

## 事件驱动的网络化系统最优控制

祝超群, 郭 戈

(大连海事大学 信息科学技术学院, 辽宁 大连 116026)

**摘 要:** 针对随机事件驱动的网络化控制系统, 研究其中的有限时域和无限时域内最优控制器的设计问题. 首先, 根据执行器介质访问机制将网络化控制系统建模为具有多个状态的马尔科夫跳变系统; 然后, 基于动态规划和马尔科夫跳变线性系统理论设计满足二次型性能指标的最优控制序列, 通过求解耦合黎卡提方程的镇定解, 给出最优控制律的计算方法, 使得网络化控制系统均方指数稳定; 最后, 通过仿真实验表明了所提出方法的有效性.

**关键词:** 网络化控制系统; 介质访问约束; 事件驱动; 马尔科夫链; 最优控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Optimal control for event-triggered networked control systems

ZHU Chao-qun, GUO Ge

(School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China. Correspondent: ZHU Chao-qun, E-mail: chaoqunzhu@yeah.net)

**Abstract:** The finite and infinite horizon optimal control problem is studied for networked control systems wherein actuators are activated in groups by a stochastic event. The system is built as a switching Markov jump linear system according to the medium access mechanism of actuators. Based on the theory of Markovian jump linear system and dynamic programming, the optimal control sequence is derived to satisfy the quadratic performance index. The calculation technique of optimal control law is given by solving stabilizing solutions of coupled Riccati equations to achieve the stability of networked control systems in the exponentially mean square sense. Finally, a numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** networked control system; access constraints; event driven; Markov chain; optimal control

## 0 引 言

在网络化控制系统(NCS)中, 控制器通过共享网络与数量众多的传感器和执行器进行通信. 由于网络资源有限, 在每个控制周期内只有部分传感器/执行器能够获得信道与远程控制器进行数据交换, 称此为NCS的介质访问约束. 介质访问约束现象广泛存在于NCS中, 比如, 借助有限带宽通信的复杂工业控制系统、存在互扰的声纳和雷达的海空监控系统等<sup>[1-3]</sup>. 介质访问约束使得控制器输入和控制量均无法及时获得更新, 在一定程度上会影响系统控制性能, 甚至造成系统失稳. 因此, 对于NCS的介质访问约束及其相关问题的研究具有重要的理论意义和应用价值<sup>[4-6]</sup>.

国内外很多学者对NCS的介质访问调度和控制器设计问题进行了研究. Brockett首次采用通信

序列<sup>[7]</sup>描述网络通信介质的访问顺序, 由此开启了介质访问调度的序幕. 在通信序列概念的基础上, Rehinder等<sup>[8]</sup>利用静态通信序列将NCS建模为周期系统, 通过求解一个组合优化问题获得最优的周期通信序列. Lincoln等<sup>[9]</sup>提出了一种更加行之有效的最优通信序列搜索策略, 该策略借助动态规划法移除信息树上不必要的枝干以避免维数扩张, 通过合并搜索信息树性能指标进行反向迭代, 从而得到最优通信序列和控制器. 近年来, Zhang等<sup>[10]</sup>利用周期通信序列保持NCS的结构特性, 完成了通信调度与控制器的协同设计. 随后, 文献[11]考虑了介质访问约束和诱导时延共存的NCS, 设计了具有时延补偿的最优状态反馈控制器和静态通信序列. 上述通信序列都局限于离线设计的静态周期序列, 在系统出现随机扰动时,

收稿日期: 2013-03-09; 修回日期: 2013-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974013, 61174060, 61273107); 大连市领军人才项目(841252); 中央高校基本科研业务费项目优先课题项目(3132013334).

作者简介: 祝超群(1977—), 男, 讲师, 博士, 从事网络化控制系统分析与处理的研究; 郭戈(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络化控制系统分析、车辆船舶移动机器人控制等研究.

很难做出及时的响应, 不利于通信资源的合理利用. Guo 等<sup>[12-13]</sup>在控制与通信调度高度耦合的条件下, 设计了NCS的输出反馈控制器及其动态调度序列, 由于介质访问序列是基于反馈策略在线确定的, 可以避免静态调度中出现的问题.

上述研究都基于这样一个假设, 即NCS中的传感器和执行器都为时钟驱动且为可调度的. 然而, 在部分NCS中, 传感器和执行器与控制器的通信均由随机事件驱动, 如森林火灾监测和灭火系统、气象监测系统等. 此时, 基于通信调度的控制方法不再适用于这类NCS. 近年来, Guo<sup>[14]</sup>针对一类执行器的介质访问状态由过程驱动的NCS, 提出时滞依赖状态反馈控制器的设计方法, 实现了系统的均方稳定控制, 但其结果需要求解非严格线性的矩阵不等式, 计算量较大, 且常常得不到有效解. 文献[15]将控制器综合与执行器分配机制结合在一起, 在此基础上设计了模式和时滞依赖的状态反馈控制器, 且利用标准的数字软件即可获得有效解. 需要指出的是, 目前与具有通信受限的NCS相关的大部分研究成果, 主要集中在NCS的建模、控制和稳定性分析方面, 没有充分考虑NCS的控制性能. 针对此类存在介质访问约束的NCS, 如何进行控制器的综合, 同时兼顾系统的稳定性和控制性能值得深入研究.

