Chapitre 1 : "les ensembles"

→ un ensemble ⇒ éléments

regroupement d'éléments ⇒ un tout
↳ collection

remarque ⇒ carac. ⇒ son contenu

cas simple → lister éléments
← {entre acolades}

desc. en extension

exemple = • ensemble de 1 à 10 • " voyelle

$E = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$ $E = \{a; e; i; u; y\}$

For complex ensemble

⇒ only some parts, but give enough pour faire ressortir un pattern clair et non-ambigu

ensemble entiers ≥ 0 & < 100

$E = \{0; 1; 2; 3; \dots; 99\}$

(infini)

ensemble des entiers + & pairs

$E = \{2; 4; 6; 8; 10; \dots\}$

ensemble (infini) des entier impairs

$E = \{\dots; -5; -3; -1; 1; 3; 5; \dots\}$

Ensembles vides & univers

" ne contient aucun éléments $\varnothing$ $\{\}$

" peuvent être de natures différentes

on peut mettre un ensemble dans un ensemble

However en pratique les éléments pouvant appartenir à un ensemble, proviennent d'un ensemble universelle Ω tous les éléments à prendre en compte dans un contexte donné

oméga

exemple : équations polynomiales

↳ construct. ensemble de solutions à partir d'éléments $\Omega = \mathbb{R}$

forme privilégiée en IT + maths

⇒ ensemble des élém. x qui check $P(x)$

$\{x \mid P(x)\}$

↘ "tel que"

ensemble d'élém. x de l'ensemble A check $P(x)$

$\{x \in A \mid P(x)\}$

exemples :

• ensemble des entiers ≥ 0 & < 100

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid \cancel{0 \leq} x < 100\}$

mais si $\mathbb{Z}$ $0 \leq$

• ensemble des entiers positifs pairs

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 0 [2]\}$

Utilisé dans son cours ← congruence (remplace le modulo % en maths)

$x = 2k$, ou $k \in \mathbb{N}$

Ensembles importants

$\mathbb{N}$ ⇒ entiers nat.

$\mathbb{Z}$ ⇒ entiers relat. → w/ nég.

$\mathbb{Q}$ ⇒ rationnels → $\{\frac{p}{q} \mid p, q \text{ et } q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ ⇒ réels → everything else

Notations ⇒ Soit E ensemble on note

E^* ⇒ éléments non nuls de E

E_+ ⇒ " + ou nuls de E

E_- ⇒ " − ou nuls de E

Exemples : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

PDV inverse

→ "Appartenance"

Si un élément appartient à l'ensemble A

↳ x appartient à A

→ $x \in A$

↳ si x appartient pas à A

→ $x \notin A$

Exemple :

$1 \in \{0; 1; 2; \dots; 6\}$

$2 \notin \{0; 3; 1; 4 \dots; 6\}$

Faux $\in$ {Vrai; Faux}

Ensembles égaux :

2 ensemble A et B = si only si all élém. ⇒ is in both $A = B$

in un ensemble → order dgaf
ce qui compte c'est le contenu
for répét. → répét don't count

$\{1; 1; 1\} = \{1\}$

Intervalle réel ⇒ ensemble défini entre 2 bornes inf. & superieur → compris bet. bornes

• closed, bornes en fait partie

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

• open, bornes not a part of it

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

• half-open, mix des 2 précédents

$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Rem. borne inf can = $-\infty$ & sup. = $+\infty$

Exemple : $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ ⇒ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

never included bcs infini...

$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ ⇒ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Sous-ensembles :

Déf. : L'ensemble B est un sous-ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble A ONLY IF all elements sont aussi des éléments de A. B est inclus dans A

$B \subseteq A$

en maths $\Rightarrow$ $B \subseteq A \iff \forall x \in B, x \in A$

Propriétés :

* For any A est son propre sous-ensemble A, $A \subseteq A$

** " , $\emptyset \subseteq A$

et donc si $A = \emptyset$ $\emptyset \subseteq \emptyset$

*** $A = B \iff A \subseteq B$ & $B \subseteq A \Rightarrow$ [principe de double inclusion]

Déf. : Si $B \subseteq A$ & $B \neq A$, on dit que B est strictement inclus dans A

on note $B \subset A$ ou $B \subsetneq A$

B est un sous-ensemble propre de A

Remarques : Si $B \subsetneq A \Rightarrow B \subseteq A$

Exemples :

$A = \{1; 2; 3\}$

$\Rightarrow$ 1 is an elem. de A $\rightarrow 1 \in A$

$\cancel{1 \subseteq A}$ car $1 \neq$ sous-ensemble de A

$\rightarrow \{1\}$ = sous-ensemble de A

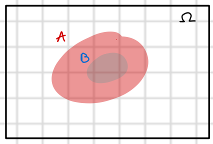
$\{1\} \subseteq A$

$\cancel{\{1\} \in A}$ $\rightarrow$ n'appartient pas à A

Visualisation :

