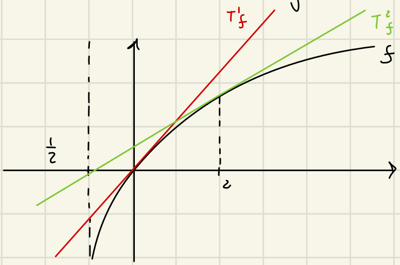
Lunedì 06/12/2021

POLINOMI DI TAYLOR E APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI

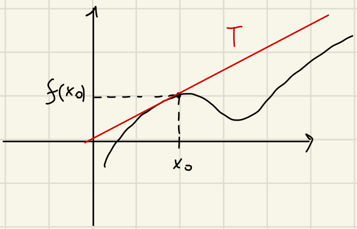
▷ Rette tangenti ad un grafico.

1a: Calcolare la retta tangente in $x_0 = 0$ al grafico di $f(x) = \ln(1+2x)$.



La retta tangente può essere vista come un luogo di punti nel piano cartesiano (x, y) individuato da un'equazione del tipo "$y = ax + b$" dove $a, b \in \mathbb{R}$, con a = pendenza della retta $\left(= f'(x_0)\right)$.

Oppure possiamo vedere la retta tangente come il grafico di una funzione $T_f^{x_0}(x)$.
Si verifica che "$T_f^{x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$" (1). (Se la scriviamo come $y = ax + b$ = $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \underbrace{f'(x_0)x}_{a} + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0))}_{b}$. Questa formula non è molto importante)



La formula (1) si interpreta così:
Si parte da x_0, e $T_f^{x_0}(x_0) = f(x_0)$. Poi, muovendosi di "x_0", ovvero facendo un passo di lunghezza "$x - x_0$", si aggiunge una quantità proporzionale a "$x - x_0$" e alla pendenza "$f'(x_0)$" della retta tangente, ovvero si aggiunge "$f'(x_0)(x - x_0)$".

Nel caso $f(x) = \ln(1+2x)$, $x_0 = 0$, ho che $T_f^0(x) = 0 + 2(x - 0) = 2x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{1+2x} \cdot (1+2x)' = \dfrac{2}{1+2x} \\ f(0) = 2 \end{array} \right\}$$

Proviamo con "$x_0 = 2$":
$f(2) = \dfrac{2}{1+4} = \dfrac{2}{5}$. Quindi: $T_f^2(x) = \underbrace{\ln(1+4)}_{f(2)} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{f'(2)}(x-2)$.

La (1) è anche l'approssimazione affine. Usando la definizione di derivata abbiamo visto che:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_f^{x_0}(x)} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0.$$

(IN PRATICA:)

$f(x) = \ln(1+2x)$, $x = 2{,}05$. Quindi $f(x) = \ln(1+4{,}1) = \ln(5{,}1) = 1{,}6292$
$f(2{,}05) \simeq f(2) + f'(2)(2{,}05 - 2) = \ln(5) + \frac{2}{5} \cdot (0{,}05) = 1{,}6094 + 0{,}02 = 1{,}6294$.

$T_f^{x_0}(x)$ è un primo esempio di polinomio di Taylor. E' il polinomio di Taylor di grado 1 di f in x_0. Se l'approssimazione "$f(x) = T_f^{x_0}(x) + o(x-x_0)$" non è abbastanza precisa per i nostri scopi, possiamo usare un polinomio di grado più alto. Definiamo:

$T_f^{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, e lo chiamiamo

Polinomio di Taylor di grado n della funzione f in x_0.

TEOREMA

Sia f derivabile almeno n volte in x_0. Allora vale: $f(x) = T_f^{x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$. (2)

OSSERVAZIONE: Per $n = 1$ la (2) è esattamente "$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_f^{1,x_0}(x)} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{ERRORE}}$".

Al crescere di n il valore di $(x-x_0)^n$ diventa più piccolo quando x è vicino ad x_0. Quindi il termine di errore $o((x-x_0)^n)$ diventa più piccolo. Scegliendo un polinomio di Taylor di grado più alto, si ottiene un'approssimazione più precisa.

