



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
18 Maggio 2023 — Compito n. 00021

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (8t + 3)y(t) + Ae^{4t^2+3t}.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(2) = 3$.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4e^{4t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (3 + At)e^{4t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8 \cos(t) y(t) + 7 \sin(t) \cos(t).$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 7$.

2C) Se $y(0) = 5$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 6$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 6$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

3C) Se $y(0) = 4$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s).$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t(y(t)^3 - 25y(t))$.

4A) Se $y(0) = 5$, la soluzione non è costante.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 12t^2$.

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00021

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -4$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.

b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 7 \sin(t)$ e $y(0) = \pi$.

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{10t}$, $b(t) = 5 \cos(t)$ e $y_0 = 7$.

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 12t$, $b(t) = 5t^2$ e $y_0 = 3$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00021

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 12y(t) + 11$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 10t(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = e^{-y(t)} e^{2t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{3(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzioni del compito 00021

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (8t + 3)y(t) + A e^{4t^2+3t}.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds,$$

si ha

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds \right].$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(2) = 3$.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4 e^{4t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 4 e^{4t^2+3t}$, si ha

$$y'(t) = 4(8t + 3)e^{4t^2+3t} = (8t + 3)y(t) = (8t + 3)y(t) + A e^{4t^2+3t},$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (3 + At)e^{4t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $y(t) = (3 + At)e^{4t^2+3t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A e^{4t^2+3t} + (3 + At)(8t + 3)e^{4t^2+3t} = (8t + 3)y(t) + A e^{4t^2+3t},$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Falso: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 8t + 3, \quad b(t) = 5 e^{4t^2+3t}, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = \int_0^t (8s + 3) ds = (4s^2 + 3s) \Big|_0^t = 4t^2 + 3t,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds = \int_0^t 5 e^{4s^2+3s} e^{-(4s^2+3s)} ds = \int_0^t 5 ds = 5t,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 5t e^{4t^2+3t},$$

da cui segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty \neq 0.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8 \cos(t) y(t) + 7 \sin(t) \cos(t).$$

Derivando l'equazione si ha

$$(1) \quad y''(t) = -8 \sin(t) y(t) + 8 \cos(t) y'(t) + 7 \cos^2(t) - 7 \sin^2(t).$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 8 \cos(0) y(0) + 7 \sin(0) \cos(0) = 8 \cdot 1 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 7$.

Vero: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 7,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 5$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 8 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 8 \cdot 5 = 40 > 0,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 6$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 6$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 8 \cos(\frac{\pi}{2}) y(\frac{\pi}{2}) + 7 \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) = 8 \cdot 0 \cdot 6 + 7 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) (t - \frac{\pi}{2}),$$

si ha

$$T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 6.$$

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t).$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t)) g(t),$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}, \quad g(t) = \cos(t).$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t).$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_0^s \cos(t) dt = \sin(s).$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t) dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)} y'(t)}{e^{y(t)} - 1} dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1} dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|) \Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln \left(\left| \frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right| \right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln \left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1} \right) = \sin(s),$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$(1) \quad y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)e^{\sin(s)} + 1].$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

Falso: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 4$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Vero: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 4), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s).$$

Falso: Dalla (1), con $y_0 = \ln(7)$, da cui segue che $e^{y_0} - 1 = 7 - 1 = 6$, si ha

$$y(s) = \ln(6 e^{\sin(s)} + 1) \neq \ln(6) + \sin(s) .$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t(y(t)^3 - 25y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))g(t),$$

con

$$(1) \quad f(s) = s^3 - 25s, \quad g(t) = t.$$

4A) Se $y(0) = 5$, la soluzione non è costante.

Falso: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(5) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 5$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 25y(0)) = 0 \cdot (1 - 25) = 0.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 12t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 25y(t) + t(3y(t)^2 - 25)y'(t),$$

da cui segue che $y''(0) = 24$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = -1 + 12t^2.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 25y(t) + t(3y(t)^2 - 25)y'(t),$$

da cui segue che $y''(0) = -24 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) + b(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -4$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.

b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 7 \sin(t)$ e $y(0) = \pi$.

c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{10t}$, $b(t) = 5 \cos(t)$ e $y_0 = 7$.

d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 12t$, $b(t) = 5t^2$ e $y_0 = 3$.

Soluzione:

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \quad y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s) e^{-A(s)} ds \right], \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

a) Dato che $a(t) = -4$, si ha

$$A(t) = - \int_0^t 4 ds = -4t.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = e^{-4t} \left[0 + \int_0^t 3 e^{4s} ds \right] = e^{-4t} \left[\frac{3}{4} e^{4s} \Big|_0^t \right] = \frac{3}{4} e^{-4t} [e^{4t} - 1] = \frac{3}{4} [1 - e^{-4t}].$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s) ds = -\cos(s) \Big|_0^t = 1 - \cos(t),$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} \left[\pi + \int_0^t 7 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds \right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s) ds$, si ha

$$\int_0^t 7 \sin(s) e^{\cos(s)-1} ds = -7 \int_0^{\cos(t)-1} e^z dz = -7 e^z \Big|_0^{\cos(t)-1} = 7(1 - e^{\cos(t)-1}).$$

Pertanto

$$y(t) = e^{1-\cos(t)} [\pi + 7(1 - e^{\cos(t)-1})] = (\pi + 7) e^{1-\cos(t)} - 7.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = e^{10 \cdot 0} y(0) + 5 \cos(0) = 1 \cdot 7 + 5 = 12,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t = 7 + 12t.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 12 \cdot 0 \cdot y(0) + 5 \cdot 0^2 = 0.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 12y(t) + 12ty'(t) + 10t,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 12y(0) + 12 \cdot 0 \cdot y'(0) + 10 \cdot 0 = 36.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 = 3 + 18t^2.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 12y(t) + 11$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 10t(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = e^{-y(t)} e^{2t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{3(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:

a) Dividendo per $12y(t) + 11$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{12y(t) + 11} = 1.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{12y(t) + 11} dt = \int_0^s 1 dt = s.$$

Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $12y(s) + 11 > 0$ per s vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{12y(t) + 11} dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{12z + 11} = \frac{1}{12} \ln(|12z + 11|) \Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{12} [\ln(12y(s) + 11) - \ln(11)].$$

Pertanto,

$$\frac{1}{12} [\ln(12y(s) + 11) - \ln(11)] = s,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{12y(s) + 11}{11} = e^{12s},$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{11e^{12s} - 11}{12}.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{4 + y^2(t)} = 10t.$$

Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{4 + z^2} = \int_0^s 10t dt = 5s^2.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{4 + z^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z}{2}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y(s)}{2}\right) = 5s^2,$$

da cui segue che

$$y(s) = 2 \tan(10s^2).$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} e^z dz = \int_0^s e^{2t} dt = \frac{e^{2s} - 1}{2}.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$e^{y(s)} - 1 = \frac{e^{2s} - 1}{2},$$

da cui

$$y(s) = \ln \left(\frac{e^{2s} + 1}{2} \right).$$

d) Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2} dz = \int_0^s 3 dt = 3s.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{2z}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \ln(1+z^2),$$

si ha

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2} \ln(2) = 3s,$$

da cui

$$y^2(s) = 2e^{6s} - 1,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2e^{6s} - 1}.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?