– Diagramme d'Euler – reflète les relat. as wished bet ensemble représentés

Exemples : for 2 ensembles A & B tel que $B \subseteq A$



for 2 ensembles A & B ont aucun éléments en commun

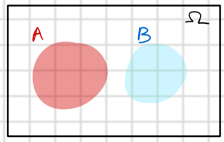
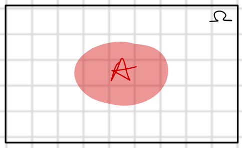
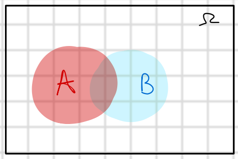


Diagramme de Vennes – représente une figure sur laquelle each possibilités de chevauchements apparaît 1 & only 1 fois

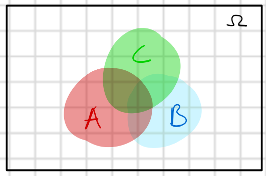
Exemples : Pour un ensemble A



Pour 2 ensembles A et B



Pour 3 ensembles A, B et C

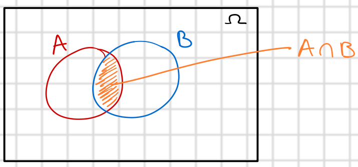


Opérations :

Déf. : Intersection de A & B $\Rightarrow A \cap B$

= ensemble des éléments in A & B

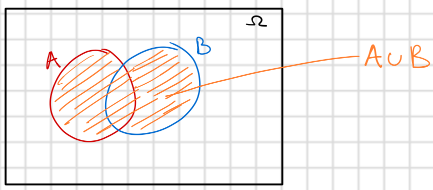
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \in B\}$



Déf. : Union ou réunion de A & B $\Rightarrow A \cup B$

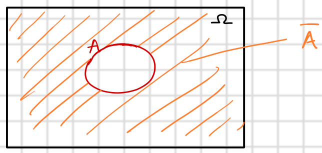
= ensemble des éléments appartenant à A ou à B ou aux 2

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



Déf. : Complément absolu de A est l'ensemble des complémentaire élément de Ω qui ne sont pas dans A

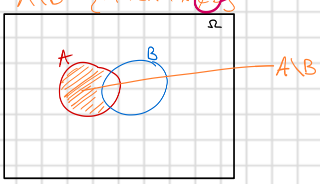
$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$



Déf. : Différence entre A & B $\Rightarrow A \setminus B$

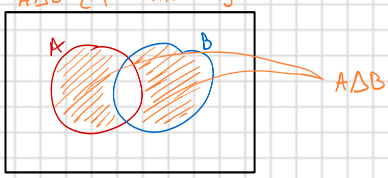
"Sauf B" ou "A privé de B" $\rightarrow$ ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \notin B\}$ $\rightarrow x \notin B$



Déf. : différence symétrique de A & B $\Rightarrow A \Delta B$

$A \Delta B = \{x \mid \text{soit } x \in A, \text{ soit } x \in B\}$ ou $A \oplus B$



Propriétés : · $\bar{A} = \Omega \setminus A$

· $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Propriétés $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Associativité :

Propriétés : Associative

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ union

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ intersection

Remarques : on peut omettre les ( )

↳ $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Propriétés : Commutativité

$A \cup B = B \cup A$ union

$A \cap B = B \cap A$ intersection

Propriétés : Distributivité

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propriétés : Loi de De Morgan

(i) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 1ère

(ii) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 2ème

Parallèle entre logique & ensemble

A and B	$A \cap B$
A or B	$A \cup B$
A xor B	$A \Delta B$
!A	$\bar{A}$

Propriétés : Absorption

(i) $A \cup (A \cap B) = A$

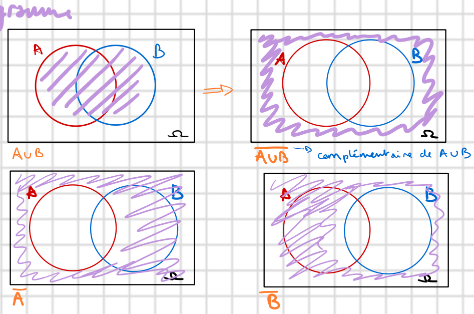
(ii) $A \cap (A \cup B) = A$

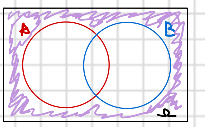
Exemples : Vérif. 1ère loi de De Morgan

Truth tab

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Diagram





Équivalence :

$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$

$\iff x \notin A$ & $x \notin B$

$\iff x \in \bar{A}$ & $x \in \bar{B}$

$\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

Ensemble des partis :

Définition : Pour un ensemble A donné, l'ensemble des parties de A, noté $P(A)$ ⇒ ensemble contenant all sub-ensembles de A

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

Exemple : $A\{oui; Non\}$

$P(A) = \{\{\emptyset\}; \{oui\}; \{Non\}; \{oui; non\}\}$

Propriétés : For any ensemble A, we always have que $\emptyset \in P(A)$ et $A \in P(A)$

Théorème : Soit A un ensemble fini tel que $|A| = n$

alors : $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$

Exemple : $A = \{Oui; Non\}$

donc $|A| = 2$ et $|P(A)| = 4 = 2^2$

Cardinalités :

Définition : Un ensemble A est fini si son nb d'éléments (distinct) est un entier naturel. Else A est infini

Définition : Si A est fini, le cardinal de A

$|A|$ = le nb d'éléments (distinct) de A

Remarques : Noted $|A| = \#(A) = Card(A)$

Exemples : ⓐ $|\{a; b; c; \ldots; z\}| = 26$

ⓑ $|\{1; 0; 1; 1;\}| = 2$

ⓒ $|\emptyset| = 0$

Produit cartésien

Définition :

Couple : On dit qu'un couple $(a; b)$ est une liste ordonnée de deux éléments a et b;

Triplet : Un triplet est une liste ordonnée de 3 éléments $(a; b; c)$

n-uplet : $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ est une liste ordonnée de n éléments, appelé composantes

Exemple : couple $(1; 2)$ est différent de $(2; 1)$

Propriétés : 2 n-uplet sont égaux si même éléments aux même positions

$(a; b) = (c; d) \iff a = c$ & $b = d$

Définition : $A \times B$ ⇒ produit cartésien de 2 ensembles

A et B et l'ensemble de tous les couple $(a; b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$

$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$

Exemple : Pour $A = \{0; 1\}$ et $B\{x; y; z\}$

alors $A \times B = \{(0; x); (0; y); (0; z); (1; x); (1; y); (1; z)\}$

↳ cardinal = A · B

Théorème : Si $|A| = n$ et $|B| = m$ alors $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$

Remarque : On peut généraliser la notion de produit cartésien à n ensemble $A_1; A_2; \ldots; A_n$:

$A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) \mid a_i \in A_i ; i \in \{1; \ldots; n\}\}$

$= \{(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n) \mid a_1 \in A_1; a_2 \in A_2; \ldots; a_n \in A_n\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ Lorsque tous les A_i sont tous égaux disons $A_1 = A_2 \ldots A_n = A$ alors $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n$ → puissance de A

Exemples : · L'ensemble de tous les couples de nb entier, s'écrit : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$

· Ensemble de quadruplet de nb réels s'écrit : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (a b c d $\in \mathbb{R}^4$) ⇒ $\mathbb{R}^4$

· $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{N} \iff (a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $d \in \mathbb{N}$

Chapitre 2 Les relations :

2.1 Une relation :

Définition : Une relat. de l'ensemble vers l'ensemble B est un sous-ensemble du prod. cartésien $A \times B$

Si R est une relat. de A vers B, & si le couple (a,b) appartient à la relat. On dit que a est en relat avec b $(a,b) \in R$ ou aRb

De même si a n'est pas en relat. avec b $(a,b) \notin R$ ou $a \not R b$

Exemple : a) $A = \{$étudiants/es de l'école$\}$
$B = \{$cours donnés while sem.$\}$

L'ensemble $R = \{(a,b) \in A \times B \mid$ l'étudiant/e a suit le cours b$\}$ est une relation $A \to B$

b) $A = \{$couleurs$\}$
$B = \{$pays$\}$

On peut déf. la relat. $R \Rightarrow R\{(a,b) \in A \times B \mid$ la couleur a apparaît dans le drapeau du pays b$\}$

Ainsi, (rouge, Suisse) $\in R$ & (vert, Espagne) $\notin R$

c) $A = B = \mathbb{Z}$

On définit $R \Rightarrow R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$

Ainsi, $(2,3) \in R$ & $(2,-3) \notin R \Rightarrow 2 \leq 3$ & $-2 \not\leq -3$

2.4 Complémentaires & inverses

Définition : La relation complémentaire d'une relation R de A vers B est aussi une relation de A vers B

$\overline{R} = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \notin R\}$
$= (A \times B) \setminus R$

Définition : La relation inverse d'une relation R de A vers B est une relation de B vers A

$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$

Exemple : Soit $A = \{$personnes$\}$ est une relat. R sur A tel que

$\overline{R} = \{(a,b) \in A^2 \mid$ a n'est pas l'enfant de B$\}$

$R^{-1} = \{(b,a) \in A^2 \mid$ b est le parent de a$\}$

2.5 Composition

Définition : Soit R une relation de A vers B, et S une relation de B vers C. La composition de R par S, notée $S \circ R$ est une relation telle que

$$S \circ R = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ avec } (a,b) \in R \ \& \ (b,c) \in S\}$$

Exemples : ① $A = \{$étudiants/es à l'école$\}$
$B = \{$cours dispensés$\}$
$C = \{$enseignants$\}$

$R = \{(a,b) \in A \times B \mid$ l'étudiant a suit le cours b$\}$

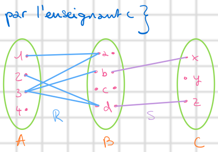
$S = \{(b,c) \in B \times C \mid$ les cours b sont donnés par l'enseignant c$\}$

Alors $S \circ R = \{(a,c) \in A \times C \mid$ l'étudiant a suit (au moins) un cours donné par l'enseignant c$\}$

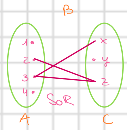
② $A = \{1,2,3,4\}$
$B = \{a,b,c,d\}$
$C = \{x,y,z\}$

$R = \{(1,a),(2,d),(3,b),(3,d)\} \subseteq A \times B$

$S = \{(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)\} \subseteq B \times C$



$S \circ R = \{(2,z),(3,x),(3,z)\} \subseteq A \times C$

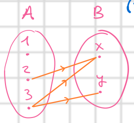


2.2 Graphe d'une relation :

Définition : Pour A & B finis, on peut représenter une relat. de A vers B par un graphe (biparti)

- les éléments de A & B contiennent les sommets du graphe
- each couple (a,b) tel que $(a,b) \in R$ est représenté $a \to b$ (un arc)

Exemple : $A = \{1,2,3\}$; $B = \{x,y\}$
$R = \{(2,x);(3,x);(3,y)\}$



2.3 Matrice d'une relation :

Définition : Pour A & B finis, on peut représenter une relat. de $A \to B$ par une matrice $M(R)$:

- les lignes de $M(R)$ correspondent aux éléments de A
- les colonnes de $M(R)$ correspondent aux éléments de B
- en pos. (a,b) on aura $\begin{cases} 1 \text{ si } (a,b) \in R \\ 0 \text{ si } (a,b) \notin R \end{cases}$

Exemple : a) Avec la même mat. que l'exemple précédent :
$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Relation sur un ensemble

Définition : Une relation sur un ensemble A est une relation de A vers A, c-à-d, un sous-ensemble de $A \times A = A^2$

Exemple : ⓐ $A = \{$pays$\}$ $R = \{(a,b) \in A^2 \mid$ les pays a & b sont limitrophes$\}$

(Suisse, France) $\in R$ & (Italie, Espagne) $\notin R$

ⓑ $A = \mathbb{Z}$ & $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$ est une relation sur A

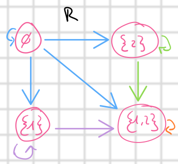
$(2,3) \in R$ & $(3,2) \notin R$

Remarque : Dans ce cas à la place d'un graphe bi-part, on représente la relation à l'aide d'un graphe orienté

- Les éléments de A $\Rightarrow$ sommet du graphe
- For each $(a,b) \in R$, on fait une $\xrightarrow[\text{arc}]{}$ de a vers b ou de a vers lui même si $b = a$

Exemple : $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} = P(\{1,2\})$

et $R = \{(S,T) \in A^2 \mid S \subseteq T\}$



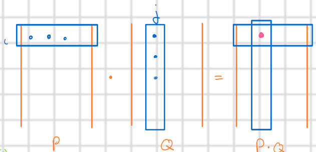
2.5 Composition

Matrice d'une composition

Si R relation de A vers B et S relation de B vers C, de matrices $M(R)$ & $M(S)$, alors on peut déterminer la matrice $M(S \circ R)$ à partir du produit des deux matrices précédentes

"Rappel" : Produit de matrices "règle" ligne × colonne

Si P & Q sont 2 matrices, alors l'élément en position (i,j) de $P \cdot Q$, noté $(PQ)_{ij}$, s'obtient en sommant les produits des éléments correspondant de la ligne i et P et de la colonne j de Q



$$M(R) = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad M(S) = \begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

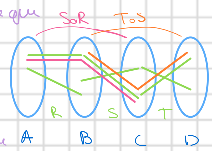
Calculer $M(R) \cdot M(S) =$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \Rightarrow$ = minimum 1 et donc le devient
$\Rightarrow$ représente le nb de possibilités

Proposition : Pour obtenir $M(S \circ R)$, on fait le produit $M(R) \cdot M(S)$ puis on remplace tous les éléments superieur à 1, par 1.

Exemple : À partir de $M(R) \cdot M(S)$ on déduit $M(S \circ R) =$
$$\begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Remarque : On peut composer plus de 2 relations.
Par exemple si $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ et $T \subseteq C \times D$
On peut avoir $T \circ S \circ R$ telle que
$T \circ S \circ R = (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$
car la composition est associative.

