Venerdì 08/10/21

(LIBRI CONSIGLIATI:)

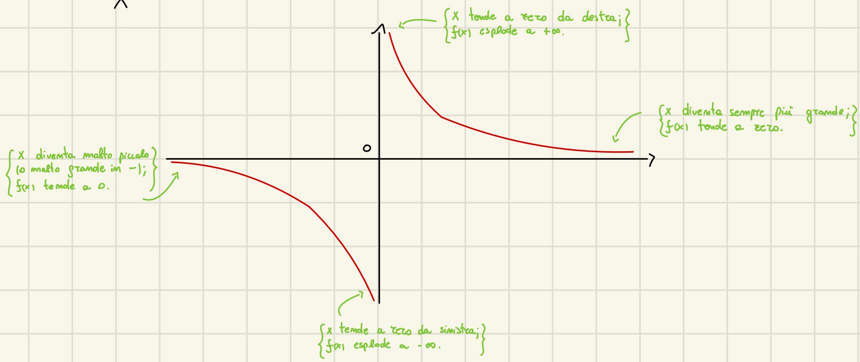
- Bertsch Dal passo, Giacomelli: Analisi matematica 1
- F. Ancona, Bait, Marson, Rubino: Analisi matematica 1
- Bramanti, Salsa.

- Argomenti che tratteremo:

Limiti, successioni, funzioni continue, derivate, serie, polinomi, serie di Taylor.

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$ E LIMITI

- ES: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

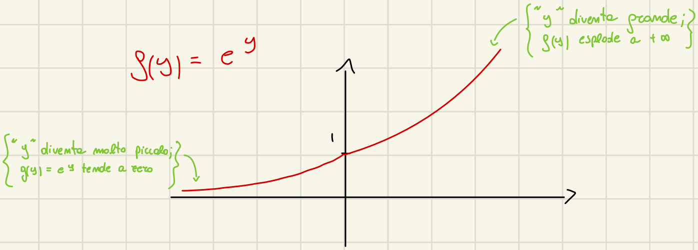


Vogliamo dire in maniera precisa che "f si avvicina a 0" quando "x si avvicina a $+\infty$ (o $-\infty$)", etc...

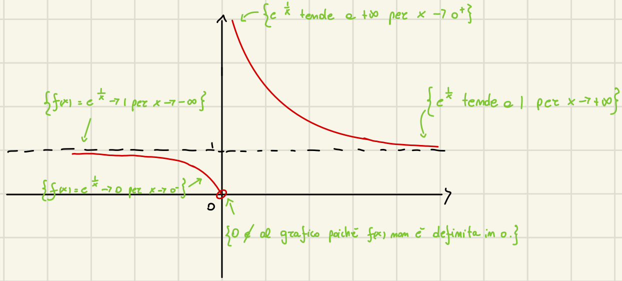
- ES: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Dominio naturale: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In questo esempio, $f(x)$ è una funzione composta, tale che:

$$f(x) = (g \cdot h)(x), \quad \text{ove:} \quad h(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad g(y) = e^y$$

Definita su: $[0, +\infty)$



$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



1) Per x che si avvicina a $+\infty$,
$\frac{1}{x}$ si avvicina a 0, $e^{\frac{1}{x}}$ si avvicina a 1.
$\Rightarrow$ Quindi (scriviamo che): $e^{\frac{1}{x}} \to 1$ per $x \to +\infty$

2) Per $x \to 0$ da destra ($x \to 0^+$),
$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$
$\frac{1}{x} \to +\infty$, quindi

3) Per $x \to 0$ da sinistra ($x \to 0^-$),
$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \to 0$

{Questo perché, per $x \to 0^-$, abbiamo che $\frac{1}{x} \to -\infty$.
$\Rightarrow e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{+\infty} \to 0$.}
$e^{\infty} \to +\infty$

4) Per $x \to -\infty$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \to 1$.

Osservazione: Componendo una funzione crescente (e^x) con una f. decrescente ($\frac{1}{x}$), ottengo una funzione decrescente ($e^{\frac{1}{x}}$).

$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ è DECRESCENTE per $x > 0$.

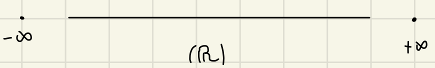
• ES: Usando le stesse idee, disegnare (abbozzare) i grafici di:

(per casa)

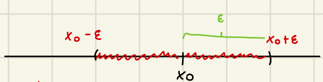
(1) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$
(2) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
(3) $f(x) = \log \frac{1}{x^2}$

▸ Topologia di $\mathbb{R}$:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, REALI ESTESI.

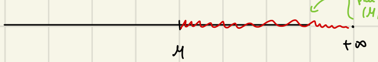


(2) Per $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo gli INTORNI (sferici) di x_0, gli intervalli della forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, dove $\varepsilon > 0$.



(3) Per $x_0 = +\infty$, gli intorni sono le semirette $(M, +\infty)$, dove $M \in \mathbb{R}$.

{Maggiore è il valore di M, "più piccolo" è l'intervallo $(M, +\infty)$}



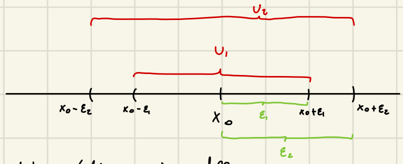
(4) Per $x_0 = -\infty$, gli intorni di x_0 sono le semirette $(-\infty, m)$, dove $m \in \mathbb{R}$.

