Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Prova scritta - 20 Gennaio 2020

Nome e Cognome ______________________________

(STAMPATELLO)

La prova è divisa in quattro parti, corrispondenti rispettivamente agli esercizi $1-4$ (insiemi, relazioni, funzioni), $5-6$ (numerabilità, equivalenza), 7 (induzione) e $8-11$ (logica). Lo studente dovrà ottenere la sufficienza su ciascuna delle parti.

Es. 1. Sia $A = \{2, \{1, 3\}, (3, 5)\}$ e $B = \{(2, 2), 5\}$. Allora:

$\square_V \square_F$ **A.** $2 \in A \cap B$;

$\square_V \square_F$ **B.** $1 \in A \cup B$;

$\square_V \square_F$ **C.** $B - A \neq \emptyset$;

$\square_V \square_F$ **D.** $\{1, 3\} \subseteq A$

$\square_V \square_F$ **E.** $\exists x, y[(x \in A) \wedge (\{(x, y)\} \subseteq B)]$.

Es. 2. Data la relazione $R = \{(1, 2), (6, 7), (2, 3), (5, 6), (3, 4), (8, 9)\} \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, indichiamo con $\widehat{R}$ la sua chiusura transitiva.

$\square_V \square_F$ **A.** $\widehat{R}$ ha 10 elementi;

$\square_V \square_F$ **B.** $\widehat{R} = R$;

$\square_V \square_F$ **C.** $R - \widehat{R} = \emptyset$.

Es. 3. Sia $Q = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$; allora

$\square_V \square_F$ **A.** Q è una funzione iniettiva;

$\square_V \square_F$ **B.** Q è una relazione di equivalenza;

$\square_V \square_F$ **C.** Q è una relazione transitiva;

$\square_V \square_F$ **D.** Q non è una funzione;

Es. 4. Si consideri la relazione $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{N} \text{ e } a \text{ divide } b\}$.

$\square_V \square_F$ **A.** D è una relazione d'ordine stretto;

$\square_V \square_F$ **B.** D è una relazione d'ordine largo;

$\square_V \square_F$ **C.** esiste $x \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbf{N}$ se $x \neq y$ allora $(x, y) \in D$.

$\square_V \square_F$ **D.** esiste $x \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbf{N}$ se $x \neq y$ allora $(y, x) \in D$.

Es. 5. Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che

$\square_V \square_F$ **A.** se A è numerabile allora $A - B$ è numerabile;

$\square_V \square_F$ **B.** se A e B sono numerabili allora $A - B$ è finito;

$\square_V \square_F$ **C.** se A e B non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile;

$\square_V \square_F$ **D.** se A e B sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile;

Es. 6. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Scrivere una **relazione di equivalenza** $R \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ che abbia tre classi di equivalenza, indicandone l'insieme quoziente.

Rispondere qui

Es. 7. La successione dei cosiddetti *numberi pentagonali* è definita come segue:

$$f(1) = 1, f(n+1) = f(n) + 3n + 1.$$

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale $f(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Rispondere qui

Es. 8. Dimostrare che se $\models (A \to B)$ allora $\models ((A \wedge B) \leftrightarrow A)$ e $\models ((A \vee B) \leftrightarrow B)$.

Rispondere qui

Es. 9. Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

$\square_V \square_F$ **A.** $(\forall x(A(x) \vee B(x)) \to (\forall x A(x) \vee \forall x B(x));$

$\square_V \square_F$ **B.** $(\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x)).$

Es.10. Scrivere un enunciato che distingua fra $(\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{Z}, <)$, vale a dire per il quale $(\mathbb{N}, <)$ sia un modello, mentre $(\mathbb{Z}, <)$ non lo sia. Usare il linguaggio predicativo con i simboli $=, <$ (con le loro ovvie interpretazioni).

Rispondere qui

Es.11. Formalizzare i seguenti enunciati, usando simboli predicativi ed una loro opportuna interpretazione:

A. Quache uomo è un genio;

Rispondere qui

B. Nessuna scimmia è un uomo;

Rispondere qui

C. Qualche genio non è una scimmia.

Rispondere qui