Mathématiques discrètes

Jean-François Hêche

Automne 2024

heig-vd

Chapitre 1

Les ensembles

Un **ensemble** est un regroupement d'**éléments** formant un tout.

- Un ensemble est entièrement déterminé par la collection de ses éléments.
- Dans les cas les plus simples, on peut décrire un ensemble en listant explicitement tous ses éléments entre accolades (on parle alors de description **en extension**).
- EXEMPLES.
  - L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

  - L'ensemble des voyelles de la langue française s'écrit

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}, \mathrm{y}\}.$$

- Si x est un élément d'un ensemble A, on dit qu'il **appartient** à cet ensemble, qu'il en **fait partie** ou encore que l'ensemble **contient** x et on note

$$\boxed{\boldsymbol{x \in A}}.$$

- Si x n'appartient pas à l'ensemble A, on note

$$\boxed{\boldsymbol{x \notin A}}.$$

- EXEMPLES.
  - $1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  - Faux $\in$ {Vrai, Faux}
  - $2 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$
  - Peut-être $\notin$ {Oui, Non}

- La description **en extension** n'est effective que pour les ensembles contenant très peu d'éléments.
- Pour des ensembles plus conséquents il est parfois possible de lister suffisamment d'éléments afin de faire ressortir un motif clair et non ambigu.
- EXEMPLES.
  - L'ensemble des entiers positifs ou nuls et inférieurs à 100 peut s'écrire
$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, 99\}.$$
  - L'ensemble (infini) des entiers positifs pairs peut s'écrire
$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$
  - L'ensemble (infini lui aussi) des entiers impairs peut s'écrire
$$\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

- La forme privilégiée (en mathématiques) pour définir un ensemble est la description **en compréhension** obtenue en spécifiant une propriété satisfaite par tous les éléments de l'ensemble recherché et par eux seuls.
  - L'ensemble de tous les éléments x vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\boxed{\{x \mid P(x)\}}$$

    où la barre verticale $\mid$ se lit « tel que » ou « pour lesquels ».
  - L'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble A vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\boxed{\{x \in A \mid P(x)\}}.$$

heig-vd

- L'ensemble des entiers positifs ou nuls et inférieurs à 100 peut s'écrire

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 99\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 99\}.$$

- L'ensemble des entiers positifs pairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est pair et positif}\}$$

mais également

$$\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{ou} \quad \{x \mid \exists\, k \in \mathbb{N}^*, x = 2k\}.$$

- L'ensemble des entiers impairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est impair}\}$$

ou

$$\{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ou encore} \quad \{x \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = 2k+1\}.$$

Ensembles égaux

Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre. Si A et B sont égaux, on note

$$\boxed{A = B}.$$

Deux précisions importantes s'imposent :

- Dans un ensemble, l'ordre des éléments n'a pas d'importance :

$$\{1, 3, 5\} = \{3, 5, 1\}.$$

- Dans un ensemble, les répétitions éventuelles d'un même élément ne comptent pas :

$$\{\text{i, n, f, i, n, i}\} = \{\text{f, i, n, i}\} = \{\text{f, i, n}\}.$$

Quelques ensembles importants de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- L'ensemble des **entiers** relatifs est noté $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- L'ensemble des nombres **rationnels** est noté $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0\}$.
- L'ensemble des nombres **réels** est noté $\mathbb{R}$.

- En ajoutant le suffixe *, on supprime 0 des ensembles précédents :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

- En ajoutant le suffixe $_+$, on ne garde que les éléments positifs ou nuls (≥ 0) :

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$$

- En ajoutant le suffixe $_-$, on ne garde que les éléments négatifs ou nuls (≤ 0).

heig-vd

- Un **intervalle réel** est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.
- On distingue trois types d'intervalles :
  - les **intervalles fermés** lorsque les deux bornes font partie de l'ensemble :
$$\boxed{[a,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}\ ;$$
  - les **intervalles ouverts** lorsque les deux bornes sont exclues de l'ensemble :
$$\boxed{]a,b[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}\ ;$$
  - les **intervalles semi-ouverts** lorsqu'une seule des deux bornes appartient à l'ensemble :
$$\boxed{]a,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}} \quad \text{et} \quad \boxed{[a,b[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}.$$
- La borne inf. peut être égale à $-\infty$ et la borne sup. à $+\infty$ (elles ne sont jamais inclues) :
$$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[, \qquad \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[.$$

Ensemble vide et ensemble universel

- L'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément, il est noté $\varnothing$ ou, plus rarement, $\{\ \}$.