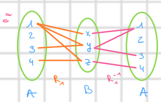


On peut composer une relation $R \subseteq A^2$ avec elle-même
On définit alors les puissances de R

$R \circ R = R^2$; $R \circ R \circ R = R^3$

$\underbrace{R \circ R \circ R \ldots \circ R}_{n \text{ fois}} = R^n$

Exemple : La composition $R_1^{-1} \circ R_1$ est une relation sur A définie par $\{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(4,4)\}$



Ex 2.8
$\hookrightarrow$ exemple

selon R de 2.2 $\to R^{-1}$
$\to$ graphe & matrice

$A = \{1,2,3,4\}$ & $B\{x,y,z\}$

a) $R_1 = \{(1,y),(1,z),(3,y),(4,x),(4,z)\}$

b) $R_2 = \{(1,x),(2,y),(3,z),(4,x),(4,y),(4,z)\}$

$$M(R_1^{-1}) = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad M(R_2^{-1}) = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x & 1 & 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Chapitre 2 Les relations :

2.6 Propriétés

On considère des relations sur un ensemble A, on s'intéresse aux propriétés suivantes :

★ Refléxivité

Une relation R sur A l'est, si $(a,a) \in R$ pour tout $a \in A$

Exemple :

a) La relation d'inclusion (sur une collection d'ensembles) est reflexive car $S \subseteq S$ pour tout ensemble S

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2y\}$ n'est pas reflexive car $(0,0) \notin R$
En revanche $R = \{(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid x < 2y\}$ est reflexive

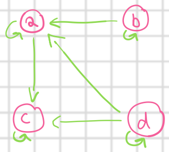
Propriétés : Soit A un ensemble fini :

- Une relation R sur A est reflexive si only si la diagonale de $M(R)$ contient only 1

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Une relation R sur A est reflexive si only si chaque sommet du graphe de R est relié à lui-même

Exemple : Soit $A = \{a, b, c, d\}$
On voit sur $M(R)$ & son graphe est reflexive



★ Symétrie

Une relation R sur A est symétrique si $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ pour tous $a, b \in A$

Exemples : a) $R = \{$pays limitrophes$\}$ sur l'ensemble $A = \{$pays$\}$ est une relation symétrique

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2y\}$ n'est pas symétrique car $(1,2) \in R$, mais $(2,1) \notin R$

Propriétés : Soit A est un ensemble fini

- Une relation est symétrique if only if la matrice $M(R)$ est symétrique (par rapport à sa diagonale).
- Une relation est symétrique if only if pour chaque sommet on a soit 2 flèches opposées soit aucune pour chaque couple de sommet

$$M(R) = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Proposition : Une relation R sur A est symétrique si $R^{-1} = R$

Exemple : la relation $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \geq 0\}$ est symétrique car $R^{-1} = R$ (voir ex. 2.12)

★ Antisymétrie

Une relation de R sur A est dite asymétrique si $(a,b) \in R$ & $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$ pour tout $a, b \in R$

Exemple

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ est asymétrique car $(x,y) \in R$ & $(y,x) \in R$
$\Leftrightarrow x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow x = y$

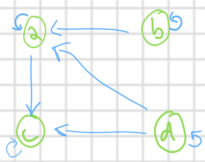
b) Relation d'inclusion (sur une collec. d'ensembles) est asymétrique car si $A \subseteq B$ & $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 \leq y^2\} \neq$ asymétrique car $(-1, 1) \in R$ & $(1,-1) \in R$ $-1 \neq 1$
En revanche si $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ est asymétrique car $(x,y) \in R$ & $(y,x) \in R$
$x^2 \leq y^2$ & $y^2 \leq x^2 \Rightarrow x = y$ $x, y \geq 0$

Propriétés : Soit A un ensemble fini, une relation R sur A est asymétrique R antisym. si $(a,b) \in R$ & $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$
si est seulement si la $M(R)$ a aucun 1 sur sa diagonale et qu'il y a au plus 1 arc entre toute paires de sommets distincts

Exemples : ①

$$M(R) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



$$M(R) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

★ Transitivité

Une relation R sur A est transitive si $(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Exemple ⓐ relat. $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est transitive
Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ alors $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x,z) \in R$

ⓑ $R = \{(a,b) \in \{\text{pays}\}^2 \mid a$ & b sont limitrophes$\}$

$R \neq$ transitive car $(FR, CH) \in R$ & $(AU, CH) \in R$ mais $(FR, AU) \notin R$

Théorème : Une relation R sur A est transitive ssi $R^2 \subseteq R$

$\Rightarrow$ Soit $(a,c) \in R^2$, $R \circ R$, alors par définition, il existe $b \in a$ tel que $(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R$.
Comme R est transitive, on en déduit que $(a,c) \in R$ et donc $R^2 \subseteq R$

$\Leftarrow$ Montrons que $R^2 \subseteq R \Rightarrow R$ est transitive $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (!B \Rightarrow !A)$
On montre plutôt que $\underset{!B}{R \text{ non transitive}} \Rightarrow \underset{!A}{R^2 \not\subseteq R}$ car c'est équivalent
Si R != transitive alors il existe $a, b, c \in A$ tels que $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R$ mais $(a,c) \notin R$
Or on a $(a,c) \in R^2$ car $\exists b \in A$ tel que $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R$ car b est intermédiaire
On a trouvé (a,c) tel que $(a,c) \in R^2$ et que $(a,c) \notin R$ donc $R^2 \subseteq R$