本文针对执行器访问为随机事件驱动的NCS, 研究其有限时域和无限时域内最优控制器的设计问题. 考虑到随机事件的概率分布特性, 将NCS建模为具有多个状态的跳变系统. 以动态规划和跳变线性系统理论为基础, 设计了使二次型性能指标极小化的最优控制器. 在求解耦合代数黎卡提方程镇定解的基础上, 给出了最优控制律的计算方法, 保证了NCS的均方指数稳定.

## 1 系统描述

本文符号说明如下:  $R^n$  和  $R^{n \times n}$  分别为实数域上的  $n$  维和  $n \times n$  维 Euclidean 空间;  $P > 0 (P \geq 0)$  为  $P$  对称正定(半正定)矩阵; 上标“T”和  $-1$  分别为矩阵转置和矩阵求逆;  $\text{tr}(X)$  为求矩阵  $X$  的迹;  $\{X_i\}_{i=1}^N$  为矩阵  $X_1, X_2, \dots, X_N$  的集合;  $E(v)$  和  $\text{Pr}(v)$  分别为随机变量  $v$  的数学期望和概率; 定义  $Z = \{0, 1, \dots\}$ ,  $T = \{0, 1, \dots, T-1\}$ ,  $N = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $T$  和  $N$  为正整数.

NCS 结构如图 1 所示, 被控对象为离散线性时不变系统, 即

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + G\omega(k). \quad (1)$$

其中:  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ ,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \in R^m$  分别为系统的状态和控制输入,  $x(0) =$

$x_0$ ;  $\omega(k) \in R^r$  为高斯白噪声向量, 满足  $E(\omega(k)) = 0$ ,  $E(\omega(k)\omega^T(l)) = Z$ , 当  $l \neq k$  时,  $E(\omega(k)\omega^T(l)) = 0$ ;  $x_p$  为传感器  $p$  测量到的系统状态,  $u_i$  为执行器  $i$  接收到的控制信号;  $A, B, G$  分别为具有相应维数的常数矩阵.

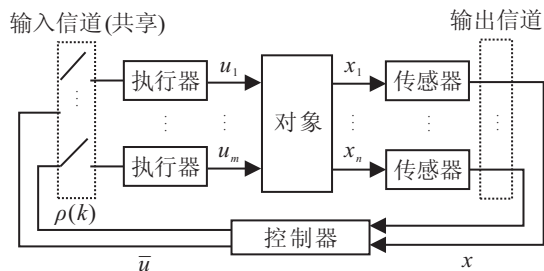


图1 NCS 结构

在NCS中, 被控对象通过共享网络与控制器进行连接. 由于网络通信带宽的限制, 在任意时刻只有  $q$  个执行器能够被激活, 从控制器取得实时控制信息, 其中  $1 \leq q < m$ . 在下一个控制周期, 另外  $q$  个执行器被激活执行控制任务. 因此, 对于NCS的执行器端而言, 共有  $N = C_m^q$  种激活模式. 为了方便讨论, 假设被控对象的状态是直接可量测的, 传感器与控制器之间不存在任何通信约束.

采用二值函数  $\rho_i(k)$  表示  $k$  时刻执行器端的介质访问状态, 其中  $i = 1, 2, \dots, m$ . 当  $\rho_i(k) = 1$  时,  $u_i(k) = \bar{u}_i(k)$ , 表示执行器  $i$  被激活, 控制信息在  $k$  时刻获得更新; 当  $\rho_i(k) = 0$  时,  $u_i(k) = 0$ , 表示执行器  $i$  在  $k$  时刻未获得网络的访问权, 则执行器在  $k$  时刻的介质访问状态可以用通信序列  $\rho(k) = [\rho_1(k), \rho_2(k), \dots, \rho_m(k)]^T$  来表示. 经过网络传输后得到控制信号

$$u(k) = M_\rho(k)\bar{u}(k). \quad (2)$$

其中:  $\bar{u}(k)$  为控制器的控制输出;  $M_\rho(k) = \text{diag}\{\rho(k)\}$  为通信矩阵, 表示  $m$  个执行器的激活状态. 假设  $M_\rho(k)$  可建模为参数已知的 Markov 过程, 从有限集  $\{M_\rho^i\}_{i=1}^N$  中取值, 并服从以下条件概率:

$$\text{Pr}\{M_\rho(k) = M_\rho^i\} = \pi_i(k),$$

$$\text{Pr}\{M_\rho(k+1) = M_\rho^j | M_\rho(k) = M_\rho^i\} = \pi_{ij}. \quad (3)$$