ES: $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

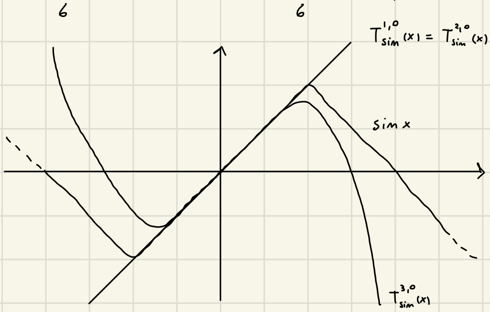
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. (Quindi:)
$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, [...].

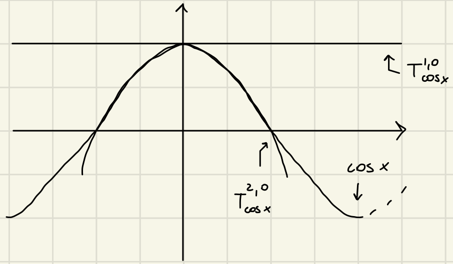
(Per) $n = 1$, $T_{\sin x}^{1,0}(x) = \underbrace{\sin 0}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{1}(x-0) = x$. $\Rightarrow$ $\sin x = x + o(x-0)$, per $x \to 0$.

(Per) $n = 2$, $T_{\sin x}^{2,0}(x) = \underbrace{\sin 0}_{0} + \overbrace{f'(0)}^{1}(x-0) + \frac{\overbrace{f''(0)}^{=0}}{2!}(x-0)^2 = x + \cancel{0x^2}$ (zero $\cdot x^2$). $\Rightarrow$ $\sin x = x + o(x^2)$, per $x \to 0$.

(Per) $n = 3$, $T_{\sin x}^{3,0}(x) = 0 + x + 0x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{6}$. $\Rightarrow$ $\sin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

(in pratica:)
Con la calcolatrice, $\sin(0{,}1) = 0{,}0998334167$
$T_{\sin x}^{3,0}(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{6} = 0{,}09983$.
$\Rightarrow$ $\sin(0{,}1) - T_{\sin x}^{3,0}(0{,}1) \approx 0{,}0000001$, che effettivamente è molto più piccolo di $(0{,}1)^3 = 0{,}001$.





• **es:** $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$.

$f'(x) = -\sin x$. $\Rightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0$.

▷ $\underline{n=1}$, $T^{1,0}_{\cos x}(x) = \cos 0 - \sin(0)(x-0) = 1$

$\Rightarrow \cos x = 1 + o(x)$, per $x \to 0$.

$f''(x) = -\cos x$. $\Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$.

▷ $n=2$, $T^{2,0}_{\cos x}(x) = \cos 0 - \sin(0)(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$. $\Rightarrow \cos x = \overbrace{1 - \frac{x^2}{2}}^{T^{2,0}_{\cos x}(x)} + o(x^2)$,

per $x \to 0$.

• **es:** Abbiamo già usato un polinomio di Taylor del logaritmo di ordine 2.
$f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

(Per) $\underline{n=1}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; Quindi: $f'(0) = 1$. $T^{1,0}_{\ln(1+x)}(x) = \ln(1+0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1(x) = x$.

$\Rightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$, per $x \to 0$.

$\underline{n=2}$, $f''(x) = ((1+x)^{-1})' = -1(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Quindi: $f''(0) = -1$.

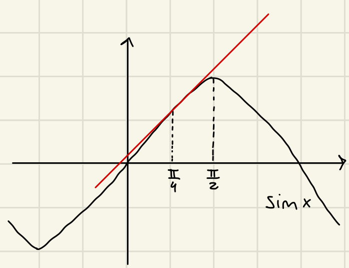
$T^{2,0}_{\ln(1+x)}(x) = 0 + x + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 = x - \frac{x^2}{2}$. $\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, per $x \to 0$.

