# Calcolo Integrale

Corrado MASCIA

lezione 01

## Serie numeriche

Corso di laurea in Informatica

# Contenuto della lezione

– Convergenza (e divergenza) di una serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

– Serie telescopiche e serie geometriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(b_{k+1} - b_k\big), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

– Proprietà delle serie convergenti

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} a_k = 0,$$

# Sommare infiniti termini

La somma di numeri reali è ben definita: dati $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Cosa succede se la lista di numeri da sommare non è finita?

*Esempio.* Per $a_k = 1/2^k$ con $k = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \cdots = ?$$

*Motivazioni.*

∗ estensione della usuale addizione reale

∗ approssimazione con errore arbitrariamente piccolo

∗ calcolo di lunghezze, aree, volumi per regioni "complicate"

# Idea di base

## Definizione (Serie numerica)

*Data la successione di* **termine generico** $a_k$,

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \textbf{serie numerica}$$

Data la serie di termine generico $a_k$,
si fissa $n$ naturale
si calcola la somma dei primi $n$ numeri della sequenza,
si passa al limite per $n \to +\infty$

$$n \quad \Longrightarrow \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} s_n$$

La successione $s_n$ è detta **successione delle somme parziali**.

# Un esempio (telescopico)

Consideriamo la serie $a_k = 1/k(k+1)$. Si ha

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

I primi elementi della successione delle somme parziali sono

$$\begin{aligned}
s_1 &:= a_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \\
s_2 &:= a_1 + a_2 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\
s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

In generale,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Quindi, per $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

# Serie convergenti

## Definizione (Serie convergente)

*Se la successione delle somme parziali $s_n$ converge a $\ell$,*
*la serie numerica è* **convergente** *e la sua* **somma** *è $\ell$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

Ad esempio, la serie $\sum 1/k(k+1)$ è convergente e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

# Serie divergenti

## Definizione (Serie divergente)

*Se la successione delle somme parziali $s_n$ diverge a $+\infty$,*
*la serie numerica è* **divergente a $+\infty$**, *e si scrive*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

Analogamente, se $s_n \to -\infty$, la serie diverge a $-\infty$.

*Esempio.* La serie di termine generico $a_k = 1$ è divergente:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

# Non convergente $\neq$ divergente

Se una serie è divergente, allora non è convergente;

ma esistono serie non convergenti e non divergenti.

Esempio. Sia $a_k = (-1)^k$. La successione delle somme parziali è

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -1, \\
s_2 &= -1 + 1 = 0, \\
s_3 &= -1 + 1 - 1 = -1, \\
&\ \vdots \\
s_n &= \begin{cases} -1 & n \text{ dispari}, \\ 0 & n \text{ pari}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dato che $s_n$ non ammette né limite finito, né limite infinito,

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ non è né convergente, né divergente.

# Le serie telescopiche

Una **serie telescopica** è tale che $a_k = b_{k+1} - b_k$.

La successione delle somme parziali di una serie telescopica è

$$\begin{aligned} s_n &= \big(b_2 - b_1\big) + \big(b_3 - b_2\big) + \cdots + \big(b_{n+1} - b_n\big) \\ &= b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_{n+1} - b_n \\ &= -b_1 + (b_2 - b_2) + (b_3 - b_3) + \cdots + (b_n - b_n) + b_{n+1} \\ &= b_{n+1} - b_1 \end{aligned}$$

## Proposizione (Convergenza delle serie telescopiche)

*La serie telescopica di termine generico $a_k = b_{k+1} - b_k$ converge se e solo se converge la successione $b_n$. In tal caso,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} b_n - b_1.$$

# Un'identità utile

In vista della **serie geometrica**...

## Lemma

*Per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, *vale*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

**Dim.** Per induzione.
$P(0)$. Il caso $n = 0$ è evidente: i termini sono pari a 1.
$P(n-1) \Rightarrow P(n)$. Se l'identità è valida per $n - 1$, allora

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

**q.e.d.**

# La serie geometrica

Dato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie di termine $x^k$
viene detta **serie geometrica (di ragione $x$)**.

## Proposizione (Convergenza della serie geometrica)

*La serie geometrica converge se e solo se $|x| < 1$. In tal caso,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

**Dim.** Per $x = 1$, la serie è divergente. Per $x \neq 1$, si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

Dato che $x^n$ converge se e solo se $|x| < 1$, lo stesso vale per $s_n$.
Il valore della somma è conseguenza del limite $x^n \to 0$. **q.e.d.**

# Attenzione all'indice di partenza

Nel calcolo della somma di una serie numerica,

gli indici $k$ considerati sono fondamentali!

*Esempio.* Si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

Se l'indice $k$ parte da 1, il risultato è diverso

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

In generale,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

# Linearità

## Proposizione (Linearità delle serie)

*Se le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono convergenti, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la serie $\sum \big(\lambda a_k + \mu b_k\big)$ è convergente e si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

**Dim.** Grazie alla linearità del limite,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) &= \lim_{n\to+\infty} \left( \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k \right) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

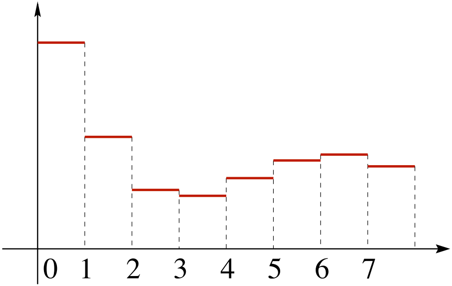
**q.e.d.**

# Significato geometrico

Sia $a_k \geq 0$ per ogni $k$. Se $R_k := [k-1, k] \times [0, a_k]$, allora

$$\text{area di } R_k = a_k \implies s_n = \sum_{k=1}^{n} \text{area di } R_k = \text{area di } \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} a_k < \infty \iff \text{area di } \bigcup_{k=1}^{n} R_k < +\infty.$$



# Condizione necessaria

Affinché una regione illimitata abbia area finita,

è naturale aspettarsi che l'area diventi piccola all'infinito.

## Proposizione (Condizione necessaria di convergenza delle serie)

*Se la serie* $\sum a_k$ *è convergente, allora* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

**Dim.** Dalla definizione di somma parziale $s_n$ segue

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1}$$

Passando al limite $n \to +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

**q.e.d.**

# Uso della condizione necessaria

Dato che

$$\text{convergenza di } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \Longrightarrow \quad a_k \text{ è infinitesima}$$

ne segue

$$a_k \text{ non è infinitesima} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ non è convergente}$$

*Esempio.* Nessuna delle seguenti serie è convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{3^k} + \frac{3^k}{2^k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k.$$

# Necessaria, ma non sufficiente

Esistono serie con termine generico infinitesimo che sono divergenti

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$$

*Esempio.* La serie $\sum \ln(1+1/k)$ è telescopica, infatti

$$a_k := \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

Dato che

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

la successione $s_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. La serie è divergente.

# Riassunto della lezione

– Convergenza (e divergenza) di una serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

– Serie telescopiche e serie geometriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big( b_{k+1} - b_k \big), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

– Proprietà delle serie convergenti

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$