Venerdì 01/10/2021

LOGARITMI

Teorema:

Dati $a, y > 0$, con $a \neq 1$, $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ t.c.: $a^x = y$. Scriviamo:

$$x = \log_a y$$

(alternativamente:)

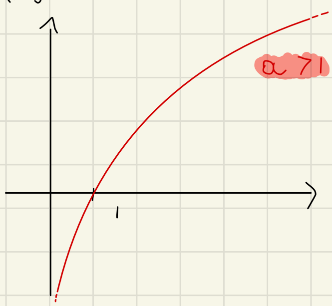
$\log_a y$ = esponente (x) da dare alla base (a) per ottenere y.

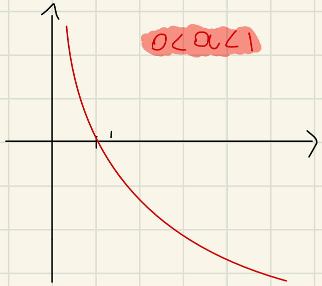
Esempio:

- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ (infatti: $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$)
- $\log_{0,5} 2 = \log_{\frac{1}{2}} (2^{-1})^{-1}$
  $= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$ (infatti: $\frac{1}{2}^x = 2 \Rightarrow x = -1$)
- $\log_3 1 = 0$ (infatti: $3^0 = 1$)

Osservazione: La base a deve sempre essere positiva e diversa da 1.

(graficamente:)

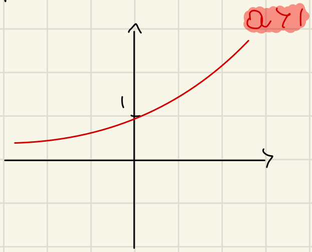


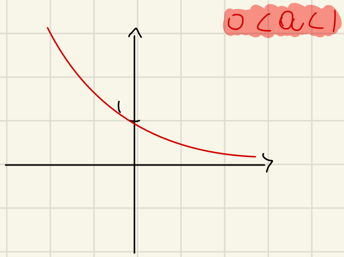


• Per $a = e \equiv$ numero di nepero, il logaritmo si dice <u>naturale</u> e si scrive "ln" oppure "log".

<u>osservazione:</u>

Il $\log_a y$ é la funzione inversa della funzione esponenziale a^x.





PROPRIETA' DEL LOGARITMO

(1) [.1] $a^{\log_a x} = x$

[.2] $\log_a a^x = x$

[.3] $\log_a a = 1$

(2) $\log_a 1 = 0$

Dalla definizione di logaritmo

(3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (deriva da: $a^{\tilde{x}} a^{\tilde{y}} = a^{\tilde{x}+\tilde{y}}$)

(4) $\log_a x^{\lambda} = \lambda \log_a x$ (deriva da: $a^{s \cdot t} = (a^s)^t$)

(5) $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

(6) $\log_a \frac{x}{y} \underset{(3)}{=} \log_a \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \underset{(3)}{=} \log_a x + \log_a \frac{1}{y} \underset{(5)}{=} \log_a x - \log_a y.$

Definizione:

Un polinomio è un espressione del tipo:

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

(ove) $n =$ grado del polinomio.

osservazione: A volte i polinomi si possono fattorizzare.

- ES:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x+1)$$
$$= (x+1)^2 (x-1)$$

Definizione:

Una funzione razionale è una funzione del tipo:

$\frac{p(x)}{q(x)}$, dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi.

ES: $\frac{x^2+1}{x+3}$

EQUAZIONI

" Definizione: "

Sono uguaglianze (qualcosa = qualcosa) che contengono almeno un'incognita.

- Esempio: $2x - 5 = 7$ (1)

> Il problema "risolvere (1)" significa "trovare i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui (1) è soddisfatta".

(Quindi:)

① Se scelgo $x = 6$, la (1) diventa: $\underbrace{(2 \cdot 6) - 5}_{12-5=7} = 7$ ok.

(β) Se scelgo $x = 5$, la (1) diventa: $\overbrace{(2 \cdot 5) - 5}^{10-5=5} \Rightarrow 5 = 7$ FALSO

($\Rightarrow$ Quindi $x = 5$ non è soluzione della (1).)

