Contents

Módulo 2: Álgebra Básica - Clase 4: Teorema del Factor y Teorema de los Ceros Racionales

1. Objetivos de la clase:

- Comprender y aplicar el Teorema del Factor para determinar si un binomio lineal es un factor de un polinomio dado.
- Utilizar el Teorema del Factor para factorizar polinomios.
- Entender y aplicar el Teorema de los Ceros Racionales para identificar posibles raíces racionales de un polinomio.
- Combinar el Teorema de los Ceros Racionales con la división sintética para encontrar las raíces racionales de un polinomio.

2. Contenido Teórico Detallado:

- **Teorema del Factor:**
  - Enunciado: Un polinomio P(x) tiene un factor (x - c) si y solo si P(c) = 0. En otras palabras, c es una raíz de P(x) si y solo si (x - c) es un factor de P(x).
  - Aplicación: El Teorema del Factor nos permite verificar rápidamente si un binomio de la forma (x - c) es un factor de un polinomio. También, si conocemos una raíz c de un polinomio, sabemos que (x - c) es un factor y podemos dividir el polinomio original entre (x - c) para obtener un polinomio de grado menor, facilitando la factorización.
- **Teorema de los Ceros Racionales:**
  - Enunciado: Si un polinomio P(x) = a_n*x^n + a_(n-1)*x^(n-1) + ... + a_1*x + a_0 tiene coeficientes enteros, entonces cualquier raíz racional de P(x) debe ser de la forma p/q, donde p es un factor del término constante a_0, y q es un factor del coeficiente principal a_n.
  - Aplicación: El Teorema de los Ceros Racionales proporciona una lista finita de posibles raíces racionales para un polinomio con coeficientes enteros. No garantiza que alguna de estas posibles raíces sea realmente una raíz, pero limita las opciones que debemos probar. Se combina con la división sintética (o evaluación directa) para verificar cuáles de las posibles raíces son realmente raíces.
  - **Pasos para encontrar raíces racionales usando el Teorema de los Ceros Racionales y División Sintética:**
    1. Identificar los factores p del término constante a_0.
    2. Identificar los factores q del coeficiente principal a_n.
    3. Formar todas las posibles fracciones p/q (positivas y negativas).
    4. Usar división sintética (o evaluación directa) para probar cada posible raíz racional. Si el residuo es cero, la posible raíz es una raíz real del polinomio y el binomio correspondiente es un factor del polinomio.
    5. Repetir el proceso con el cociente obtenido en la división sintética hasta que se obtenga un polinomio cuadrático o uno que se pueda factorizar fácilmente.

3. Ejemplos y Casos de Estudio:

- **Ejemplo 1: Teorema del Factor**
  - Determinar si (x - 2) es un factor de P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.
  - Solución: P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 8 - 16 + 10 - 2 = 0. Como P(2) = 0, (x - 2) es un factor de P(x).
- **Ejemplo 2: Teorema de los Ceros Racionales**
  - Encontrar las posibles raíces racionales de P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3.
  - Solución:
    - Factores de a_0 (3): p = ±1, ±3
    - Factores de a_n (2): q = ±1, ±2
    - Posibles raíces racionales: p/q = ±1, ±3, ±1/2, ±3/2
- **Ejemplo 3: Combinación de Teoremas y División Sintética**
  - Encontrar todas las raíces racionales de P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.

- Solución:
  - Factores de a_0 (-6): p = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Factores de a_n (1): q = ±1
  - Posibles raíces racionales: p/q = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Probamos x = 1 usando división sintética:
    “‘ 1 | 1 -6 11 -6 | 1 -5 6

```
1  -5    6   0
```

“‘
Como el residuo es 0, x = 1 es una raíz. El cociente es x^2 - 5x + 6. * Factorizamos el cociente: x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3). * Por lo tanto, las raíces racionales de P(x) son x = 1, x = 2, y x = 3.

4. Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. Determinar si (x + 1) es un factor de P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6.

- Solución: P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 - 3(-1)^2 + 11(-1) - 6 = 1 + 3 - 3 - 11 - 6 = -16   0. Por lo tanto, (x + 1) no es un factor de P(x).
- Encontrar todas las posibles raíces racionales de P(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x - 2.
- Solución:
  - Factores de a_0 (-2): p = ±1, ±2
  - Factores de a_n (3): q = ±1, ±3
  - Posibles raíces racionales: p/q = ±1, ±2, ±1/3, ±2/3
- Encontrar todas las raíces racionales de P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.
- Solución:
  - Factores de a_0 (-6): p = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Factores de a_n (1): q = ±1
  - Posibles raíces racionales: p/q = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Probamos x = -1 usando división sintética:

    “‘ -1 | 1 2 -5 -6 | -1 -1 6

```
 1   1  -6   0
```

“‘

Como el residuo es 0, x = -1 es una raíz. El cociente es x^2 + x - 6. * Factorizamos el cociente: x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2). * Por lo tanto, las raíces racionales de P(x) son x = -1, x = -3, y x = 2. 4. Factorizar el polinomio P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 utilizando el teorema del factor.

- Solución:
  - Factores de a_0 (6): p = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Factores de a_n (1): q = ±1
  - Posibles raíces racionales: p/q = ±1, ±2, ±3, ±6
  - Probamos x = -1 usando división sintética:

    “‘ -1 | 1 -4 1 6 | -1 5 -6

```
 1   -5  6   0
```

“‘

Como el residuo es 0, $x = -1$ es una raíz. El cociente es $x^2 - 5x + 6$. * Factorizamos el cociente: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. * Por lo tanto, $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

5. **Materiales Complementarios Recomendados:**

- Libros de texto de álgebra universitaria.
- Videos explicativos sobre el Teorema del Factor y el Teorema de los Ceros Racionales en Khan Academy y YouTube.
- Ejercicios de práctica adicionales en sitios web de matemáticas.