其中:  $\pi = [\pi_{ij}]$  为模态转移概率矩阵;  $\pi_{ij} > 0$  为通信矩阵  $M_\rho(k)$  从模态  $i$  到模态  $j$  的转移概率, 且满足  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1, i, j \in N$ ;  $\pi_0 = [\pi_{01} \ \pi_{02} \ \dots \ \pi_{0N}]^T$  为各模态的初始概率分布;

$$\pi(k) = [\pi_1(k) \ \pi_2(k) \ \dots \ \pi_N(k)]^T$$

为各个模态在  $k$  时刻的概率分布, 且  $\pi(k+1) = \pi^T \pi(k)$ . 假设此 Markov 过程具有遍历性, 则对于任意初始概率  $\pi_0 = [\pi_{01} \ \pi_{02} \ \dots \ \pi_{0N}]^T$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时, 概率分布收敛于向量  $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_N]^T$ .

为了研究问题方便, 定义一个转移概率为  $\pi_{ij}$  的 Markov 链  $\{\theta(k); k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\theta(k) \in N$ . 当  $M_\rho(k) = M_\rho^i$  时,  $\theta(k) = i$ , 且有

$$\Pr\{\theta(k) = i\} = \Pr\{M_\rho(k) = M_\rho^i\} = \pi_i(k).$$

定义已知信息集为  $I_k = \{x(t), \theta(t); t = 0, 1, \dots, k\}$ , 显然  $I_k \subset I_{k+1} \subset I_T$ .

综合考虑对象动态 (1) 和执行器端的介质访问状态, 并以  $\bar{u}(k)$  作为被控对象的控制输入, 可得

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{\theta(k)}\bar{u}(k) + G\omega(k), \quad (4)$$

其中  $B_{\theta(k)} = BM_\rho^{\theta(k)}$ . 显然,  $\{B_{\theta(k)}; k \in \mathbb{Z}\}$  是一个转移概率为  $\pi_{ij}$  的 Markov 过程.

本文的主要任务是在初始条件为  $(x_0, \theta_0)$  时, 为系统 (4) 设计最优的控制输入序列  $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(T-1)$ , 使得二次型性能指标

$$J(x_0, \theta_0, \bar{u}) = E(x^T(T)Q(T)x(T) + \sum_{k=0}^{T-1} (x^T(k)Q(k)x(k) + \bar{u}^T(k)R(k)\bar{u}(k))) \quad (5)$$

极小化, 极小值记为  $J^*(x_0, \theta_0)$ . 其中:  $Q(T) \geq 0$ ,  $Q(k) \geq 0$ ,  $R(k) > 0$ ,  $\theta(k) \in N$ ,  $k \in T$ .

## 2 有限时间最优控制器设计

本节在极小化二次型性能指标 (5) 的条件下, 为系统 (4) 设计有限时间最优控制器. 定义允许的控制输入序列集合为  $U = \{\bar{u}(k); k \in T\}$ . 由外部干扰信号  $\omega(k)$  的独立性可知

$$E(\omega(k)x^T(k)) = 0, E(\omega(k)\bar{u}^T(k)) = 0. \quad (6)$$

假设对于任意的测量函数  $g$  和  $h$ , 以下等式成立:

$$E(g(\omega(k))h(\theta(k+1))|I_k) = E(g(\omega(k))|I_k) \sum_{j=1}^N \pi_{\theta(k)j} h(j). \quad (7)$$

**定理 1** 对于系统 (4), 使得系统渐近稳定且最小化二次型性能指标 (5) 的控制律由下式给出:

$$\bar{u}(k) = K_{\theta(k)}(k)x(k). \quad (8)$$

最优性能指标为

$$J^*(x_0, \theta_0) = \sum_{i=1}^N \left( \text{tr}(\pi_i(0)x(0)P_i(0)x^T(0)) + \sum_{k=0}^{T-1} \pi_i(k) \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(k+1)) \right). \quad (9)$$

其中

$$K_{\theta(k)}(k) = -(R(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})^{-1} \times B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A, \quad (10)$$

$$P_{\theta(k)}(k) =$$

$$Q(k) + A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A - A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)}(R(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})^{-1} B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A, \\ \bar{P}_{\theta(k)}(k+1) = \sum_{j=1}^N \pi_{\theta(k)j} P_j(k+1), \\ P_{\theta(k)} = P_{\theta(k)}^T > 0, P_{\theta(T)}(T) = Q(T), \\ \theta(k) \in N, k \in T. \quad (11)$$

**证明** 定义最优控制值函数  $V(\theta(k), x(k), k)$  为

$$V(\theta(T), x(T), T) = E(x^T(T)Q(T)x(T)|I_T), \quad (12)$$

$$V(\theta(k), x(k), k) =$$

$$\min_{\bar{u}(k)} E(x^T(k)Q(k)x(k) + \bar{u}^T(k)R(k)\bar{u}(k) + V(\theta(k+1), x(k+1), k+1)|I_k). \quad (13)$$