- In generale sappiamo risolvere un'equazione generica della forma:

$$ax + b = c \qquad (\text{ove: } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

$$\underset{\substack{\text{Sommo ad ambo}\\ \text{i membri } (-b)}}{\Longleftrightarrow} \quad ax = c - b \quad \underset{\substack{\text{Divido ambo i}\\ \text{membri per } a}}{\Longleftrightarrow} \quad x = \frac{c-b}{a}.$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{ove: } a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0)$$

(Per risolvere:)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac \equiv$ Discriminante

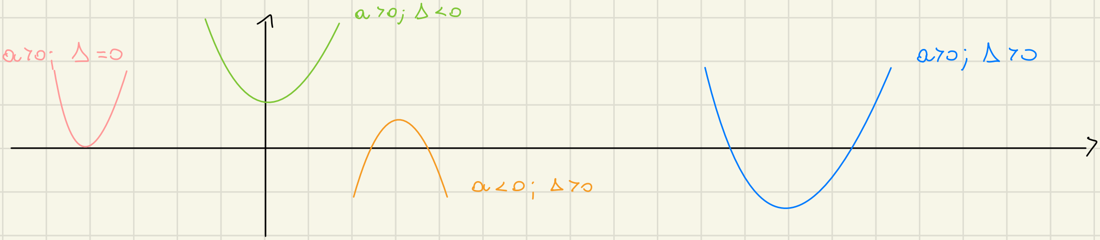
(α) Se $\Delta \geq 0$,
- (α.1) L'equazione ammette due soluz. distinte (caso $\Delta > 0$)
- (α.2) L'equazione ammette due soluz. congruenti (caso $\Delta = 0$)

(β) Se $\Delta < 0$ $\longrightarrow$ (β.1) Non ho soluzioni (Reali)

- Esempio: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione.

OSSERVAZIONE: $ax^2 + bx + c$ corrisponde ad una parabola.

{Inoltre: (a) "a" definisce se la parabola è concava o convessa.
(b) Se: (b.1) $\Delta < 0$, non c'è intersezione tra la parabola e l'asse x.
(b.2) $\Delta > 0$, la parabola interseca l'asse della x in due punti $\neq$.
(b.3) $\Delta = 0$, la parabola interseca l'asse della x in un unico punto.}



N.B. (Equazioni più difficili):

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

$$e^{2x} + e^{x} - 1 = 0.$$

DISEQUAZIONI

Definizione

Sono simili alle equazioni, ma con "$>, \geq, <, \leq$" al posto di "$=$".

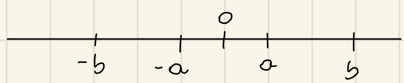
- Esempio: $5 - 8x > 13$

(Sommiamo ambo i membri per (−5)) $\Leftrightarrow -8x > 13 - 5 \Rightarrow -\cancel{8}x > \cancel{8}$ (Dividiamo ambo i membri per 8) $\Leftrightarrow -x > 1$

(Dividiamo ambo i membri per (−1) e cambiamo segno alla disequazione.) $\Leftrightarrow x < -1$.

Le soluzioni sono: $x \in (-\infty, -1)$ 04

osservazione: Perché cambiamo il segno alla disequazione nel dividere per una quantità negativa?
- Graficamente:



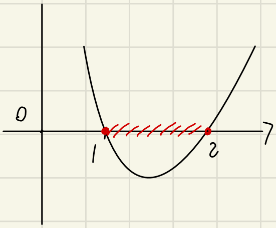
Se $a > b \Rightarrow -a <$

- Esempio: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ (2)

① Risolvo prima: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ (2) è soddisfatta per $x \in [1, 2]$

- Esempio: $e^x \geq 2$ (3)

(Dalla proprietà (1.2): $\ln e^x = x$)

$\Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$.

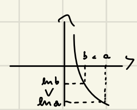
$\Rightarrow$ (3) è soddisfatta per $x \in [\ln 2, +\infty)$

- Esempio. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$ (4)

② I° Metodo:

Osservazione 1: $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x = x$

Osservazione 2: $\log_{\frac{1}{2}} y$ è decrescente. $\Rightarrow$ Cambio verso alla disequazione



Quindi:

(Cambio verso alla disequazione poiché $\log_{\frac{1}{2}} x$ è monotona decrescente.)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$\iff x \leq \log_{\frac{1}{2}} 2^3 \iff x \leq -3$$

(Proprietà (5) dei log)

$\Rightarrow$ L'insieme delle soluzioni è $x \in (-\infty, -3]$

β) II° Metodo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8 \iff (2^{-1})^x \geq 8 \iff 2^{-x} \geq 8$$

$$\iff \log_2 2^{-x} \geq \log_2 8 \iff -x \geq 3$$

$$\iff x \leq -3$$

γ) III° METODO:

si usa che 2^y è crescente

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2^3 \iff 2^{-x} \geq 2^3$$

$$\iff -x \geq 3 \iff x \leq -3$$

δ) IV° METODO:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \iff x \geq -3 \iff x \leq -3$$

(poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente)