty}{a^{n}}$, con $a, b > 1$, per $n \to +\infty$.

• ES: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n + n^4}{\log_2 n + n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n^3} = +\infty$

• ES: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n} \overbrace{- \sqrt[3]{n} + e^{-n}}^{= o(\sqrt{n})}}{\underbrace{\sqrt{2n+1}}_{= \sqrt{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{n} \cdot \underbrace{\sqrt{(2+o(1))}}_{\to \sqrt{2}}} + \log_3 n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2 \cdot o(1)} + o(\sqrt{n})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(h) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-1}} =$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{o(1)}\right)} \cdot \left(\sqrt{n^2\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}}_{o(1)}\right)} + \sqrt{n^2\left(1-\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{o(1)}\right)}\right)}{\cancel{n^2}+n+1-(\cancel{n^2}-1)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+o(1)}\right) \cdot \left(n\left(\sqrt{1+o(1)}\right) + n\left(\sqrt{1+o(1)}\right)\right)}{n+2} =$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(\cancel{\sqrt{1+o(1)}}^{\to 1}\right) \cdot 2n\cancel{\sqrt{1+o(1)}}^{\to 1}}{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2(n^{\frac{1}{2}+1})}{n+\underbrace{2}_{o(n)}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^{\frac{3}{2}}}{n+\cancel{o(n)}} = \lim\limits_{n \to +\infty} 2n^{\frac{1}{2}} = +\infty$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

Abbiamo visto che:

$$\left.\begin{aligned} &① \ \sin x = x + o(x) \\ &② \ \ln(1+x) = x + o(x) \\ &③ \ e^x = 1 + x + o(x) \end{aligned}\right\} \text{per } x \to 0.$$

(ESPANSIONI ASINTOTICHE)

Che dire di " $\sqrt{1+x}$ per $x \to 0$ " ?

- $\sqrt{1+0} = 1$. Quindi: $\sqrt{1+x} \approx 1$
- $\sqrt{1+0{,}1} \approx 1{,}0488$
- $\sqrt{1+0{,}01} \approx 1{,}00498 = 1{,}005$
- $\sqrt{1+0{,}04} \approx 1{,}0198$
- $\sqrt{1+0{,}07} \approx 1{,}0344$

Viene fuori che:

(α) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$, per $x \to 0$.

(β) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{1}{3}x + o(x)$, per $x \to 0$

Più in generale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$, per $x \to 0$.

DIMOSTRAZIONE: $(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(1+x)} = e^{\alpha \cdot \ln(1+x)} \overset{②}{=} e^{\alpha(x+o(x))} = e^{\overbrace{\alpha x + o(x)}^{= y \to 0 \text{ per } x \to 0}}$

$= 1 + \underbrace{\alpha x + \cancel{o(x)}}_{y} + \underbrace{o(\alpha x + \cancel{o(x)})}_{o(y)} = 1 + \alpha x + o(\alpha x)$, con $\alpha = 1$ $= 1 + x + o(x)$. ■

$(e^y = 1 + y + o(y))$

Nell' esercizio (h):

(a) $\sqrt{n^2+n+1} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = n\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}_{= x \to 0,\ \text{per } n \to +\infty}\Big)^{\alpha = \frac{1}{2}} =$

$$= n\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{x} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{o(x)}\right)$$

(b) $\sqrt{n^2-1} = \sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = n\Big(1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{= x \to 0,\ \text{per } n \to +\infty}\Big)^{\alpha=\frac{1}{2}} = n\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha}\underbrace{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}_{x} + \underbrace{o\left(-\frac{1}{n^2}\right)}_{o(x)}\right)$

Il denominatore dell' esercizio (h) diventa quindi: (RISOLVO I PRODOTTI)

$$n\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}\right)+o\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}_{o(1)} + o(1) + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}_{o(1)} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)} =$$

$$= \frac{1}{2} + o(1).$$

(y) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!-n!}{2n\cdot n!} \overset{\{(n+1)! = (n+1)n!\}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n! - n!}{2n\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}(n+1-1)}{2n\cdot\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$

(z) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+2}+\frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n =$ $(m = n+2)$ $(n = m-2)$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-2} = \lim_{m\to+\infty}\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}^{e}}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^2}_{1}} = e.$$