Domande frequenti in Statistica

Federico Del Pup & Stefano Toneguzzo

Concetti Fondamentali

1. Qual è la definizione e le principali proprietà del valore atteso?

2. Quali sono i principali indici di posizione per variabili casuali univariate?

3. Si enuncino tre proprietà del valore atteso e si dimostri una.

Varianza e Scarto Quadratico Medio

4. Qual è la definizione e le principali proprietà della varianza e dello scarto quadratico medio?

5. Si enuncino tre proprietà della varianza e se ne dimostri una.

Funzione Generatrice dei Momenti

6. Qual è la definizione e le principali proprietà della funzione generatrice dei momenti?

7. Come si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge degenere in $x_0 \in \mathbb{R}$, $D(x_0)$?

8. Come si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X con supporto $S_X = \{0, 1\}$ e funzione di massa di probabilità $p_X(0) = 1 - p$, $p_X(1) = p$, dove $p \in (0, 1)$?

9. Come si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale elementare (o di Bernoulli), $Bi(1, p)$?

10. Come si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale con indice 2 e parametro $p \in (0, 1)$, $Bi(2, p)$?

11. Come si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale con indice n e parametro $p \in (0, 1)$, $Bi(n, p)$?

Leggi di Probabilità

12. Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni normali?

13. Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni binomiali?

14. Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni di Poisson?

15. Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni esponenziali?

16. Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni uniformi continue?

Campionamento e Stima

17. Nel campionamento casuale semplice da una distribuzione binomiale elementare $Bi(1, \theta)$, come si propone uno stimatore di θ e quali sono le sue proprietà campionarie?

18. Nel campionamento casuale semplice da una distribuzione di Poisson $P(\lambda)$, come si propone uno stimatore di λ e quali sono le sue proprietà campionarie?

19. Nel campionamento casuale semplice da una distribuzione normale $N(\mu_0, \sigma^2)$ (con varianza ignota e valore atteso noto), come si propone uno stimatore di σ^2 e quali sono le sue proprietà campionarie?

20. Nel campionamento casuale semplice da una distribuzione normale $N(\mu, \sigma_0^2)$ (con varianza nota e valore atteso ignoto), come si propone uno stimatore di μ e quali sono le sue proprietà campionarie?

21. Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto $\mu \in \mathbb{R}$, $N(\mu, \sigma_0^2)$, come si propone una stima di μ e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

22. Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con varianza ignota $\sigma^2 > 0$ e valore atteso noto μ_0, $N(\mu_0, \sigma^2)$, come si propone una stima di σ^2 e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

23. Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice con numerosità n da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto $\mu \in \mathbb{R}$, $N(\mu, \sigma_0^2)$, come si propone una stima di μ e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

Stimatori

24. Qual è la definizione di stimatori non distorti di un parametro θ? Si fornisca un esempio.

25. Qual è la definizione di stimatori consistenti di un parametro θ? Si fornisca un esempio.

Concetti Fondamentali

0.1 Qual è la definizione e le principali proprietà del valore atteso? Si enuncino tre proprietà del valore atteso e se ne dimostri una.

Il valore atteso è la media aritmetica ponderata dei valori assumibili dalla variabile casuale X, con i pesi dati dalle masse di probabilità. Si definisce così:

- Se Y ha legge discreta:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in S_Y} y \cdot p_Y(y)$$

- Se Y ha legge continua:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy$$

Sia $X = (X_1, \ldots, X_d)$ una variabile casuale con componenti indipendenti e supporto $S_X = S_{X_1} \times \cdots \times S_{X_d}$. Si ha:

$$\mathbb{E}[X_1 \cdots X_d] = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}[X_i]$$

- **Proprietà di Cauchy**: Quando esiste finito, il valore atteso di una variabile casuale univariata X è sempre intermedio tra i punti del supporto:
$$\inf(S_X) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sup(S_X)$$
Dimostrazione: Per una variabile casuale con legge discreta e supporto finito $S_X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ con $x_1 < \cdots < x_k$, si ha:
$$x_1 \cdot p_X(x_i) \leq x_i \cdot p_X(x_i) \leq x_k \cdot p_X(x_i), \quad \forall i$$
$$x_1 \sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) \leq \mathbb{E}[X] \leq x_k \sum_{i=1}^{k} p_X(x_i)$$
Poichè $\sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) = 1$, segue $x_1 \leq \mathbb{E}[X] \leq x_k$.