À priori les éléments d'un ensemble peuvent être de natures très diverses, ainsi

$$A = \{\text{rouge}, \{3\}, \text{vendredi}, \pi\}$$

est un ensemble tout à fait valide.

- Dans les applications les éléments pouvant appartenir à un ensemble ne sont pas quelconques mais proviennent d'un **ensemble universel** (ou **univers**), noté généralement $\boldsymbol{\Omega}$, contenant tous les éléments à prendre en compte dans un contexte donné.

L'ensemble B est un **sous-ensemble** ou une **partie** de l'ensemble A si et seulement si tous les éléments de B sont aussi des éléments de A.

- Si B est un sous-ensemble de A on dit que B est **inclus** dans A et on note

$$\boxed{\boldsymbol{B \subseteq A}}.$$

- Mathématiquement, la définition de la relation d'inclusion s'écrit

$$B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A)$$

et se lit

B est un sous-ensemble de A (B est inclus dans A) si et seulement si chaque élément x appartenant à B appartient également à A.

- Tout ensemble A est un sous-ensemble de lui-même :

$$\boxed{A \subseteq A, \qquad \forall A}.$$

- L'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble :

$$\boxed{\varnothing \subseteq A, \qquad \forall A}.$$

  et en particulier de lui-même :

$$\boxed{\varnothing \subseteq \varnothing}.$$

- Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement s'ils sont sous-ensembles l'un de l'autre (principe de double inclusion) :

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A}.$$

Appartenance vs inclusion

Les notions d'appartenance et d'inclusion ne doivent pas être confondues !

Pour l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, on a

- 1 est un élément de A : $1 \in A$;
- 1 n'est pas un sous-ensemble de A : $1 \not\subseteq A$;
- $\{1\}$ est un sous-ensemble de A : $\{1\} \subseteq A$;
- $\{1\}$ n'est pas un élément de A : $\{1\} \notin A$.

Pour l'ensemble $B = \{\{e\}, \{f, g\}, \{h\}\}$, on a

- e n'est ni un élément ni un sous-ensemble de B : $e \notin B$ et $e \not\subseteq B$;
- $\{e\}$ est un élément de B mais pas un sous-ensemble : $\{e\} \in B$ mais $\{e\} \not\subseteq B$;
- $\{\{e\}\}$ est un sous-ensemble de B mais pas un élément : $\{\{e\}\} \notin B$ mais $\{\{e\}\} \subseteq B$;
- f et $\{f\}$ ne sont ni des éléments ni des sous-ensembles de B.

Les risques de confusion et d'erreurs apparaissent principalement lorsque des ensembles sont éléments d'autres ensembles !

- Il est parfois important d'insister sur le fait que B est un sous-ensemble de A mais que B n'est pas égal à A tout entier (il existe donc au moins un élément de A qui n'est pas dans B).

  Dans un tel cas, B est dit un **sous-ensemble propre** de A. Il est alors **strictement inclus** dans A et cette situation est notée

  $$\boxed{\boldsymbol{B \subset A}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\boldsymbol{B \subsetneq A}}.$$

- Évidemment, si B est un sous-ensemble propre de A alors B est également un sous-ensemble de A :

  $$\boxed{B \subset A \Longrightarrow B \subseteq A}.$$

- ASTUCE MNÉMOTECHNIQUE. On peut rapprocher les symboles d'inclusion $\subseteq$ et $\subset$ des comparateurs $\leq$ et $<$.

heig-vd

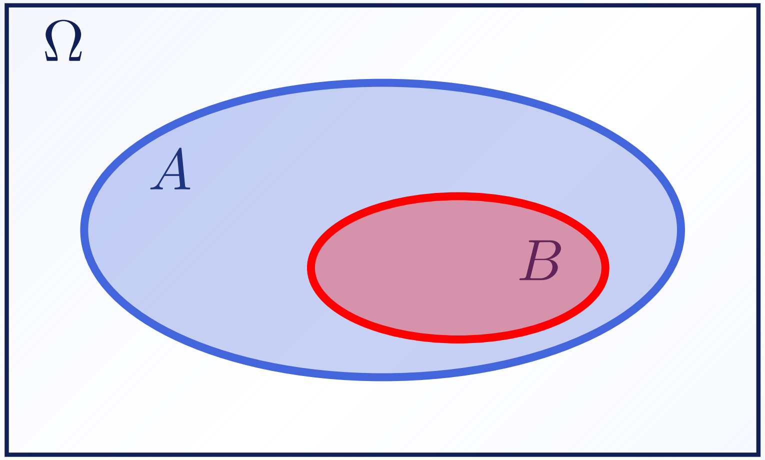
Diagrammes de Venn et diagrammes d'Euler

