Лабораторная работа

«Численное решение нелинейных уравнений»,

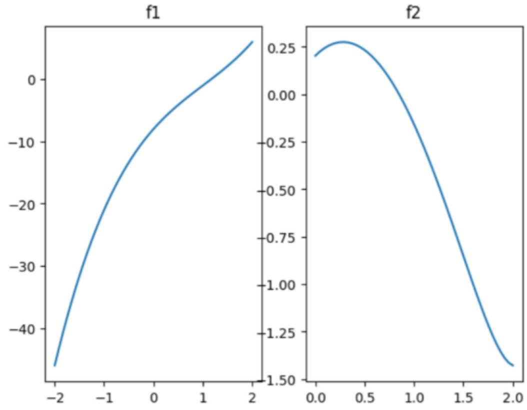
выполнена Воронковой Вероникой, группа Б03-107.

В данной лабораторной работе нужно проверить решения двух уравнений разными методами.

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$\mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}2) = x^2$$

Для начала используя библиотеки локализируем корни, то есть построим графики и найдем численные решения данных уравнений:



1.1659055841222128   0.8489184041049849

Первый метод, который мы используем называется «*метод дихотомии*» или же метод половинного деления.

Будем считать, что корень t функции $f(x)=0$ отделён на отрезке $[a,b]$. Задача заключается в том, чтобы найти и уточнить этот корень методом половинного деления. Другими словами, требуется найти приближённое значение корня с заданной точностью ϵ.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$,

$f(a)\cdot f(b)<0,\ \epsilon=0{,}001$ и $t\in[a,b]$ - единственный корень уравнения $f(x)=0,\ a\le t\le b$.

Поделим отрезок $[a,b]$ пополам. Получим точку $c=\frac{a+b}{2},\ a<c<b$ и два отрезка $[a,c],\ [c,b]$.

- Если $f(c)=0$, то корень t найден ($t=c$).
- Если нет, то из двух полученных отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ надо выбрать один $[a_1;b_1]$ такой, что $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, то есть
  - $[a_1;b_1]=[a,c]$, если $f(a)\cdot f(c)<0$ или
  - $[a_1;b_1]=[c,b]$, если $f(c)\cdot f(b)<0$.

Новый отрезок $[a_1;b_1]$ делим пополам. Получаем середину этого отрезка $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ и так далее.

Для того, чтобы найти приближённое значение корня с точностью до $\epsilon > 0$, необходимо остановить процесс половинного деления на таком шаге n, на котором $|b_n - c_n| < \epsilon$ и вычислить $x = \frac{a_n + b_n}{2}$. Тогда можно взять $t \approx x$.

Второй метод получил название «*Метод секущих*»

В численном анализе метод секущих представляет собой алгоритм поиска корней, который использует последовательность корней из секущих линий для лучшей аппроксимации корня функции f.

$$1)\text{ ищем координаты } x_0 \begin{cases} AB\colon \dfrac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \dfrac{x - a}{b - a} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = a - \frac{F(a)(b-a)}{F(b)-F(a)}$$

2) рассмотрим знаки $F(x_0), F(a), F(b)$

3) $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$

4) два критерия остановки: $|a\_n - b\_n \,| < \varepsilon$ или $|F(x\_n\,)| < \varepsilon$

Метод Ньютона:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - \frac{f(\varphi_n(x))}{f'(\varphi_n(x))}$$

Условие сходимости:

Пусть функция $f(x)$ имеет первую и вторую производную на отрезке $[a, b]$. Причем выполнено условие знакопеременности функции $f(a)f(b) < 0$, а производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a, b]$. Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно методом Ньютона построить итерационную последовательность, сходящуюся к единственному на $[a, b]$ решению уравнения $f(x) = 0$.