- **Proprietà di linearità**: Siano X e Y variabili casuali univariate con $Y = a + bX$, allora:
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X]$$
Dimostrazione: Applicando la formula integrale a $Y = a + bX$ segue immediatamente.

- **Proprietà di baricentro**: Per $Y = X - \mathbb{E}[X]$, si ha:
$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$$

- **Proprietà dei minimi quadrati**: Sia X una variabile casuale univariata, per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale:
$$\mathbb{E}[(X - c)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

0.2 Quali sono i principali indici di posizione per variabili casuali univariate?

- **Moda**: La moda di X è un valore del supporto S_X di X per cui $p_X(x_{\text{mod}}) \geq p_X(x)$ per ogni $x \in S_X$. Nel caso continuo, la massima probabilità è riferita ad intervalli di lunghezza ϵ contenenti x_{mod}.

- **Mediana**: La mediana predice il valore futuro di X seguendo il criterio di spezzare in due le possibilità, essendo le probabilità di previsione in eccesso e di predizione in difetto grosso modo bilanciate, pari a 0,5 o più. Si dice mediana di X, indicata con $x_{0.5}$, un valore reale tale che valgano simultaneamente:
$$P(X \leq x_{0.5}) \geq 0.5 \quad \text{e} \quad P(X \geq x_{0.5}) \geq 0.5.$$

- **Quantile-p**: Il quantile-p è un valore reale tale che valgano simultaneamente:
$$P(X \leq x_p) \geq p \quad \text{e} \quad P(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$
Il quantile-0,5 è detto mediana. Il percentile è il quantile-$\frac{i}{100}$. Tutte le soluzioni dell'equazione $F_X(x) = p$ sono quantili-p di X.

0.4 Qual è la definizione e le principali proprietà della varianza e dello scarto quadratico medio? Si enuncino tre proprietà della varianza e se ne dimostri una.

La varianza è il principale indice di variabilità per una variabile casuale (v.c.) univariata, dal momento che è l'indice di variabilità naturalmente associato al principale indice di posizione, il valore atteso.

Sia X una v.c. univariata con legge discreta o continua, con supporto S_X e funzione di massa/probabilità $p_X(x)$. Si dice varianza di X, indicata con $\text{Var}(X)$, o anche $V(X)$, o σ_X^2 o semplicemente σ^2, il valore reale:
$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$
La varianza di X è la media del quadrato dello scarto di X dalla propria media.

Esplicitando la definizione si ha:
$$\text{Var}[X] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in S_X} (x - \mathbb{E}[X])^2 p_X(x) & \text{se } X \text{ ha legge discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 p_X(x)\, dx & \text{se } X \text{ ha legge continua.} \end{cases}$$

Lo scarto quadratico medio o deviazione standard, indicato con σ_X o semplicemente σ, è la radice quadrata aritmetica della varianza (l'unica non negativa). In simboli:
$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Proprietà della Varianza

Non negatività Per ogni X con varianza finita si ha $\text{Var}[X] \geq 0$ e $\text{Var}[X] = 0$ solo per $X \sim D(x_0)$.

La dimostrazione della non negatività è immediata dalla proprietà di Cauchy del valore atteso. Infatti, $\mathrm{Var}[X]$ è il valore atteso della variabile casuale $(X - \mathbb{E}[X])^2$ il cui supporto è un sottoinsieme di $[0, +\infty)$.

Formula per il calcolo

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

La dimostrazione parte dalla definizione della varianza:

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ = \mathbb{E}[X^2 + (\mathbb{E}[X])^2 - 2\mathbb{E}[X]X] \quad \text{(sviluppando il quadrato)} \\ = \mathbb{E}[X^2] + (\mathbb{E}[X])^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] \quad \text{(linearità del valore atteso)} \\ = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{gathered}$$

Invarianza rispetto a traslazioni

$$\mathrm{Var}[X + b] = \mathrm{Var}[X]$$

La dimostrazione parte dalla definizione della varianza:

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] \\ = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X] - b)^2] \quad \text{poiché } \mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b \\ = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \text{semplificando} \\ = \mathrm{Var}[X] \end{gathered}$$

Omogeneità di secondo grado

$$\mathrm{Var}[bX] = b^2\mathrm{Var}[X]$$

La dimostrazione parte dalla definizione della varianza:

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}[bX] = \mathbb{E}[(bX - \mathbb{E}[bX])^2] \\ = \mathbb{E}[(bX - b\mathbb{E}[X])^2] \quad \text{poiché } \mathbb{E}[bX] = b\mathbb{E}[X] \\ = \mathbb{E}[(b(X - \mathbb{E}[X]))^2] \quad \text{raccogliendo} \\ = \mathbb{E}[b^2(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \text{(proprietà delle potenze)} \\ = b^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \text{(linearità del valore atteso)} \\ = b^2\mathrm{Var}[X] \end{gathered}$$

Dalle due proprietà precedenti si ricava che:

$$\mathrm{Var}[a + bX] = b^2\mathrm{Var}[X]$$

0.6 Qual è la definizione e le principali proprietà della funzione generatrice dei momenti?

Sia X una variabile casuale univariata con funzione di massa di probabilità (f.m.p.) o funzione di densità di probabilità (f.d.p.) $p_X(x)$. La funzione generatrice dei momenti di X, indicata con $M_X(t)$, è una funzione reale di variabile reale definita da:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x), & \text{se } X \text{ ha legge discreta,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} p_X(x) \mathrm{d}x, & \text{se } X \text{ ha legge continua.} \end{cases}$$

Una funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) ha le seguenti proprietà fondamentali:

- Nell'origine vale sempre 1: $M_X(0) = 1$ per ogni X.
- Il dominio di finitezza di $M_X(t)$, ovvero $D_X = \{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < +\infty\}$, è convesso (ossia è un intervallo, o una semiretta, o l'intera retta reale).
- $M_X(t) > 0$ per ogni $t \in D_X$.

La f.g.m. ha ulteriori proprietà molto utili se il suo dominio di finitezza è sufficientemente grande, precisamente se include un intervallo aperto che contiene l'origine. Questa condizione merita un'etichetta particolare.

Sia X una variabile casuale univariata. Si dice che la variabile casuale X ha funzione generatrice dei momenti propria se il dominio di finitezza di $M_X(t)$ include l'origine come punto interno, ossia se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq D_X$, e pertanto per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vale $M_X(t) < +\infty$.

0.7 Si ottenga la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge degenere in $x_0 \in \mathbb{R}$, indicata come $D(x_0)$.

La funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è definita come:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}].$$

Per una variabile casuale con legge degenere in x_0, abbiamo che $P(X = x_0) = 1$. Quindi,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[(e^{tX})] = e^{tx_0}.$$

Pertanto, la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge degenere in x_0 è:

$$M_X(t) = e^{tx_0}.$$

0.8 Si ottenga la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con supporto $S = \{0, 1\}$ e funzione di massa di probabilità $p_X(0) = 1-p$, $p_X(1) = p$, dove $p \in (0, 1)$.

Si consideri una variabile casuale X con supporto $S_X = \{0, 1\}$ e funzione di massa di probabilità:

$$p_X(0) = 1 - p, \quad p_X(1) = p, \quad \text{dove } p \in (0, 1).$$

La funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è definita come:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x).$$

Calcolando esplicitamente:

$$M_X(t) = e^{t \cdot 0} p_X(0) + e^{t \cdot 1} p_X(1).$$

$$M_X(t) = (1 - p) + pe^t.$$

Pertanto, la funzione generatrice dei momenti è:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t.$$

0.9 Si ottenga la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale di una variabile casuale con legge binomiale elementare (o di Bernoulli).

Si consideri una variabile casuale X con distribuzione binomiale elementare (o di Bernoulli), $Bi(1, p)$, con funzione di massa di probabilità:

$$p_X(k) = \binom{1}{k} p^k (1 - p)^{1-k} = \frac{1!}{k!(1 - k)!} p^k (1 - p)^{1-k},$$

con $k \in \{0, 1\}$ e $p \in (0, 1)$. Il supporto della variabile casuale è $S_X = \{0, 1\}$.

La funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è definita come:

$$M_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x).$$

Calcolando esplicitamente:

$$M_X(t) = e^{t \cdot 0} p_X(0) + e^{t \cdot 1} p_X(1).$$

$$M_X(t) = \binom{1}{0} p^0 (1-p)^{1-0} + \binom{1}{1} p^1 e^t (1-p)^{1-1}.$$

$$M_X(t) = (1-p) + pe^t.$$

Pertanto, la funzione generatrice dei momenti è:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t.$$

0.10 Si ottenga la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale con indice 2 e parametro $p \in (0,1)$.

Si consideri una variabile casuale X con distribuzione binomiale $Bi(2,p)$, dove $p \in (0,1)$, con supporto $S_X = \{0,1,2\}$ e funzione di massa di probabilità:

$$p_X(k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}, \quad k \in \{0,1,2\}.$$

La funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è definita come:

$$M_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x).$$

Esplicitamente:

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{2} \binom{2}{x} e^{tx} p^x (1-p)^{2-x}.$$

Calcolando i termini della sommatoria:

$$M_X(t) = \binom{2}{0} e^{t\cdot 0} p^0 (1-p)^2 + \binom{2}{1} e^{t\cdot 1} p^1 (1-p)^1 + \binom{2}{2} e^{t\cdot 2} p^2 (1-p)^0.$$

Espandendo:

$$M_X(t) = (1-p)^2 + 2p(1-p)e^t + p^2 e^{2t}.$$

Pertanto, la funzione generatrice dei momenti è:

$$M_X(t) = (1-p)^2 + 2p(1-p)e^t + p^2 e^{2t}.$$

0.11 Si ottenga la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale con legge binomiale con indice n e parametro $p \in (0,1)$.

Si consideri una variabile casuale X con distribuzione binomiale $Bi(n,p)$, dove $p \in (0,1)$, con supporto $S_X = \{0,1,\ldots,n\}$ e funzione di massa di probabilità:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

La funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è definita come:

$$M_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x).$$

Esplicitamente:

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{tx} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Fattorizzando i termini comuni:

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x (1-p)^{n-x}.$$

Utilizzando il teorema binomiale:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n,$$

con $a = pe^t$ e $b = 1-p$, si ottiene:

$$M_X(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n.$$

Pertanto, la funzione generatrice dei momenti è:

$$M_X(t) = \left(1 - p + pe^t\right)^n.$$

0.12 Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni normali?

Una variabile casuale univariata Z con supporto $S_Z = \mathbb{R}$ e funzione di densità di probabilità (f.d.p.)

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

è detta con legge normale standard, in breve $Z \sim N(0,1)$. Inoltre, la legge di $X = \mu + \sigma Z$, dove $Z \sim N(0,1)$, è detta normale con parametri μ e σ^2, in breve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Una variabile casuale univariata X con supporto $S_X = \mathbb{R}$ e funzione di densità di probabilità (f.d.p.)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

è detta con legge normale con parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, in breve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

L'andamento qualitativo della densità è ancora di tipo campanulare, con moda in $x = \mu$ e flessi ai punti $\mu \pm \sigma$.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

I momenti primo e secondo di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ sono dati da

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(t)\big|_{t=0} = \mu$$

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(t)\big|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

0.13 Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni binomiali?

Si dice che la variabile casuale univariata X ha legge binomiale con indice $n \in \mathbb{N}^+$ e parametro $p \in [0,1]$, e si scrive $X \sim Bi(n,p)$, se per ogni $B \in \mathcal{B}_1$ vale

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap \{0,1,\dots,n\}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

con $\mathcal{B}_1$, σ-algebra di Borel associata a $\mathbb{R}^1$.

I risultati principali sono:

$$\mathbb{E}[X] = np$$

$$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$$

La funzione di ripartizione F_X è definita dal sistema:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \inf(S_X), \\ 1-p & \text{se } \inf(S_X) \le x < \sup(S_X), \\ 1 & \text{se } x \ge \sup(S_X). \end{cases}$$

0.14 Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni di Poisson?

Si dice che X ha legge di Poisson con parametro λ, $\lambda > 0$, e in breve si scriverà $X \sim P(\lambda)$, se è una variabile casuale univariata con legge discreta che ha supporto $S_X = \mathbb{N}$ e funzione di massa di probabilità (f.m.p.), per $x \in S_X$, pari a

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Per una legge di Poisson il parametro λ rappresenta il valore atteso del conteggio. Infatti,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \lambda$$

dove $i = x - 1$.
La varianza di X è data da:

$$\mathrm{Var}[X] = \lambda$$

La funzione generatrice dei momenti è:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

La distribuzione di Poisson $P(\lambda)$ si può vedere come un caso limite della distribuzione binomiale $Bi(n, \frac{\lambda}{n})$ per $n \to +\infty$.

0.15 Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni esponenziali?

