

# Contents

## Módulo 3: Ecuaciones y Desigualdades - Clase 5: Desigualdades y Desigualdades con Valor Absoluto

### 1. Objetivos de la Clase:

- Comprender los conceptos básicos de desigualdades y su representación en la recta numérica.
- Resolver desigualdades lineales y cuadráticas.
- Resolver desigualdades que involucran valor absoluto.
- Interpretar y expresar las soluciones de desigualdades en notación de intervalo.
- Aplicar las propiedades de las desigualdades para manipular y simplificar expresiones.

### 2. Contenido Teórico Detallado:

- **Definición de Desigualdad:** Una desigualdad es una relación que indica que dos valores son diferentes. Los símbolos utilizados son:
  - $<$  (menor que)
  - $>$  (mayor que)
  - $\leq$  (menor o igual que)
  - $\geq$  (mayor o igual que)
- **Representación en la Recta Numérica:** Las soluciones de una desigualdad se representan en la recta numérica. Se utilizan círculos abiertos (o paréntesis) para indicar que el extremo no está incluido y círculos cerrados (o corchetes) para indicar que el extremo sí está incluido.
- **Propiedades de las Desigualdades:**
  - **Adición/Sustracción:** Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$  y  $a - c < b - c$  para cualquier número real  $c$ .
  - **Multiplicación/División por un Número Positivo:** Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$  y  $a/c < b/c$ .
  - **Multiplicación/División por un Número Negativo:** Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$  y  $a/c > b/c$ . (¡Cambio de dirección!)
  - **Transitividad:** Si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$ .
- **Resolución de Desigualdades Lineales:** Similar a las ecuaciones lineales, pero se debe tener cuidado al multiplicar o dividir por un número negativo, ya que se invierte la dirección de la desigualdad.
- **Resolución de Desigualdades Cuadráticas:**
  1. Llevar la desigualdad a la forma  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $<$ ,  $=$ ,  $\leq$ ).
  2. Encontrar las raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ .
  3. Utilizar las raíces para dividir la recta numérica en intervalos.
  4. Probar un valor de prueba en cada intervalo para determinar el signo de la expresión  $ax^2 + bx + c$  en ese intervalo.
  5. Escribir la solución como la unión de los intervalos donde la desigualdad se cumple.
- **Desigualdades con Valor Absoluto:**
  - $|x| < a$  es equivalente a  $-a < x < a$ .
  - $|x| > a$  es equivalente a  $x < -a$  o  $x > a$ .
  - Para desigualdades de la forma  $|ax + b| < c$  o  $|ax + b| > c$ , aplicar las mismas reglas, resolviendo las desigualdades resultantes.
- **Notación de Intervalo:** Forma de expresar un conjunto de números reales utilizando paréntesis y corchetes. Por ejemplo:
  - $(a, b)$ :  $a < x < b$  (abierto)
  - $[a, b]$ :  $a \leq x \leq b$  (cerrado)

- $(a, b]$ :  $a < x \leq b$  (semiabierto)
- $[a, b)$ :  $a \leq x < b$  (semiabierto)
- $(-\infty, a)$ :  $x < a$
- $(a, \infty)$ :  $x > a$
- $(-\infty, \infty)$ : Todos los números reales.

### 3. Ejemplos y Casos de Estudio:

- **Ejemplo 1: Desigualdad Lineal**

Resolver la desigualdad:  $3x - 2 < 7$

- Solución:  $3x < 9 \Rightarrow x < 3$  En notación de intervalo:  $(-\infty, 3)$

- **Ejemplo 2: Desigualdad Cuadrática**

Resolver la desigualdad:  $x^2 - 5x + 6 > 0$

- Solución:
  1. Factorizar:  $(x - 2)(x - 3) > 0$
  2. Raíces:  $x = 2$  y  $x = 3$
  3. Intervalos:  $(-\infty, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, \infty)$
  4. Valor de prueba:
    - \*  $(-\infty, 2)$ :  $x = 0 \rightarrow (0 - 2)(0 - 3) = 6 > 0$  (Cumple)
    - \*  $(2, 3)$ :  $x = 2.5 \rightarrow (2.5 - 2)(2.5 - 3) = -0.25 < 0$  (No cumple)
    - \*  $(3, \infty)$ :  $x = 4 \rightarrow (4 - 2)(4 - 3) = 2 > 0$  (Cumple)
  5. Solución:  $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

- **Ejemplo 3: Desigualdad con Valor Absoluto**

Resolver la desigualdad:  $|2x + 1| \leq 3$

- Solución:  $-3 \leq 2x + 1 \leq 3 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$  En notación de intervalo:  $[-2, 1]$

- **Ejemplo 4: Desigualdad con Valor Absoluto**

Resolver la desigualdad:  $|x - 3| > 2$

- Solución:  $x - 3 < -2$  o  $x - 3 > 2 \Rightarrow x < 1$  o  $x > 5$  En notación de intervalo:  $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

### 4. Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. Resolver:  $4x + 5 \leq 13$

- Solución:  $x \leq 2$ . Intervalo:  $[-2, \infty)$

2. Resolver:  $-2x + 7 < 3$

- Solución:  $x > 2$ . Intervalo:  $(2, \infty)$

3. Resolver:  $x^2 - x - 6 \leq 0$

- Solución:  $(x - 3)(x + 2) \leq 0$ . Raíces:  $x = 3, x = -2$ . Intervalo:  $[-2, 3]$

4. Resolver:  $2x^2 + 5x - 3 > 0$

- Solución:  $(2x - 1)(x + 3) > 0$ . Raíces:  $x = 1/2, x = -3$ . Intervalo:  $(-\infty, -3) \cup (1/2, \infty)$

5. Resolver:  $|3x - 2| < 4$

- Solución:  $-4 < 3x - 2 < 4 \Rightarrow -2/3 < x < 2$ . Intervalo:  $(-2/3, 2)$

6. Resolver:  $|x + 1| \leq 5$

- Solución:  $x + 1 \leq 5$  o  $x + 1 \geq -5 \Rightarrow x \leq 4$  o  $x \geq -6$ . Intervalo:  $[-6, 4]$

7. Resolver:  $|5 - 2x| > 1$

- Solución:  $5 - 2x > 1$  o  $5 - 2x < -1$ .  $x < 2$  o  $x > 3$ . Intervalo:  $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

8. Resolver:  $|4x + 3| \leq 9$

- Solución:  $-9 \leq 4x + 3 \leq 9$ .  $-3 \leq x \leq 3/2$ . Intervalo:  $[-3, 3/2]$

## 5. Materiales Complementarios Recomendados:

- Libros de Álgebra universitaria (e.g., Stewart, Swokowski, Sullivan)
- Khan Academy: Vídeos y ejercicios sobre desigualdades y valor absoluto.
- Paul's Online Math Notes: Tutoriales detallados con ejemplos resueltos.
- Calculadora gráfica online (Desmos, GeoGebra) para visualizar soluciones de desigualdades.