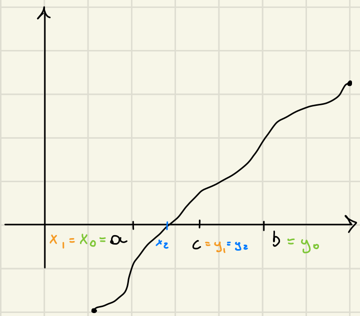
Venerdì 12/11/2021

TEOREMA: ESISTENZA DEGLI ZERI (Siamo nei numeri reali, $\mathbb{R}$)

Sia $f \in C^0([a,b])$ tale che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, oppure $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.



DIMOSTRAZIONE:

Usiamo il metodo di dicotomia. Dividiamo $[a,b]$ in due parti uguali (stessa lunghezza), $[a,c]$, $[c,b]$. Se $f(c) = 0$ ho terminato e scelgo $\xi = c$. Altrimenti o $f(c) > 0$, o $f(c) < 0$. ① Se $f(c) > 0$ ripeto la stessa cosa nell'intervallo $[a,c]$ e chiamo $x_1 = a$, $y_1 = c$. Se ② $f(c) < 0$ ripeto lo stesso in $[c,b]$ e chiamo $x_1 = c$, $y_1 = b$. Vado avanti a dividere in due gli intervalli e posso avere due cose:

1) In uno dei punti di mezzo degli intervalli che sto costruendo, (allora) f vale zero. Chiamo ξ quel punto e ho terminato.
2) Non capita mai che nei punti di mezzo degli intervalli f valga zero. Allora vado avanti e costruisco una successione di intervalli $[x_i, y_i]$ con $x_i \le x_{i+1} \le x_{i+2} \le [\dots]$. (Inoltre) $y_i \ge y_{i+1} \ge [\dots]$.
   Usiamo il seguente lemma: ogni successione monotona ha limite.
   Otteniamo che "$\lim_{i \to +\infty} x_i = \lim_{i \to +\infty} y_i = \xi$". (Mancano dettagli).
   Per costruzione abbiamo $f(x_i) < 0$, $f(y_i) > 0$. Per il teorema della permanenza del segno applicato alle successioni $\{f(x_i)\}$, $\{f(y_i)\}$, deve valere che "$\lim_{i \to +\infty} f(x_i) \le 0$" e "$\lim_{i \to +\infty} f(y_i) \ge 0$".
   Per il teorema ponte: f è continua in ξ e "$\lim_{i \to +\infty} x_i = \xi$", vale "$\lim_{i \to +\infty} f(x_i) = f(\xi) \le 0$". Allo stesso modo "$\lim_{i \to +\infty} f(y_i) = f(\xi) \ge 0$".

Quindi: $\begin{cases} f(\xi) \le 0 \\ f(\xi) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow f(\xi) = 0$ ∎

APPLICAZIONE:

Sia data la funzione $f(x) = e^x + \sin(x^2+1) + x$. Problema: f ha zeri?

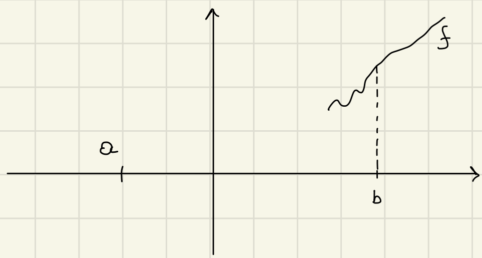
▷ Calcolarla esplicitamente non si può. Però osserviamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo che:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, in particolare $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(b) > 0$.

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < 0$.

Ora la funzione $f|_{[a,b]}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Bolzano.

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.



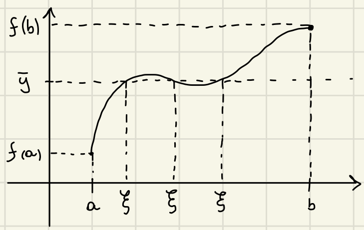
• ES: Ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero. Infatti sia $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, con n dispari, allora se:

(α) $a_n > 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$. Quindi $\exists\, a < b$ t.c. $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Applico il teorema di Bolzano.

(β) $a_n < 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \mp\infty$. Quindi $\exists\, a < b$ t.c. $p(a) > 0$, $p(b) < 0$ e applico il teorema di Bolzano.

TEOREMA DI DARBOUX - BOLZANO DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $\bar{y}$ compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ ($f(a) < \bar{y} < f(b)$, oppure $f(b) < \bar{y} < f(a)$). Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = \bar{y}$.



DIMOSTRAZIONE:

La funzione $g(x) = f(x) - \bar{y}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Bolzano.
$g(a) = f(a) - \bar{y} < 0$, $g(b) = f(b) - \bar{y} > 0$, oppure il viceversa. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ t.c. $g(\xi) = 0$. Quindi $f(\xi) = g(\xi) + \bar{y} = 0 + \bar{y} = \bar{y}$ ∎

Quindi una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra i valori assunti all'esterno dell'intervallo.

ESERCIZI

(X) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^4}\right)}$. Applichiamo l'espansione asintotica: $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$; $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$.

Quindi: $\sin\left(\dfrac{2}{n^4}\right) = \dfrac{2}{n^4} + o\left(\dfrac{2}{n^4}\right)$; $\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^2\right)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^4}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{\frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\cancel{n^4}} + \cancel{o\left(\frac{1}{n^4}\right)}}{\frac{2}{\cancel{n^4}} + \cancel{o\left(\frac{1}{n^4}\right)}} = \frac{1}{4}$$

(OSS.) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1 - \cos(y)}{\sin(2y^2)}$, ove $y = \dfrac{1}{n^2}$ da (X). Possiamo risolvere in due modi:

① $1 - \cos y = 1 - \left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)\right)$; $\sin(2y^2) = 2y^2 + o(y^2)$.

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos(y)}{\sin(2y^2)} = \frac{\frac{y^2}{2} + \cancel{o(y^2)}}{2y^2 + \cancel{o(y^2)}} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

② $$\frac{1 - \cos(y)}{\sin(2y^2)} \cdot \frac{y^2}{y^2} = \underbrace{\frac{1 - \cos y}{y^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{2y^2}{\sin(2y^2)}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(Perchè vale che:)

$$\lim_{y \to 0} \frac{2y^2}{\sin(2y^2)} \overset{(z = 2y^2)}{=} \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin z}{z}\right)}_{\to 1}^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(P) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^4-1)\ln n}{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(1-\frac{1}{n^4}\right)\ln n}{\cancel{n^5}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1+o(1))\ln n = 0$

OSSERVAZIONE. $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$. Quindi vale: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ perché $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Però non vale che ~~$\ln(1+n) = n + o(n)$~~ per $n \to +\infty$.

• ES: Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+1}-n}{\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}$. (a)

Ricordiamo che: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$. (ESPANSIONE ASINTOTICA)

Quindi: $\sqrt{n^2-2n+1} = \sqrt{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = n\sqrt{1\underbrace{-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}_{=x\to 0}}$

Riscrivo (a) come $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{1+\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-n}{\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+o\left(-\frac{2}{n}+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)-\cancel{1}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\left(-\frac{1}{\cancel{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} -n^\alpha = \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$.