Exemple : ⓐ $A = \{1,2,3,4\}$ $R = \{(1,1), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4)\}$
$M(R)^2 = M(R) \times M(R)$

$$M(R) = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \times \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad M(R)^2 \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ici, $M(R)^2 = M(R \circ R) = M(R^2)$ donc R est transitive

2.7 Relations d'ordre

Définition : Une relation R sur A est une relation d'ordre ssi elle est simultanément

- ☆ Réflexive si aRa, pour tout $a \in A$
- ☆ Antisymétrique si aRa, et $a \neq b$, dans $b \not R a$
- ☆ Transitive si aRb & bRc, alors aRc

Exemples : a) La relation $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre
b) La relation $\subseteq$ sur une collection d'ensemble est une relation d'ordre
c) La relation $=$ sur tout est une relation d'ordre

Définition : Si R est une relation d'ordre sur A, 2 éléments $a, b \in A$ sont dit comparables si a aRb ou bRa

Exemples : a) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Tous les couples d'éléments car soit $a \leq b$, soit $b \leq a$
b) La relation $\subseteq$ sur une collection d'ensembles. Si A, B sont des ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$, alors on n'a : ni $A \subseteq B$, ni $B \subseteq A$.
Donc A et B ne sont pas comparables.

Définition : ordre partiel & ordre total

- Total = si chaque paire d'éléments de A sont comparables
- Partiel = s'il existe (au moins) 2 éléments a et b non-comparables

Exemples : La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est un ordre total
La relation $\subseteq$ sur une collection d'ensembles est un ordre partiel

Propriétés : Soit A un ensemble fini.
une relation d'ordre R sur A est un ordre total ssi la matrice $M(R)$ ne contient pas deux 0 en symétrie par rapport à sa diagonale.

Exemples : $M(R_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to R_1$ peut être un ordre total

$M(R_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to R_2$ ne peut être un ordre total

Chapitre 2 Les relations :

2.8 Diagramme de Hasse

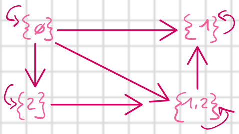
ass hehehe...

Définition : Le diagramme de Hasse d'un ordre (partiel ou total), est une simplification du graphe de la relation où :

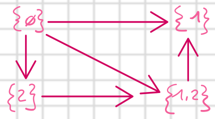
- ☆ Les boucles ne sont pas représentées
- ☆ Les arcs se déduisent par transitivité ne sont pas représentés
- ☆ On oriente pas le graphe, mais on adopte la convention suivante : si aRb, alors a est placé en dessous de b sur le diagramme.

Exemples : La relation R d'inclusion sur $A = \mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

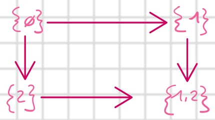
① Graphe de R =



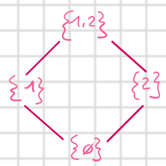
② On enlève les loops



③ On enlève les arcs transitifs



④ On oriente vers le haut et on enlève les flèches



2.9 Relation d'équivalence

Définition : Une relation R sur A est une relation d'équivalence si elle est simultanément :

- Réflexive : aRa pour tout $a \in A$
- Symétrique : aRb, alors bRa
- Transitive : si aRa et aRb alors aRc

Remarque : Deux éléments $a, b \in A$ sont dits équivalents si aRb (et donc bRa) pour une relation d'équivalence R

On note alors : $a \equiv b$

Exemple :

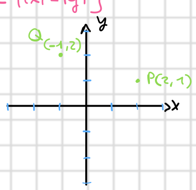
a) $A = \{$ensemble des mots de la langue fr.$\}$, et $R = \{(a,b) \in A^2 \mid a$ & b ont le même nb de lettres$\}$

R = relation d'équivalence

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y$ ou $x = -y\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y|\}$

R = relation d'équivalence

c) $R = \{(P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \max(x_1,y_1) = \max(x_2,y_2)\}$



$\max(2,1)$ et $\max(-1,2) = 2$ donc $(P,Q) \in R$

Soit $P(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ alors $\max(x_1,y_1) = \max(x_1,y_1)$

donc $(P,P) \in R \Rightarrow$ Réflexive

Soit $P(x_1,y_1)$ et $Q(x_2,y_2)$ on suppose que $(P,Q) \in R$

Alors $\max(x_1,y_1) = \max(x_2,y_2) \iff \max(x_2,y_2) = \max(x_1,y_1)$

$\Rightarrow R$ est symétrique

Soit $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2), S(x_3,y_3)$ si $(P,Q) \in R$ & $(Q,S) \in R$ alors $(P,S) \in R$