显然,  $J^*(x_0, \theta_0) = V(\theta(0), x(0), 0)$ . 将值函数 (12) 和 (13) 重写为

$$V(\theta(k), x(k), k) = E(x^T(k)P_{\theta(k)}(k)x(k)|I_k) + \alpha(k), \\ k = T, T-1, \dots, 1, 0. \quad (14)$$

其中

$$\alpha(T) = 0, \\ \alpha(k) = \sum_{t=k}^{T-1} \sum_{i=1}^N \pi_i(t) \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(t+1)), \\ k = T-1, T-2, \dots, 1, 0.$$

下面利用数学归纳法进行证明. 当  $k = T$  时, 有  $P_{\theta(T)}(T) = Q(T)$ ,  $\theta(T) \in N$ ,  $\alpha(T) = 0$ , 显然式 (14) 成立. 假设式 (14) 在  $k+1$  时刻成立, 即

$$V(\theta(k+1), x(k+1), k+1) = E(x^T(k+1)P_{\theta(k+1)}(k+1)x(k+1)|I_{k+1}) + \alpha(k+1), \quad (15)$$

则在  $k$  时刻, 有

$$V(\theta(k), x(k), k) = \min_{\bar{u}(k)} (E(x^T(k)Q(k)x(k) + \bar{u}^T(k)R(k)\bar{u}(k)|I_k) + E(E(x^T(k+1)P_{\theta(k+1)}(k+1)x(k+1)|I_{k+1}) + \alpha(k+1)|I_k)). \quad (16)$$

已知条件均值具有如下平滑特性<sup>[16]</sup>:

$$E(V(k+1)|I_k) = E(E(V(k+1)|I_{k+1})|I_k). \quad (17)$$

考虑式 (17), 并将式 (4) 代入 (16), 得到

$$V(\theta(k), x(k), k) = \min_{\bar{u}(k)} (E(x^T(k)Q(k)x(k) + \bar{u}^T(k)R(k)\bar{u}(k)|I_k) + E(E(x^T(k+1)P_{\theta(k+1)}(k+1)x(k+1)|I_{k+1}) + \alpha(k+1)) = \min_{\bar{u}(k)} (E(x^T(k)Q(k)x(k) + \bar{u}^T(k)R(k)\bar{u}(k)|I_k) +$$

$$\begin{aligned}
& E((Ax(k) + B_{\theta(k)}\bar{u}(k) + G\omega(k))^T P_{\theta(k+1)}(k+1) \times \\
& (Ax(k) + B_{\theta(k)}\bar{u}(k) + G\omega(k))|I_k) + \alpha(k+1)) = \\
& \min_{\bar{u}(k)} (E(x^T(k)Q(k)x(k) + x^T(k)A^T P_{\theta(k+1)}(k+1) \times \\
& Ax(k)|I_k) + E(2\bar{u}^T(k)B_{\theta(k)}^T P_{\theta(k+1)}(k+1)Ax(k) + \\
& 2\bar{u}^T(k)B_{\theta(k)}^T(k)P_{\theta(k+1)}(k+1)G\omega(k) + 2x^T(k)A^T \times \\
& P_{\theta(k+1)}(k+1)G\omega(k) + \bar{u}^T(k)(R(k) + B_{\theta(k)}^T \times \\
& P_{\theta(k+1)}(k+1)B_{\theta(k)})\bar{u}(k) + \omega^T(k)G^T \times \\
& P_{\theta(k+1)}(k+1)G\omega(k)|I_k)) + \alpha(k+1)). \quad (18)
\end{aligned}$$

对式(18)求数学期望, 并应用式(7)可得

$$\begin{aligned}
V(\theta(k), x(k), k) = \\
\min_{\bar{u}(k)} (x^T(k)Q(k)x(k) + x^T(k)A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)Ax(k) + \\
2\bar{u}^T(k)B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)Ax(k) + \\
\bar{u}^T(k)(R(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})\bar{u}(k) + \\
2\text{tr}(GE(\omega(k)x^T(k)|I_k)A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)) + \\
2\text{tr}(GE(\omega(k)\bar{u}^T(k)|I_k)B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)) + \\
\text{tr}(GE(\omega(k)\omega^T(k)|I_k)G^T \bar{P}_{\theta(k+1)}(k+1))) + \alpha(k+1). \quad (19)
\end{aligned}$$

考虑式(6), 有

$$\begin{aligned}
E(\text{tr}(GE(\omega(k)x^T(k)|I_k)A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1))) &= 0, \quad (20) \\
E(\text{tr}(GE(\omega(k)\bar{u}^T(k)|I_k)B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1))) &= 0, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\text{tr}(GE(\omega(k)\omega^T(k)|I_k)G^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1))) &= \\
E(\text{tr}(GE(\omega(k)\omega^T(k))G^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1))) &= \\
\sum_{i=1}^N \pi_i(k) \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(k+1)). \quad (22)
\end{aligned}$$