- Les **diagrammes de Venn** et **d'Euler** permettent de représenter graphiquement des ensembles et offrent une approche visuelle efficace pour illustrer certaines situations ou vérifier des propriétés simples.
- Dans de tels diagrammes,
  - l'ensemble universel Ω est généralement représenté par un rectangle ;
  - les ensembles étudiés sont représentés par des surfaces simples (typiquement des cercles, des ellipses ou des rectangles).
- Dans un **diagramme d'Euler**, la disposition de ces surfaces reflète les relations connues ou souhaitées entre les ensembles qu'elles représentent.
- Dans un **diagramme de Venn**, la disposition de ces surfaces est telle que chaque possibilité de chevauchement apparaît une et une seule fois.

heig-vd

Diagrammes d'Euler : Exemples

- Diagramme d'Euler pour deux ensembles A et B avec B sous-ensemble de A ($B \subseteq A$) :



- Diagramme d'Euler pour deux ensembles A et B disjoints, c.-à-d. sans aucun élément en commun :

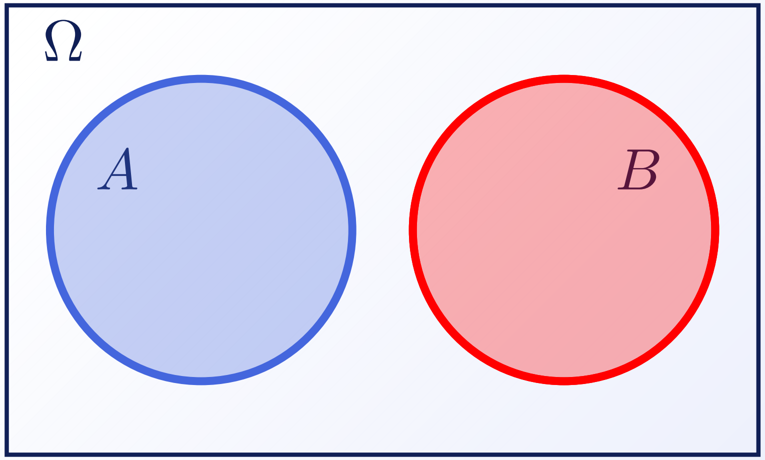
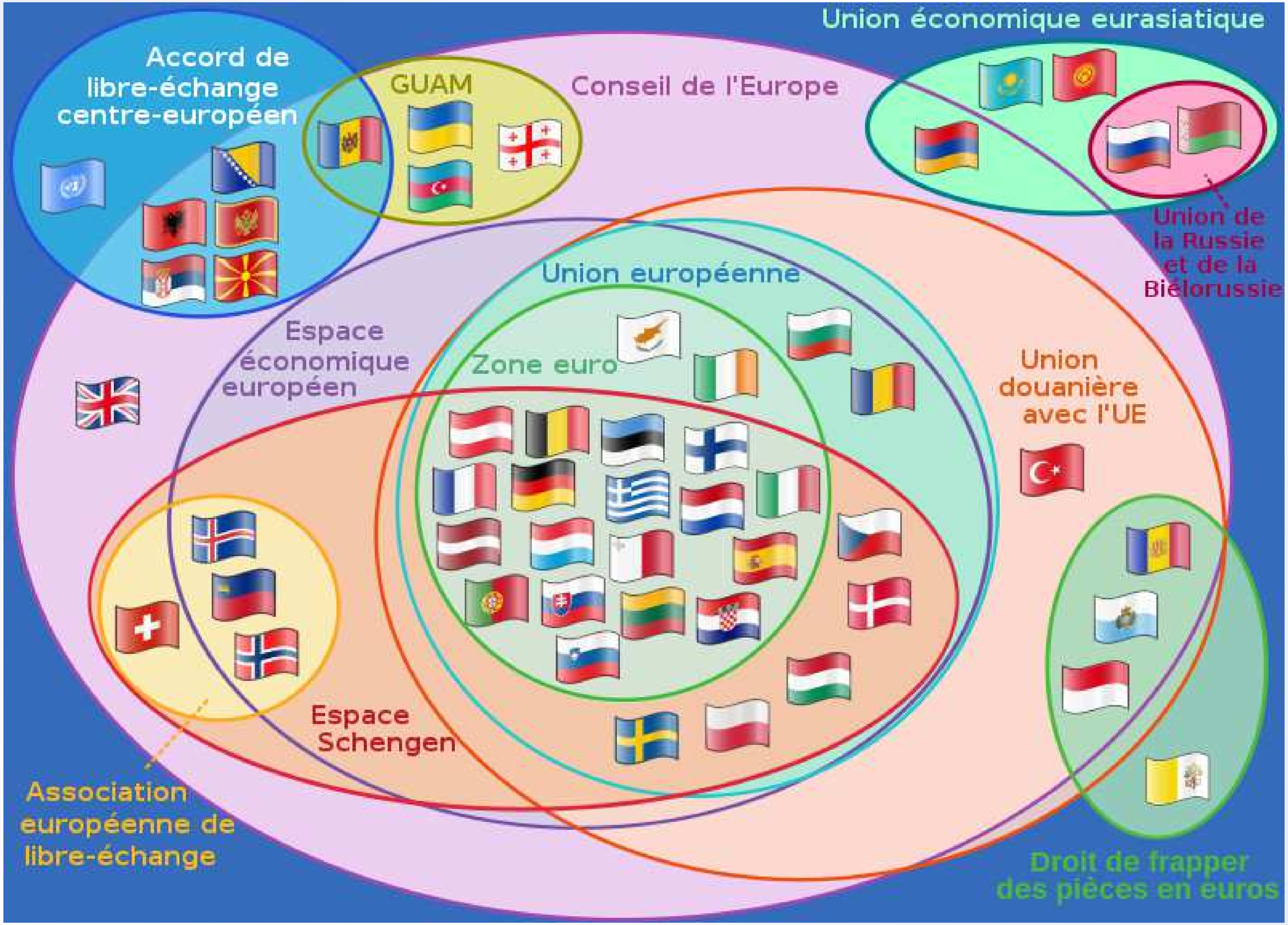


