Contents

Clase 2: Análisis de Funciones Lineales y Funciones Definidas a Tramos

Objetivos Específicos:

- Comprender en profundidad las características de las funciones lineales y su representación gráfica.
- Analizar funciones definidas a tramos, identificando sus diferentes reglas y dominios.
- Graficar funciones lineales y funciones definidas a tramos.
- Resolver problemas que involucren funciones lineales y funciones definidas a tramos en contextos aplicados.

Contenido Teórico Detallado:

1. **Funciones Lineales:**

   - **Definición:** Una función lineal es una función polinómica de primer grado. Su forma general es f(x) = mx + b, donde:
     - `m` representa la pendiente de la recta, indicando la tasa de cambio de la función (cuánto cambia *y* por cada unidad que cambia *x*).
     - `b` representa la ordenada al origen (intercepto con el eje *y*), el valor de *y* cuando $x = 0$.
   - **Pendiente:** La pendiente *m* se calcula como el cambio en *y* dividido por el cambio en *x* entre dos puntos cualesquiera (x , y) y (x , y) en la recta: m = (y - y) / (x - x).
   - **Gráfica:** La gráfica de una función lineal es una línea recta. Para graficarla, basta con encontrar dos puntos que pertenezcan a la recta y unirlos. Un método común es encontrar los interceptos con los ejes:
     - Intercepto con el eje *y*: hacer x = 0 en la ecuación f(x) = mx + b, resultando el punto (0, b).
     - Intercepto con el eje *x*: hacer f(x) = 0 en la ecuación f(x) = mx + b, despejando *x*.
   - **Casos Especiales:**
     - Si m > 0, la función es creciente.
     - Si m < 0, la función es decreciente.
     - Si m = 0, la función es constante (una línea horizontal).

2. **Funciones Definidas a Tramos:**

   - **Definición:** Una función definida a tramos (o por partes) es una función que se define mediante diferentes expresiones algebraicas para diferentes intervalos de su dominio.

   - **Notación:** Se representa como:

     `f(x) = {   expresión (x)  si x   Intervalo    expresión (x)  si x   Intervalo ... }` * **Dominio:** El dominio de una función definida a tramos es la unión de todos los intervalos en los que se define cada expresión. * **Continuidad:** Es importante verificar la continuidad de la función en los puntos donde cambian las expresiones. Una función es continua en un punto *c* si el límite de la función cuando *x* se acerca a *c* por la izquierda es igual al límite cuando *x* se acerca a *c* por la derecha, y ambos límites son iguales al valor de la función en *c*. * **Gráfica:** Para graficar una función definida a tramos, se grafica cada expresión en su respectivo intervalo. Es crucial prestar atención a si los extremos de los intervalos están incluidos o excluidos (usando círculos rellenos o vacíos).

Ejemplos y Casos de Estudio:

1. **Función Lineal:**
   - Consideremos la función f(x) = 2x - 1.
     - La pendiente es m = 2 (por cada unidad que aumenta *x*, *y* aumenta 2 unidades).
     - La ordenada al origen es b = -1 (la recta corta al eje *y* en el punto (0, -1)).

    - Para graficar, podemos encontrar otro punto, por ejemplo, si x = 1, entonces f(1) = 2(1) - 1 = 1. Tenemos el punto (1, 1). Unimos los puntos (0, -1) y (1, 1) para obtener la gráfica.
2. **Función Definida a Tramos:**
    - Consideremos la función:
      `f(x) = {   x + 2   si x < 0   1         si 0   x   2   -x + 3   si x > 2 }`
        - Para x < 0, la función es la línea recta x + 2.
        - Para 0   x   2, la función es constante e igual a 1 (una línea horizontal).
        - Para x > 2, la función es la línea recta -x + 3.
        - Para graficar, dibujamos cada parte en su respectivo intervalo. Notar que la función es continua en x = 0 (ambas partes se "conectan" en y = 2), pero no es continua en x = 2, pues la primera parte termina en y=1, pero la función continua con -x+3 desde el punto x=2, dando como resultado y=1 también, con lo cual es continua.

Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. **Función Lineal:**
    - **Problema:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5).
    - **Solución:** Primero, calculamos la pendiente: m = (5 - 3) / (2 - 1) = 2. Luego, usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta: y - y = m(x - x). Sustituyendo (1, 3) y m = 2, obtenemos: y - 3 = 2(x - 1). Simplificando, y = 2x + 1. Por lo tanto, f(x) = 2x + 1.
    - **Función Definida a Tramos:**
    - **Problema:** Evaluar la siguiente función definida a tramos en x = -1, x = 1, y x = 3.

      `f(x) = {   x^2    si x   1   2x - 1  si x > 1 }`
    - **Solución:**
        - Para x = -1: Como -1   1, usamos la primera expresión: f(-1) = $(-1)^2$ = 1.
        - Para x = 1: Como 1   1, usamos la primera expresión: f(1) = $(1)^2$ = 1.
        - Para x = 3: Como 3 > 1, usamos la segunda expresión: f(3) = 2(3) - 1 = 5.

Materiales Complementarios Recomendados:

- Capítulos de libros de texto de cálculo o precálculo que cubran funciones lineales y funciones definidas a tramos.
- Tutoriales en línea sobre graficación de funciones lineales y funciones definidas a tramos (Khan Academy, YouTube).
- Software de graficación como Desmos o GeoGebra para visualizar las funciones.