将式(20)~(22)代入(19), 可得

$$\begin{aligned}
V(\theta(k), x(k), k) = \\
\min_{\bar{u}(k)} \left( x^T(k)Q(k)x(k) + x^T(k)A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)Ax(k) + \right. \\
2\bar{u}^T(k)B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)Ax(k) + \sum_{i=1}^N \pi_i(k) \times \\
\left. \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(k+1)) + \bar{u}^T(k)(R(k) + B_{\theta(k)}^T \times \right. \\
\left. \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})\bar{u}(k) \right) + \alpha(k+1). \quad (23)
\end{aligned}$$

因为控制输入  $\bar{u}(k)$  无约束, 令

$$\frac{\partial V(\theta(k), x(k), k)}{\partial \bar{u}(k)} = 0,$$

可得

$$\begin{aligned}
\bar{u}^T(k)B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)Ax(k) + (R(k) + \\
B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})\bar{u}(k) = 0.
\end{aligned}$$

由  $R(k) > 0$  可知,  $R(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)} > 0$ , 从而可以得到最优控制序列(8).

考虑到

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^N \pi_i(k) \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(k+1)) + \alpha(k+1),$$

将式(8)代入(23), 可得

$$\begin{aligned}
V(\theta(k), x(k), k) = \\
E(x^T(k)(Q(k) + A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A - A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1) \times \\
B_{\theta(k)}(R_{\theta(k)}(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})^{-1} \times \\
B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A)x(k)|I_k) + \alpha(k). \quad (24)
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
P_{\theta(k)}(k) = \\
Q(k) + A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A - A^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1) \times \\
B_{\theta(k)}(R(k) + B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)B_{\theta(k)})^{-1} \times \\
B_{\theta(k)}^T \bar{P}_{\theta(k)}(k+1)A,
\end{aligned}$$

即

$$V(\theta(k), x(k), k) = E(x^T(k)P_{\theta(k)}(k)x(k)|I_k) + \alpha(k).$$

这说明, 在  $k$  时刻式(14)也是成立的. 当  $k = 0, 1, \dots, T-1$  时, 采用式(8)的最优控制器, 可得

$$J^*(x_0, \theta_0) = E(x^T(0)P_{\theta(0)}(0)x(0)) + \alpha(0) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left( \text{tr}(\pi_i(0)x(0)P_i(0)x^T(0)) + \right. \\
& \left. \sum_{k=0}^{T-1} \pi_i(k) \text{tr}(GZG^T \bar{P}_i(k+1)) \right). \quad \square
\end{aligned}$$

### 3 无限时间最优控制器设计

在无限时间区间内设计控制器, 需要对二次型性能指标进行重新定义. 假设当  $k \rightarrow \infty$  时, 加权矩阵  $Q(T) = Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$ , 此时二次型性能指标(5)变为

$$\begin{aligned}
J(x_0, \theta_0, \bar{u}) = \\
E \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k) + \bar{u}^T(k)R\bar{u}(k) \right). \quad (25)
\end{aligned}$$

其中:  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$ ,  $\theta(k) \in N$ ,  $k \in Z$ . 由于干扰信号  $\omega(k)$  的存在, 性能指标(25)有可能趋于无界值, 因此定义平均二次型性能指标

$$\begin{aligned}
J_{av}(x_0, \theta_0, \bar{u}) = \\
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( E \left( \sum_{k=0}^{T-1} x^T(k)Qx(k) + \bar{u}^T(k)R\bar{u}(k) \right) \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

那么, 最优平均二次型性能指标为

$$J_{av}^*(x_0, \theta_0) = \inf_{\bar{u} \in U} J_{av}(x_0, \theta_0, \bar{u}). \quad (27)$$

本节任务是设计静态状态反馈矩阵  $\{K_i\}_{i=1}^N$ , 使得系统(4)均方指数稳定, 并且使二次型性能指标(26)极小化. 在进行最优控制器设计前, 先给出相关定义.

**定义 1** 对于任意初始状态  $(x_0, \theta_0)$ , 如果存在  $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$ , 使得对于所有的整数  $k \geq 0$ , 都有  $E(\|x(k)\|^2 | x_0, \theta_0) \leq \alpha \beta^k \|x_0\|^2$ , 则系统 (4) 是均方指数稳定的.

**定义 2** 假设所需参数均由系统 (4) 给出, 定义耦合的代数黎卡提方程为

$$P_i = Q + A^T \bar{P}_i A - A^T \bar{P}_i B_i (R + B_i^T \bar{P}_i B_i)^{-1} B_i^T \bar{P}_i A. \quad (28)$$

其中:  $P_i = P_i^T > 0, \bar{P}_i = \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j, i = 1, 2, \dots, N$ .

**定义 3** 若存在矩阵  $\{P_i\}_{i=1}^N$  满足黎卡提方程 (28), 使得控制输入

$$K_i = -(R + B_i^T \bar{P}_i B_i)^{-1} B_i^T \bar{P}_i A, i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

能够镇定系统 (4), 则称  $\{P_i\}_{i=1}^N$  为黎卡提方程 (28) 的镇定解.