Si dice che $X \sim Esp(\lambda)$, con $\lambda > 0$, se $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ per $x > 0$.

In breve, X ha legge esponenziale con parametro $\lambda > 0$, e si scrive $X \sim Esp(\lambda)$, se la funzione di densità di probabilità (f.d.p.) di X è:

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Le proprietà principali della legge esponenziale sono:

- $X \sim Esp(\lambda)$, con $\lambda > 0$, è equivalente a $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
- Il valore atteso di X è:
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

- La funzione di ripartizione è:
$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$
- La varianza di X è:
$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$
- La funzione generatrice dei momenti è:
$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{con } t < \lambda.$$
- Gode della proprietà di assenza della memoria:
$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \quad \text{per ogni } s, t \in S_X.$$

Per confronto:

- Se $X \sim U(a, b)$, con $a < b$, allora $S_X = [a, b]$.
- Se $X \sim \mathit{Esp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$, allora $S_X = [0, +\infty)$.

0.16 Qual è la definizione e i risultati principali delle distribuzioni uniformi continue?

Si dice che X ha legge uniforme continua in (a, b), dove $a < b$, e si scrive in breve $X \sim U(a, b)$, se la funzione di densità di probabilità (f.d.p.) di X è:
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b), \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Se $X \sim U(a, b)$, il valore atteso e la varianza di X sono:
$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2},$$
$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

La funzione di ripartizione è:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b), \\ 1, & \text{se } x > b. \end{cases}$$

La funzione generatrice dei momenti è:
$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}.$$

0.17 Stimatore θ nel campionamento casuale semplice da una distribuzione binomiale elementare $Bi(1, \theta)$.

Nel contesto del campionamento casuale semplice da una distribuzione binomiale elementare $Bi(1, \theta)$, dove θ è il parametro di probabilità di successo, si può proporre uno stimatore di θ basato sulla media campionaria.

Proposta di uno stimatore per θ

Dato un campione casuale semplice $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indipendente e identicamente distribuito, con $X_i \sim Bi(1, \theta)$, uno stimatore naturale di θ è la **media campionaria**:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Questo stimatore è noto anche come *stimatore della proporzione campionaria*, dato che la binomiale elementare rappresenta un caso particolare in cui ogni osservazione è una Bernoulli ($n = 1$).

Proprietà campionarie dello stimatore $\hat{\theta}$

1. **Non distorsione (unbiasedness):** Lo stimatore $\hat{\theta}$ è non distorto, ovvero:

   $$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta.$$

   La dimostrazione si basa sulla linearità dell'aspettativa:

   $$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i].$$

   Poiché $\mathbb{E}[X_i] = \theta$, si ha $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$.

2. **Varianza:** La varianza di $\hat{\theta}$ è data da:

   $$\mathrm{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i]}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

3. **Consistenza:** Lo stimatore $\hat{\theta}$ è consistente, cioè converge in probabilità a θ quando $n \to \infty$. Formalmente:

   $$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta.$$

   La consistenza segue dalla legge dei grandi numeri, poiché $\hat{\theta}$ è una media campionaria.

4. **Distribuzione campionaria:** Per campioni di dimensione finita n, lo stimatore $\hat{\theta}$ segue una distribuzione binomiale normalizzata:

$$\hat{\theta} \sim \text{Bin}(n, \theta)/n.$$

Per grandi n, grazie al teorema centrale del limite, la distribuzione di $\hat{\theta}$ si approssima a una normale:

$$\hat{\theta} \sim N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right).$$

0.18 Stimatore λ nel campionamento casuale semplice da una distribuzione di Poisson $P(\lambda)$.

Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice di n osservazioni indipendenti da una distribuzione di Poisson $P(\lambda)$, dove $\lambda > 0$. La funzione di massa di probabilità è:

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Il valore atteso e la varianza di una variabile casuale con legge di Poisson sono:

$$\mathbb{E}[X_i] = \lambda, \quad \text{Var}[X_i] = \lambda.$$

La media campionaria:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

è uno stimatore naturale per il parametro λ.

Proprietà Campionarie di $\overline{X}_n$

- **Non distorsione:**

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \lambda = \lambda.$$

  Pertanto, $\overline{X}_n$ è uno stimatore non distorto di λ.

- **Consistenza:** Per la legge dei grandi numeri (LGN), $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \lambda$ quando $n \to \infty$.

