Lezione 2

Prodotto cartesiano

A x B = $\{(a, b) \mid a \in A \quad e \quad b \in B\}$

> ⚠️ $(a, b) \neq (b, a)$ → Nel caso delle coppie l'ordine conta

Il prodotto cartesiano è sia riflessivo che simmetrico che transitivo, ovvero equivalente.

Relazioni

Una relazione R è un sotto insime di un prodotto cartesiano, insieme di coppie sull'insieme A.

$R \subseteq$ A x A

Es. 3 < 7 → $R_< = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$

Esempio relazione

$A = \{1,2,3\} \rightarrow R = \{(1,1),(2,1),(3,2)\} \subseteq A \times A$

> ⚠️ $(2,1) \in R \quad (1,2) \notin R$

→ Poteva essere anche $R = \{(1,1)\}$

→ L'importante è capire che la relazione può essere un sotto insieme qualunque, in questo caso di A x A:

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Definizioni

Una relazione di $R \subseteq A \times A$ può essere:

Riflessiva

Una relazione è riflessiva se $\forall a \in A((a,a) \in R)$

es. $A = \{1,2,3\} \rightarrow R_{riflessiva} = \{(1,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Ci devono essere tutte le coppie dello stesso elemento (1,1) etc... nella Relazione R, se anche una viene tolta non è più riflessiva

Anti-Riflessiva

Una relazione è anti-riflessiva se $\forall a \in A((a,a) \notin R)$

ovvero non esiste neanche una singola coppia riflessiva (cioè mancano tutte)

es. $A = \{1,2\} \rightarrow R_{anti-riflessiva} = \{(1,2),(2,1)\}$

Simmetrica

$\forall a,b \in A \quad [(a,b) \in R \implies (b,a) \in R]$

Ovvero se esiste almeno una coppia (a,b) deve esistere la coppia simmetrica (b,a)

es. $A = \{1,2,3\} \rightarrow R_{simmetrica} = \{(1,2),(2,1)\}$

es. $A = \{1,2,3\} \rightarrow R_{non-simmetrica} = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ → Non esiste la coppia (3,1)

es. $A = \{1,2,3\} \rightarrow R_{simmetrica} = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ → È simmetrica perchè la coppia degli stessi elementi (1,1) "value per due"

Anti-Simmetrica

$\forall a, b\ [(a,b) \in R \text{ e } (b,a) \in R) \implies a = b]$

Esempio $\leq$ è una relazione anti-simmetrica

> La relazione e' antisimmetrica perche' se un numero e' maggiore od uguale ad un secondo numero ed il secondo e' maggiore uguale del primo allora i due numeri sono uguali.

Es. $A = \{1,2,3\}$ → $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ → È antisimmetrica secondo l'implicazione se $(a,b) \in R \text{ e } (b,a) \in R$ è falsa allora indipendentemente da b l'espressione è vera. In questo caso se non esiste almeno una coppia simmetricha allora è antisimmetrica per forza.

Transitiva

$\forall a, b, c \in A\ [(a,b) \in R \text{ e } (b,c) \in R] \implies (a,c) \in R$

Es. Roma, Firenze, Milano → Se da Roma posso andare a Firenze e da Firenze posso andare a Milano allora posso andare da Roma a Milano.

Es. se la retta A è parallela alla retta B e la retta B è parallela alla retta C allora A è parallela alla retta C.

Es. $A = \{1,2,3\}$ → $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ → Non è transitiva perchè non ha la coppia (1,3)

Es. $A = \{1,2,3\}$ → $R = \{(1,2),(3,2)\}$ → È transitiva perchè non esiste una coppia (a,b) (b,a), quindi la premessa è falsa e allora la relazione è transitiva.

Equivalenza

Se la relazione è sia simmetrica che riflessiva che transitiva allora si dice di equivalenza

es.

→ $A = \{1,2,3,4\}$

→ $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1)\}$

Classe di equivalenza di "a"

Vale solo se c'è una relazione di equivalenza.

$a \in A$

$[a] = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}$ → Tutti gli elementi di A che sono in relazione con a

es.

→ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

→ $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1)\}$

[1] = $\{1, 2, 4\}$ → 1 è in relazione con se stesso, con 2 e con 4.

[2] = $\{1, 2, 4\}$ → Dato che è in relazione con 1 allora la classe di equivalenza coincide.

[3] = $\{3\}$

[2] = $\{1, 2, 4\}$ → //

Partizione di A

La partizione è successione di sottoinsiemi, che non si intersecano, di classi di equivalenza disgiunte. E se faccio la loro unione ottengo l'insime di partenza.

I sottoinsiemi che determinano la partizione di un insieme si dicono classi dell’insieme.

Es. $[1], [3]$

L'insieme di queste partizioni si chiama insieme quoziente → $\{[1], [3]\}$

Insieme quoziente

L'insieme quoziente di una relazione di equivalenza è l'insieme delle sue classi di equivalenza

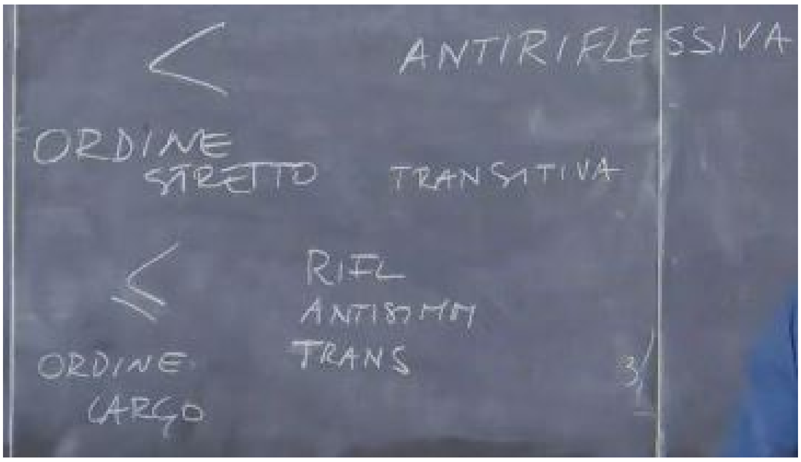
Es. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

→ È sia riflessiva che transitiva (perchè la premessa è falsa) che anti-simmetrica

→ Il suo Quoziente sarà → $Q = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

→ Ogni oggetto è in relazione solo con se stesso.

Ordine stretto e largo



Ordine totale

Si dice di ordine totale quanto il primo è in relazione con il secondo oppure il secondo è in relazione con il primo

$\forall a, b \in A \ (a, b) \in R$

oppure

$\forall a, b \in A \ (b, a) \in R$

Es. a,b → $a < b$ o $b < a$