Contents

“‘

Clase 3: Pruebas de Independencia para Números Aleatorios

Objetivos de la Clase:

- Comprender la importancia de la independencia en secuencias de números aleatorios.
- Aplicar la prueba de rachas arriba y abajo para evaluar la independencia.
- Aplicar la prueba de autocorrelación para detectar patrones en secuencias de números aleatorios.
- Interpretar los resultados de las pruebas de independencia.

Contenido Teórico Detallado:

1. Introducción a la Independencia:

La independencia es una propiedad crucial para los generadores de números aleatorios (GNA). Una secuencia de números es independiente si cada número en la secuencia no está influenciado por los números anteriores. Si existe dependencia, la secuencia puede exhibir patrones, lo que compromete la validez de las simulaciones.

2. Prueba de Rachas Arriba y Abajo:

- **Definición de Racha:** Una racha es una secuencia de números consecutivos que están ya sea todos por encima o todos por debajo de la media de la secuencia completa.
- **Hipótesis:**
  - Hipótesis nula (H0): La secuencia es independiente.
  - Hipótesis alternativa (H1): La secuencia no es independiente.
- **Procedimiento:**
  1. Calcular la media ( ) de la secuencia de números aleatorios.
  2. Recorrer la secuencia y codificar cada número como ”+” si está por encima de la media y ”-” si está por debajo.
  3. Contar el número total de rachas (R).
  4. Calcular el número esperado de rachas (E[R]) y la varianza de las rachas (Var[R]) bajo la hipótesis de independencia:
     - E[R] = (2n - 1) / 3, donde n es el tamaño de la muestra.
     - Var[R] = (16n - 29) / 90
  5. Calcular el estadístico de prueba Z:
     Z = (R - E[R]) / sqrt(Var[R]) 6. Comparar el valor absoluto de Z con el valor crítico de una distribución normal estándar a un nivel de significancia . Si |Z| > Z /2, rechazar la hipótesis nula de independencia.

3. Prueba de Autocorrelación:

- **Concepto de Autocorrelación:** La autocorrelación mide la correlación entre una serie temporal y una versión retrasada de sí misma. En el contexto de números aleatorios, busca patrones donde un número influye en el valor de los números que le siguen con un cierto retardo.
- **Hipótesis:**
  - Hipótesis nula (H0): No hay autocorrelación (la secuencia es independiente).
  - Hipótesis alternativa (H1): Existe autocorrelación (la secuencia no es independiente).
- **Procedimiento:**
  1. Seleccionar un retardo (lag) ’k’.
  2. Calcular el coeficiente de autocorrelación (k) para el retardo ’k’:
     k = [Σ(Xi -)(Xi+k -)] / [Σ(Xi -)^2]
     donde: * Xi es el i-ésimo número en la secuencia. * es la media de la secuencia. * La sumatoria se realiza desde i=1 hasta n-k. 3. Calcular el estadístico de prueba:

Z = k / sqrt(1/n) , donde n es el tamaño de la muestra. 4. Comparar el valor absoluto de Z con el valor crítico de una distribución normal estándar a un nivel de significancia . Si |Z| > Z /2, rechazar la hipótesis nula de independencia. Un valor de Z grande indica evidencia de autocorrelación en el retardo 'k'.

4. Interpretación de Resultados:

- **Prueba de Rachas:** Si se rechaza la hipótesis nula, indica que la secuencia tiene demasiadas o muy pocas rachas, lo que sugiere una falta de aleatoriedad.
- **Prueba de Autocorrelación:** Si se rechaza la hipótesis nula, indica que existe autocorrelación significativa en el retardo 'k'. Esto sugiere que los números en la secuencia están relacionados entre sí con ese retardo.

Ejemplos y Casos de Estudio:

Ejemplo 1: Prueba de Rachas:

Consideremos la siguiente secuencia de números aleatorios: 0.2, 0.8, 0.3, 0.9, 0.1, 0.7, 0.4, 0.6, 0.5. La media es 0.5.

Codificando: -, +, -, +, -, +, -, +, -. Número de rachas (R) = 9. n = 9. E[R] = (2*9 - 1) / 3 = 5.67 Var[R] = (16*9 - 29) / 90 = 1.27 Z = (9 - 5.67) / sqrt(1.27) = 2.96

Si = 0.05, Z /2 = 1.96. Como |2.96| > 1.96, rechazamos la hipótesis nula de independencia.

Ejemplo 2: Prueba de Autocorrelación:

Sea la siguiente secuencia: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0. Calcularemos la autocorrelación con un retardo de k=1. La media es 0.55.

Calculando 1... (cálculo omitido por brevedad). Supongamos que 1 = 0.85. n = 10. Z = 0.85 / sqrt(1/10) = 2.68

Si = 0.05, Z /2 = 1.96. Como |2.68| > 1.96, rechazamos la hipótesis nula y concluimos que existe una autocorrelación significativa con un retardo de 1.

Problemas Prácticos con Soluciones:

Problema 1: Dada la siguiente secuencia de números generados por un GCL: 0.12, 0.34, 0.56, 0.78, 0.90, 0.23, 0.45, 0.67, 0.89, 0.01. Realizar la prueba de rachas arriba y abajo con un nivel de significancia de 0.05.

Solución:

1. Calcular la media: = 0.505.
2. Codificar: -, -, +, +, +, -, -, +, +, -.
3. Número de rachas (R) = 6.
4. n = 10.
5. E[R] = (2*10 - 1) / 3 = 6.33.
6. Var[R] = (16*10 - 29) / 90 = 1.46.
7. Z = (6 - 6.33) / sqrt(1.46) = -0.27.
8. Como |-0.27| < 1.96, no rechazamos la hipótesis nula. No hay evidencia significativa para concluir que la secuencia no es independiente, basado en esta prueba.

Problema 2: Dada la siguiente secuencia: 0.1, 0.4, 0.9, 0.2, 0.5, 0.8, 0.3, 0.6, 0.7, 0.0. Calcular el coeficiente de autocorrelación con un retardo de 1 y realizar la prueba de autocorrelación (= 0.05).

Solución:

1. Calcular la media: = 0.55
2. Calcular 1: (Cálculo detallado omitido) Supongamos que 1 = -0.25
3. n = 10.
4. Z = -0.25 / sqrt(1/10) = -0.79

5. Como |-0.79| < 1.96, no rechazamos la hipótesis nula. No hay evidencia significativa de autocorrelación con un retardo de 1.

Materiales Complementarios Recomendados:

- Artículos sobre pruebas de independencia en generadores de números aleatorios.
- Capítulos de libros de simulación que cubran pruebas estadísticas de aleatoriedad.
- Implementaciones de pruebas de rachas y autocorrelación en Python u otro lenguaje de programación. “‘