- **Varianza:** La varianza di $\overline{X}_n$ è:

$$\mathrm{Var}[\overline{X}_n] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

  All'aumentare di n, la varianza di $\overline{X}_n$ tende a zero, garantendo la precisione dello stimatore per grandi campioni.

Conclusione Lo stimatore $\overline{X}_n$ è un buon stimatore per λ nella distribuzione di Poisson. È non distorto, consistente e la sua varianza diminuisce con l'aumentare della dimensione campionaria n.

0.19 Stimatore σ^2 nel campionamento casuale semplice da una distribuzione normale $N(\mu_0, \sigma^2)$ (varianza ignota, valore atteso noto)

Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice estratto da una distribuzione normale $N(\mu_0, \sigma^2)$, dove μ_0 è noto e σ^2 è ignoto. La varianza campionaria corretta è definita come:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

Proprietà Campionarie di $\hat{\sigma}^2$

- **Non distorsione:**

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2.$$

  Pertanto, $\hat{\sigma}^2$ è uno stimatore non distorto di σ^2.

- **Consistenza:** Per la legge dei grandi numeri (LGN), $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ quando $n \to \infty$.

- **Varianza:** La varianza di $\hat{\sigma}^2$ dipende dalla dimensione campionaria n ed è proporzionale a $\frac{\sigma^4}{n}$.

0.20 Stimatore μ nel campionamento casuale semplice da una distribuzione normale $N(\mu, \sigma_0^2)$ (varianza nota, valore atteso ignoto)

Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice estratto da una distribuzione normale $N(\mu, \sigma_0^2)$, dove σ_0^2 è noto e μ è ignoto. La media campionaria è definita come:

$$\hat{\mu} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Proprietà Campionarie di $\hat{\mu}$

- **Non distorsione:**
$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu.$$
Pertanto, $\hat{\mu}$ è uno stimatore non distorto di μ.

- **Consistenza:** Per la legge dei grandi numeri (LGN), $\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu$ quando $n \to \infty$.

- **Varianza:** La varianza di $\hat{\mu}$ è:
$$\mathrm{Var}[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$
All'aumentare di n, la varianza di $\hat{\mu}$ tende a zero, aumentando la precisione dello stimatore.

0.21 Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto $\mu \in \mathbb{R}$, $N(\sigma_0^2, \mu)$, come si propone una stima di μ e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

Nel contesto di un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto μ, la stima di μ può essere proposta utilizzando la varianza campionaria corretta.

Proposta di uno stimatore per μ

Dato un campione casuale semplice $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indipendente e identicamente distribuito, con $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, uno stimatore naturale per il valore atteso μ è:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Proprietà campionarie dello stimatore $\hat{\mu}$

1. **Non distorsione (unbiasedness):** Lo stimatore $\hat{\mu}$ è non distorto, ovvero:
$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu.$$
La dimostrazione si basa sull'analisi delle proprietà della somma dei quadrati degli scarti da μ_0, considerando che μ_0 è noto.

2. **Varianza:** La varianza di $\hat{\mu}$ è:
$$\text{Var}[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$
Questa dipende dalla dimensione del campione n e diminuisce all'aumentare di n, migliorando la precisione dello stimatore.

3. **Consistenza:** Lo stimatore $\hat{\mu}$ è consistente, ovvero converge in probabilità al valore vero di μ quando $n \to \infty$:
$$\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu.$$
La consistenza è una conseguenza della legge dei grandi numeri, poiché $\hat{\mu}$ è una media campionaria.

4. **Distribuzione campionaria:** Per campioni di dimensione finita n, la somma campionaria $\hat{\mu}$ segue una distribuzione normale:
$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$
Questa proprietà discende dal fatto che una combinazione lineare di variabili normali indipendenti è ancora normale.

0.22 Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con varianza ignota $\sigma^2 > 0$ e valore atteso noto μ_0, $N(\mu_0, \sigma^2)$, come si propone una stima di σ^2 e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

Nel contesto di un esperimento di campionamento casuale semplice da una distribuzione normale con valore atteso noto μ_0 e varianza ignota $\sigma^2 > 0$, la stima di σ^2 può essere proposta utilizzando la varianza campionaria corretta.

