Příprava na cvičení N 3

N 4.1

a) délka vektoru $x = (1,2,3)$ $\quad \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

b) vzdálenost bodů $x=(1,2,3)$ a $y=(-1,0,1)$

$$\sqrt{(1-(-1))^2+(2-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

c) úhel mezi vektory x a y; $\quad \cos\varphi = \frac{x^T y}{\|x\|\,\|y\|}$

$$\|x\| = \sqrt{14}$$

$$\|y\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$(1 \ \ 2 \ \ 3)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = -1+0+3 = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{14\cdot 2}} = \frac{2}{\sqrt{4\cdot 7}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$$

N 4.2 na jedné přímce, lin. závislé

N 4.3 span $\{(0,1,1) \ \ (1,2,3)\}$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-z \\ x-2z+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

Např. $\quad x=1$, $y=1$, $z=-1$ $\qquad (1,1,-1)$

N 4.5

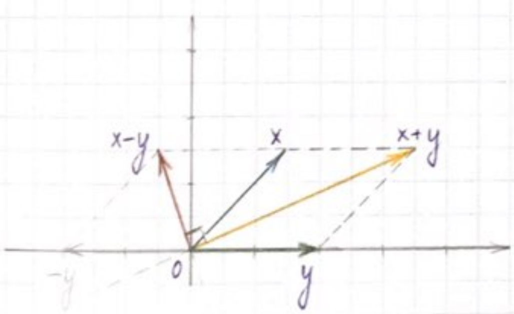
a) Jestliže $\|x\| = \|y\|$, pak $(x+y) \perp (x-y)$

Důkaz: pokud skalární součin dvou vektorů je roven nule, mluvíme o ortogonalních vektorech

$$(x+y)^T(x-y) = (x^T+y^T)(x-y) = x^Tx - x^Ty + y^Tx - y^Ty = x^Tx - x^Ty + x^Ty - y^Ty =$$

$$= x^Tx - y^Ty = \left[\|x\| = \|y\|\right] = 0$$

x^Ty - komutativita skalárního součinu



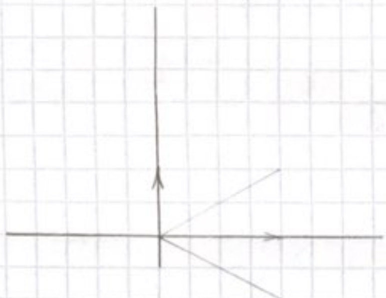
b) Jestliže $x \perp y$ pak $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$

Důkaz:

$$\|x-y\|^2 = (x-y)^T(x-y) = (x^T-y^T)(x-y) = x^Tx - x^Ty - y^Tx + y^Ty \overset{\text{komutativita}}{=} x^Tx - x^Ty - x^Ty + y^Ty =$$

$$= x^Tx - 2x^Ty + y^Ty = x^Tx + y^Ty = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$x^Ty = 0$, protože vektory jsou (kolmé) ortogonální



$\boxed{N\ 4.13}$ $\text{span}\{x,y\} = \text{span}\{(0,1,1)\ (1,2,3)\}$ x, y - ortogonální

$x = (0,1,1)$

$$y = (1,2,3) - \frac{(1,2,3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{(0\,1\,1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}(0,1,1) = (1\ 2\ 3) - \frac{5}{2}(0,1,1) =$$

$$= \left(\frac{2}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{6}{2}\right) - \left(0\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\right) = \left(0\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{span}\left\{(0\,1\,1),\ \left(0\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\right\}$$