

# Contents

Clase 3: Simetría de Funciones y Álgebra de Funciones . . . . .	1
---	---

““

## Clase 3: Simetría de Funciones y Álgebra de Funciones

### 1. Objetivos de la Clase

- Definir y identificar funciones pares e impares.
- Determinar la simetría de una función dada algebraicamente y gráficamente.
- Realizar operaciones algebraicas básicas (suma, resta, multiplicación y división) con funciones.
- Calcular el dominio de las funciones resultantes de las operaciones algebraicas.

### 2. Contenido Teórico Detallado

#### 2.1 Simetría de Funciones

- **Función Par:** Una función  $f(x)$  es par si  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  en su dominio. La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje  $y$ . Ejemplos comunes:  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,  $f(x) = |x|$ .
- **Función Impar:** Una función  $f(x)$  es impar si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  en su dominio. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen. Ejemplos comunes:  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = x$ .
- **Determinación Algebraica:** Para determinar si una función es par, impar o ninguna de las dos, se sustituye  $x$  por  $-x$  en la expresión de la función y se simplifica.
  - Si el resultado es igual a la función original, es par.
  - Si el resultado es igual al negativo de la función original, es impar.
  - Si no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, la función no tiene simetría par ni impar.
- **Determinación Gráfica:** Observar la simetría de la gráfica con respecto al eje  $y$  (par) o el origen (impar).

#### 2.2 Álgebra de Funciones

Dadas dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , se pueden definir las siguientes operaciones:

- **Suma:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Resta:**  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplicación:**  $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$
- **División:**  $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ , donde  $g(x) \neq 0$

**Dominio de las Operaciones Algebraicas:** El dominio de la suma, resta y multiplicación de funciones es la intersección de los dominios de  $f(x)$  y  $g(x)$ . El dominio de la división es la intersección de los dominios de  $f(x)$  y  $g(x)$ , excluyendo los valores de  $x$  para los cuales  $g(x) = 0$ .

### 3. Ejemplos y Casos de Estudio

#### Ejemplo 1: Simetría

- **Función:**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 
  - $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2 \neq f(x)$
  - **Conclusión:** La función es par.
- **Función:**  $g(x) = x^3 + x$ 
  - $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$
  - **Conclusión:** La función es impar.
- **Función:**  $h(x) = x^2 + x$

- $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$
- Esta expresión no es igual a  $h(x)$  ni a  $-h(x)$ .
- **Conclusión:** La función no es par ni impar.

## Ejemplo 2: Álgebra de Funciones

- Dadas  $f(x) = x + 1$  y  $g(x) = x^2 - 1$ 
  - $(f + g)(x) = (x + 1) + (x^2 - 1) = x^2 + x$
  - $(f - g)(x) = (x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + x + 2$
  - $(f * g)(x) = (x + 1)(x^2 - 1) = x^3 + x^2 - x - 1$
  - $(f / g)(x) = (x + 1) / (x^2 - 1) = (x + 1) / [(x + 1)(x - 1)] = 1 / (x - 1)$ , para  $x \neq -1$ \*
  - Dominio de  $f(x)$ : Todos los reales. Dominio de  $g(x)$ : Todos los reales.
  - Dominio de  $(f + g)(x)$ ,  $(f - g)(x)$ ,  $(f * g)(x)$ : Todos los reales.
  - Dominio de  $(f / g)(x)$ : Todos los reales, excepto  $x = 1$  y  $x = -1$ .

## 4. Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones

1. **Simetría:** Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

- a)  $f(x) = 5x - 3x^2 + 7$   
– Solución: Par
- b)  $g(x) = 2x - x^3$   
– Solución: Impar
- c)  $h(x) = x + x$   
– Solución: Ninguna
- d)  $f(x) = |x| + x^2$   
– Solución: Par

2. **Álgebra de Funciones:** Dadas  $f(x) = \sqrt{x + 2}$  y  $g(x) = x^2 - 4$ , calcule:

- a)  $(f + g)(x)$  y su dominio.  
– Solución:  $(f + g)(x) = \sqrt{x + 2} + x^2 - 4$ . Dominio:  $x \geq -2$
- b)  $(f * g)(x)$  y su dominio.  
– Solución:  $(f * g)(x) = \sqrt{x + 2} * (x^2 - 4)$ . Dominio:  $x \geq -2$
- c)  $(f / g)(x)$  y su dominio.  
– Solución:  $(f / g)(x) = \sqrt{x + 2} / (x^2 - 4) = \sqrt{x + 2} / ((x + 2)(x - 2)) = 1 / \sqrt{x + 2}(x - 2)$ . Dominio:  $x > -2$  y  $x \neq 2$ .

3. Dadas  $f(x) = 1/x$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , calcule:

- a)  $(f + g)(4)$   
– Solución:  $(f + g)(4) = f(4) + g(4) = 1/4 + \sqrt{4} = 1/4 + 2 = 9/4$
- b)  $(f * g)(9)$   
– Solución:  $(fg)(9) = f(9) * g(9) = (1/9) * \sqrt{9} = (1/9) * 3 = 1/3$ \*

## 5. Materiales Complementarios Recomendados

- **Libros de Texto:** Revisar secciones sobre simetría de funciones y operaciones con funciones.
- **Recursos en Línea:**
  - Khan Academy: Videos y ejercicios sobre funciones pares e impares, y álgebra de funciones.
  - Calculadoras gráficas en línea para visualizar la simetría de las funciones.
- **Ejercicios Adicionales:** Buscar hojas de trabajo con problemas de simetría y operaciones con funciones.