Contents

Clase 6: Aplicaciones Avanzadas de Simulación de Monte Carlo y Análisis de Sensibilidad

Objetivos de la clase:

- Comprender y aplicar la simulación de Monte Carlo para resolver problemas de optimización estocástica.
- Aprender a realizar análisis de sensibilidad para identificar los parámetros más influyentes en un modelo de simulación.
- Aplicar técnicas de reducción de varianza para mejorar la eficiencia de la simulación de Monte Carlo.
- Familiarizarse con ejemplos de simulación de Monte Carlo en diversas áreas, como finanzas y gestión de riesgos.

Contenido Teórico Detallado:

1. **Optimización Estocástica con Simulación de Monte Carlo:**
   - **Introducción:** Muchos problemas de optimización en el mundo real involucran incertidumbre. La optimización estocástica busca encontrar la mejor solución dada esta incertidumbre. La simulación de Monte Carlo puede ser utilizada para evaluar el desempeño de diferentes soluciones candidatas bajo diferentes escenarios aleatorios.
   - **Metodología:**
     (a) **Definir la función objetivo:** Esta función representa lo que se quiere optimizar (maximizar o minimizar).
     (b) **Identificar las variables de decisión:** Estas son las variables que se pueden controlar para influir en la función objetivo.
     (c) **Definir las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias:** Estas distribuciones modelan la incertidumbre en el sistema.
     (d) **Generar muestras aleatorias:** Usar técnicas de Monte Carlo para generar múltiples escenarios posibles.
     (e) **Evaluar la función objetivo:** Para cada escenario, evaluar la función objetivo utilizando las variables de decisión actuales.
     (f) **Calcular el valor esperado:** Calcular el valor esperado de la función objetivo sobre todos los escenarios.
     (g) **Optimizar las variables de decisión:** Utilizar un algoritmo de optimización (como búsqueda aleatoria, algoritmos genéticos, etc.) para ajustar las variables de decisión y mejorar el valor esperado de la función objetivo.
   - **Ejemplo:** Optimización de un portafolio de inversión bajo incertidumbre en los rendimientos de los activos. Se busca la asignación de activos que maximice el rendimiento esperado del portafolio, sujeta a una restricción de riesgo (ej., volatilidad).

2. **Análisis de Sensibilidad:**
   - **Introducción:** El análisis de sensibilidad evalúa cómo la variación en los parámetros de entrada de un modelo de simulación afecta a las variables de salida. Es crucial para identificar los parámetros más importantes y comprender la robustez de los resultados de la simulación.
   - **Métodos:**
     - **Análisis de Sensibilidad Local (Diferenciación):** Perturbar cada parámetro individualmente y observar el cambio en la salida. Este método es útil para modelos simples pero puede ser computacionalmente costoso para modelos complejos.
     - **Análisis de Sensibilidad Global (Basado en Varianza):** Descompone la varianza de la salida en contribuciones de cada parámetro de entrada y sus interacciones. Métodos como la descomposición de Sobol se utilizan para cuantificar estas contribuciones.

    - **Ejemplo:** En un modelo de simulación de una cadena de suministro, el análisis de sensibilidad puede identificar si el costo de transporte, el tiempo de entrega de los proveedores o la demanda del cliente tiene el mayor impacto en el costo total de la cadena de suministro.

3. **Técnicas de Reducción de Varianza:**
    - **Introducción:** El objetivo de las técnicas de reducción de varianza es mejorar la precisión de las estimaciones de Monte Carlo sin aumentar el número de simulaciones.
    - **Técnicas Comunes:**
        - **Variables de Control:** Utilizar una variable correlacionada con la variable de interés para reducir la varianza de la estimación.
        - **Muestreo Estratificado:** Dividir el espacio de muestreo en estratos y muestrear independientemente de cada estrato.
        - **Números Aleatorios Antitéticos:** Utilizar pares de números aleatorios (u, 1-u) para generar muestras simétricas, reduciendo la varianza en algunos casos.
    - **Ejemplo:** En la estimación del precio de una opción financiera, se puede usar el precio de una opción similar (con una solución analítica conocida) como variable de control para reducir la varianza de la estimación de Monte Carlo.

4. **Ejemplos de Aplicación:**
    - **Finanzas:**
        - **Valoración de Opciones Exóticas:** Opciones con características complejas que no tienen una solución analítica.
        - **Gestión de Riesgos:** Simulación de escenarios de mercado para evaluar el riesgo de una cartera de inversión (Value-at-Risk, Expected Shortfall).
    - **Gestión de Operaciones:**
        - **Simulación de Sistemas de Colas Complejos:** Evaluar el rendimiento de un sistema de colas con múltiples servidores y llegadas no Poisson.
        - **Planificación de la Producción:** Simulación de la demanda y la capacidad de producción para optimizar los niveles de inventario.
    - **Ingeniería:**
        - **Análisis de Fiabilidad:** Simulación del tiempo hasta el fallo de un sistema complejo para evaluar su fiabilidad.
        - **Diseño de Sistemas:** Optimización del diseño de un sistema bajo incertidumbre en los parámetros de funcionamiento.

