

Contents

Módulo 4, Clase 4: Semejanza de Triángulos

1. Objetivos de la Clase:

- Definir semejanza de triángulos y sus criterios.
- Aplicar los criterios de semejanza para determinar si dos triángulos son semejantes.
- Calcular lados y ángulos desconocidos en triángulos semejantes.
- Resolver problemas prácticos utilizando la semejanza de triángulos.

2. Contenido Teórico Detallado:

2.1. Definición de Semejanza:

Dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Esto implica que:

- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales.

Si el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF, se denota como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2.2. Razón de Semejanza (k):

La razón de semejanza (k) es la relación constante entre las longitudes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces:

$$AB/DE = BC/EF = AC/DF = k$$

2.3. Criterios de Semejanza:

Para determinar si dos triángulos son semejantes, no es necesario verificar todos los ángulos y lados. Existen tres criterios principales:

- **AA (Ángulo-Ángulo):** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. (Si $A = D$ y $B = E$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$).
- **LAL (Lado-Ángulo-Lado):** Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. (Si $AB/DE = AC/DF$ y $A = D$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$).
- **LLL (Lado-Lado-Lado):** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. (Si $AB/DE = BC/EF = AC/DF$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$).

2.4. Teorema Fundamental de Semejanza:

Toda recta paralela a un lado de un triángulo que interseca a los otros dos lados, determina un triángulo semejante al triángulo original.

3. Ejemplos y Casos de Estudio:

Ejemplo 1:

Dados dos triángulos ABC y DEF, donde $A = 60^\circ$, $B = 80^\circ$, $D = 60^\circ$ y $E = 80^\circ$. Determinar si los triángulos son semejantes.

Solución:

Como $A = D$ y $B = E$, los triángulos son semejantes por el criterio AA.

Ejemplo 2:

En el triángulo ABC, $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm y $A = 50^\circ$. En el triángulo DEF, $DE = 8$ cm, $DF = 12$ cm y $D = 50^\circ$. Determinar si los triángulos son semejantes.

Solución:

$$AB/DE = 4/8 = 1/2$$

$$AC/DF = 6/12 = 1/2$$

$$A = D = 50^\circ$$

Por el criterio LAL, los triángulos son semejantes. La razón de semejanza es $k = 1/2$.

Ejemplo 3:

En el triángulo ABC, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 7$ cm. En el triángulo DEF, $DE = 9$ cm, $EF = 15$ cm, $FD = 21$ cm. Determinar si los triángulos son semejantes.

Solución:

$$AB/DE = 3/9 = 1/3$$

$$BC/EF = 5/15 = 1/3$$

$$CA/FD = 7/21 = 1/3$$

Por el criterio LLL, los triángulos son semejantes. La razón de semejanza es $k = 1/3$.

4. Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

Problema 1:

Dos triángulos ABC y DEF son semejantes. Si $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm y $DE = 10$ cm, hallar EF y DF.

Solución:

Como los triángulos son semejantes, $AB/DE = BC/EF = AC/DF$.

$$5/10 = 7/EF = 9/DF$$

- $EF = (7 * 10) / 5 = 14$ cm
- $DF = (9 * 10) / 5 = 18$ cm

Problema 2:

Un árbol proyecta una sombra de 15 metros. A la misma hora, una vara vertical de 2 metros proyecta una sombra de 3 metros. Calcular la altura del árbol.

Solución:

Se forman dos triángulos semejantes (el árbol y su sombra, y la vara y su sombra).

Altura del árbol / Sombra del árbol = Altura de la vara / Sombra de la vara

$$\text{Altura del árbol} / 15 = 2 / 3$$

$$\text{Altura del árbol} = (2 * 15) / 3 = 10 \text{ metros}$$

Problema 3:

En un triángulo ABC, se traza una línea DE paralela a BC, donde D está en AB y E está en AC. Si $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm y $AE = 5$ cm, calcular EC.

Solución:

Por el teorema fundamental de semejanza, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Entonces $AD/AB = AE/AC$. $AB = AD + DB = 4 + 6 = 10$ cm. $AC = AE + EC = 5 + EC$.

$$4/10 = 5/(5 + EC)$$

$$4(5 + EC) = 50$$

$$20 + 4EC = 50$$

$$4EC = 30$$

$$EC = 7.5 \text{ cm}$$

5. Materiales Complementarios Recomendados:

- Videos explicativos sobre semejanza de triángulos en YouTube (buscar por "semejanza de triángulos").
- Ejercicios interactivos en línea sobre semejanza de triángulos en páginas como Geogebra o Khan Academy.
- Libros de texto de geometría de nivel secundaria/preparatoria que expliquen semejanza de triángulos con más detalle.