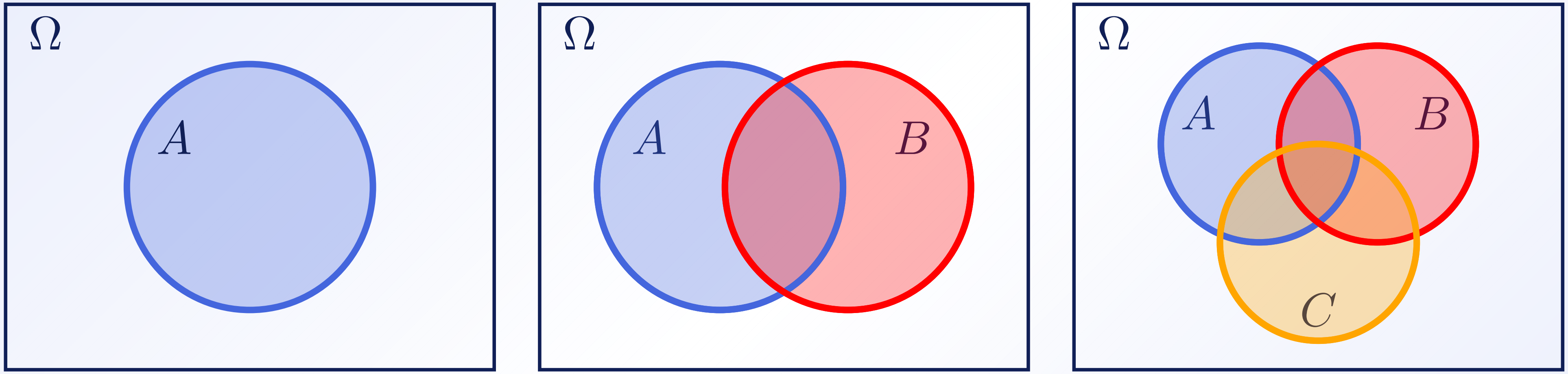
Diagramme d'Euler des entités supranationales européennes



