Contents

Clase 4: Composición de Funciones

1. Objetivos Específicos de la Clase:

- Comprender el concepto de composición de funciones.
- Aprender a calcular la composición de dos o más funciones.
- Determinar el dominio de una función compuesta.
- Aplicar la composición de funciones en la resolución de problemas.

2. Contenido Teórico Detallado:

2.1. Definición de Composición de Funciones:

La composición de dos funciones f y g, denotada por (f o g)(x) o f(g(x)) (léase "f compuesta con g"), se define como la función que resulta de aplicar primero la función g a x, y luego aplicar la función f al resultado obtenido, $g(x)$.

Formalmente:

(f o g)(x) = $f(g(x))$

La función g es la función "interna" y la función f es la función "externa".

2.2. Dominio de la Composición de Funciones:

El dominio de la función compuesta (f o g)(x) es el conjunto de todos los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, x debe estar en el dominio de g, y $g(x)$ debe estar en el dominio de f.

Matemáticamente:

Dominio (f o g) = { x | x Dominio(g) y $g(x)$ Dominio(f) }

2.3. Observaciones Importantes:

- En general, (f o g)(x)   (g o f)(x). La composición de funciones no es conmutativa.
- La composición de funciones puede extenderse a más de dos funciones. Por ejemplo, (f o g o h)(x) = $f(g(h(x)))$.

3. Ejemplos y Casos de Estudio:

Ejemplo 1: Cálculo de la Composición y su Dominio

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$.

1. **Hallar (f o g)(x):**

   (f o g)(x) = $f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{(x + 1)}$

2. **Hallar (g o f)(x):**

   (g o f)(x) = $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$

3. **Dominio de (f o g)(x):**

   - Dominio de $g(x) = x + 1$: Todos los números reales, (-∞, ∞).
   - Dominio de $f(x) = \sqrt{x}$: x 0, [0, ∞).
   - Para que $\sqrt{(x + 1)}$ esté definida, necesitamos $x + 1$ 0, lo que implica x -1.

   Por lo tanto, el Dominio (f o g) = [-1, ∞).

4. **Dominio de (g o f)(x):**

   - Dominio de $f(x) = \sqrt{x}$: x 0, [0, ∞).
   - Dominio de $g(x) = x + 1$: Todos los números reales, (-∞, ∞).

- Para que $\sqrt{x} + 1$ esté definida, necesitamos $x \quad 0$.

Por lo tanto, el Dominio (g o f) = [0, ∞).

Ejemplo 2: Composición con Funciones Definidas a Tramos

Sea $f(x) = \{ x^2$ si $x < 0$; $x + 1$ si $x \quad 0 \}$ y $g(x) = x$ - 1.

Hallar (f o g)(x).

Primero, encontramos $g(x) = x$ - 1. Luego, necesitamos determinar cómo f actúa sobre $g(x)$.

- Si $g(x) < 0$ => $x - 1 < 0$ => $x < 1$, entonces $f(g(x)) = (x - 1)^2$.
- Si $g(x) \quad 0$ => $x - 1 \quad 0$ => $x \quad 1$, entonces $f(g(x)) = (x - 1) + 1 = x$.

Por lo tanto, (f o g)(x) = { $(x - 1)^2$ si $x < 1$; x si $x \quad 1$ }.

4. Problemas Prácticos con Soluciones:

Problema 1:

Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$.

a) Hallar (f o g)(x).

b) Hallar (g o f)(x).

c) Evaluar (f o g)(2) y (g o f)(2).

Solución:

a) (f o g)(x) = $f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 3 = 2x^2 - 2 + 3 = 2x^2 + 1$.

b) (g o f)(x) = $g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 9 - 1 = 4x^2 + 12x + 8$.

c) (f o g)(2) = $2(2)^2 + 1 = 2(4) + 1 = 9$.

(*g* o *f*)(2) = 4(2)² + 12(2) + 8 = 4(4) + 24 + 8 = 16 + 24 + 8 = 48.

Problema 2:

Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x/(x + 1)$, hallar (f o g)(x) y su dominio.

Solución:

(f o g)(x) = $f(g(x)) = f(x/(x + 1)) = 1 / (x/(x + 1)) = (x + 1) / x$.

Para el dominio:

- x debe estar en el dominio de g, lo que significa $x \quad$ -1.
- $g(x)$ debe estar en el dominio de f, lo que significa $g(x) \quad 0$, o sea, $x/(x + 1) \quad 0$, lo que implica x 0.

Por lo tanto, el dominio de (f o g)(x) es todos los números reales excepto -1 y 0, o sea, (-∞, -1)   (-1, 0)   (0, ∞).

Problema 3:

Si $f(x) = \sqrt{}(x - 4)$ y $g(x) = x^2$, ¿cuál es el dominio de $f(g(x))$?

Solución:

$f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{}(x^2 - 4)$. Para que la raíz cuadrada esté definida, $x^2 - 4 \quad 0$, lo cual implica $x^2 \quad 4$. Esto significa que $x \quad 2$ o $x \quad -2$.

Por lo tanto, el dominio es (-∞, -2]   [2, ∞).

5. Materiales Complementarios Recomendados:

- Libros de texto de cálculo y pre-cálculo (revisar las secciones correspondientes a composición de funciones).
- Videos explicativos en plataformas como Khan Academy o YouTube (buscar ”composición de funciones”).
- Ejercicios resueltos y problemas de práctica en línea.
- Software de graficación (e.g., GeoGebra) para visualizar la composición de funciones.