<u>osservazione</u>: Un modo più conciso di scrivere il polinomio di Taylor è:

$$\boxed{T^{n,x_0}_f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}.$$

{<u>NOTA</u>: $0! = 1$, $1! = 1$}.

• **es:** Calcolare: $T^{2,\frac{\pi}{4}}_{\sin}$.



(1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin'(x) = \cos x$. $\Rightarrow \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin''(x) = -\sin x$. $\Rightarrow \sin''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$T^{2,\frac{\pi}{4}}_{\sin}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

• ES: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Poiché $f^{(i)}(x) = e^x$ $\forall m$, si vede facilmente che $f^{(i)}(0) = 1$ $\forall i$, quindi:

$$T_{\exp}^{m,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m!} = \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!}.$$

Già sapevamo che "$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$".
Ora sappiamo che "$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$".

DOMANDA

Se nella formula che definisce "$T_f^{m,x_0}(x)$" prendo il limite per $m \to +\infty$, ottengo $f(x)$?

$$f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ ?}}{T_f^{m,x_0}(x)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{o\left((x-x_0)^m\right)} \quad \text{per } m \to +\infty.$$

• PRIMO PROBLEMA:

$\lim\limits_{m \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ potrebbe non esistere. Se esiste, potrebbe non coincidere con $f(x)$.

Però in alcuni casi tutto funziona e si può scrivere ad esempio:

(•) $e^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

(•) $\sin x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

(•) $\cos x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i}}{(2i)!}$

Per il logaritmo funziona solo se x è vicino ad x_0. Si vedrà meglio il prossimo semestre.

Osservazione: Non vediamo la dimostrazione del teorema di Taylor.

Osservazione: Il termine "$o((x-x_0)^m)$" si chiama "RESTO DI PEANO". La formula (2) si chiama "Taylor con resto di Peano".

(SULLO STUDIO DI FUNZIONI)

• PER CASA: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+3)$.

• ES: $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

(1) DOMINIO NATURALE: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} + \frac{3}{\underbrace{x^3}_{\to +\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} + \frac{3}{\underbrace{x^3}_{\to -\infty}} = \text{Forma indeterminata} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{3x}^{=o(1),\ \text{per } x \to 0^-} + 3}{\underbrace{x^3}_{\to 0^-}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty.$$

(3) SEGNO DI f:

$\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} > 0 \iff \frac{3x+3}{x^3} > 0$. Quindi: (Numeratore) $3x+3 > 0 \iff 3x > -3 \iff x > -1$

(Denominatore) $x^3 > 0 \iff x > 0$

		-1		0	
$3x+3$	$-$		$+$		$+$
x^3	$-$		$-$		$+$
$\frac{3x+3}{x^3}$	$+$		$-$		$+$

(4) MONOTONIA:

$f'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{9}{x^4} = \frac{-6x-9}{x^4}$. Studiamo. (numeratore): $-6x-9 > 0 \iff -6x > 9$
$\iff x < -\frac{9}{6} \iff x < -\frac{3}{2}$

(Denominatore): $x^4 > 0 \quad \forall x \neq 0$

		$-\frac{3}{2}$		0	
$-6x-9$	$-$		$+$		$+$
x^4	$-$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$\Rightarrow$ " $-\frac{3}{2}$ " è l'unico punto di massimo (locale). Non ci sono punti di minimo.

