Contents

Clase 4: Circunferencia en el Plano Cartesiano

1. Objetivos Específicos de la Clase

- Comprender la ecuación general de la circunferencia y su relación con el centro y el radio.
- Graficar circunferencias dadas sus ecuaciones.
- Determinar la ecuación de una circunferencia dados su centro y radio, o tres puntos en la circunferencia.
- Resolver problemas que involucren circunferencias en el plano cartesiano.

2. Contenido Teórico Detallado

2.1. Definición y Ecuación de la Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante entre cada punto de la circunferencia y el centro se llama radio.

La ecuación estándar de una circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde:

- (x, y) representa cualquier punto en la circunferencia.
- (h, k) son las coordenadas del centro de la circunferencia.
- r es la longitud del radio.

Si el centro de la circunferencia está en el origen (0, 0), la ecuación se simplifica a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2.2. Obtención de la Ecuación de la Circunferencia

- **Dados el centro (h, k) y el radio r:** Simplemente se sustituyen los valores en la ecuación estándar: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
- **Dados tres puntos en la circunferencia:** Se sustituyen las coordenadas de los tres puntos en la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, obteniendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (D, E, F). Se resuelve este sistema para encontrar los valores de D, E y F, y luego se completa cuadrados para encontrar el centro y el radio. (Este método se detalla en los ejemplos).

2.3. Graficación de Circunferencias

Para graficar una circunferencia a partir de su ecuación:

1. Identificar el centro (h, k) y el radio r a partir de la ecuación.
2. Ubicar el centro en el plano cartesiano.
3. Usar el radio para encontrar cuatro puntos clave en la circunferencia: (h+r, k), (h-r, k), (h, k+r), (h, k-r).
4. Dibujar una curva suave que conecte estos puntos, formando la circunferencia.

3. Ejemplos y Casos de Estudio

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de una circunferencia.

Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (2, -3) y radio 4.

Solución:

Usamos la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ con h = 2, k = -3 y r = 4:

$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Ejemplo 2: Graficar una circunferencia.

Grafica la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

Solución:

Esta ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 = r^2$, por lo que el centro está en (0, 0) y $r^2 = 9$, lo que implica r = 3.

Los puntos clave son (3, 0), (-3, 0), (0, 3), (0, -3).

Ejemplo 3: Determinar el centro y radio de una circunferencia a partir de su ecuación general.

Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, encuentra el centro y el radio de la circunferencia.

Solución:

Completamos cuadrados para x e y:

$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 12$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 12 + 4 + 9$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Por lo tanto, el centro es (2, -3) y el radio es $\sqrt{25} = 5$.

Ejemplo 4: Encontrar la ecuación de una circunferencia dados tres puntos.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1, 1), B(2, -1) y C(3, 2).

Solución:

Usamos la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Sustituimos las coordenadas de A, B y C:

- Para A(1, 1): $1^2 + 1^2 + D(1) + E(1) + F = 0 \Rightarrow D + E + F = -2$ (1)
- Para B(2, -1): $2^2 + (-1)^2 + D(2) + E(-1) + F = 0 \Rightarrow 2D - E + F = -5$ (2)
- Para C(3, 2): $3^2 + 2^2 + D(3) + E(2) + F = 0 \Rightarrow 3D + 2E + F = -13$ (3)

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

Restamos (1) de (2): $D - 2E = -3$ (4) Restamos (1) de (3): $2D + E = -11$ (5)

Multiplicamos (5) por 2: $4D + 2E = -22$ (6)

Sumamos (4) y (6): $5D = -25 \Rightarrow D = -5$

Sustituimos D en (5): $2(-5) + E = -11 \Rightarrow E = -1$

Sustituimos D y E en (1): $-5 - 1 + F = -2 \Rightarrow F = 4$

La ecuación general es $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$. Completando cuadrados:

$(x^2 - 5x + 25/4) + (y^2 - y + 1/4) = -4 + 25/4 + 1/4$

$(x - 5/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 10/4 = 5/2$

El centro es (5/2, 1/2) y el radio es $\sqrt{(5/2)}$.

4. Problemas Prácticos o Ejercicios con Soluciones

1. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (-1, 4) y radio 3. *Solución:* $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$
2. Determina el centro y el radio de la circunferencia dada por la ecuación $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. *Solución:* Centro (3, -2), Radio = 4
3. Grafica la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$. *Solución:* Centro (0,0), Radio = 5. Dibujar la circunferencia en el plano cartesiano.
4. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0, 0), (2, 0) y (0, 2). *Solución:* $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Completando cuadrados: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Centro (1, 1) Radio $\sqrt{2}$.

5. El diámetro de una circunferencia tiene extremos en los puntos (2, 4) y (6, 8). Encuentra la ecuación de la circunferencia. *Solución:* El centro es el punto medio del diámetro: ((2+6)/2, (4+8)/2) = (4, 6). El radio es la mitad de la longitud del diámetro. Distancia entre (2,4) y (6,8) es $\sqrt{}((6-2)^2 + (8-4)^2) = \sqrt{}(16+16) = \sqrt{}32 = 4\sqrt{}2$. Radio = $2\sqrt{}2$. Ecuación: $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 8$.
6. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3,4). *Solución:* Pendiente del radio que une (0,0) y (3,4) es 4/3. La recta tangente es perpendicular a este radio, por lo que su pendiente es -3/4. Usando la forma punto-pendiente, y - 4 = (-3/4)(x - 3), simplificando 3x + 4y = 25.

5. Materiales Complementarios Recomendados

- **Libros de texto:** Cualquier libro de texto de álgebra o cálculo de nivel universitario cubrirá las circunferencias en detalle.
- **Recursos en línea:**
  - Khan Academy: Videos y ejercicios sobre circunferencias y geometría analítica.
  - Paul's Online Math Notes: Notas detalladas sobre álgebra y cálculo.
- **Software de graficación:** Desmos, GeoGebra. Permiten visualizar las circunferencias y explorar diferentes ecuaciones.