Venerdì 15/10/2021

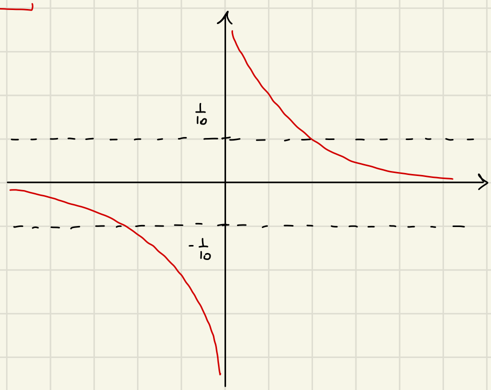
DEFINIZIONE: Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha la proprietà P definitivamente per $x \to x_0$ se $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x)$ ha la proprietà P $\forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$.

(DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI LIMITE:)

$f(x) \to l$ per $x \to x_0$ se $\forall\, V$ intorno di l, $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$.

- ES: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

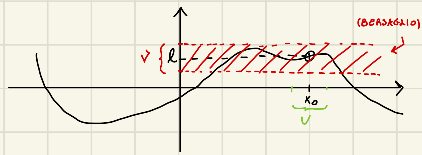
Vale: $\underbrace{|f(x)| < \frac{1}{10}}_{P}$ definitivamente, per $x \to +\infty$.



Posso scegliere $U = (10, +\infty)$ e vale che $|f(x)| < \dfrac{1}{10}$, $\forall x > 10$, ovvero $\forall x \in U$.

TEOREMA: PERMANENZA DEL SEGNO

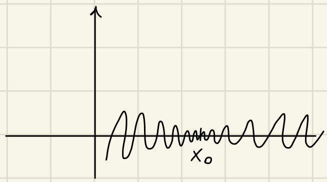
Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A.
Se vale $\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{(<)}{>} 0$, allora $f(x) \overset{(<)}{>} 0$ definitivamente per $x \to x_0$



DIMOSTRAZIONE: Sia $l := \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$. Dalla definizione di limite (supponendo $l \neq +\infty$), con $\varepsilon = l$, dato $V = (l - l, l + l) = (0, 2l)$, $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ per $A \cap (U \setminus \{x_0\})$, ma $f(x) \in V \Rightarrow f(x) > 0$ ∎

(Attenzione al "$\geq$")

OSSERVAZIONE: Se $\lim_{x \to x_0} \geq 0$, non è detto che $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Infatti: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ non sapremmo se f è positiva o negativa vicino a 0.



COROLLARIO: Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Se $f(x) \geq 0$ $(\leq)$ definitivamente per $x \to x_0$ e se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, allora $l \geq 0$ $(\leq)$.

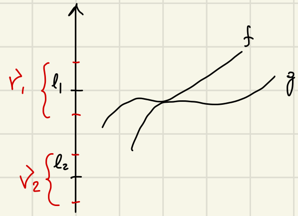
DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, se fosse $l < 0$, per il teorema della permanenza del segno, avremmo $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Ma questo contraddice $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. ∎

TEOREMA: CONFRONTO

Siano $f, g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. $l_1 := \lim_{x \to x_0} f(x)$, $l_2 := \lim_{x \to x_0} g(x)$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$.

Allora $l_1 \leq l_2$.

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo ipotizziamo che $l_1 > l_2$. Siano V_1 intorno di l_1 e V_2 intorno di l_2 t.c. $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. In particolare: $y_1 > y_2$ $\forall y_1 \in V_1$ e $\forall y_2 \in V_2$.



- Dalla definizione di limite, per questo V_1 $\exists$ U_1 intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_1$, $\forall x \in A \cap (U_1 \setminus \{x_0\})$.

- Dalla definizione di limite, per questo V_2 $\exists$ U_2 intorno di x_0 t.c. $g(x) \in V_2$ $\forall x \in A \cap (U_2 \setminus \{x_0\})$.

- Inoltre $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to 0$.
$\Rightarrow \exists$ U_0 intorno di x_0 t.c. $f(x) \leq g(x)$ per $x \in A \cap (U_0 \setminus \{x_0\})$

- Sia $U = U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Per $x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$ valgono:
(1) $f(x) \in V_1$
(2) $g(x) \in V_2$
$\Rightarrow f(x) > g(x)$; questo contraddice l'ipotesi. ↯
(3) $f(x) \leq g(x)$

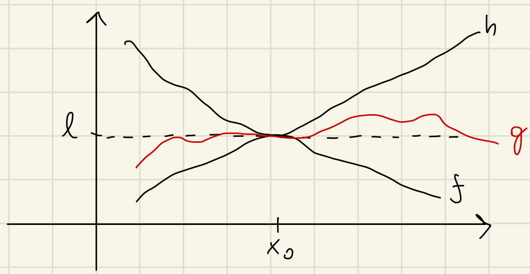
TEOREMA: DEI DUE CARABINIERI

Siano $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Supponiamo:

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$.

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) =: \ell$

Allora: $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ (STO DICENDO CHE IL LIMITE ESISTE)



DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, ovvero che $\forall$ V intorno di ℓ, $\exists$ U intorno di x_0 t.c. $g(x) \in V$ $\forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$.

- Usando V nella definizione di limite per f, otteniamo U_1 intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in A \cap (U_1 \setminus \{x_0\})$.