**定义 4** 对于集合

$$M = \{P_i | P_i \leq Q + A^T \bar{P}_i A - A^T \bar{P}_i B(R + B_i^T \bar{P}_i B_i)^{-1} B_i^T \bar{P}_i A\},$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ , 若存在矩阵  $\{P_i^m\}_{i=1}^N \in M$ , 满足黎卡提方程 (28), 且对于任意的  $\{P_i\}_{i=1}^N \in M$ , 均有  $P_i^m \geq P_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 则称  $\{P_i^m\}_{i=1}^N$  为黎卡提方程 (28) 的最大解.

**定理 2** 对于系统 (4), 如果代数黎卡提方程 (28) 存在镇定解  $\{P_i\}_{i=1}^N$ , 则使得系统渐近稳定且最小化二次型性能指标 (26) 的控制律由下式给定:

$$\bar{u}(k) = K_{\theta(k)} x(k), \quad (30)$$

最优性能指标为

$$J_{av}^*(x_0, \theta_0) = \sum_{i=1}^N \pi_i \text{tr}(G^T Z G \bar{P}_i). \quad (31)$$

其中:  $\theta(k) \in N, \bar{P}_i$  和  $K_i$  分别由式 (28) 和 (29) 给定.

**证明** 已知  $\{P_i\}_{i=1}^N$  为代数黎卡提方程 (28) 的镇定解, 因此在控制输入为式 (30) 时, 系统 (4) 是渐近稳定的. 当  $k \rightarrow \infty$  时, 概率分布

$$\pi(k) = [\pi_1(k) \ \pi_2(k) \ \cdots \ \pi_N(k)]^T$$

收敛于向量  $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_N]^T$ , 结合二次型性能指标 (9), 在最优控制输入  $U = \{\bar{u}(k); k = 0, 1, \dots, \infty\}$  的作用下, 可得

$$\begin{aligned} J_{av}^*(x_0, \theta_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( \inf_{\bar{u} \in U} \sum_{k=0}^{T-1} E(x^T(k) Q x(k) + \bar{u}^T(k) R \bar{u}(k)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( \sum_{k=0}^{T-1} \pi_i(k) \text{tr}(G^T Z G \bar{P}_i) \right) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i \text{tr}(G^T Z G \bar{P}_i). \quad \square$$

**定理 3** 若不考虑系统 (4) 的系统噪声, 即  $\omega(k) = 0, k \in Z$ , 则最优控制输入 (30) 可使系统 (4) 均方指数稳定.

**证明** 由式 (28) 可知,  $P_{\theta(k)} > 0, \theta(k) \in N$ . 选取李雅普诺夫函数  $V(k) = x^T(k) P_{\theta(k)} x(k)$ , 当  $x(k) \neq 0$  时, 有  $V(k) > 0$ , 进而有

$$\begin{aligned} E(V(k+1) | I_k) - V(k) &= \\ E(x^T(k+1) P_{\theta(k+1)} x(k+1) | I_k) - x^T(k) P_{\theta(k)} x(k) &= \\ E((Ax(k) + B_{\theta(k)} \bar{u}(k))^T P_{\theta(k+1)} \times \\ (Ax(k) + B_{\theta(k)} \bar{u}(k)) | I_k) - x^T(k) P_{\theta(k)} x(k) &= \\ x^T(k) ((A + B_{\theta(k)} K_{\theta(k)})^T \bar{P}_{\theta(k)} (A + B_{\theta(k)} K_{\theta(k)}) - \\ P_{\theta(k)}) x(k) &= -x^T(k) (K_{\theta(k)}^T R K_{\theta(k)} + Q) x(k). \end{aligned}$$

令  $F_{\theta(k)} = K_{\theta(k)}^T R K_{\theta(k)} + Q$ , 有

$$\begin{aligned} E(V(k+1) | I_k) &= V(k) - x^T(k) F_{\theta(k)} x(k) \leq \\ \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(F_{\theta(k)})}{\lambda_{\max}(P_{\theta(k)})}\right) V(k) &< \\ \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right) V(k) &= \beta V(k), \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $0 < \mu < \lambda_{\min}(F_{\theta(k)}), \sigma > \lambda_{\max}(P_{\theta(k)})$ . 显然,  $\mu < \sigma, 0 < \beta < 1$ . 同理可得

$$E(V(k) | I_{k-1}) < \beta V(k-1). \quad (33)$$

考虑式 (17), 并对式 (32) 求条件均值, 可得

$$\begin{aligned} E(V(k) | I_{k-2}) &= \\ E(E(V(k) | I_{k-1}) | I_{k-2}) &< \\ \beta E(V(k-1) | I_{k-2}) &< \beta^2 V(k-2). \end{aligned}$$