{Più piccolo diventa m, "più piccolo" è l'intervallo $(-\infty, m)$.}

Proposizione: Se U_1 e U_2 sono intorni di x_0, allora $U_1 \cap U_2$ è un intorno di x_0, ove $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione:

(1) Se $x_0 \in \mathbb{R}$, scriviamo $U_1 = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ e $U_2 = (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$.
$U_1 \cap U_2 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, con $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

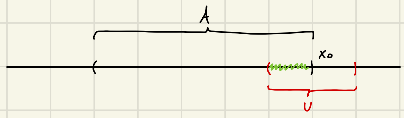


(2) Se $x_0 = +\infty$, scriviamo $U_1 = (M_1, +\infty)$ e $U_2 = (M_2, +\infty)$. Allora:
$U_1 \cap U_2 = (M, +\infty)$, dove $M = \max\{M_1, M_2\}$.

(3) Idem per $x_0 = -\infty$ (ove $m = \min\{m_1, m_2\}$).

DEFINIZIONE: (*) Sia $A \subset \mathbb{R}$; $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice punto di accumulazione per A (p. d. a.) se $\forall U$ intorno di x_0 vale che: $A \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE. x_0 può non appartenere ad A.



• ES:

(1) $A = \mathbb{N}$ l'unico punto di accumulazione (p. d. a.) è: $+\infty$.

(2) $\mathbb{Z}$; I p. d. a. di $\mathbb{Z}$ sono: $+\infty$ e $-\infty$.

Possiamo dire che x_0 è p. d. a. per A se in A ci sono punti "arbitrariamente vicini ad x_0".

LIMITI: Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A, con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

DEFINIZIONE "ASTRATTA" È UNICA

Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che ℓ è il limite di $f(x)$ per x che tende ad x_0 e si scrive:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell} \quad \text{oppure} \quad \boxed{f(x) \to \ell \text{ per } x \to x_0}$$

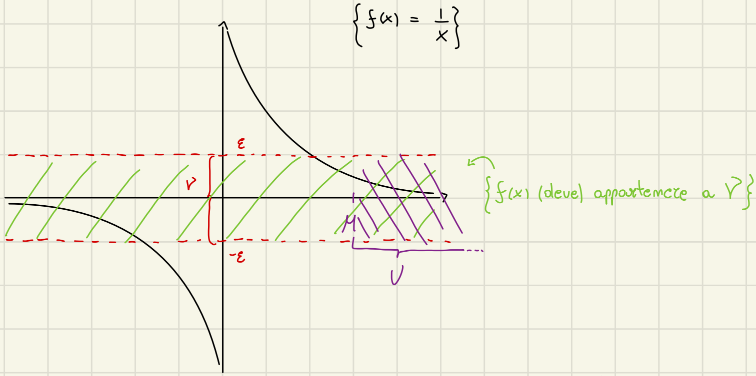
se vale che: $\forall V$ intorno di ℓ, $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) \in V, \quad \forall x \in A \cap (U \setminus \{x_0\})$

• ES:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x_0 = +\infty$. Verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

In questo caso, $\ell = 0$. Gli intorni V di ℓ sono gli intervalli $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Gli intorni U di $x_0 = +\infty$ sono le semirette $(M, +\infty)$.

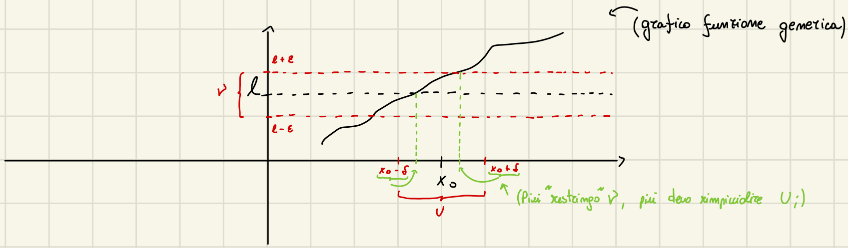


"$\forall V$ intorno di 0", diventa: $\forall \varepsilon > 0$. "$\exists U$ intorno di $+\infty$", diventa: $\exists M \in \mathbb{R}$. "$f(x) \in V$ per $x \in U \cap (A \setminus \{x_0\})$", diventa: $\frac{1}{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ per $x > M$, ovvero: $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ per $x > M$.

Dato $\varepsilon > 0$, se scelgo $M = \frac{1}{\varepsilon}$, ottengo che per $x > \varepsilon = \frac{1}{M}$, $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\frac{1}{M}} = \varepsilon$.
Quindi, $f(x) = \frac{1}{x} \in V$.

• ES:

Supponiamo $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ (cioè non consideriamo i casi $\pm\infty$).



Gli intorni V di ℓ sono della forma: $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$. Gli intorni U di x_0 si possono scrivere come $U = (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Ora, l'affermazione "$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$" si può scrivere:

(DEFINIZIONE!) $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{(\equiv\ \forall \text{ intorno di } \ell)}$, $\underbrace{\exists \delta > 0}_{(\equiv\ \exists U \text{ intorno di } x_0)}$, con $\underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{[\equiv\ f(x) \in V = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)]}$ $\forall x \in A$

t.c. $\underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{(\equiv\ x \in U \setminus \{x_0\})}$.

Osservazione: Non importa il valore di f in x_0.

CASO (1): $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$

" $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ " vuol dire $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $\forall x \in A$ con $x > M$.

$\left(|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in V;\ x > M \iff x \in U = (M, +\infty). \right)$