Source : Wikimedia Commons

Diagrammes de Venn pour 1, 2 et 3 ensembles

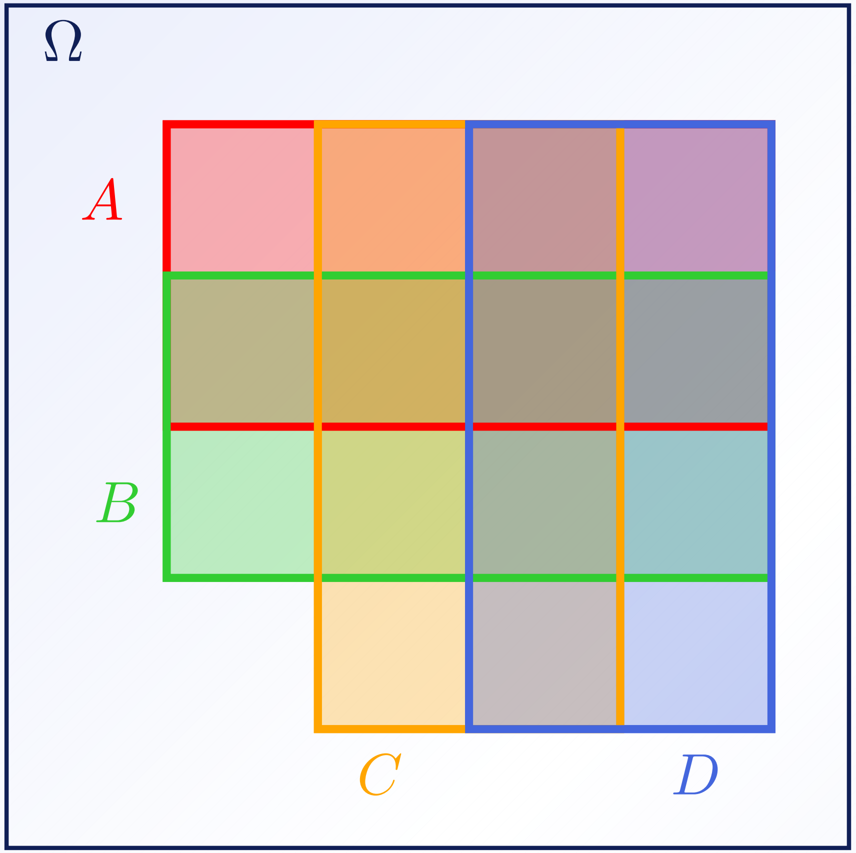
- Versions classiques des diagrammes de Venn pour, respectivement, 1, 2 et 3 ensembles :