以此类推, 最终得到  $E(V(k)) < \beta^k V(0)$ , 即

$$E(x^T(k) P_{\theta(k)} x(k)) < \beta^k x_0^T P_{\theta_0} x_0.$$

进而有

$$\begin{aligned} E(x^T(k) x(k)) &< \\ \frac{\beta^k}{\lambda_{\min}(P_{\theta(k)})} x_0^T P_{\theta_0} x_0 &\leq \\ \frac{\lambda_{\max}(P_{\theta_0})}{\lambda_{\min}(P_{\theta(k)})} \beta^k x_0^T x_0 &= \alpha \beta^k x_0^T x_0, \end{aligned}$$

其中  $\alpha = \lambda_{\max}(P_{\theta_0}) (\lambda_{\min}(P_{\theta(k)}))^{-1}$ . 由定义 1 可知, 系统 (4) 是均方指数稳定的.  $\square$

定理 2 给出了无限时间区间内的最优控制器设计方法, 但在计算最优控制输入  $\{K_i\}_{i=1}^N$  时, 涉及到求解耦合代数黎卡提矩阵方程 (28). 为了获得代数黎卡提方程 (28) 的镇定解, 给出以下引理<sup>[17-18]</sup>.

**引理 1** 假设系统  $(A, B, \pi)$  是可镇定的, 存在满足代数黎卡提方程 (28) 的矩阵  $\{P_i^m\}_{i=1}^N \in M$ , 对于任意的  $\{P_i\}_{i=1}^N \in M$ , 均有  $P_i^m \geq P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  成

立, 当且仅当线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} & \max \operatorname{tr} \sum_{i=1}^N P_i; \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} -P_i + A^T \bar{P}_i A + Q & A^T \bar{P}_i B_i \\ B_i^T \bar{P}_i A & R + B_i^T \bar{P}_i B_i \end{bmatrix} \geq 0, \\ & R + B_i^T \bar{P}_i B_i > 0 \end{aligned} \quad (34)$$

存在一组解  $\{\hat{P}_i\}_{i=1}^N$ , 且  $\hat{P}_i = P_i^m, i = 1, 2, \dots, N$ .

**引理2** 若耦合代数黎卡提方程(28)存在镇定解  $\{P_i\}_{i=1}^N \in M$ , 则代数黎卡提方程(28)的最大解  $P_i^m \geq P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  也是代数黎卡提方程(28)的镇定解.

引理1和引理2给出了代数黎卡提方程(28)存在镇定解的充分条件. 在此基础上, 给出镇定解的计算步骤如下.

**Step 1:** 根据式(34)求出耦合代数黎卡提方程(28)的最大解.

**Step 2:** 验证最大解能否镇定  $(A, B, \pi)$  系统, 若能实现镇定, 则代数黎卡提方程(28)的镇定解存在, 且最大解同时为镇定解.

#### 4 仿真算例

为了验证所提出方法的有效性, 给出相应的仿真算例. 考虑具有如下参数的线性离散时不变系统:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.1200 & -1.0235 \\ -1.4350 & -2.0905 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -1.4350 & 2.0918 \\ -1.2886 & -1.5050 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 0.2000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

系统矩阵  $A$  的特征值分别为 0.5483 和 -2.5188, 表明该系统是开环不稳定的. 本文的目的是设计状态反馈控制器, 使得该系统均方指数稳定, 且极小化二次型性能指标(26). 假设在任意时刻, 控制器与执行器之间只存在一个通信信道, 即  $q = 1$ . 考虑到网络信道中的介质访问约束, 可知通信矩阵  $M_\rho(k)$  具有两个模态, 分别为

$$M_\rho^1 = \operatorname{diag}\{1, 0\}, M_\rho^2 = \operatorname{diag}\{0, 1\}.$$

假设通信矩阵  $M_\rho(k)$  模态切换的概率转移矩阵为

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.6780 & 0.3220 \\ 0.2250 & 0.7750 \end{bmatrix}.$$

选取二次型性能指标(26)中的状态加权矩阵  $Q = I_4$ , 控制信号加权矩阵  $R = I_4$ . 利用 LMI 工具箱求解式(34)可得代数黎卡提方程(28)的最大解为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.6433 & 2.0265 \\ 2.0265 & 4.0064 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 11.7055 & 28.9493 \\ 28.9493 & 79.6365 \end{bmatrix}.$$

经过验证, 由引理1得出的最大解可以镇定当前的  $(A, B, \pi)$  系统, 因此, 该最大解也为代数黎卡提方程(28)的镇定解. 根据定理2可得如下控制器增益:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.5519 & -1.3195 \\ -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ -1.2069 & -2.7190 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

系统(4)的执行器采用的 Markov 通信序列如图2所示, 纵坐标数值1和数值2分别为输入通信序列矩阵的编号. 选择系统初始状态为  $x(0) = [46 \ -32]^T$ , 在控制器(30)的作用下, 系统状态轨迹如图3所示. 可以看出, 相应的闭环系统是渐近稳定的.

