Contents

Clase 5: Funciones Inyectivas e Inversas

Objetivos de la Clase:

- Definir y comprender el concepto de función inyectiva (uno a uno).
- Aprender a determinar si una función es inyectiva utilizando la prueba de la línea horizontal.
- Definir la función inversa y comprender su relación con la función original.
- Aprender a encontrar la función inversa de una función dada algebraicamente.
- Entender la relación entre el dominio y el rango de una función y su inversa.
- Graficar funciones inversas y comprender su simetría respecto a la recta y = x.

Contenido Teórico Detallado:

1. **Funciones Inyectivas (Uno a Uno):**
    - Una función f es **inyectiva** (o uno a uno) si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio. En otras palabras, si $f(x\ ) = f(x\ )$, entonces $x\ = x\ $. Esto significa que no hay dos valores diferentes en el dominio que produzcan el mismo valor en el rango.
    - **Prueba de la Línea Horizontal:** Una forma gráfica de determinar si una función es inyectiva es mediante la **prueba de la línea horizontal**. Si cualquier línea horizontal intersecta la gráfica de la función a lo sumo en un punto, entonces la función es inyectiva.
2. **Función Inversa:**
    - Si f es una función inyectiva con dominio A y rango B, entonces su **función inversa** (denotada como $f^{\ 1}$) tiene dominio B y rango A, y satisface la siguiente propiedad: $f^{\ 1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$.
    - En otras palabras, la función inversa "deshace" lo que hace la función original.
    - **Importante:** No todas las funciones tienen una inversa. Solo las funciones inyectivas tienen inversas. Si una función no es inyectiva, se puede restringir su dominio para hacerla inyectiva y luego encontrar su inversa.
3. **Cómo Encontrar la Función Inversa Algebraicamente:**
    - **Paso 1:** Escribe la ecuación $y = f(x)$.
    - **Paso 2:** Despeja x en términos de y. Si este paso es imposible, entonces f no tiene inversa.
    - **Paso 3:** Intercambia x e y. La ecuación resultante es $y = f^{\ 1}(x)$.
    - **Paso 4:** Verifica que $f(f^{\ 1}(x)) = x$ y $f^{\ 1}(f(x)) = x$.
4. **Dominio y Rango de la Función Inversa:**
    - El dominio de $f^{\ 1}$ es el rango de f.
    - El rango de $f^{\ 1}$ es el dominio de f.
5. **Gráfica de la Función Inversa:**
    - La gráfica de $f^{\ 1}$ se obtiene reflejando la gráfica de f sobre la recta $y = x$. Esto se debe a que si el punto (a, b) está en la gráfica de f, entonces el punto (b, a) está en la gráfica de $f^{\ 1}$.

Ejemplos y Casos de Estudio:

1. **Ejemplo 1: Determinar si una función es inyectiva.**
    - Considera la función $f(x) = x^2$. Esta función no es inyectiva porque, por ejemplo, $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$. Por lo tanto, la prueba de la línea horizontal falla.

- Considera la función $f(x) = x^3$. Esta función es inyectiva porque cualquier línea horizontal intersecta su gráfica a lo sumo en un punto.

2. **Ejemplo 2: Encontrar la función inversa.**
   - Encuentra la inversa de $f(x) = 2x + 3$.
     - **Paso 1:** $y = 2x + 3$
     - **Paso 2:** $y - 3 = 2x \Rightarrow x = (y - 3) / 2$
     - **Paso 3:** $y = (x - 3) / 2$
     - **Paso 4:** $f^{1}(x) = (x - 3) / 2$
     - **Verificación:**
       - $f(f^{1}(x)) = f((x - 3) / 2) = 2((x - 3) / 2) + 3 = x - 3 + 3 = x$
       - $f^{1}(f(x)) = f^{1}(2x + 3) = ((2x + 3) - 3) / 2 = 2x / 2 = x$
3. **Ejemplo 3: Dominio y Rango de una Función y su Inversa.**
   - Sea $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de f es $[0, \infty)$ y el rango de f es $[0, \infty)$.
   - La inversa de $f(x)$ es $f^{1}(x) = x^2$, restringida al dominio $[0, \infty)$. El dominio de f^{1} es $[0, \infty)$ (el rango de f) y el rango de f^{1} es $[0, \infty)$ (el dominio de f).

Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. **Problema 1:** Determina si la función $f(x) = |x|$ es inyectiva.
   - **Solución:** No, la función no es inyectiva. Por ejemplo, $f(2) = 2$ y $f(-2) = 2$. La prueba de la línea horizontal falla.
2. **Problema 2:** Encuentra la inversa de la función $f(x) = (x - 1) / (x + 2)$.
   - **Solución:**
     - $y = (x - 1) / (x + 2)$
     - $y(x + 2) = x - 1$
     - $yx + 2y = x - 1$
     - $2y + 1 = x - yx$
     - $2y + 1 = x(1 - y)$
     - $x = (2y + 1) / (1 - y)$
     - $f^{1}(x) = (2x + 1) / (1 - x)$
3. **Problema 3:** Si $f(x) = x^3 + 1$, encuentra $f^{1}(28)$.
   - **Solución:**
     - Primero, encuentra la función inversa:
       - $y = x^3 + 1$
       - $y - 1 = x^3$
       - $x = \sqrt[3]{(y - 1)}$
       - $f^{1}(x) = \sqrt[3]{(x - 1)}$
     - Luego, evalúa $f^{1}(28) = \sqrt[3]{(28 - 1)} = \sqrt[3]{27} = 3$
4. **Problema 4:** Demuestra que $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = (x + 5)/3$ son inversas entre sí.
   - **Solución:** Debemos demostrar que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.
     - $f(g(x)) = f((x + 5)/3) = 3((x + 5)/3) - 5 = x + 5 - 5 = x$
     - $g(f(x)) = g(3x - 5) = ((3x - 5) + 5)/3 = (3x)/3 = x$
     - Por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son inversas entre sí.

Materiales Complementarios Recomendados:

- **Libros de texto:** Revisar la sección de funciones inyectivas e inversas en el libro de texto principal del curso.
- **Khan Academy:** Videos y ejercicios sobre funciones inyectivas e inversas: https://www.khanacademy.org/
- **Calculadoras gráficas:** Utilizar calculadoras gráficas (desmos, geogebra) para visualizar funciones y sus inversas, y la simetría respecto a la recta y = x.
- **Ejercicios adicionales:** Buscar en libros de ejercicios de cálculo problemas adicionales sobre funciones inyectivas e inversas.