# Contents



## Clase 6: Factorización Avanzada de Polinomios

**Objetivos:**

- Aplicar diversas técnicas de factorización para descomponer polinomios complejos en factores más simples.
- Identificar el método de factorización más adecuado según la estructura del polinomio.
- Utilizar la factorización para resolver ecuaciones polinómicas.

**Contenido Teórico:**

Esta clase profundiza en las técnicas de factorización, construyendo sobre los conceptos de productos notables y diferencia de cuadrados vistos en la clase anterior. Además de estos, introduciremos técnicas para factorizar trinomios cuadráticos generales y polinomios de grado superior.

**1. Factorización de Trinomios Cuadráticos:**

Un trinomio cuadrático tiene la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. Existen varios métodos para factorizar trinomios cuadráticos:

- **Factorización por inspección:** Este método implica encontrar dos números que sumen $b$ y multipliquen $c$ (asumiendo que $a = 1$). Si encontramos estos números, digamos $p$ y $q$, entonces el trinomio se factoriza como $(x + p)(x + q)$.
  - **Ejemplo:** Factorizar $x^2 + 5x + 6$. Buscamos dos números que sumen 5 y multipliquen 6. Esos números son 2 y 3. Por lo tanto, la factorización es $(x + 2)(x + 3)$.
- **Factorización por agrupación:** Este método se utiliza cuando $a \quad 1$. Implica encontrar dos números que sumen $b$ y multipliquen $ac$. Luego, reescribimos el término $bx$ usando estos dos números, y factorizamos por agrupación.
  - **Ejemplo:** Factorizar $2x^2 + 7x + 3$. Buscamos dos números que sumen 7 y multipliquen (2)(3) = 6. Esos números son 6 y 1. Reescribimos el trinomio como $2x^2 + 6x + x + 3$. Ahora factorizamos por agrupación: $2x(x + 3) + 1(x + 3) = (2x + 1)(x + 3)$.
- **Fórmula cuadrática:** Si un trinomio cuadrático no se puede factorizar fácilmente, podemos encontrar sus raíces usando la fórmula cuadrática: $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / 2a$. Si las raíces son $x1$ y $x2$, entonces el trinomio se factoriza como $a(x - x1)(x - x2)$.

**2. Factorización por Suma y Diferencia de Cubos:**

Existen fórmulas específicas para factorizar la suma y la diferencia de cubos:

- **Suma de cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- **Diferencia de cubos:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
  - **Ejemplo:** Factorizar $x^3 + 8$. Reconocemos esto como una suma de cubos, donde $a = x$ y $b = 2$ (ya que $8 = 2^3$). Aplicando la fórmula, obtenemos $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.
  - **Ejemplo:** Factorizar $27x^3 - 1$. Reconocemos esto como una diferencia de cubos, donde $a = 3x$ y $b = 1$ (ya que $27x^3 = (3x)^3$). Aplicando la fórmula, obtenemos $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$.

**3. Factorización por Agrupación (Casos más complejos):**

A veces, la factorización por agrupación se puede aplicar a polinomios con más de tres términos. El objetivo es agrupar los términos de tal manera que se pueda factorizar un factor común de cada grupo.

- **Ejemplo:** Factorizar $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$. Agrupamos los términos: $(x^3 + 2x^2) + (-3x - 6)$. Factorizamos un factor común de cada grupo: $x^2(x + 2) - 3(x + 2)$. Ahora factorizamos el factor común $(x + 2)$: $(x + 2)(x^2 - 3)$.

4. **Estrategias Generales de Factorización:**

- **Buscar un factor común:** Siempre comienza buscando un factor común en todos los términos del polinomio.
- **Identificar patrones:** Busca patrones como diferencia de cuadrados, suma/diferencia de cubos o trinomios cuadráticos.
- **Agrupar términos:** Si no encuentras un patrón obvio, intenta agrupar términos y factorizar por agrupación.
- **Verificar la factorización:** Multiplica los factores para asegurarte de que obtienes el polinomio original.

**Ejemplos/Casos de Estudio:**

1. **Factorizar:** $6x^2 - 7x - 3$
    - Buscamos dos números que sumen -7 y multipliquen (6)(-3) = -18. Los números son -9 y 2.
    - Reescribimos el trinomio: $6x^2 - 9x + 2x - 3$
    - Factorizamos por agrupación: $3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$
    - Factorizamos el factor común: $(3x + 1)(2x - 3)$
2. **Factorizar:** $x^6 - y^6$
    - Esta es una diferencia de cuadrados: $(x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
    - Ahora factorizamos la suma y la diferencia de cubos: $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

**Problemas Prácticos con Soluciones:**

1. Factorizar: $4x^2 + 12x + 9$
    - Solución: $(2x + 3)^2$ (Trinomio cuadrado perfecto)
2. Factorizar: $8x^3 - 27$
    - Solución: $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$ (Diferencia de cubos)
3. Factorizar: $x \; - 16$
    - Solución: $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ (Diferencia de cuadrados dos veces)
4. Factorizar: $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
    - Solución: $(x-5)(x-2)(x+2)$
5. Resolver la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
    - Factorizamos: $x^2(x + 2) -1(x + 2) = (x^2 - 1)(x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$
    - Soluciones: $x = 1, x = -1, x = -2$

**Materiales Complementarios Recomendados:**

- Libros de texto de álgebra universitaria.
- Sitios web con ejercicios de factorización y explicaciones paso a paso (Khan Academy, Symbolab).
- Videos tutoriales sobre factorización avanzada en YouTube.

Con esta clase, se completa el módulo de álgebra básica. Los estudiantes deben ahora tener una base sólida en la manipulación de expresiones algebraicas, incluyendo exponentes, radicales, polinomios y factorización. Este conocimiento es fundamental para cursos más avanzados de matemáticas y ciencias.