Příprava na cvičení N 8.

N 10.1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; stacionární bod $(2,1,5)$
Hessova matice $f''(2,1,5)$

a) má vlastní čísla $\{2,3,-1\}$
Jedno vl. číslo je záporné, druhá jsou kladná → Hessian je indefinitní, pak funkce nemá v tomto bodě minimum ani maximum

b) má vlastní čísla $\{2,3,0\}$
Vl. čísla jsou nezáporná → Hessian je pozitivně semidefinitní; nemůžeme rozhodnout jestli funkce má v tomto bodě lokální extrem

c) má vlastní čísla $\{2,1,1\}$
Vl. čísla jsou kladná → Hessian je pozitivně definitní, pak funkce má v tomto bodě minimum

N 10.2 d) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

$f'(x,y) = [\,3 - 3x^2 - 3y^2 ;\ -6xy\,]$

$\begin{cases} 3 - 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases}$ $\quad xy = 0 \quad$ $x=0:$ $\begin{aligned} 3-3y^2&=0 \\ 3y^2 &= 3 \\ y^2 &= 1 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$ $\quad$ $y=0:$ $\begin{aligned} 3-3x^2&=0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$

$A = (0;1)$
$B = (0;-1)$

$C = (1;0)$
$D = (-1;0)$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$ $\quad f''(A) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad f''(B) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$f''(C) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad f''(D) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$f''(A) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36$ $\quad \lambda^2 - 36 = 0$, $\lambda^2 = 36$, $\lambda = \pm 6$ $\quad$ Hessian je indefinitní; sedlo

$f''(B) = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36$ $\quad \lambda^2 - 36 = 0$, $\lambda = \pm 6$ $\quad$ Hessian je indefinitní, sedlo

$f''(C) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)^2$ $\quad 36 + 12\lambda + \lambda^2 = 0$, $D = 144 - 4\cdot 36 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{2} = -6$ $\quad$ Hessian je negativně definitní, lokální maximum

$f''(D) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2$ $\quad 36 - 12\lambda + \lambda^2 = 0$, $D = 144 - 4\cdot 36 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$ $\quad$ Hessian je pozitivně definitní, lokální minimum

e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

$f'(x,y) = [6y^2 - 6x^2 \,;\, 12xy - 12y^3]$

$$\begin{cases} 6y^2 - 6x^2 = 0 \\ 12xy - 12y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &6y^2 - 6x^2 = 0 \\ &6(y^2 - x^2) = 0 \\ &(y-x)(y+x) = 0 \end{aligned}$$

$$y - x = 0 \qquad y + x = 0$$
$$y = x \qquad y = -x$$

$y = x$: $12x^2 - 12x^3 = 0$, $12x^2(1-x) = 0$ $\qquad$ $y = -x$: $-12x^2 + 12x^3 = 0$, $12x^2(-1+x) = 0$

$x = 0$, $A = (0;0)$ $\quad$ $1 - x = 0$, $x = 1$, $B = (1;1)$ $\qquad$ $x = 0$, $(0;0)$ $\quad$ $-1 + x = 0$, $x = 1$, $C = (1;-1)$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix} \quad f''(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f''(B) = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix} \quad f''(C) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$$

$f''(A) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \qquad \lambda^2 = 0, \; \lambda_{1,2} = 0$ $\quad$ Hessian je

$f''(B) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 12 \\ 12 & -24-\lambda \end{vmatrix} = (-12-\lambda)(-24-\lambda) - 144$

$$\lambda^2 + 36\lambda + 144 = 0$$
$$D = 1296 - 4 \cdot 144 = (\sqrt{720})^2$$
$$\lambda_1 = \frac{-36 - \sqrt{720}}{2} < 0$$
$$\lambda_2 = \frac{-36 + \sqrt{720}}{2} < 0$$

Hessian je negativně definitní;
lokální maximum

$f''(C) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & -12 \\ -12 & -24-\lambda \end{vmatrix} = (-12-\lambda)(-24-\lambda) - 144$

$$x^2 + 36x + 144 = 0$$
$$D = 1296 - 4 \cdot 144 = (\sqrt{720})^2$$
$$\lambda_1 = \frac{-36 - \sqrt{720}}{2} < 0$$
$$\lambda_2 = \frac{-36 + \sqrt{720}}{2} < 0$$

Hessian je negativně definitní,
lokální maximum

$\boxed{N\,10.6}$ $f(x,y) = x^2 - y + \sin(y^2 - 2x)$

$f'(x,y) = [2x - 2\cos(y^2 - 2x) \,;\, -1 + 2y\cos(y^2 - 2x)]$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y^2 - 2x) & 4y\sin(y^2 - 2x) \\ 4y\sin(y^2 - 2x) & 2\cos(y^2 - 2x) - 4y^2\sin(y^2 - 2x) \end{bmatrix}$$

Iterace: $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y_k^2 - 2x_k) & 4y_k \cdot \sin(y_k^2 - 2x_k) \\ 4y_k \sin(y_k^2 - 2x_k) & 2\cos(y_k^2 - 2x_k) - 4y_k^2 \sin(y_k^2 - 2x_k) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2x_k - 2\cos(y_k^2 - 2x_k) \\ -1 + 2y_k\cos(y_k^2 - 2x_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(-1) & 4\sin(-1) \\ 4\sin(-1) & 2\cos(-1) - 4\sin(-1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 - 2\cos(-1) \\ -1 + 2\cos(-1) \end{bmatrix}$$