Venerdì 19/11/2021

DERIVATE: RIASSUNTO

(1) $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

(2) $f(x) = x^\alpha \longrightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

(3) $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$

(5) $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

(6) $f(x) = \ln|x| \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

(7) $f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

(a) $(f+g)' = f' + g'$

(b) $(fg)' = f'g + fg'$

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

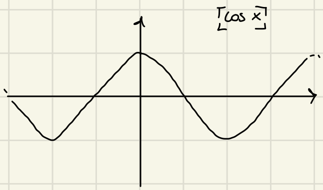
(2) $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

TEOREMA

Siano f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$. Allora "$g \circ f$" è derivabile in x_0 e:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

• ES: $g(y) = \cos y$, $f(x) = x^2$. Vogliamo calcolare: $(g \circ f)'(x_0) = \frac{d}{dx} \cos x^2 \Big|_{x = x_0}$.



Quindi: $\frac{d}{dx} \cos(x^2) \Big|_{x = x_0} = -\sin x_0^2 \cdot 2x_0 = -2x_0 \sin x_0^2$.

DIMOSTRAZIONE (INCOMPLETA)

(NON PROPRIAMENTE CORRETTA)

(REGOLA DELLA CATENA)

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}} \cdot \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{\to f'(x_0)} =$$

$$= g'(f(x_0)) f'(x_0). \blacksquare$$

(USIAMO IL CAMBIO DI VARIABILE: $y = f(x)$, $f(x_0) = y_0$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(f(x_0)).$$

• ES: $(e^{\cos x})'$. $f(x) = \cos x$, $g(y) = e^y$.

Quindi: $g(f(x)) = e^{\cos x}$. $\Rightarrow (e^{\cos x})' = \overbrace{e^{\cos x}}^{g'(f(x))} \cdot \overbrace{(-\sin x)}^{f'(x)}$

• ES: $(\sqrt{\ln x})'$. $f(x) = \ln x$, $g(y) = \sqrt{y}$. Quindi $\sqrt{\ln x} = g(f(x))$. $\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\ln x}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} = \frac{1}{2x \ln x}$

OSSERVAZIONE: La regola della catena si può applicare con la composizione di 3 o più funzioni:

$$h(g(f(x)))' = h'(g(f(x))) \cdot (g(f(x)))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Prima ho applicato la regola della catena a " $h \circ g(f)$ ", poi a " $f \circ g$ ".
In generale:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_N)'(x) = f_1'(f_2 \circ \ldots \circ f_N(x)) \cdot f_2'(f_3 \circ \ldots \circ f_N(x)) \cdot [\ldots] \cdot f_N'(x).$$

• ES: $(\ln(e^{2x}+1))'$.

$x \to 2x$. $\quad f(x) = 2x$; $f'(x) = 2$

$2x \to e^{2x}$. $\quad g(y) = e^y$; $g'(y) = e^y$

$e^{2x} \to e^{2x}+1$ $\quad h(z) = z+1$; $h'(z) = 1$

$e^{2x}+1 \to \ln(e^{2x}+1)$ $\quad K(w) = \ln w$. ; $K'(w) = \frac{1}{w}$

Quindi: $(\ln(e^{2x}+1))' = (K \circ h \circ g \circ f(x))' = \underbrace{\frac{1}{e^{2x}+1}}_{K'(h(g(f(x))))} \cdot \overbrace{1}^{h'(g(f(x)))} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{g'(f(x))} \cdot \overbrace{2}^{f'(x)} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$

• ES: $(e^{3x^2})'$. $\quad f(x) = 3x^2$; $f'(x) = 6x$

$g(y) = e^y$; $g'(y) = e^y$

Quindi:

$$(e^{3x^2})' = e^{3x^2} \cdot 6x$$

• ES: $((\cos x)^2)'$. $\quad f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$.

$g(y) = y^2$; $g'(y) = 2y$.

Quindi:

$$\underbrace{((\cos x)^2)'}_{g(f(x))} = \underbrace{2(\cos x)}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{f'(x)} = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

• ES: $(\ln(2x))'$. $\quad f(x) = 2x$; $f'(x) = 2$

$g(y) = \ln y$; $g'(y) = \frac{1}{y}$.

Quindi:

$$(\ln(2x))' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

• ES: $(e^{2x})'$. $\quad f(x) = 2x$; $f'(x) = 2$

$g(y) = e^y$; $g'(y) = e^y$.

Quindi:

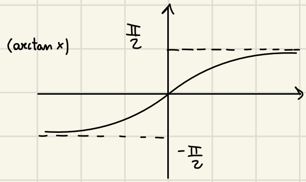
$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$$

• ES: $(e^{\sqrt{x}})'$. $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$g(y) = e^y$; $g'(y) = e^y$.

Quindi:

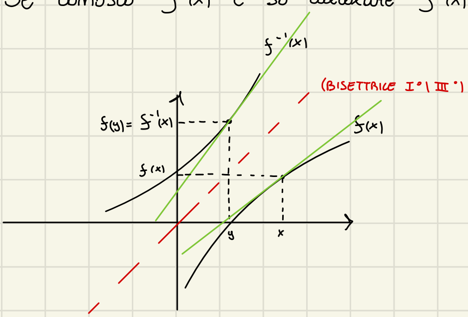
$$(e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

▶ Non abbiamo calcolato le derivate di arctan, arcsin, arccos. Abbiamo visto che l'espansione asintotica di arctan è: $\arctan x = x + o(x)$, per $x \to 0$. Quindi "$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = $
$= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$". $\Rightarrow$ $(\arctan x)'\big|_{x=0} = 1$.



