

Contents

Módulo 6: Trigonometría y Aplicaciones - Clase 3: La Circunferencia Unitaria

1. Objetivos de la Clase:

- Comprender la definición y propiedades de la circunferencia unitaria.
- Relacionar las coordenadas de un punto en la circunferencia unitaria con las funciones trigonométricas seno y coseno.
- Utilizar la circunferencia unitaria para determinar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos comunes.
- Extender la definición de las funciones trigonométricas a cualquier ángulo, no solo a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
- Comprender el concepto de ángulos coterminales y cómo se relacionan con la circunferencia unitaria.

2. Contenido Teórico Detallado:

2.1 Definición de la Circunferencia Unitaria:

La circunferencia unitaria es una circunferencia con radio igual a 1, centrada en el origen (0,0) del plano cartesiano. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

2.2 Relación entre la Circunferencia Unitaria y las Funciones Trigonómicas:

Consideremos un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Tracemos un segmento desde el origen hasta el punto P, formando un ángulo con el eje x positivo. Entonces:

- $\cos(\theta) = x$ (La coordenada x del punto P es el coseno del ángulo θ)
- $\sin(\theta) = y$ (La coordenada y del punto P es el seno del ángulo θ)
- $\tan(\theta) = y/x = \sin(\theta)/\cos(\theta)$ (La tangente del ángulo θ es la razón entre seno y coseno)

Las funciones recíprocas se definen como:

- $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$
- $\csc(\theta) = 1/\sin(\theta)$
- $\cot(\theta) = 1/\tan(\theta) = \cos(\theta)/\sin(\theta)$

2.3 Valores de las Funciones Trigonómicas para Ángulos Comunes:

La circunferencia unitaria nos permite visualizar y recordar fácilmente los valores de las funciones trigonométricas para ángulos especiales como 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , y sus múltiplos en los cuatro cuadrantes.

Por ejemplo:

- 0° (0 radianes): $P(1, 0) \Rightarrow \cos(0) = 1, \sin(0) = 0$
- 90° ($\pi/2$ radianes): $P(0, 1) \Rightarrow \cos(\pi/2) = 0, \sin(\pi/2) = 1$
- 180° (π radianes): $P(-1, 0) \Rightarrow \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0$
- 270° ($3\pi/2$ radianes): $P(0, -1) \Rightarrow \cos(3\pi/2) = 0, \sin(3\pi/2) = -1$
- 45° ($\pi/4$ radianes): $P(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \Rightarrow \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
- 60° ($\pi/3$ radianes): $P(1/2, \sqrt{3}/2) \Rightarrow \cos(\pi/3) = 1/2, \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$
- 30° ($\pi/6$ radianes): $P(\sqrt{3}/2, 1/2) \Rightarrow \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \sin(\pi/6) = 1/2$

Es útil construir una tabla con estos valores para tenerlos a mano.

2.4 Ángulos Coterminales:

Ángulos coterminales son ángulos que comparten el mismo lado terminal cuando se dibujan en posición estándar (vértice en el origen y lado inicial en el eje x positivo). La diferencia entre dos ángulos coterminales es un múltiplo entero de 360° (o 2π radianes).

Por ejemplo, 30° y 390° son coterminales, al igual que -330° y 30° .

Los ángulos coterminales tienen los mismos valores para las funciones trigonométricas. Esto se debe a que el punto P en la circunferencia unitaria es el mismo para todos los ángulos coterminales.

3. Ejemplos/Casos de Estudio:

Ejemplo 1:

Encuentra el valor de $\sin(210^\circ)$ utilizando la circunferencia unitaria.

- 210° está en el tercer cuadrante.
- El ángulo de referencia (el ángulo agudo formado entre el lado terminal y el eje x) es $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.
- En el tercer cuadrante, el seno es negativo.
- $\sin(30^\circ) = 1/2$
- Por lo tanto, $\sin(210^\circ) = -1/2$

Ejemplo 2:

Encuentra el valor de $\cos(3/4)$ utilizando la circunferencia unitaria.

- $3/4$ está en el segundo cuadrante.
- El ángulo de referencia es $-3/4 = -\pi/4$.
- En el segundo cuadrante, el coseno es negativo.
- $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
- Por lo tanto, $\cos(3/4) = -\sqrt{2}/2$

4. Problemas Prácticos/Ejercicios con Soluciones:

1. Encuentra el valor de $\sin(135^\circ)$ utilizando la circunferencia unitaria. *Solución:* $\sin(135^\circ) = \sqrt{2}/2$
2. Encuentra el valor de $\cos(300^\circ)$ utilizando la circunferencia unitaria. *Solución:* $\cos(300^\circ) = 1/2$
3. Encuentra el valor de $\tan(5/6)$ utilizando la circunferencia unitaria. *Solución:* $\tan(5/6) = -\sqrt{3}/3$
4. Si $\cos(\theta) = -\sqrt{3}/2$ y θ está en el segundo cuadrante, encuentra $\sin(\theta)$. *Solución:* $\sin(\theta) = 1/2$
5. Encuentra dos ángulos coterminales con 60° , uno positivo y otro negativo. *Solución:* 420° y -300°
6. Determina el cuadrante en el que se encuentra un ángulo θ si $\sin(\theta) > 0$ y $\cos(\theta) < 0$. *Solución:* Cuadrante II

5. Materiales Complementarios Recomendados:

- **Khan Academy:** Videos y ejercicios sobre la circunferencia unitaria y las funciones trigonométricas.
- **GeoGebra:** Utilizar GeoGebra para visualizar la circunferencia unitaria y cómo cambian los valores de las funciones trigonométricas al variar el ángulo. Se pueden encontrar applets pre-hechos o crear uno propio.
- **Calculadora Científica:** Familiarizarse con el uso de la calculadora para calcular valores de funciones trigonométricas.
- **Libro de Texto:** Repasar la sección correspondiente a la circunferencia unitaria en el libro de texto del curso.