Lunedì 22/11/2021

DEFINIZIONE

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$. $x_0 \in I$ si dice <u>punto di massimo</u> (o punto di minimo) <u>locale</u>, o relativo, per f se $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ (o $f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in U \cap I$.

$x_0 \in I$ si dice punto di massimo (o punto di minimo) globale, o assoluto, se $f(x) \leq f(x_0)$ (o $f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in I$.

(MOLTO PROBABILE ESCA COME DOMANDA ORALE ALL'ESAME SCRITTO.)

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 e sia x_0 punto di massimo o minimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$. (Se abbiamo "$f: I \to \mathbb{R}$" con I intervallo non necessariamente aperto, ad esempio: $I = [a,b]$, dobbiamo richiedere che x_0 sia un punto interno ad I, non un estremo di I).

DIMOSTRAZIONE

Facciamo il caso del massimo locale. Sia $x_0 \in I = (a,b)$ e U intorno di x_0 abbastanza piccolo t.c.:

(1) $U \subset I$

(2) $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in U$

f per ipotesi è derivabile in x_0, ovvero esiste il seguente limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ricordiamo che se un limite esiste, esistono i limiti destro e sinistro, e sono uguali. ⓐ Da destra: poiché $f(x) \leq f(x_0)$ per $x \in U$ vale $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leq 0$, $\forall x \in U$ con $x > x_0$. Per il teorema della permanenza del segno:
$\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. ⓑ Da sinistra: $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0$, $\forall x \in U$, con $x < x_0$. Per il teorema della permanenza del segno: $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Poiché i limiti destro e sinistro devono coincidere, e uno è ≥ 0, l'altro è ≤ 0, l'unica possibilità è che siano entrambi "0". Quindi $f'(x_0) = 0$. ∎

DEFINIZIONE

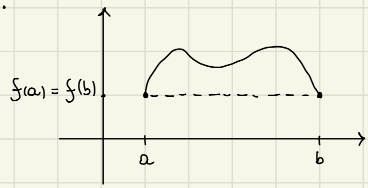
Un punto in cui vale "$f'(x_0) = 0$" si chiama punto critico, o punto stazionario. Non è detto che sia un punto di massimo o di minimo locale.

• Es: $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$. $\Rightarrow f'(0) = 0$

$x_0 = 0$ è un punto critico, ma non è un punto di massimo o minimo locale.

TEOREMA DI ROLLE

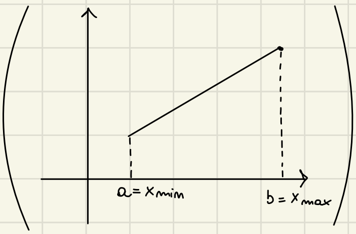
Sia $f \in C^0([a,b])$ derivabile in (a,b) t.c. $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.



DIMOSTRAZIONE

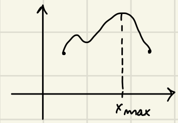
Idea: se trovo un punto ξ di massimo o di minimo interno, per il teorema di Fermat vale che $f'(\xi) = 0$.

Per il teorema di Weierstrass, $\exists\ x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ punti di minimo e di massimo (globale) ⚠ x_{min} e/o x_{max} potrebbero non essere interni ad $[a,b]$.

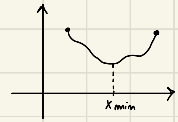


Abbiamo tre casi:

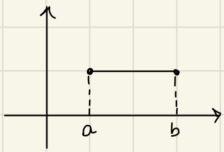
(1) x_{max} è interno. Allora prendo $\xi = x_{max}$ e vale che $f'(\xi) = 0$ per il teorema di Fermat.



(2) x_{max} non è interno, però x_{min} sì. Allora scelgo $\xi = x_{min}$ e per il teorema di Fermat vale $f'(\xi) = 0$.



(3) Se sia x_{max} che x_{min} sono agli estremi a e b dell'intervallo $[a,b]$, poiché $f(a) = f(b)$ abbiamo che $f(x_{max}) = f(x_{min})$, e questo è possibile solo se f è costante: $f(x) = f(a) = f(b)\ \forall x \in [a,b]$.

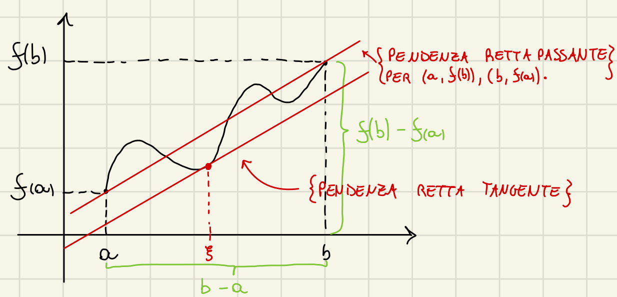


Allora $\forall \xi \in (a,b)$ vale $f'(\xi) = 0$.

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f \in C^0([a,b])$ derivabile in (a,b). Allora $\exists\ \xi \in (a,b)$ tale che:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



DIMOSTRAZIONE

Mi riconduco al teorema di Rolle definendo: $h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)x$ ($h(x)$ è la funzione "$f(x)$" meno una retta con pendenza "$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$"). Quindi:

(•) $h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b$

$(\cdot)$ $h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a$

$(\cdot)$ $h(b) - h(a) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\right)\cancel{(b-a)} = 0. \Rightarrow h(b) = h(a).$

$(\Rightarrow)$ $h \in C^0([a,b])$ derivabile in (a,b), quindi h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Lo applico ad h e trovo $\xi \in (a,b)$ tale che "$h'(\xi) = 0$".

