

Contents

Módulo 6: Trigonometría y Aplicaciones - Clase 4: Gráficas de Funciones Trigonométricas

1. Objetivos Específicos de la Clase:

- Comprender las características principales de las funciones seno, coseno y tangente.
- Aprender a graficar las funciones seno, coseno y tangente.
- Identificar y aplicar transformaciones en las gráficas de funciones trigonométricas (amplitud, período, desplazamiento vertical y desplazamiento de fase).
- Analizar y comprender las gráficas de las funciones cosecante, secante y cotangente.

2. Contenido Teórico Detallado:

2.1 Funciones Seno y Coseno:

- **Función Seno ($f(x) = \sin(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales.
 - **Rango:** $[-1, 1]$
 - **Período:** 2 (la función se repite cada 2 unidades)
 - **Amplitud:** 1 (la distancia desde el eje x hasta el valor máximo o mínimo de la función)
 - **Intersecciones con el eje x:** Múltiplos enteros de π ($\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$)
 - **Simetría:** Impar ($\sin(-x) = -\sin(x)$), lo que significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen.
 - **Gráfica:** Una onda suave que oscila entre -1 y 1.
- **Función Coseno ($f(x) = \cos(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales.
 - **Rango:** $[-1, 1]$
 - **Período:** 2
 - **Amplitud:** 1
 - **Intersecciones con el eje x:** $\pi/2 + n$, donde n es un entero ($\dots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$)
 - **Simetría:** Par ($\cos(-x) = \cos(x)$), lo que significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.
 - **Gráfica:** Una onda suave similar a la del seno, pero desplazada $\pi/2$ unidades hacia la izquierda.

2.2 Función Tangente:

- **Función Tangente ($f(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales excepto $x = \pi/2 + n$, donde n es un entero (donde $\cos(x) = 0$).
 - **Rango:** Todos los números reales.
 - **Período:**
 - **Asíntotas verticales:** $x = \pi/2 + n$, donde n es un entero.
 - **Intersecciones con el eje x:** Múltiplos enteros de π ($\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$)
 - **Simetría:** Impar ($\tan(-x) = -\tan(x)$)
 - **Gráfica:** Tiene asíntotas verticales y se repite cada π unidades.

2.3 Transformaciones de Funciones Trigonométricas:

- **Amplitud:** La función $f(x) = A \sin(x)$ o $f(x) = A \cos(x)$ tiene una amplitud de $|A|$. Afecta la altura de la onda.
- **Período:** La función $f(x) = \sin(Bx)$ o $f(x) = \cos(Bx)$ tiene un período de $2\pi/|B|$. Afecta la longitud de la onda.
- **Desplazamiento Vertical:** La función $f(x) = \sin(x) + D$ o $f(x) = \cos(x) + D$ desplaza la gráfica verticalmente por D unidades.
- **Desplazamiento de Fase (Desplazamiento Horizontal):** La función $f(x) = \sin(x - C)$ o $f(x) = \cos(x - C)$ desplaza la gráfica horizontalmente por C unidades.

2.4 Funciones Cosecante, Secante y Cotangente:

- **Función Cosecante ($f(x) = \csc(x) = 1/\sin(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales excepto múltiplos enteros de π .
 - **Rango:** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
 - **Período:** 2π
 - **Asíntotas verticales:** $x = n\pi$, donde n es un entero.
 - La gráfica se relaciona con la función seno, teniendo asíntotas verticales donde $\sin(x) = 0$.
- **Función Secante ($f(x) = \sec(x) = 1/\cos(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales excepto $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero.
 - **Rango:** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
 - **Período:** 2π
 - **Asíntotas verticales:** $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero.
 - La gráfica se relaciona con la función coseno, teniendo asíntotas verticales donde $\cos(x) = 0$.
- **Función Cotangente ($f(x) = \cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$):**
 - **Dominio:** Todos los números reales excepto múltiplos enteros de π .
 - **Rango:** Todos los números reales.
 - **Período:** π
 - **Asíntotas verticales:** $x = n\pi$, donde n es un entero.
 - La gráfica se relaciona con la función tangente, teniendo asíntotas verticales donde $\sin(x) = 0$.

3. Ejemplos o Casos de Estudio:

- **Ejemplo 1: Graficar $f(x) = 2\sin(x)$**
 - Amplitud = 2 (la gráfica oscila entre -2 y 2)
 - Período = 2π (el período no cambia)
- **Ejemplo 2: Graficar $f(x) = \cos(2x)$**
 - Amplitud = 1 (la amplitud no cambia)
 - Período = $2\pi/2 = \pi$ (la gráfica se comprime horizontalmente, completando un ciclo en π unidades)
- **Ejemplo 3: Graficar $f(x) = \sin(x) + 1$**
 - Amplitud = 1 (la amplitud no cambia)
 - Período = 2π (el período no cambia)
 - Desplazamiento Vertical = 1 (la gráfica se desplaza 1 unidad hacia arriba)
- **Ejemplo 4: Graficar $f(x) = \cos(x - \pi/2)$**
 - Amplitud = 1 (la amplitud no cambia)
 - Período = 2π (el período no cambia)
 - Desplazamiento de Fase = $\pi/2$ (la gráfica se desplaza $\pi/2$ unidades hacia la derecha)

4. Problemas Prácticos o Ejercicios con Soluciones:

1. **Problema:** Identifica la amplitud y el período de la función $f(x) = 3\cos(4x)$.
 - **Solución:** Amplitud = 3, Período = $2\pi/4 = \pi/2$
2. **Problema:** Dibuja la gráfica de $f(x) = \sin(x) - 2$. Indica el desplazamiento vertical.
 - **Solución:** La gráfica del seno se desplaza 2 unidades hacia abajo.
3. **Problema:** Determina el desplazamiento de fase de la función $f(x) = \cos(x + \pi/4)$.
 - **Solución:** Desplazamiento de fase = $-\pi/4$ (desplazamiento $\pi/4$ unidades hacia la izquierda)
4. **Problema:** ¿Cuál es el período de la función $f(x) = \tan(2x)$?

- **Solución:** El período de la función tangente es π , por lo tanto, el período de $f(x) = \tan(2x)$ es $\pi/2$.

5. **Problema:** Grafica la función $f(x) = 2\sin(x - \pi/3) + 1$ e identifica su amplitud, período, desplazamiento de fase y desplazamiento vertical.

6. **Solución:**

- Amplitud = 2
- Período = 2π
- Desplazamiento de fase = $-\pi/3$
- Desplazamiento vertical = 1

5. Materiales Complementarios Recomendados:

- **Khan Academy:** Videos y ejercicios sobre gráficas de funciones trigonométricas.
- **GeoGebra:** Software interactivo para graficar funciones trigonométricas y visualizar sus transformaciones.
- **Libros de texto de cálculo:** Sección sobre funciones trigonométricas y sus gráficas.
- **Wolfram Alpha:** Herramienta online para graficar funciones y explorar sus propiedades.