

Contents

Clase 5: Modelado con Ecuaciones y Aplicaciones de Geometría

Objetivos:

- Traducir problemas geométricos del mundo real en ecuaciones algebraicas.
- Aplicar conocimientos de geometría para resolver problemas de áreas, perímetros y volúmenes en contextos prácticos.
- Resolver ecuaciones algebraicas resultantes de problemas de modelado geométrico.
- Interpretar las soluciones de las ecuaciones en el contexto del problema original.

Contenido Teórico Detallado:

1. Introducción al Modelado Matemático:

- El modelado matemático es el proceso de representar un problema del mundo real usando conceptos y lenguaje matemáticos. En este caso, nos centraremos en problemas geométricos.
- Pasos clave en el modelado:
 - (a) Comprender el problema: identificar las cantidades conocidas y desconocidas.
 - (b) Definir variables: asignar letras a las cantidades desconocidas.
 - (c) Establecer relaciones: expresar las relaciones entre las variables mediante ecuaciones.
 - (d) Resolver la ecuación: encontrar el valor de las variables.
 - (e) Interpretar la solución: verificar si la solución tiene sentido en el contexto del problema.

2. Modelado de Áreas y Perímetros:

- Recordatorio de fórmulas de áreas y perímetros:
 - Rectángulo: Área = base * altura, Perímetro = 2 * (base + altura)
 - Cuadrado: Área = lado², Perímetro = 4 * lado
 - Triángulo: Área = (1/2) * base * altura, Perímetro = suma de los lados
 - Círculo: Área = π * radio², Circunferencia = 2 * π * radio
- Creación de ecuaciones basadas en descripciones de problemas. Por ejemplo, si el largo de un rectángulo es el doble del ancho y su área es 50 cm², podemos modelarlo con la ecuación $2a^2 = 50$ (donde 'a' es el ancho).

3. Modelado de Volúmenes y Áreas Superficiales:

- Recordatorio de fórmulas de volúmenes y áreas superficiales:
 - Cubo: Volumen = lado³, Área Superficial = 6 * lado²
 - Paralelepípedo: Volumen = largo * ancho * altura, Área Superficial = 2 * (largoancho + largoaaltura + ancho*altura)
 - Cilindro: Volumen = π * radio² * altura, Área Superficial = 2 * π * radio * (radio + altura)
 - Esfera: Volumen = (4/3) * π * radio³, Área Superficial = 4 * π * radio²
- Creación de ecuaciones basadas en descripciones de problemas, como determinar el radio de una esfera dado su volumen.

4. Estrategias de Resolución de Ecuaciones:

- Repaso de técnicas algebraicas básicas para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones.
- Importancia de verificar las soluciones en el contexto del problema original para descartar soluciones no válidas (por ejemplo, longitudes negativas).

Ejemplos y Casos de Estudio:

1. **Problema de Área de un Jardín:** Un jardinero tiene 30 metros de cerca para delimitar un jardín rectangular. Quiere que el largo del jardín sea el doble del ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del jardín?
 - Solución:

- Definir variables: ancho = a , largo = $2a$
 - Ecuación del perímetro: $2(a + 2a) = 30 \Rightarrow 6a = 30 \Rightarrow a = 5$
 - Dimensiones: ancho = 5 metros, largo = 10 metros
2. **Problema de Volumen de un Cilindro:** Un fabricante de latas quiere diseñar una lata cilíndrica que contenga 500 ml de líquido. Si la altura de la lata debe ser el doble del radio de la base, ¿cuál debe ser el radio? ($1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$)
- Solución:
 - Definir variables: radio = r , altura = $2r$
 - Ecuación del volumen: $\pi r^2 * (2r) = 500 \Rightarrow 2r^3 = 500 \Rightarrow r^3 = 500 / (2) \Rightarrow r = (250)^{1/3} \approx 6.30 \text{ cm}$
3. **Problema de Semejanza de Triángulos y Altura de un Árbol:** Un estudiante mide la sombra de un árbol y encuentra que es de 12 metros de largo. Al mismo tiempo, un poste de 2 metros proyecta una sombra de 1.5 metros. Usando semejanza de triángulos, calcula la altura del árbol.
- Solución:
 - Triángulos semejantes: Árbol y su sombra; Poste y su sombra.
 - Relación de semejanza: $\text{altura_árbol} / \text{sombra_árbol} = \text{altura_poste} / \text{sombra_poste}$
 - $\text{altura_árbol} / 12 = 2 / 1.5 \Rightarrow \text{altura_árbol} = (2 * 12) / 1.5 = 16 \text{ metros}$

Problemas Prácticos y Ejercicios con Soluciones:

1. **Problema:** Un triángulo tiene un área de 48 cm^2 . Si la base del triángulo mide 12 cm, ¿cuál es la altura del triángulo?
- Solución: $\text{Área} = (1/2) * \text{base} * \text{altura} \Rightarrow 48 = (1/2) * 12 * \text{altura} \Rightarrow \text{altura} = (48 * 2) / 12 = 8 \text{ cm}$
2. **Problema:** El perímetro de un cuadrado es de 36 cm. ¿Cuál es su área?
- Solución: $\text{Perímetro} = 4 * \text{lado} \Rightarrow 36 = 4 * \text{lado} \Rightarrow \text{lado} = 9 \text{ cm}$. $\text{Área} = \text{lado}^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$
3. **Problema:** Un rectángulo tiene un largo que es 3 cm más que su ancho. Si el área del rectángulo es de 70 cm^2 , encuentra las dimensiones del rectángulo.
- Solución:
 - Definir variables: ancho = a , largo = $a + 3$
 - Ecuación: $a * (a + 3) = 70 \Rightarrow a^2 + 3a - 70 = 0$
 - Factorizando: $(a + 10)(a - 7) = 0$. Las soluciones son $a = -10$ y $a = 7$. Descartamos $a = -10$ porque la longitud no puede ser negativa.
 - Dimensiones: ancho = 7 cm, largo = 10 cm
4. **Problema:** Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una lámina cuadrada de cartón de lado 20 cm, recortando cuadrados de lado x en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Expresa el volumen de la caja en función de x . ¿Cuál debe ser el valor de x para que el volumen de la caja sea máximo?
- Solución:
 - Dimensiones de la caja: largo = $20 - 2x$, ancho = $20 - 2x$, altura = x
 - Volumen: $V(x) = x(20 - 2x)^2 = x(400 - 80x + 4x^2) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$
 - Para encontrar el máximo, se puede usar cálculo diferencial (derivando $V(x)$ e igualando a cero). (Omitido aquí para simplificar, pero se mencionaría en clase)

Materiales Complementarios Recomendados:

- Libros de texto de geometría de nivel preuniversitario.
- Sitios web interactivos que permiten manipular figuras geométricas y explorar sus propiedades.
- Videos explicativos sobre modelado matemático y resolución de problemas geométricos.
- Ejercicios adicionales de modelado geométrico con soluciones disponibles en línea.

- Khan Academy: Buscar temas de geometría, áreas, volúmenes y resolución de ecuaciones.