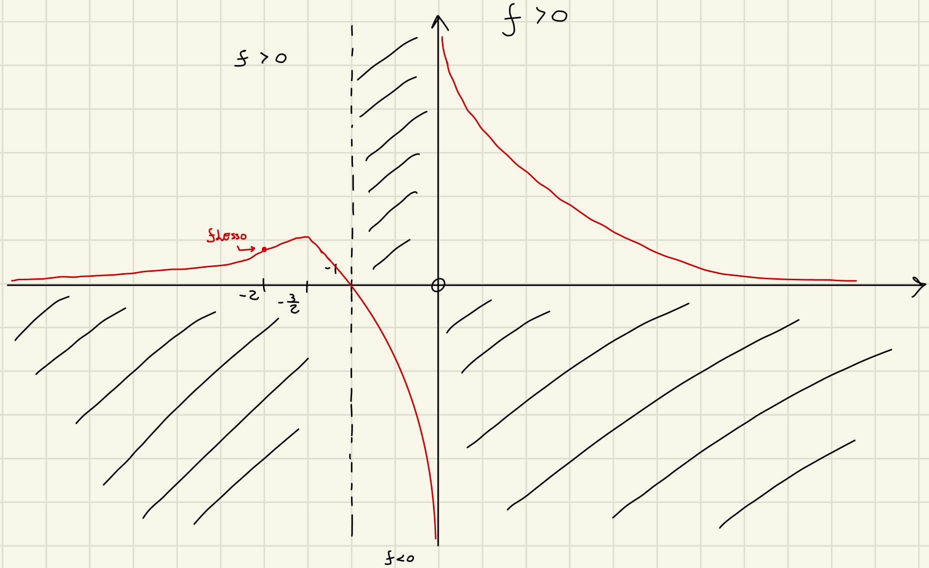
(5) CONVESSITA':

$f''(x) = \frac{18}{x^4} + \frac{36}{x^5} = \frac{18x+36}{x^5} = \frac{18(x+2)}{x^5}$. Studiamo: (numeratore) $x+2 > 0 \iff x > -2$

(denominatore) $x^5 > 0 \iff x > 0$

	$-\infty, -2$	$-2, 0$	$0, +\infty$
$18(x+2)$	$-$	$+$	$+$
x^5	$-$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

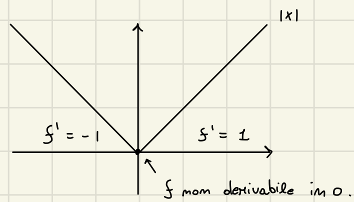
Quindi f è convessa in $(-\infty, -2)$ e in $(0, +\infty)$. E' concava in $(-2, 0)$. "-2" è punto di flesso.



▶ In alcuni studi di funzione si trova il modulo, per esempio "$|x-3|$". Ricordiamo che:

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0. \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

"$\operatorname{sgn} x$" si può anche scrivere "$\frac{x}{|x|}$", oppure $\frac{|x|}{x}$.



Quindi: $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} \quad \forall x \neq 0$

· ES: $\frac{d}{dx}|x^2+1|$. Osservo che: $(|y|)' = \frac{y}{|y|}$. Quindi: $\frac{d}{dx}|x^2+1| = \frac{x^2+1}{|x^2+1|} \cdot 2x$.

(Studio di funzione:)

· ES: $f(x) = \frac{x^2-3x}{|x-1|}$.

(1) DOMINIO NATURALE: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(2) ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3x}{|x-1|} = +\infty$$

Si può fare: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{\underbrace{|x-1|}_{=\,x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{\underbrace{|x-1|}_{=\,-x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{-x+1} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty.$$

(oss:) GLI ASINTOTI OBLIQUI si calcolano allo stesso modo:

(a) per $x \to +\infty$ scrivete "$x-1$" al posto di "$|x-1|$".

(b) per $x \to -\infty$ scrivete "$-x+1$" al posto di "$|x-1|$".

⚠ CALCOLARE DA SOLI GLI ASINTOTI OBLIQUI.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\overset{\to -2}{x^2-3x}}{\underset{\to 0^+}{|x-1|}} = -\infty$ (abbiamo l'asintoto verticale in $x_0 = 1$)

(3) DERIVATA PRIMA: $f'(x) = \dfrac{(2x-3)|x-1| - (x^2-3x)\cdot\frac{|x-1|}{x-1}}{|x-1|^2} = \dfrac{|x-1|\left(2x-3-(x^2-3)\cdot\frac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{|x-1|\left((2x-3)(x-1)-(x^2-3)\right)}{(x-1)^3} = \frac{|x-1|\left(2x^2-5x+3-x^2+3\right)}{(x-1)^3} = \frac{|x-1|\left(x^2-5x+6\right)}{(x-1)^3}.$$

(continuare a casa...)