

# 数值代数说明文档

张奇 PB19000093

April 4, 2022

## 1 实验内容

本次实验对于三种情况实现Richardson外推法的数值导数，如下

- $\log(x), x = 3, M = 3.$
- $\tan(x), x = \sin^{-1} 0.8, M = 4.$
- $\sin(x^2 + \frac{x}{3}), x = 0, M = 5.$

其中 $M$ 代表外推的次数，最终将外推的结果以三角形金字塔的方式输出。

## 2 算法实现

实验在数值上容易实现，首先考虑二阶近似

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) - \sum_{i=1} a_{2i-1} h^{2i-1},$$

其中  $a_{2i-1} = \frac{2f^{(2i-1)}(x)}{(2i-1)!}$ , 由泰勒展开得到。为了消去余项，考虑记  $D(n, 0) = \frac{f(x+h/2^n) - f(x-h/2^n)}{2h/2^n}$ , 用

递推公式  $D(j, k+1) = \frac{4^{k+1}D(j+1, k) - D(j, k)}{4^{k+1} - 1}$ , 每次提高两个精度。最终输出并且比较误差。

## 3 编译环境

- 编译器: g++ (Ubuntu 9.4.0-1ubuntu1 20.04.1) 9.4.0.
- 编译命令: ./run lab6

## 4 结果总结

分析 在第三个函数的导数处一定要注意  $1/3 = 0, 1./3. = 0.33333$ 。

```

log(x), w3, M=3
numerical calculate:
0.346571590280 0.333333169735 0.3333334482185 0.3333333333333333
0.33647226621 0.333333166895 0.3333331345744
0.334148465326 0.3333332524566
0.335264455796
Real opes:
1.124825846464e-02 -2.287145983735e-04 1.148771822239e-06 -1.563968181287e-09
1.138931287889e-03 -1.318043862732e-05 1.641692150742e-08
1.748333292093e-04 -8.807071712672e-07
1.931824228711e-04
tan(x), x=arcsin(0.8), M=4
numerical calculate:
1.881386111369 9.955843932436 1.601544620785 2.82158871555 2.777360943896
-0.8133838487 2.123887776888 2.883423642273 2.77733331582
1.288699924788 2.780948158312 2.777938884249
1.872968693931 2.776873713378
2.888981868516
Real opes:
4.881964629138e+08 -6.278866154618e+08 1.116233758993e+09 4.377893775786e-02 -4.168346817397e-04
1.887558823899e+08 -6.409888888888e-04 2.36458446534e-02 -2.462161956586e-04
4.313221478099e-01 -1.031702746624e-02 1.68368471396e-04
8.288231815879e-02 -9.028643997808e-04
1.312483073582e-02
sin(x*sqrt(3)), x=0, M=5
numerical calculate:
0.1767846495147 0.349788846765 0.333658594156 0.33338283776 0.333333332524 0.333333333334
0.312477677051 0.33089713444 0.33333139819 0.33333332824 0.33333333333
0.312297588084 0.333495755439 0.33333349462 0.33333333282 0.33333333333
0.33138211188 0.33334469810 0.33333333534
0.333366673258 0.33333368697
0.333337146268
Real opes:
1.66462841885e-01 3.63755116328e-02 3.172886228888e-04 -3.18617769553e-06 -8.88651151889e-10 4.08788665158e-13
1.48546397525e-02 1.57898163781e-03 1.856785363179e-06 -1.31898865651e-08 -3.81886615864e-13
1.43374528584e-03 1.67421896328e-04 1.61882659453e-08 -5.158717897302e-11
1.371374861636e-04 1.916868213777e-05 2.88910158596e-10
-2.681507135425e-05 6.35593511862e-07
-4.878717307733e-06

```

Figure 1: 实验结果