$\max(x_1,y_1) = \max(x_3,y_3)$

Donc (P,S) est transitive

$\Rightarrow R$ est bien une R d'équivalence

2.10 Classe d'équivalence

Définition : Pour une relation d'équivalence R sur A, la classe d'équivalence de $a \in R$ et l'ensemble des éléments de A équivalents à a

On la note : $[a]_R$ ou simplement $[a]$

$$[a]_R = \{s \in A \mid sRa\}$$

Exemple : $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x$ & y ont la même parité$\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \mid x\%2 == y\%2\} \Rightarrow R$ d'équivalence

R possède 2 classes d'équivalence :

$[1]_R = \{-3, -1, 1, 3, \dots\} = [-1]_R = [3]_R = \dots$ impaires

$[2]_R = \{-2, 0, 2, 4 \dots\} = [0]_R = \dots$ paires

Propriétés : Si équi. R sur A et $a, b \in A$

- Si a & b sont équi. (c-à-d aRb), alors $[a]_R = [b]_R$
- Si a & b sont pas équi. (c-à-d $a \not R b$), alors $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Autrement dit une classe d'équi. sont soit égales, soit disjointes

Exemples : a) $R = \{(P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \max(x_1,y_1) = \max(x_2,y_2)\}$

- $[P]_R = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x,y) = 2\} = [Q]_R$
- $[S]_R = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x,y) = 1\}$
- $[O]_R = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x,y) = 0\}$

Il existe une infinité de classe équi. pour R.
Classes d'équi. $\Rightarrow$ disjointes

Définition : Une partition d'un ensemble $A \Rightarrow$ décomposition de A en sous-ensembles disjoints

Exemples : La famille ($\{$paire$\}$, $\{$impaires$\}$) est une partition de $\mathbb{Z}$

Propriétés : Si R est en relation d'équi. sur A, alors l'ensemble des classes d'équi. de R forme une partition de A

Exemples : $A = \{1,2,3,4\}$ et R $(M(R)) \Rightarrow$

$$M(R) = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On a les classes d'équi.

$$\left.\begin{array}{l} [1]_R = \{1,4\} = [4]_R = A_1 \\ [2]_R = \{2,3\} = [3]_R = A_2 \end{array}\right\} \text{que } 2$$

On vérifie bien que (A_1, A_2) est une partition de A car

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 = A$

Chapitre 3 Les fonctions :

3.1 Notions de bases

Définition : Soit A & B, deux ensembles (non-vides). Une fonction de A vers B (ou de A dans B) est une correspondance affectant exactement un élément de B à chaque élément de A. L'élément B associé à A par la fonction f est noté $f(a)$
De plus si $b \in B$ est tel que $b = f(a)$, on dit alors que :

- b est l'image de a par f
- a est une pré-image de b par f (ou antécédent)

Notation : Une fonction f de A dans B s'écrit :

- $f : A \longrightarrow B$
  $\quad a \longrightarrow f(a)$

Remarques : Un élément peut avoir une ou plusieurs pré-images, ou aucune.

3.2 Graphe de fonction

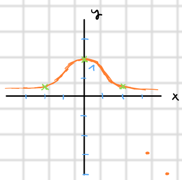
Définition : Soit $f : A \to B$, l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b = f(a)$ définit le graphe de la fonction f

Graphe de $f = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$

Cas de fonctions numériques : Lorsque A & B sont des ensembles de nombres (c-à-d $A, B \subseteq \mathbb{R}$), alors on peut identifier le graphe de $f : A \to B$ à un ensemble de pts dans le plan $\mathbb{R}^2$, dont les coordonnées (x,y) vérifient $y = f(x)$
On parle alors de représentation graphique ou de couple représentatif de f

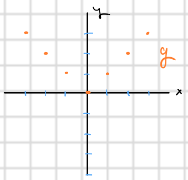
Exemple : a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \to y = e^{-x^2}$

Graphe de $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^{-x^2}\}$



b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$\quad x \to y = |x|$

Graphe de $g = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = |x|\}$



3.3 Fonctions & Relations

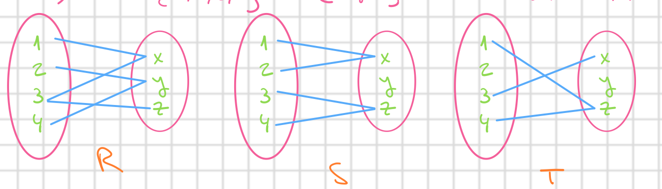
Définition : Le graphe de fonction $f : A \to B$ est un sous ensemble de $A \times B$, donc il peut être comme une relation de A vers B

Propriétés : Si on identifie une fonction à son graphe, une fonction $f : A \to B$, peut être considéré comme une relation de A vers B avec la particularité que chaque $a \in A$ est en relation avec un unique $b \in B$.