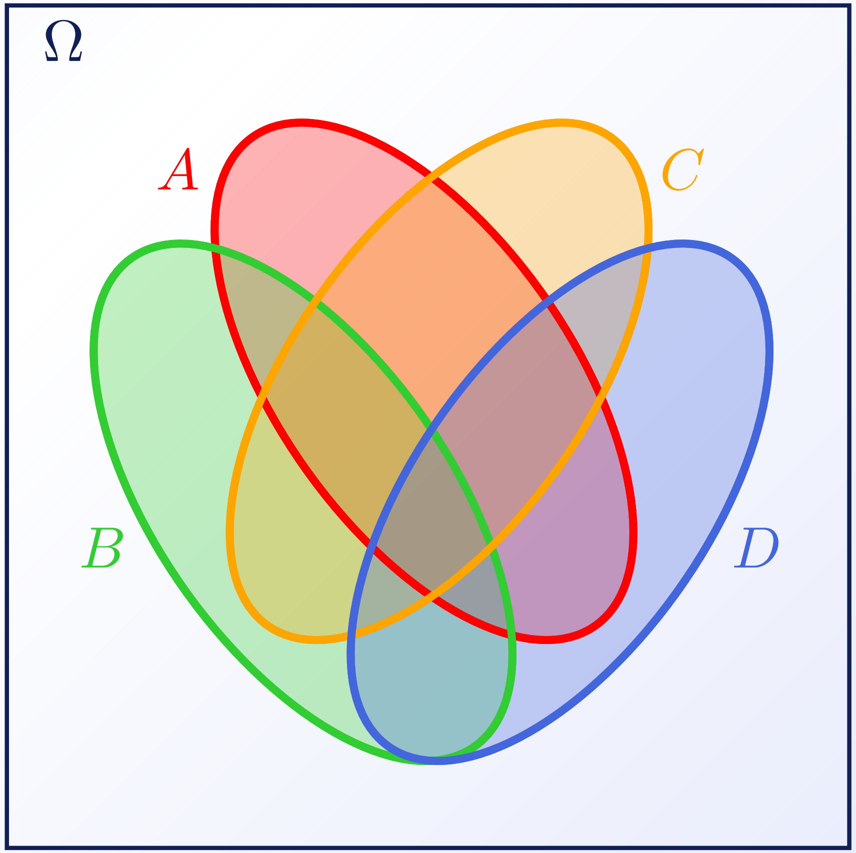


- Il est possible de construire des diagrammes de Venn pour un nombre n quelconque d'ensembles mais leur utilité devient très discutable au-delà de 3 ensembles.

  En effet, un diagramme de Venn pour n ensembles doit compter 2^n cellules car la disposition des surfaces représentant les ensembles doit être telle que chaque possibilité de chevauchement apparaisse une et une seule fois. Cette explosion exponentielle du nombre de cellules détruit la lisibilité et par conséquent l'utilité des diagrammes.