DERIVATA DI FUNZIONE INVERSA

Se conosco $f(x)$ e so calcolare $f'(x)$, posso anche calcolare $(f^{-1}(x))'$.



TEOREMA

Sia f derivabile in x con $f'(x) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$ e vale che:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

DIMOSTRAZIONE

$x = f^{-1} \circ f(x)$. Derivo: $1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx}\left(f^{-1} \circ f(x)\right) \overset{\text{\{REGOLA DELLA CATENA\}}}{=} (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Scrivo "$f(x) = y$, $x = f^{-1}(y)$". Ottengo allora che:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \,. \quad \blacksquare$$

osservazione: Nella formula per $(f^{-1})'$ posso usare anche la variabile x:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

APPLICAZIONE

(Premessa:) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$. Quindi:

$\left\{ \text{oppure} = \left.\dfrac{1}{\tan^2(y)+1}\right|_{y = \arctan x} \right\}$

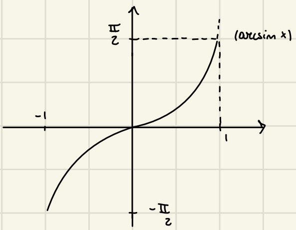
(1) $$\underbrace{(\arctan x)'}_{f^{-1}} = \left(\tan\Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1\,\prime}(x) = \frac{1}{\underbrace{(\tan)'}_{f}\underbrace{(\arctan x)}_{f^{-1}}} = \frac{1}{(\tan^2+1)(\arctan x)} =$$

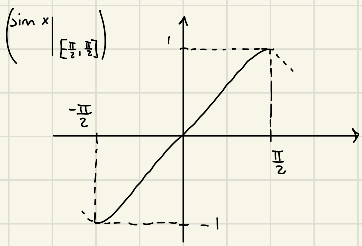
$$= \frac{1}{\underbrace{\tan(\arctan x)^2}_{x^2}+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

$\Rightarrow f(x) = \arctan x\,;\; f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(*) $\left\{ \text{TRUCCHETTO: } \cos^2 y + \sin^2 y = 1. \Rightarrow \cos^2 y = \underbrace{1 - \sin^2 y}_{\geq 0} \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}, \text{ PER } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \right\}$

(2) $$\underbrace{(\arcsin x)'}_{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\underbrace{\sin'}_{f'}\underbrace{(\arcsin x)}_{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}, \text{ con } -1 \leq |x| \leq 1 \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





$\Rightarrow f(x) = \arcsin(x)\,;$
$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\Rightarrow f(x) = \arccos x\,;\; f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

APPROSSIMAZIONE AFFINE

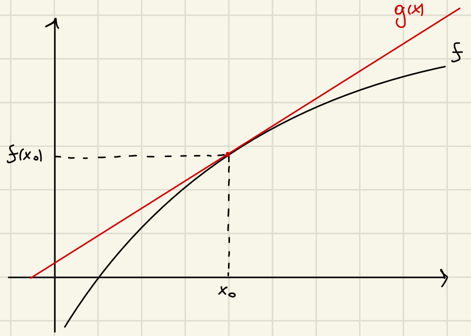
Sia f derivabile in x_0. Quindi esiste $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (1).

osservazione: "$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \ell$" si può scrivere come: $\varphi(x) = \ell + o(x)$, con $o(x) \to 0$ per $x \to x_0$.
Applico questa notazione a (1):

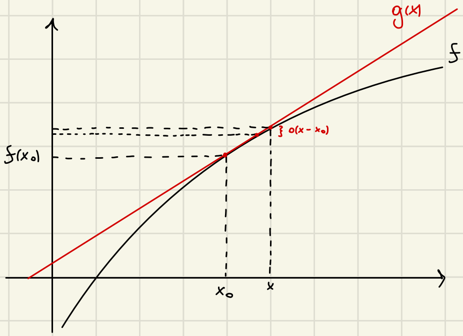
(1) $= \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\varphi(x)} = f'(x_0) + o(x)$. Moltiplico per "$x - x_0$": $(x - x_0) \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$,

per $x \to x_0 \iff f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, per $x \to x_0$. Quindi:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ (2). La (2) equivale alla (1).



La funzione $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. La (2) si chiama approssimazione affine perché una funzione della forma "$ax + b$" si chiama (appunto) "funzione affine". $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{a}x + \underbrace{\left(f(x_0) - f'(x_0)\,x_0\right)}_{b}$ è affine. La (2) dice che la differenza tra $f(x)$ e la sua approssimazione affine in x_0 è $o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.



Una conseguenza è che:

$\{o(x - x_0) = o(1)(x - x_0)$ per $x \to x_0\}$

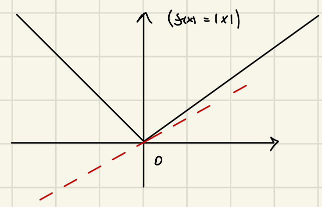
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{g(x)}_{\to f(x_0)} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\to 0} = f(x_0).$$

$\Rightarrow f$ è continua in x_0. Quindi:

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

<u>osservazione</u>: $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in 0. Quindi:

f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0.



Pierluigi Covone - 19.11.2021