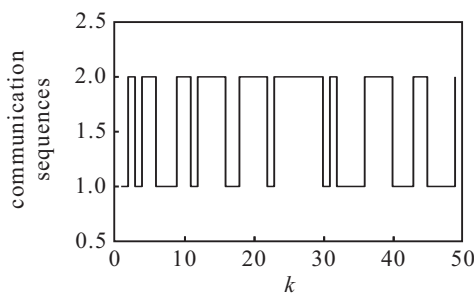


图2 输入通信序列

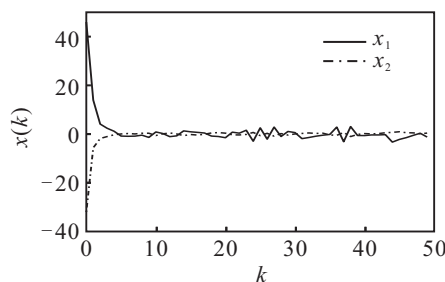


图3 状态轨迹

为了表明本文设计方法的优越性, 在同样的初始条件下采用文献[15]的控制方案, 得到系统状态输出如图4所示. 表1给出了两种控制方案下系统的二次型性能指标. 通过比较可以看出, 本文的控制方案不仅保证了系统的均方指数稳定, 而且具有更加优越的控制性能.

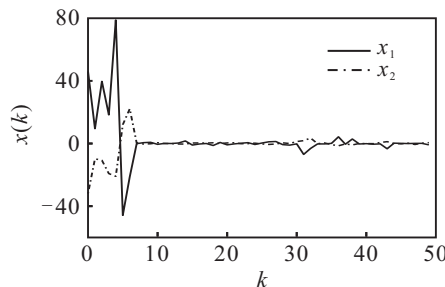


图4 文献[15]状态轨迹

表 1 二次型性能指标比较

控制方案	状态项指标/ $10^4$	控制项指标/ $10^3$	二次型性能指标/ $10^4$
本文	0.351 7	0.285 4	0.380 2
文献 [15]	1.499 9	1.509 0	1.650 8

## 5 结 论

本文针对存在介质访问约束的NCS,研究了其中的有限时域和无限时域内最优控制器的设计问题.在此类NCS中,由于网络通信带宽的限制,每个控制周期中只有部分控制信号能够随机获得信道送至执行器,未获得控制信号的执行器输入被置为零值.在此基础上,根据执行器通信矩阵的切换机理,将NCS建模为具有多个状态的Markov跳变系统.基于动态规划和Markov跳变系统理论设计了满足二次型性能指标的最优控制序列,通过求解耦合黎卡提方程的镇定解,进而给出最优控制律的计算方法,实现了NCS的均方指数稳定.仿真结果表明了所提出方法的有效性和正确性.

## 参考文献(References)

- [1] Meier L, Peschon J, Dressler R. Optimal control of measurement subsystems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(5): 528-536.
- [2] Gupta V, Chung T H, Hassibi B, et al. On a stochastic sensor selection algorithm with applications in sensor scheduling and sensor coverage[J]. Automatica, 2006, 42(2): 251-260.
- [3] Zhao F, Shin J, Reich J. Information-driven dynamic sensor collaboration for tracking applications[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(2): 61-72.
- [4] Hristu-Varsakelis D, Morgansen K. Limited communication control[J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(4): 193-205.
- [5] Walsh G, Ye H. Scheduling of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 57-65.
- [6] Ben Gaid M M, Cela A, Hamam Y. Optimal integrated control and scheduling of networked control systems with communication constraints: Application to a car suspension system[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2006, 14(4): 776-787.
- [7] Brockett R W. Stabilization of motor networks[C]. Proc of the 34th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: IEEE, 1995: 1484-1488.
- [8] Rehbindler H, Sanfridson M. Scheduling of a limited communication channel for optimal control[J]. Automatica, 2004, 40(3): 491-500.
- [9] Lincoln B, Bernhardsson B. LQR optimization of linear system switching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(10): 1701-1705.
- [10] Zhang L, Hristu-Varsakelis D. Communication and control co-design for networked control systems[J]. Automatica, 2006, 42(6): 953-958.
- [11] Hristu-Varsakelis D. Short-period communication and the role of zero-order holding in networked control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(5): 1285-1290.
- [12] Guo G, Jin H. A switching system approach to actuator assignment with limited channels[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(12): 1407-1426.
- [13] Guo G. A switching system approach to sensor and actuator assignment for stabilization via limited multi-packet transmitting channels[J]. Int J of Control, 2011, 84(1): 78-93.
- [14] Guo G. Linear systems with medium access constraint and Markov actuator assignment[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2010, 57(11): 2999-3010.
- [15] Guo G, Lu Z B. Markov actuator assignment for networked control systems[J]. European J of Control, 2012, 8(4): 323-330.
- [16] Yaz E. Control of randomly varying systems with prescribed degree of stability[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(4): 407-411.
- [17] Costa O L V, Fragoso M D. Maximal and stabilizing hermitian solutions for discrete-time coupled algebraic riccati equations[J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1999, 12(2): 167-195.
- [18] Fragoso M D, Costa O L V. A separation principle for the continuous-time LQ-Problem with Markovian jump parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(12): 2692-2707.

(责任编辑: 郑晓蕾)