Модифицированный метод Ньютона:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - \frac{f(\varphi_n(x))}{f'(x_0)}$$

Сходимость:

Если на $[a, b]$ задана дважды дифференцируемая функция $f(x)$, причем выполнены условия:

1) $f(a)f(b) < 0$
2) $f'(x)$ и $f''(x) \neq 0$ и сохраняют знаки на $[a, b]$

Тогда исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно вычислить модифицированным методом Ньютона единственный корень ξ с любой степенью точности

МПИ:

$$f(x) = 0 \implies \varphi(x) = x$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Достаточным условием сходимости метода простых итераций является условие

$$|\varphi'(x)| < 1$$

которое выполняется для любого $x \in [a, b]$, где $[a, b]$ содержит корень уравнения.

Расчетные данные и результаты:

Функция 1:

Дихотомия:

Шаг 1 x_n = 1.05 |x_n - x*| = 0.11590558412221275
Шаг 2 x_n = 1.525 |x_n - x*| = 0.3590944158777871
Шаг 3 x_n = 1.2875 |x_n - x*| = 0.1215944158777873
Шаг 4 x_n = 1.1687500000000002 |x_n - x*| = 0.0028444158777873874
Шаг 5 x_n = 1.109375 |x_n - x*| = 0.05653058412221279
Шаг 6 x_n = 1.1390625 |x_n - x*| = 0.0268430841222127
Шаг 7 x_n = 1.1539062500000001 |x_n - x*| = 0.011999334122212657
Шаг 8 x_n = 1.1613281250000003 |x_n - x*| = 0.004577459122212524
Шаг 9 x_n = 1.1650390625000002 |x_n - x*| = 0.0008665216222125682
Шаг 10 x_n = 1.16689453125 |x_n - x*| = 0.0009889471277872985
Шаг 11 x_n = 1.1659667968750003 |x_n - x*| = 6.121275278747618e-05
Шаг 12 x_n = 1.1655029296875004 |x_n - x*| = 0.000402654434712435

Результат дихотомии: 1.16550293

Метод секущих:

Шаг 1 x_n = 1.1316931982633864 |x_n - x*| = 0.034212385858826355
Шаг 2 x_n = 1.1607260404115507 |x_n - x*| = 0.005179543710662093
Шаг 3 x_n = 1.1651080742410693 |x_n - x*| = 0.0007975098811434655
Шаг 4 x_n = 1.1657824830450922 |x_n - x*| = 0.00012310107712054652
Шаг 5 x_n = 1.1658865753776184 |x_n - x*| = 1.9008744594373184e-05
Шаг 6 x_n = 1.165902648699876 |x_n - x*| = 2.9354223367583643e-06
Шаг 7 x_n = 1.165905130815967 |x_n - x*| = 4.533062458733639e-07
Шаг 8 x_n = 1.1659055141197334 |x_n - x*| = 7.000247936872483e-08
Шаг 9 x_n = 1.1659055733119752 |x_n - x*| = 1.081023759397226e-08
Шаг 10 x_n = 1.1659055824528257 |x_n - x*| = 1.6693870730222216e-09
Шаг 11 x_n = 1.165905583864415 |x_n - x*| = 2.5779778312085e-10

Результат метода секущих: 1.16590558

Метод Ньютона:

Шаг 1 phi_n = 1.1666666666666667   x_n = 1 |x_n - x*| = 0.1659055841222128
Шаг 2 phi_n = 1.1659056316590564   x_n = 1.1666666666666667 |x_n - x*| = 0.0007610825444539504

Результат метода Ньютона: 1.16590563

Модифицированный метод Ньютона:

Шаг 1 phi_n = 1.9444444444444444   x_n = 3 |x_n - x*| = 1.8340944158777872
Шаг 2 phi_n = 1.6383840115836001   x_n = 1.9444444444444444 |x_n - x*| = 0.7785388603222316
Шаг 3 phi_n = 1.4666913808814253   x_n = 1.6383840115836001 |x_n - x*| = 0.47247842746138735
Шаг 4 phi_n = 1.3610361551928911   x_n = 1.4666913808814253 |x_n - x*| = 0.30078579675921246
Шаг 5 phi_n = 1.2936318802531261   x_n = 1.3610361551928911 |x_n - x*| = 0.19513057107067833
Шаг 6 phi_n = 1.2499036508867225   x_n = 1.2936318802531261 |x_n - x*| = 0.12772629613091335
Шаг 7 phi_n = 1.2212909371743301   x_n = 1.2499036508867225 |x_n - x*| = 0.08399806676450972
Шаг 8 phi_n = 1.20248081664471   x_n = 1.2212909371743301 |x_n - x*| = 0.055385353052117337
Шаг 9 phi_n = 1.190081577446392   x_n = 1.20248081664471 |x_n - x*| = 0.03657523254225814
Шаг 10 phi_n = 1.1818950605958576   x_n = 1.190081577446392 |x_n - x*| = 0.02417599332417919
Шаг 11 phi_n = 1.1764845878431784   x_n = 1.1818950605958576 |x_n - x*| = 0.015989476473644793
Шаг 12 phi_n = 1.1729065623465253   x_n = 1.1764845878431784 |x_n - x*| = 0.010579003720965652
Шаг 13 phi_n = 1.170539412006363   x_n = 1.1729065623465253 |x_n - x*| = 0.0070009782243125596
Шаг 14 phi_n = 1.168972946028119   x_n = 1.170539412006363 |x_n - x*| = 0.004633827884150232
Шаг 15 phi_n = 1.1679361589462132   x_n = 1.168972946028119 |x_n - x*| = 0.003067361905906285
Шаг 16 phi_n = 1.1672498710472434   x_n = 1.1679361589462132 |x_n - x*| = 0.002030574824000375

Результат модифицированного метода Ньютона: 1.16724987

МПИ:

Шаг 1 phi_n = 0.8888888888888888	x_n = 0	|x_n - x*| = 1.1659055841222128
Шаг 2 phi_n = 1.07422648986435	x_n = 0.8888888888888888	|x_n - x*| = 0.27701669523332395
Шаг 3 phi_n = 1.1358078348242069	x_n = 1.07422648986435	|x_n - x*| = 0.09167909425786269
Шаг 4 phi_n = 1.1561020773638433	x_n = 1.1358078348242069	|x_n - x*| = 0.030097749298005905
Шаг 5 phi_n = 1.1627224843055362	x_n = 1.1561020773638433	|x_n - x*| = 0.009803506758369496
Шаг 6 phi_n = 1.164873198691236	x_n = 1.1627224843055362	|x_n - x*| = 0.0031830998166766378
Шаг 7 phi_n = 1.1655708688459718	x_n = 1.164873198691236	|x_n - x*| = 0.0010323854309768343

Результат МПИ: 1.16557087 7

Функция 2:

Дихотомия:

Шаг 1 x_n = 1.05	|x_n - x*| = 0.11590558412221275
Шаг 2 x_n = 0.5750000000000001	|x_n - x*| = 0.5909055841222127
Шаг 3 x_n = 0.8125	|x_n - x*| = 0.3534055841222128
Шаг 4 x_n = 0.93125	|x_n - x*| = 0.23465558412221277
Шаг 5 x_n = 0.871875	|x_n - x*| = 0.29403058412221283
Шаг 6 x_n = 0.8421875	|x_n - x*| = 0.3237180841222128
Шаг 7 x_n = 0.8570312499999999	|x_n - x*| = 0.3088743341222129
Шаг 8 x_n = 0.849609375	|x_n - x*| = 0.3162962091222128
Шаг 9 x_n = 0.8458984375	|x_n - x*| = 0.32000714662221275
Шаг 10 x_n = 0.84775390625	|x_n - x*| = 0.31815167787221277
Шаг 11 x_n = 0.848681640625	|x_n - x*| = 0.31722394349721283
Шаг 12 x_n = 0.8491455078125	|x_n - x*| = 0.3167600763097128

Результат дихотомии: 0.84914551

Метод секущих:

Шаг 1 x_n = 0.37859930252534935	|x_n - x*| = 0.7873062815968634
Шаг 2 x_n = 0.6339472546410728	|x_n - x*| = 0.53195832948114
Шаг 3 x_n = 0.7767296683444506	|x_n - x*| = 0.3891759157777622
Шаг 4 x_n = 0.8291143548732297	|x_n - x*| = 0.3367912292489831
Шаг 5 x_n = 0.8439257188007732	|x_n - x*| = 0.32197986532143963
Шаг 6 x_n = 0.8476911442489443	|x_n - x*| = 0.3182144398732685
Шаг 7 x_n = 0.848618694458027	|x_n - x*| = 0.31728688966418583
Шаг 8 x_n = 0.8488453301276907	|x_n - x*| = 0.3170602539945221
Шаг 9 x_n = 0.8489005945520041	|x_n - x*| = 0.31700498957020873
Шаг 10 x_n = 0.8489140639883596	|x_n - x*| = 0.31699152013385323
Шаг 11 x_n = 0.848917346460839	|x_n - x*| = 0.31698823766137374
Шаг 12 x_n = 0.8489181463688856	|x_n - x*| = 0.31698743775332716
Шаг 13 x_n = 0.8489183412976555	|x_n - x*| = 0.31698724282455726
Шаг 14 x_n = 0.8489183887995648	|x_n - x*| = 0.31698719532264796
Шаг 15 x_n = 0.8489184003752313	|x_n - x*| = 0.31698718374698154

Результат метода секущих: 0.8489184

Метод Ньютона:

Шаг 1 phi_n = 0.8622936849462365	x_n = 1	|x_n - x*| = 0.15108159589501513
Шаг 2 phi_n = 0.849053280901368	x_n = 0.8622936849462365	|x_n - x*| = 0.013375280841251613
Шаг 3 phi_n = 0.8489184181841145	x_n = 0.849053280901368	|x_n - x*| = 0.0001348767963831321

Результат метода Ньютона: 0.84891842

Модифицированный метод Ньютона:

Шаг 1 phi_n = 0.3142209432555506	x_n = 0.1	|x_n - x*| = 0.7489184041049849
Шаг 2 phi_n = 0.5537901970882083	x_n = 0.3142209432555506	|x_n - x*| = 0.5346974608494343
Шаг 3 phi_n = 0.7371410530640974	x_n = 0.5537901970882083	|x_n - x*| = 0.29512820701677656

Шаг 4 phi_n = 0.8205941042570769	x_n = 0.7371410530640974	|x_n - x*| = 0.11177735104088748
Шаг 5 phi_n = 0.8432842226531595	x_n = 0.8205941042570769	|x_n - x*| = 0.028324299847907963
Шаг 6 phi_n = 0.8478793438693197	x_n = 0.8432842226531595	|x_n - x*| = 0.005634181451825371
Шаг 7 phi_n = 0.8487298120490433	x_n = 0.8478793438693197	|x_n - x*| = 0.0010390602356651346

Результат модифицированного метода Ньютона: 0.84872981

МПИ:

Шаг 1 phi_n = 0.4559833517937083	x_n = 0.01	|x_n - x*| = 0.8389184041049849
Шаг 2 phi_n = 0.6754202511000479	x_n = 0.4559833517937083	|x_n - x*| = 0.39293505231127657
Шаг 3 phi_n = 0.7722183769451408	x_n = 0.6754202511000479	|x_n - x*| = 0.17349815300493698
Шаг 4 phi_n = 0.8148221759441991	x_n = 0.7722183769451408	|x_n - x*| = 0.07670002715984403
Шаг 5 phi_n = 0.8337099318741118	x_n = 0.8148221759441991	|x_n - x*| = 0.034096228160785724
Шаг 6 phi_n = 0.8421233142500131	x_n = 0.8337099318741118	|x_n - x*| = 0.015208472230873071
Шаг 7 phi_n = 0.8458799978059576	x_n = 0.8421233142500131	|x_n - x*| = 0.006795089854971792
Шаг 8 phi_n = 0.847559302609409	x_n = 0.8458799978059576	|x_n - x*| = 0.0030384062990272964
Шаг 9 phi_n = 0.8483103698831603	x_n = 0.847559302609409	|x_n - x*| = 0.0013591014955758318

Результат МПИ: 0.84831037 9

Выводы:

Наилучшие результаты по первой функции показали метод секущих и метод Ньютона, по второй функции аналогично.