Proposta di uno stimatore per σ^2

Dato un campione casuale semplice $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indipendente e identicamente distribuito, con $X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, uno stimatore naturale per la varianza σ^2 è:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2.$$

Proprietà campionarie dello stimatore $\hat{\sigma}^2$

1. **Non distorsione (unbiasedness):** Lo stimatore $\hat{\sigma}^2$ è non distorto, ovvero:

   $$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2.$$

   La dimostrazione si basa sull'analisi delle proprietà della somma dei quadrati degli scarti da μ_0, considerando che μ_0 è noto.

2. **Varianza:** La varianza di $\hat{\sigma}^2$ è:

   $$\mathrm{Var}[\hat{\sigma}^2] = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

   Questa dipende dalla dimensione del campione n e diminuisce all'aumentare di n, migliorando la precisione dello stimatore.

3. **Consistenza:** Lo stimatore $\hat{\sigma}^2$ è consistente, ovvero converge in probabilità al valore vero di σ^2 quando $n \to \infty$:

   $$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2.$$

   La consistenza è una conseguenza della legge dei grandi numeri.

4. **Distribuzione campionaria:** Per campioni di dimensione finita n, la somma dei quadrati degli scarti $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$ segue una distribuzione chi-quadro con n gradi di libertà. Pertanto:

   $$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{n} \cdot \chi^2_n,$$

   dove χ^2_n è una variabile casuale con distribuzione chi-quadro con n gradi di libertà.

0.23 Considerando un esperimento di campionamento casuale semplice con numerosità n da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto $\mu \in \mathbb{R}$, $N(\mu, \sigma_0^2)$, come si propone una stima di μ e quali sono le proprietà campionarie dello stimatore?

Nel contesto di un esperimento di campionamento casuale semplice con numerosità n da una distribuzione normale con varianza nota $\sigma_0^2 > 0$ e valore atteso ignoto $\mu \in \mathbb{R}$, si può proporre uno stimatore basato sulla media campionaria.

Proposta di uno stimatore per μ

Dato un campione casuale semplice $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indipendente e identicamente distribuito, con $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, uno stimatore naturale per il valore atteso μ è la **media campionaria**:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Proprietà campionarie dello stimatore $\hat{\mu}$

1. **Non distorsione (unbiasedness):** Lo stimatore $\hat{\mu}$ è non distorto, ovvero:

   $$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu.$$

   La dimostrazione si basa sulla linearità dell'operatore di aspettativa:

   $$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i].$$

   Poiché $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, si ottiene $\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu$.

2. **Varianza:** La varianza di $\hat{\mu}$ è:

   $$\mathrm{Var}[\hat{\mu}] = \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

   Questo mostra che la precisione dello stimatore aumenta con la dimensione del campione n.

3. **Efficienza:** Lo stimatore $\hat{\mu}$ è efficiente, nel senso che ha la minima varianza possibile tra tutti gli stimatori lineari e non distorti per μ. Questo è garantito dal **teorema di Rao-Cramér**.

4. **Consistenza:** Lo stimatore $\hat{\mu}$ è consistente, cioè converge in probabilità al valore vero di μ quando $n \to \infty$:

$$\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu.$$

   La consistenza deriva dalla legge dei grandi numeri, poiché $\hat{\mu}$ è una media campionaria.

5. **Distribuzione campionaria:** Per campioni di dimensione finita n, lo stimatore $\hat{\mu}$ segue una distribuzione normale:

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

   Questa proprietà discende dal fatto che una combinazione lineare di variabili normali indipendenti è ancora normale.

0.24 Dai la definizione dei stimatori non distorti di un parametro θ e fai un esempio.

Uno stimatore $\hat{\theta}_n$ è detto **non distorto** per il parametro θ se:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta, \quad \text{per ogni } \theta \in \Theta.$$

Esempio: Sia $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un campione casuale semplice con $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$ e $\text{Var}[Y_1] = \sigma^2$. La media campionaria:

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

è uno stimatore non distorto di μ poichè:

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_n] = \mu.$$

0.25 Dai la definizione dei stimatori consistenti di un parametro θ e fai un esempio.

Uno stimatore $\hat{\theta}_n$ è detto **consistente** per il parametro θ se:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Esempio: Sia $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un campione casuale semplice con componenti indipendenti e identicamente distribuite, $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$ e $\mathrm{Var}[Y_1] = \sigma^2$. Per la legge dei grandi numeri (LGN):

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{P} \mu.$$

Dato che $\mu = \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\overline{Y}_n]$, la media campionaria $\overline{Y}_n$ è uno stimatore consistente di μ.