Contents

Clase 5: Identidades y Ecuaciones Trigonométricas

Objetivos:

- Comprender y aplicar las identidades trigonométricas fundamentales.
- Simplificar expresiones trigonométricas utilizando identidades.
- Resolver ecuaciones trigonométricas básicas y complejas.
- Verificar soluciones de ecuaciones trigonométricas.

Contenido Teórico:

1. **Repaso de Identidades Trigonométricas Fundamentales:**
    - **Identidades Recíprocas:**
        - `csc(x) = 1/sin(x)`
        - `sec(x) = 1/cos(x)`
        - `cot(x) = 1/tan(x)`
    - **Identidades de Cociente:**
        - `tan(x) = sin(x)/cos(x)`
        - `cot(x) = cos(x)/sin(x)`
    - **Identidades Pitagóricas:**
        - `sin^2(x) + cos^2(x) = 1`
        - `1 + tan^2(x) = sec^2(x)`
        - `1 + cot^2(x) = csc^2(x)`
    - **Identidades de Suma y Diferencia de Ángulos:**
    - `sin(A + B) = sin(A)cos(B) + cos(A)sin(B)`
    - `sin(A - B) = sin(A)cos(B) - cos(A)sin(B)`
    - `cos(A + B) = cos(A)cos(B) - sin(A)sin(B)`
    - `cos(A - B) = cos(A)cos(B) + sin(A)sin(B)`
    - `tan(A + B) = (tan(A) + tan(B)) / (1 - tan(A)tan(B))`
    - `tan(A - B) = (tan(A) - tan(B)) / (1 + tan(A)tan(B))`
    - **Identidades de Ángulo Doble:**
    - `sin(2x) = 2sin(x)cos(x)`
    - `cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x)`
    - `tan(2x) = (2tan(x)) / (1 - tan^2(x))`
    - **Identidades de Ángulo Medio:**
    - `sin(x/2) = ±√((1 - cos(x))/2)` (el signo depende del cuadrante de x/2)
    - `cos(x/2) = ±√((1 + cos(x))/2)` (el signo depende del cuadrante de x/2)
    - `tan(x/2) = sin(x) / (1 + cos(x)) = (1 - cos(x)) / sin(x)`
    - **Ecuaciones Trigonométricas:**
    - **Ecuaciones Lineales:** Resolver para la función trigonométrica (seno, coseno, tangente, etc.) y luego encontrar los ángulos correspondientes.

- **Ecuaciones Cuadráticas:** Reescribir la ecuación como una ecuación cuadrática en términos de una función trigonométrica y resolver utilizando factorización o la fórmula cuadrática.
- **Ecuaciones con Múltiples Funciones Trigonométricas:** Utilizar identidades para expresar la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

Ejemplos y Casos de Estudio:

1. **Simplificación de Expresiones:**
   - **Problema:** Simplificar `(cos(x) / (1 - sin(x))) - tan(x)`
   - **Solución:**
     - Multiplicar el primer término por `(1 + sin(x))/(1 + sin(x))`: `[cos(x)(1 + sin(x))] / (1 - sin^2(x)) - tan(x) = [cos(x)(1 + sin(x))] / cos^2(x) - tan(x)`
     - Simplificar: `(1 + sin(x)) / cos(x) - tan(x) = (1 + sin(x)) / cos(x) - sin(x) / cos(x)`
     - Combinar términos: `1 / cos(x) = sec(x)`
   - **Resolución de Ecuaciones Trigonométricas:**
   - **Problema:** Resolver `2cos(x) - 1 = 0` para `0   x < 2 `
   - **Solución:**
     - `cos(x) = 1/2`
     - Los ángulos que satisfacen esta ecuación son `x =  /3` y `x = 5 /3`
   - **Problema:** Resolver `sin(2x) = cos(x)` para `0   x < 2 `
   - **Solución:**
     - Usar la identidad de ángulo doble: `2sin(x)cos(x) = cos(x)`
     - `2sin(x)cos(x) - cos(x) = 0`
     - `cos(x)(2sin(x) - 1) = 0`
     - `cos(x) = 0` o `sin(x) = 1/2`
     - Soluciones: `x =  /2`, `x = 3 /2`, `x =  /6`, `x = 5 /6`
   - **Caso de Estudio: Aplicación en Física**
   - En un circuito de corriente alterna, la corriente `I` en función del tiempo `t` puede describirse como `I(t) = I_0 * cos( t +  )`, donde `I_0` es la amplitud,   es la frecuencia angular, y   es el desfase. Determinar el tiempo en el que la corriente alcanza la mitad de su amplitud máxima, es decir, `I(t) = I_0/2`.
   - **Solución:**
   - Sustituir en la ecuación: `I_0/2 = I_0 * cos( t +  )`
   - Simplificar: `1/2 = cos( t +  )`
   - Resolver para ` t +  `: ` t +   = arccos(1/2)`
   - ` t +   =  /3` o ` t +   = 5 /3`
   - Resolver para `t`: `t = ( /3 -  ) / ` o `t = (5 /3 -  ) / `

Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. Simplificar: `(sin(x) + cos(x))^2 + (sin(x) - cos(x))^2`
   - **Solución:** 2
2. Simplificar: `(cos(x) / (1 + sin(x))) + (1 + sin(x)) / cos(x)`
   - **Solución:** `2sec(x)`
3. Resolver: `2sin^2(x) - sin(x) - 1 = 0` para `0   x < 2 `

- **Solución:** `x =  /2`, `x = 7 /6`, `x = 11 /6`

4. Resolver: `cos(2x) + 3sin(x) = 2` para `0   x < 2`
   - **Solución:** `x =  /6`, `x = 5 /6`, `x =  /2`
5. Verificar la identidad: `sec^2(x) - tan^2(x) = 1`
   - **Solución:** Usando las definiciones sec(x) = 1/cos(x) y tan(x) = sin(x)/cos(x), la expresión se transforma en (1/cos^2(x)) - (sin^2(x)/cos^2(x)) = (1 - sin^2(x))/cos^2(x) = cos^2(x)/cos^2(x) = 1. La identidad se verifica.

Materiales Complementarios Recomendados:

- Khan Academy: Videos y ejercicios sobre identidades y ecuaciones trigonométricas.
- Paul's Online Math Notes: Explicaciones detalladas y ejemplos resueltos.
- Libros de texto de Precálculo o Trigonometría.
- WolframAlpha: Para verificar identidades y resolver ecuaciones.
- Calculadora gráfica para visualizar soluciones.