Exemples : a) La relation $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x\}$ est une fonction car each $x \in \mathbb{Z}$ est en relation avec un unique $y \in \mathbb{Z}$ $(y = 2x)$

b) La relation $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas une fonction car par exemple $x = 1$ est en relation avec $y = 1$ & $y = -1$ (donc 2 éléments)

c) Soit $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{x,y,z\}$ On a les relations R, S, T



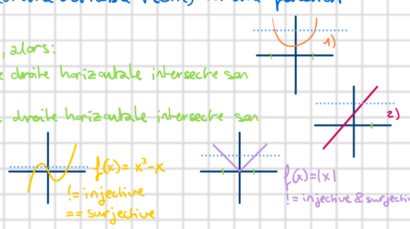
- R n'est pas une fonction car 3 est en relat. avec x & z
- S est une fonction
- T n'est pas une fonction car 2 a pas d'image

Cas des fonctions réelle (3.7)

Définition : Une fonction réelle (d'une variable réelle) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit f une fonction réelle, alors :

1) f est injective si only si toute droite horizontale intersecte son graphe en au plus un pt
2) f est surjective si only si toute droite horizontale intersecte son graphe en au moins un pt



Remarque : L'injectivité / surjectivité d'une fonction f dépend du choix de A (domaine de déf) et B (codomaine)

3.4 Domaine & image

Définition : Soit $f : A \to B$
L'ensemble A est appelé le domaine de définition de f
L'ensemble B est appelé le codomaine de f
L'ensemble de toutes les images des éléments de A est appelé l'image de f. On le note $Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

Plus généralement, pour tout $M \subseteq A$, on peut définir l'image de M pour $f(M) = \{f(a) \mid a \in M\} \subseteq f(A)$

Pour tout $T \subseteq B$, on définit l'image réciproque de T, notée $f^{-1}(T)$
$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}$

Exemple : On considère $g : A \to B$ correspondant à la relation S de l'exemple précédent :

- Domaine de g est $A = \{1,2,3,4\}$
- Codomaine de g est $B = \{x,y,z\}$
- Image de g est $Im(g) = \{x,y\}$
- Image de $\{1,2\}$ est $f(\{1,2\}) = \{x\}$
- Image réciproque de $\{z\}$ est $g^{-1}(\{z\}) = \{3,4\}$
- Image réciproque de $\{y\}$ est $g^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

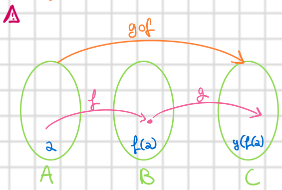
3.5 Composition de fonctions

must match !

Définition : Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$, la composition de f par g, notée : $g \circ f$ est la fonction de A dans C définie par $(g \circ f)(a) = g(f(a)), \forall a \in A$

⚠ sens de lecture ⚠

Exemple : Soit $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ déf par :
$f(x) = 2x+3$ & $g(x) = 3x+2$
Composition de f par g : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$g(f(x)) = g(2x+3)$
$= 3(2x+3)+2 = 6x+11$



Composition de g par f : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7$

Propriétés : En général la compo. de fonctions != commutative

3.6 Fonctions injectives

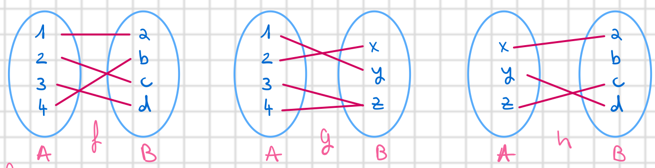
Définition : Une fonction $f : A \to B$ est injective si elle ne prend jamais 2x la même valeur. Autrement dit :

ou
- $\forall x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- $\forall x, y \in A,\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

[non B ⇒ non A
A ⇒ B]

Remarque : Une fonction injective est aussi appelé une injection

Exemples : Soit f, g, h



- f est injective
- g != injective car $g(3) = g(4) = z$ but $3 \neq 4$
- h est injective

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$ mais $-1 \neq 1$

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est injective si $x \neq y$, alors $x+1 \neq y+1$
$\quad x \to x+1$

3.7 Fonctions surjectives

Définition : Une fonction $f : A \to B$ est surjective si chaque $b \in B$ est l'image d'au moins un $a \in A$, càd si chaque $b \in B$ a au moins une pré-image

Propriétés : Une fonction $f : A \to B$ est surjective si & only si $Im(f) = B$ $(f(A) = B)$

Remarque : Une fonction surjective est aussi appelée une surjection

Exemples : a) Même f, g, h que dans l'exemple précédent.

- f est surjective car a, b, c, d admettent tous au moins une pré-image de A
- g est surjective car x, y, z admettent tous au moins une pré-image de A
- h n'est pas surjective car b n'admet pas de pré-image dans C, càd $b \notin Im(b)$ ici : $Im(h) = \{a,c,d\} \subset B\}$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$!= surjective car $3 \notin Im(f)$
de même pour tout entiers négatifs

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \longmapsto x+1$ == surjective car $\forall y \in \mathbb{Z}$ alors il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = y$
à savoir ici $x = y - 1$