Ejemplos y Casos de Estudio:

- **Caso de Estudio: Optimización de Inventario con Demanda Estocástica:**
    - Una empresa quiere optimizar su política de inventario para un producto con demanda incierta. La demanda diaria sigue una distribución normal con media y desviación estándar . Los costos incluyen el costo de ordenar, el costo de almacenamiento y el costo de escasez.
    - **Solución:**
        1. Definir la función objetivo: Minimizar el costo total esperado (ordenar + almacenamiento + escasez).
        2. Identificar las variables de decisión: Nivel de inventario a ordenar (Q) y punto de reorden (R).
        3. Generar muestras aleatorias de la demanda diaria.
        4. Simular la evolución del inventario durante un período de tiempo (ej., un año) para diferentes combinaciones de Q y R.
        5. Calcular el costo total esperado para cada combinación de Q y R.
        6. Utilizar un algoritmo de optimización para encontrar los valores de Q y R que minimicen el costo total esperado.
    - **Ejemplo: Análisis de Sensibilidad en un Modelo de Simulación de Tráfico:**

– Un modelo de simulación de tráfico incluye parámetros como el número de vehículos, la velocidad máxima de los vehículos y la probabilidad de cambio de carril. Se quiere evaluar el impacto de cada parámetro en el tiempo de viaje promedio.

– **Solución:**

1. Realizar un análisis de sensibilidad local: Perturbar cada parámetro individualmente (ej., aumentar la velocidad máxima en un 10%) y observar el cambio en el tiempo de viaje promedio.
2. Realizar un análisis de sensibilidad global (ej., utilizando la descomposición de Sobol): Estimar la contribución de cada parámetro a la varianza del tiempo de viaje promedio.
3. Identificar los parámetros que tienen el mayor impacto en el tiempo de viaje promedio.

Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. **Ejercicio: Optimización de un Portafolio con Simulación de Monte Carlo:**

   - Simule el rendimiento de un portafolio con dos activos: acciones (rendimiento esperado 10%, volatilidad 20%) y bonos (rendimiento esperado 5%, volatilidad 5%). La correlación entre los rendimientos de los activos es 0.3.
   - Utilice la simulación de Monte Carlo para encontrar la asignación de activos que maximice el ratio de Sharpe (rendimiento esperado - tasa libre de riesgo) / volatilidad. Asuma una tasa libre de riesgo del 2%.
   - **Solución (Esquema):**

     (a) Generar números aleatorios correlacionados para los rendimientos de los activos.
     (b) Simular el rendimiento del portafolio para diferentes asignaciones de activos.
     (c) Calcular el ratio de Sharpe para cada asignación.
     (d) Utilizar un algoritmo de optimización para encontrar la asignación que maximice el ratio de Sharpe. *Código Python (ejemplo):* "'python import numpy as np

   def simulate_portfolio(num_simulations, mean_returns, volatilities, correlation, risk_free_rate, weights): """ Simulates portfolio returns using Monte Carlo simulation.

```
Args:
    num_simulations (int): Number of simulations to run.
    mean_returns (list): List of mean returns for each asset.
    volatilities (list): List of volatilities for each asset.
    correlation (float): Correlation between asset returns.
    risk_free_rate (float): Risk-free rate.
    weights (list): Portfolio weights for each asset.

Returns:
    float: Sharpe ratio of the simulated portfolio.
"""

num_assets = len(mean_returns)
cov_matrix = np.zeros((num_assets, num_assets))
for i in range(num_assets):
    for j in range(num_assets):
        if i == j:
            cov_matrix[i, j] = volatilities[i] * volatilities[j]
        else:
            cov_matrix[i, j] = correlation * volatilities[i] * volatilities[j]

mean_portfolio_return = np.sum(np.array(mean_returns) * np.array(weights))
portfolio_volatility = np.sqrt(np.dot(np.array(weights).T, np.dot(cov_matrix, np.array(weights))))
```

```
sharpe_ratio = (mean_portfolio_return - risk_free_rate) / portfolio_volatility
return sharpe_ratio
```

“‘

2. **Ejercicio: Análisis de Sensibilidad de un Modelo de Colas:**
   - Simule un sistema de colas con un servidor. El tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial con media , y el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con media .
   - Realice un análisis de sensibilidad para evaluar el impacto de y en el tiempo de espera promedio en la cola.
   - **Solución (Esquema):**
     (a) Simular el sistema de colas para diferentes valores de y .
     (b) Calcular el tiempo de espera promedio en la cola para cada combinación de y .
     (c) Graficar el tiempo de espera promedio en función de y para visualizar la sensibilidad.

Materiales Complementarios Recomendados:

- **Libros:**
  - ”Simulation Modeling and Analysis” de Averill M. Law.
  - ”Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis” de Søren Asmussen.
- **Artículos:**
  - Artículos sobre técnicas de reducción de varianza en revistas de simulación.
  - Artículos sobre optimización estocástica con simulación de Monte Carlo en revistas de investigación operativa.
- **Software:**
  - Lenguajes de programación: Python (con las bibliotecas NumPy, SciPy, SimPy), R.
  - Software de simulación: Arena, AnyLogic.