

# Contents

## Módulo 1, Clase 6: Valor Absoluto y Distancia en la Recta Numérica - Aplicaciones y Desigualdades

### Objetivos de la Clase:

- Comprender el concepto de valor absoluto y su interpretación geométrica en la recta numérica.
- Aplicar el valor absoluto en la resolución de ecuaciones y desigualdades.
- Calcular la distancia entre dos puntos en la recta numérica utilizando el valor absoluto.
- Resolver problemas que involucren valor absoluto y distancia en contextos algebraicos y geométricos.

### Contenido Teórico Detallado:

#### 1. Valor Absoluto: Repaso y Profundización

- Definición Formal: El valor absoluto de un número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , se define como:

$|x| = x$ , si  $x \geq 0$        $-x$ , si  $x < 0$  \* Interpretación Geométrica:  $|x|$  representa la distancia desde  $x$  hasta el origen (0) en la recta numérica. Es siempre un valor no negativo. \* Propiedades del Valor Absoluto: \*  $|x| \geq 0$  para todo  $x$ . \*  $|x| = |-x|$  para todo  $x$ . \*  $|xy| = |x||y|$  para todo  $x, y$ . \*  $|x/y| = |x|/|y|$  para todo  $x, y$ ,  $y \neq 0$ . \* Desigualdad Triangular:  $|x + y| \leq |x| + |y|$  para todo  $x, y$ .

#### 2. Distancia en la Recta Numérica

- Definición: La distancia  $d$  entre dos puntos  $a$  y  $b$  en la recta numérica se define como:

$d(a, b) = |a - b| = |b - a|$  \* Interpretación Geométrica: La distancia es la longitud del segmento de recta que une los puntos  $a$  y  $b$ . \* Propiedades de la Distancia: \*  $d(a, b) \geq 0$  para todo  $a, b$ . \*  $d(a, b) = 0$  si y solo si  $a = b$ . \*  $d(a, b) = d(b, a)$  para todo  $a, b$ . \* Desigualdad Triangular para la Distancia:  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$  para todo  $a, b, c$ .

#### 3. Ecuaciones con Valor Absoluto

- Forma Básica:  $|x| = a$ , donde  $a \geq 0$ . Esto implica que  $x = a$  o  $x = -a$ .
- Forma General:  $|f(x)| = a$ , donde  $f(x)$  es una expresión algebraica y  $a \geq 0$ . Esto implica que  $f(x) = a$  o  $f(x) = -a$ .
- Resolución de Ecuaciones con Valor Absoluto: Requiere considerar ambos casos posibles.

#### 4. Desigualdades con Valor Absoluto

- Desigualdades de la Forma  $|x| < a$ , donde  $a > 0$ . Esto implica que  $-a < x < a$ . La solución es el intervalo abierto  $(-a, a)$ .
- Desigualdades de la Forma  $|x| \leq a$ , donde  $a > 0$ . Esto implica que  $-a \leq x \leq a$ . La solución es el intervalo cerrado  $[-a, a]$ .
- Desigualdades de la Forma  $|x| > a$ , donde  $a > 0$ . Esto implica que  $x < -a$  o  $x > a$ . La solución es la unión de dos intervalos abiertos  $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ .
- Desigualdades de la Forma  $|x| \geq a$ , donde  $a > 0$ . Esto implica que  $x \leq -a$  o  $x \geq a$ . La solución es la unión de dos intervalos cerrados  $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ .
- Desigualdades de la Forma  $|f(x)| < a$ ,  $|f(x)| \leq a$ ,  $|f(x)| > a$ ,  $|f(x)| \geq a$ : Se resuelven de manera similar, reemplazando  $x$  con la expresión  $f(x)$ .

### Ejemplos y Casos de Estudio:

#### 1. Ejemplo de Distancia: Encuentra la distancia entre los puntos -5 y 3 en la recta numérica.

- Solución:  $d(-5, 3) = |-5 - 3| = |-8| = 8$ .

#### 2. Ejemplo de Ecuación: Resuelve la ecuación $|2x - 1| = 5$ .

- Solución: Caso 1:  $2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$ .  
- Caso 2:  $2x - 1 = -5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$ .

– Soluciones:  $x = 3$ ,  $x = -2$ .

3. **Ejemplo de Desigualdad:** Resuelve la desigualdad  $|x + 2| < 3$ .

- Solución:  $-3 < x + 2 < 3 \Rightarrow -3 - 2 < x < 3 - 2 \Rightarrow -5 < x < 1$ .
- Solución: El intervalo abierto  $(-5, 1)$ .

4. **Ejemplo de aplicación de la Desigualdad Triangular:** Demuestra que  $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$  para  $a=1$ ,  $b=4$ ,  $c=-2$

- Solución:
- $d(a,c) = |1 - (-2)| = |3| = 3$
- $d(a,b) = |1 - 4| = |-3| = 3$
- $d(b,c) = |4 - (-2)| = |6| = 6$
- $d(a,b) + d(b,c) = 3 + 6 = 9$
- Como  $3 \leq 9$ , entonces se cumple que  $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

### Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. Calcula la distancia entre los puntos -8 y -2 en la recta numérica.

- Solución:  $d(-8, -2) = |-8 - (-2)| = |-8 + 2| = |-6| = 6$ .

2. Resuelve la ecuación  $|3x + 2| = 7$ .

- Solución: Caso 1:  $3x + 2 = 7 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = 5/3$ .
- Caso 2:  $3x + 2 = -7 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$ .
- Soluciones:  $x = 5/3$ ,  $x = -3$ .

3. Resuelve la desigualdad  $|2x - 1| > 5$ .

- Solución: Caso 1:  $2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$ .
- Caso 2:  $2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2$ .
- Solución:  $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ .

4. Resuelve la desigualdad  $|4 - x| \leq 2$ .

- Solución:  $-2 \leq 4 - x \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -x \leq -2 \Rightarrow 6 \geq x \geq 2$ .
- Solución:  $[2, 6]$ .

5. Encuentra todos los valores de  $x$  que satisfacen la ecuación  $|x-3| = |2x+1|$ .

6. Solución:

7. Caso 1:  $x-3 = 2x+1 \Rightarrow x - 2x = 1 + 3 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

8. Caso 2:  $x-3 = -(2x+1) \Rightarrow x-3 = -2x-1 \Rightarrow x + 2x = -1 + 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = 2/3$

9. Soluciones:  $x = -4$ ,  $x = 2/3$

### Materiales Complementarios Recomendados:

- Libro de texto de Álgebra Universitaria.
- Khan Academy: Videos y ejercicios sobre valor absoluto y desigualdades.
- Materiales en línea sobre resolución de ecuaciones y desigualdades con valor absoluto.

Esta clase completa el Módulo 1, abordando los conceptos fundamentales de conjuntos, sistemas numéricos, números reales, fracciones, recta numérica, valor absoluto y distancia. Estos conceptos son esenciales para construir una base sólida en álgebra y cálculo.