• Idem con h : $\exists\, U_2$ intorno di x_0 t.c. $h(x) \in V$ $\forall x \in A \cap (U_2 \setminus \{x_0\})$.

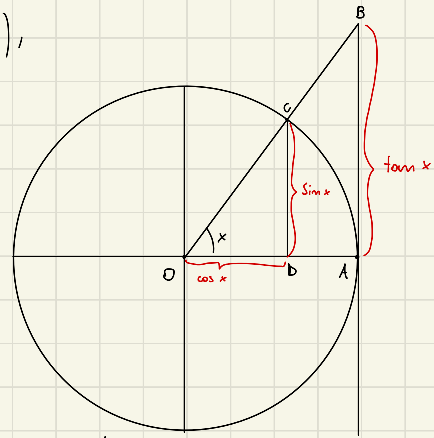
Per l'ipotesi (1) (teorema dei due carabinieri), $\exists\, U_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per $x \in A \cap (U_0 \setminus \{x_0\})$.

Sia $U := U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Allora $\boxed{\text{per } x \in A \cap (U \setminus \{x_0\}):}$ $f(x) \in V$, $h(x) \in V$, con $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow g(x) \in V$.

• ES: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = ?$ "LIMITE NOTEVOLE".

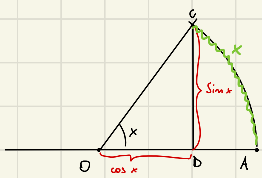
(1) Singolarmente: $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Sia $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,



I triangoli $\overset{\triangle}{ODC}$ e $\overset{\triangle}{OAB}$ sono simili. $\Rightarrow \overline{AB} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.
Abbiamo che:

① $x > \sin x$



② $x < \tan x$

(Quindi:)

• $\text{area}(\overset{\triangle}{OAB}) = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \dfrac{1 \cdot \tan x}{2}$

• $\text{area}(\overset{\triangle}{OAC}) = \dfrac{x}{2}$

Quindi, $\overset{\triangle}{OAC} < \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \text{area}(\overset{\triangle}{OAC}) < \text{area}(\overset{\triangle}{OAB}) = \dfrac{\tan x}{2}$.
Quindi $\sin x < \tan x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Divido per "$\sin x$": $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Elevo alla "-1": $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ ②

Sia "$\cos x$" che "$\frac{\sin x}{x}$" sono pari. Quindi ② vale anche per $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow$ Vale che $\underbrace{\cos x}_{f(x)} < \underbrace{\sin x}_{g(x)} < \underbrace{1}_{h(x)}$ definitivamente per $x \to 0$.

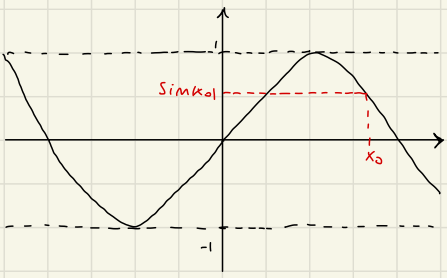
Scegliendo $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dico che $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0} h(x)$.

$\Rightarrow$ Dal teorema dei carabinieri: $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ■

- ES: Dal limite notevole "$\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$" segue anche "$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$". (VEDREMO LA DIMOSTRAZIONE PIÙ AVANTI)

- ES: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\cancel{\frac{\sin x}{x}}}_{1,\ (\text{LIMITE NOTEVOLE})} \cdot \lim_{x \to 0} \underbrace{\cancel{\frac{1}{\cos x}}}_{1} = 1$

OSSERVAZIONE: $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. ("NON CENTRA" CON I LIMITI NOTEVOLI)



(Non lo dimostriamo)

Allo stesso modo:

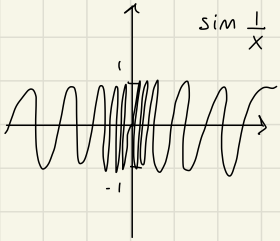
- $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

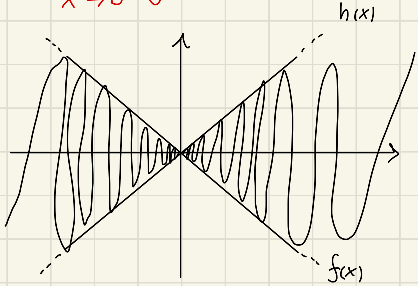
Idem per tan, arctan, cotan, x^n.
Vedremo che questo è un modo per dire che queste funzioni sono <u>continue</u>.

- ES: $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Se chiamo $x \cdot \sin \frac{1}{x} = g(x)$ ho che: $f(x) = -|x| \leq g(x) \leq |x| = h(x) \Leftrightarrow$

$\Leftarrow\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} h(x) \overset{(T2C)}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

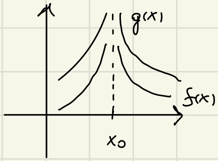




Osservazione: Esiste una versione semplificata del teorema dei due carabinieri nel caso in cui:

- •) $f(x) \le g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$;
- •) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$



Se: •) $g(x) \le h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$
•) $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$;

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

• ES: $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x^2 + \cos x)}_{g(x)}$. $g(x) \ge \underbrace{x^2 - 1}_{f(x)}$ perché $\cos x \ge -1$.

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

▸ Per casa: continuare esercizi su disuguaglianze.