Příprava na cvičení N 5

N 6.1 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y =$
$= x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + xy - x - y$

počet proměnných: 2
stupeň: 3
nehomogenní

b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a^T x$ kde a je dáno

$$[a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

počet proměnných: n
stupeň: 1
homogenní

c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

není polynom, je to odmocnina polynomu

d) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \|Ax + b\|^2$ kde A, b jsou dány

$$\left\| \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \right\|^2$$

počet proměnných: n
stupeň: 2
nehomogenní

e) $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^T y = \begin{bmatrix} & x & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

počet proměnných: $2n$
stupeň: 1
homogenní

f) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) = a^T X b$ kde a, b jsou dány

$$[a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

počet proměnných: n^2
stupeň: 1
homogenní

g) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) = \det X$

počet proměnných: n^2
stupeň: n
homogenní

$\boxed{N\,6.2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$\lambda_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$

$\lambda_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$

λ_1: $\left[\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2}+1 & 2 & 0 \\ -1 & -3-\sqrt{2}+1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2-\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -2-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] / \cdot(-2+\sqrt{2}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2-\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$v_1 = (2;\ \sqrt{2}-2)$

λ_2: $\left[\begin{array}{cc|c} 1+1+\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -3+1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2+\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -2+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] / (2+\sqrt{2}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2+\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$v_2 = (2;\ -2-\sqrt{2})$

$\boxed{N\,6.8}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 1. minor $2 > 0$ pozitivně definitní; všechny vůdčí
2. minor $4-1=3>0$ hlavní minory kladné; všechna vlastní čísla jsou kladná

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$D = 16 - 4\cdot 3 = 4 = 2^2$

$\lambda_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0$

$\lambda_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 > 0$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ 1. minor -2
2. minor $-2\cdot 3 - 0 = -6$
3. minor $-2(-6-1) + 1(0-3) = 14 - 3 = 11$

indefinitní

$\boxed{N\,6.14}$ a) $f(x,y) = x^2 + 4xy - 2y^2 + 3x - 6y + 5$ $\quad (\frac{1}{2})^2 + 4\frac{1}{2}(-1) - 2(-1)^2 + 3\frac{1}{2} - 6(-1) + 5 = \frac{35}{4}$

$\underbrace{[x\ \ y]}_{x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{[3\ \ -6]}_{b^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{5}_{c}$

$b = -2Ax_0 \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -2x_0 - 4y_0 = 3 \\ -4x_0 + 4y_0 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_0 = 3 + 4y_0 \\ -4x_0 + 4y_0 = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} - 2y_0 \\ -4(-\frac{3}{2} - 2y_0) + 4y_0 = -6 \end{cases}$

$6 + 8y_0 + 4y_0 = -6 \qquad x_0 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$12y_0 = -12$

$y_0 = -1$

$f(x) = (x-x_0)^T A (x-x_0) + f(x_0) = [x - \frac{1}{2}\ \ y-(-1)] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y-(-1) \end{bmatrix} + \frac{35}{4}$