

Příprava na cvičení N 4

N5.1 a) Neplatí; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$
 Protipříklad: $n=2, m=1$

b) Neplatí; $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 Protipříklad $m=2; n=1$

c) Platí; $\left. \begin{array}{l} \text{Matice } A \text{ má lineárně nezávislé řádky} \\ \text{nul } A \text{ je netriviální} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{soustava má nekonečně mnoho řešení}$

N5.3 a) $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - a_i\|^2$

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_m \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_m \end{bmatrix} \right\|^2$$

$P \cdot u = q$

b) Hledáme vzdálenost bodu $y \in \mathbb{R}^n$ od přímky $\{a + ts \mid t \in \mathbb{R}\}$ kde $a, s \in \mathbb{R}^n$
 Hledáme optimální parametr t :

$$\begin{aligned} \min_t \|y - (a + st)\|^2 &= \min_t \|y - a - st\|^2 = \min_t \|st - y + a\|^2 = \\ &= \min_t \|st - (y - a)\|^2 \end{aligned}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $P \cdot u = q$

$$\begin{aligned} Pu &= q \\ P^T P u &= P^T q \\ (P^T P)^{-1} (P^T P) u &= (P^T P)^{-1} P^T q \\ u &= (P^T P)^{-1} P^T q \end{aligned}$$

$$t = (s^T s)^{-1} s^T (y - a)$$

N5.8 c) $u = (2, 1, -3)$ $\text{span}\{u, v\}$?
 $v = (1, -1, 1)$ $(2, 0, 1)$

$$P = A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{38} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{7}{19} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{13}{38} & -\frac{15}{38} \\ -\frac{3}{19} & -\frac{15}{38} & \frac{29}{38} \end{bmatrix} \quad P \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{19} \\ \frac{19}{38} \\ -\frac{17}{38} \end{pmatrix}$$

d) $(\text{span}(u, v))^\perp$?

$$(I - P) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{19} & \frac{5}{19} & \frac{3}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{25}{38} & \frac{15}{38} \\ \frac{3}{19} & \frac{15}{38} & \frac{9}{38} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} \\ \frac{35}{38} \\ \frac{21}{38} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{N 5.17} \quad a, b \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$\begin{matrix} | \\ [a^T \ b^T] \end{matrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^T a + b^T b = \|a\|^2 + \|b\|^2$$