Contents

Módulo 5, Clase 1: Introducción a las Funciones de Variable Real

1. Objetivos Específicos de la Clase:

- Definir formalmente el concepto de función de variable real.
- Identificar el dominio y rango de una función, y aprender a calcularlos.
- Comprender la relación entre una función y su gráfica.
- Introducir ejemplos de funciones comunes: lineales, definidas a tramos y valor absoluto.

2. Contenido Teórico Detallado:

2.1. Definición de Función:

Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento x en A exactamente un elemento y en B. El conjunto A se llama el **dominio** de f, y el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a lo largo de todo el dominio se llama el **rango** de f.

Formalmente:

- f: $A \to B$
- Para cada x A, existe un único y B tal que $y = f(x)$.

A es el dominio (conjunto de entradas o valores de x), y B contiene el rango (conjunto de salidas o valores de y).

2.2. Dominio y Rango:

- **Dominio:** El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función está definida. Es importante identificar restricciones al dominio, como:
  - División por cero: El denominador no puede ser cero.
  - Raíces cuadradas (o raíces pares): El radicando (la expresión dentro de la raíz) no puede ser negativo.
  - Logaritmos: El argumento del logaritmo debe ser positivo.
- **Rango:** El rango de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores de y que la función puede tomar. Encontrar el rango puede ser más complicado que encontrar el dominio y a menudo requiere analizar la función y su gráfica.

2.3. Gráfica de una Función:

La **gráfica** de una función f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cartesiano tales que $y = f(x)$, donde x está en el dominio de f. La gráfica proporciona una representación visual de la relación entre x e y.

- **Prueba de la línea vertical:** Una curva en el plano cartesiano representa la gráfica de una función si y solo si ninguna línea vertical interseca la curva en más de un punto.

2.4. Ejemplos de Funciones Comunes:

- **Función Lineal:** $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen. Su gráfica es una línea recta. El dominio es todos los reales. El rango es todos los reales si m != 0, y es {b} si m=0.
- **Función Definida a Tramos:** Una función definida por diferentes expresiones algebraicas en diferentes intervalos de su dominio.
  - Ejemplo:

```
f(x) = {     x^2, si x < 0     x + 1, si x >= 0 }
```

- **Función Valor Absoluto:** $f(x) = |x|$, definida como:
  - $|x| = x$, *si* $x \quad 0$
  - $|x| = -x$, *si* $x < 0$

  Su gráfica tiene forma de "V". El dominio es todos los reales, y el rango es $y \quad 0$.

3. Ejemplos y Casos de Estudio:

Ejemplo 1: Dominio y Rango

Determinar el dominio y rango de $f(x) = 1/(x - 3)$.

- **Dominio:** La función no está definida cuando el denominador es cero, es decir, $x - 3 = 0$. Por lo tanto, $x = 3$ no está en el dominio. El dominio es todos los números reales excepto 3, que se puede escribir como: $(-\infty, 3) \quad (3, \infty)$.
- **Rango:** Para hallar el rango, podemos despejar x en términos de y:
  - $y = 1/(x - 3)$
  - $x - 3 = 1/y$
  - $x = 1/y + 3$ La única restricción aquí es que y no puede ser cero. Por lo tanto, el rango es todos los números reales excepto 0, que se escribe como: $(-\infty, 0) \quad (0, \infty)$.

Ejemplo 2: Función Definida a Tramos

Consideremos la función:

```
f(x) = {     2x, si x <= 1     x + 1, si 1 < x <= 3     4, si x > 3 }
```

Determinar $f(0)$, $f(2)$, y $f(5)$.

- $f(0)$: Como $0 <= 1$, usamos la primera expresión: $f(0) = 2(0) = 0$.
- $f(2)$: Como $1 < 2 <= 3$, usamos la segunda expresión: $f(2) = 2 + 1 = 3$.
- $f(5)$: Como $5 > 3$, usamos la tercera expresión: $f(5) = 4$.

Ejemplo 3: Función Valor Absoluto

Graficar la función $f(x) = |x - 2|$.

Esta función desplaza la gráfica de $|x|$ dos unidades a la derecha. Para $x \quad 2$, $f(x) = x - 2$. Para $x < 2$, $f(x) = -(x - 2) = 2 - x$.

4. Problemas Prácticos/Ejercicios:

1. **Dominio y Rango:** Encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:
   - a) $f(x) = \sqrt{}(x + 4)$
   - b) $g(x) = 3/(x\hat{}2 - 9)$
2. **Función Definida a Tramos:** Evalúa la siguiente función para los valores dados:

   ```
   h(x) = {     x^3, si x < -1     1, si -1 <= x <= 1     2x - 1, si x > 1 }
   ```

   - $h(-2)$
   - $h(0)$
   - $h(3)$
3. **Función Valor Absoluto:** Grafica la función $f(x) = -|x| + 3$. Describe cómo se transforma la gráfica de $|x|$.

Soluciones:

1. **Dominio y Rango:**
   - a) $f(x) = \sqrt{}(x + 4)$
     - Dominio: $x + 4 \quad 0 => x \quad -4$. Respuesta: $[-4, \infty)$
     - Rango: $[0, \infty)$

- b) *g(x) = 3/(x^2 - 9)*
  - Dominio: *x^2 - 9 0 => x ±3*. Respuesta: *(-∞, -3) (-3, 3) (3, ∞)*
  - Rango: Para hallar el rango, observar que g(x) puede tomar valores positivos y negativos, acercándose a cero cuando x se hace muy grande. Además, cuando x se acerca a 3 o -3, g(x) tiende a infinito. Análisis más profundo revelaría el rango como *(-∞, -1/2] (0, ∞)* (Más avanzado, podría requerir cálculo).

2. **Función Definida a Tramos:**
   - *h(-2) = (-2)^3 = -8*
   - *h(0) = 1*
   - *h(3) = 2(3) - 1 = 5*
3. **Función Valor Absoluto:** La gráfica de *f(x) = -|x| + 3* es la gráfica de *|x|* reflejada sobre el eje x (debido al signo negativo) y luego desplazada 3 unidades hacia arriba. El resultado es una "V" invertida con vértice en (0, 3).

5. Materiales Complementarios Recomendados:

- Libros de texto de cálculo de nivel universitario.
- Sitios web interactivos de matemáticas (Khan Academy, Wolfram Alpha).
- Videos explicativos sobre funciones y sus gráficas.