

Contents

Clase 3: División Sintética y Teorema del Residuo

Objetivos de la clase:

- Comprender y aplicar el método de división sintética para dividir polinomios entre binomios de la forma $(x - c)$.
- Entender y aplicar el teorema del residuo para evaluar polinomios.
- Relacionar la división sintética con el teorema del residuo.
- Resolver problemas que involucren la división sintética y el teorema del residuo.

Contenido Teórico Detallado:

1. División Sintética:

- La división sintética es un método abreviado para dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - c)$. Es una alternativa a la división larga, especialmente útil cuando el divisor es un binomio lineal.
- **Procedimiento:**
 - (a) Escribe los coeficientes del polinomio $P(x)$ en orden descendente de grado. Asegúrate de incluir ceros para cualquier término faltante.
 - (b) Escribe el valor de c (de $x - c$) a la izquierda.
 - (c) Baja el primer coeficiente directamente.
 - (d) Multiplica este coeficiente por c y escribe el resultado debajo del siguiente coeficiente.
 - (e) Suma los dos números en la columna.
 - (f) Repite los pasos 4 y 5 hasta llegar al último coeficiente.
 - (g) El último número es el residuo. Los números restantes son los coeficientes del cociente, con un grado menor que el polinomio original.
- **Ejemplo:** Dividir $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ entre $(x - 2)$ usando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrr} 2 & 2 & -5 & 3 & -2 & & & & & & & & & \\ & & & & & 4 & -2 & 2 & & & & & & \\ \hline & 2 & -3 & 1 & 0 & & & & & & & & & \end{array}$$

El cociente es $2x^2 - x + 1$ y el residuo es 0 . Por lo tanto, $2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(2x^2 - x + 1)$.

2. Teorema del Residuo:

- El teorema del residuo establece que si un polinomio $P(x)$ se divide entre $(x - c)$, entonces el residuo es igual a $P(c)$. En otras palabras, para encontrar el residuo, simplemente evalúa el polinomio en $x = c$.
- **Ejemplo:** Encontrar el residuo cuando $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ se divide entre $(x + 1)$.
Según el teorema del residuo, el residuo es $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -9$.

3. Relación entre División Sintética y Teorema del Residuo:

- La división sintética proporciona una forma eficiente de calcular $P(c)$, que es el residuo según el teorema del residuo. El último número obtenido en la división sintética es precisamente el valor de $P(c)$.
- En el ejemplo de la división sintética anterior, dividimos $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ entre $(x - 2)$ y obtuvimos un residuo de 0 . Esto significa que $P(2) = 0$, lo que confirma el teorema del residuo.

Ejemplos/Casos de Estudio:

1. **Ejemplo 1:** Usar división sintética para dividir $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ entre $(x + 2)$ y verificar el resultado con el teorema del residuo.

- División Sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & & \\ & 1 & -2 & 2 & -4 & 9 & -19 & & \end{array} \quad \begin{array}{rrrrrr} -2 & 4 & -4 & 8 & -18 & \\ \hline \end{array}$$

El cociente es $x - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 9$ y el residuo es -19 .

- Teorema del Residuo:

$P(-2) = (-2) - 2(-2)^3 + (-2) - 1 = -32 + 16 - 2 - 1 = -19$. El residuo obtenido con la división sintética coincide con el valor de $P(-2)$.

2. **Ejemplo 2:** Determinar si $(x - 3)$ es un factor de $P(x) = x - 4x^3 + x^2 + 6x$.

- Usando el teorema del factor (que se deriva del teorema del residuo), $(x - 3)$ es un factor de $P(x)$ si y solo si $P(3) = 0$.
- Evaluamos $P(3) = (3) - 4(3)^3 + (3)^2 + 6(3) = 81 - 108 + 9 + 18 = 0$.
- Por lo tanto, $(x - 3)$ es un factor de $P(x)$.

Problemas Prácticos/Ejercicios con Soluciones:

1. Usar división sintética para dividir $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ entre $(x - 1)$. ¿Cuál es el cociente y el residuo?
 - **Solución:** Cociente: $3x^2 + 5x^2 + 5x + 4$, Residuo: 9
2. Encontrar $P(-3)$ si $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$ usando el teorema del residuo.
 - **Solución:** $P(-3) = -74$
3. Determinar si $(x + 2)$ es un factor de $P(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.
 - **Solución:** Sí, es un factor porque $P(-2) = 0$.
4. Dividir el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$ entre $(x + 2)$ usando división sintética.
 - **Solución:** Cociente: $x^2 - 2x^2 - x + 6$, Residuo: 0

Materiales Complementarios Recomendados:

- Videos explicativos sobre división sintética y teorema del residuo en Khan Academy.
- Libros de álgebra universitaria que contengan secciones dedicadas a la división de polinomios y teoremas relacionados.
- Ejercicios resueltos en línea sobre división sintética y teorema del residuo.
- Repasar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división de polinomios explicadas en la clase 2.