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)' = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \blacksquare$$

RELAZIONE TRA DERIVATA E MONOTONIA DI UNA FUNZIONE

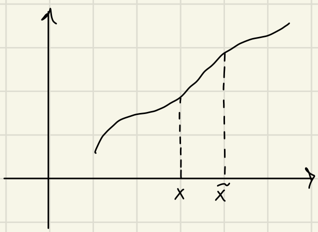
TEOREMA

Sia $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con I intervallo) derivabile. Allora f è monotona crescente (o decrescente) se e solo se "$f'(x) \geq 0$ (o $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

DIMOSTRAZIONE

Facciamo il caso "f crescente $\Leftrightarrow f' \geq 0$".

$(\Rightarrow)$ Se f è crescente, quando calcolo $f'(x) = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$ (con $f'(x)$ crescente per ipotesi) ho che ⓐ "$f(\tilde{x}) - f(x) \geq 0$ se $\tilde{x} - x \geq 0$ (quindi $\tilde{x} \geq x$)".



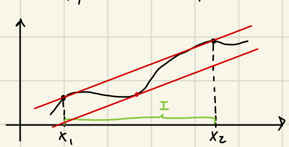
Quindi $\frac{\overbrace{f(\tilde{x}) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{\tilde{x} - x}_{>0}} \geq 0$, se $\tilde{x} > x$.

ⓑ $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ se $\tilde{x} < x$, quindi $\frac{\overbrace{f(\tilde{x}) - f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{\tilde{x} - x}_{<0}} \geq 0$, se $\tilde{x} < x$.

$\Rightarrow \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \geq 0 \quad \forall \tilde{x} \in I \setminus \{x\}$. Per il teorema della permanenza del segno, $f'(x) = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\underbrace{\tilde{x} - x}_{\geq 0}} \geq 0. \blacksquare$

$(\Leftarrow)$ Sia $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Dimostriamo che f è crescente.

Dati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$ arbitrari, dobbiamo verificare che "$f(x_2) \geq f(x_1)$".



Ora guardiamo ad $f|_{[x_1,x_2]}$; è derivabile in (a,b) e continua in $[a,b]$. Per il teorema di Lagrange,

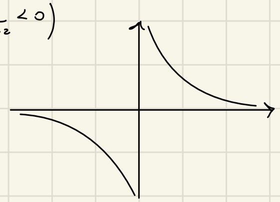
$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Poiche' $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, in particolare "$f'(\xi) \geq 0$". Quindi:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1). \blacksquare$$

OSSERVAZIONE:

E' importante lavorare su intervalli. Ad esempio, $f x := \dfrac{1}{x}$, $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ soddisfa $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\left(f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0\right)$



f però non è decrescente. Lo è invece su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ presi separatamente.

APPLICAZIONE

Data una funzione f derivabile, per calcolare dove f è crescente o decrescente calcolo gli intervalli in cui $f' \geq 0$ ed $f' \leq 0$. Li chiamo "intervalli di monotonia".

(DERIVATA DI UNA FRAZIONE CI SARA' SICURO ALL'ESAME)

• ES: $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

$\left\{ \text{OSS}: \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g'} \right\}$

Il dominio naturale è: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Quali sono gli intervalli di monotonia?

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-1) - (x^2-5x+6)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x \cancel{-5x} + 5 - x^2 \cancel{+5x} - 6}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Quando vale che $f'(x) \geq 0$ (?) e $f'(x) \leq 0$ (?) e per quali x?

② Studiamo quando $x^2 - 2x - 1 \geq 0$: $\{ \cup \leftarrow \text{(PARABOLA)} \}$

(1) Cerchiamo gli zeri;

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

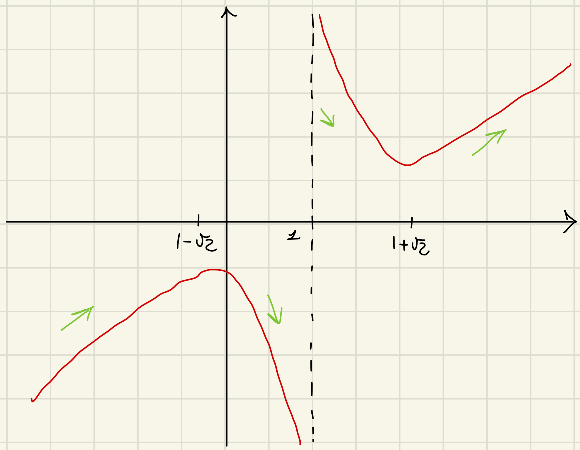
Quindi: $x^2-2x-1 \geq 0$ in $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$.

(f non è definita in 1)

		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$		$-$		$-$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(β) Proviamo ad accennare il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+6}{x-1} = \pm\infty$.



(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\overset{\to 2}{x^2-5x+6}}{\underset{\to 0^+}{x-1}} = +\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\overset{\to 2}{x^2-5x+6}}{\underset{\to 0^-}{x-1}} = -\infty$

In particolare "$x = 1-\sqrt{2}$" è un punto di massimo locale; "$x = 1+\sqrt{2}$" è un punto di minimo locale.