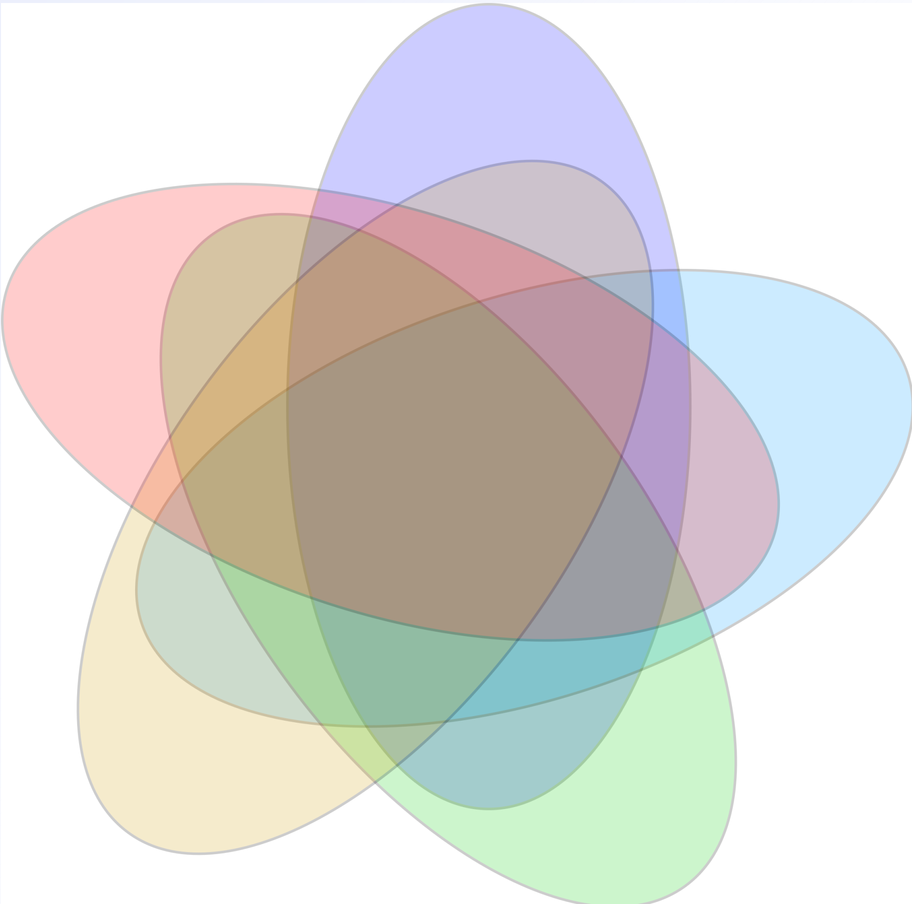
Diagrammes de Venn pour 4 ensembles



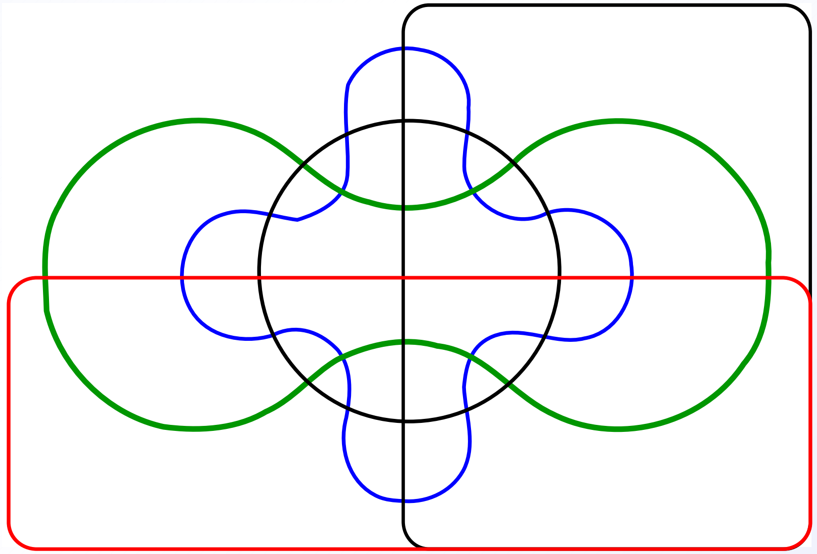


Diagrammes de Venn pour 5 et 6 ensembles

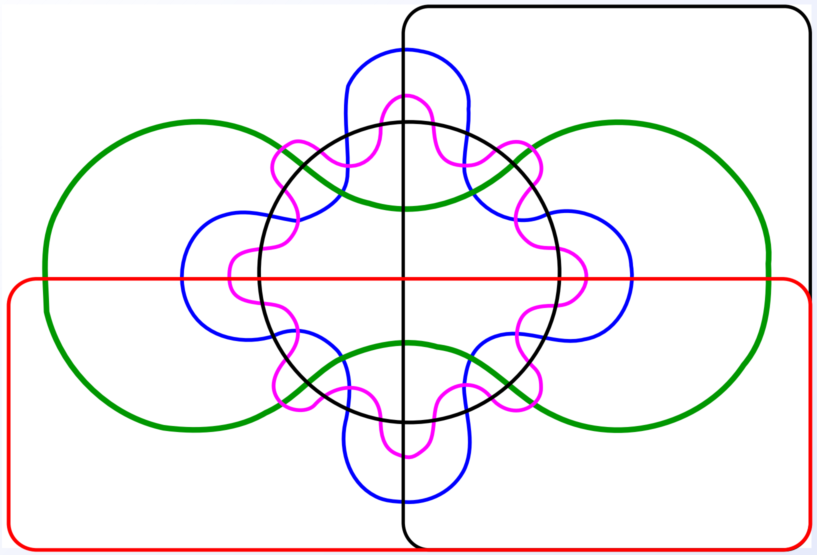
Pour le plaisir des yeux...



Source : Wikimedia Commons



Source : Wikimedia Commons



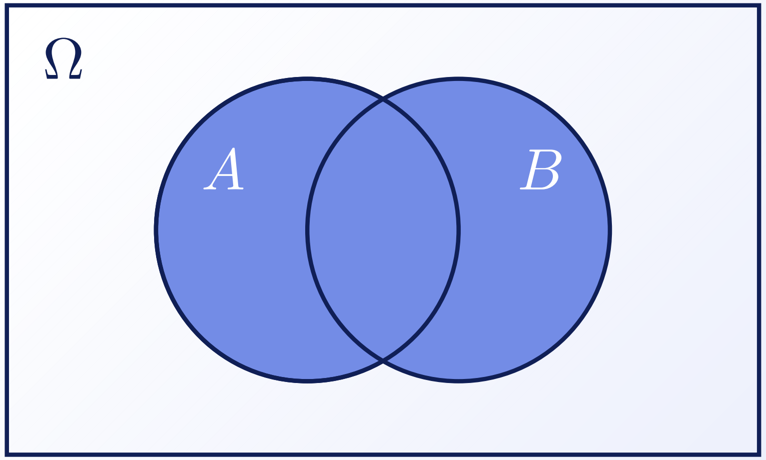
Source : Wikimedia Commons

Opérations sur les ensembles : Union

Soient A et B deux ensembles dans un univers Ω.

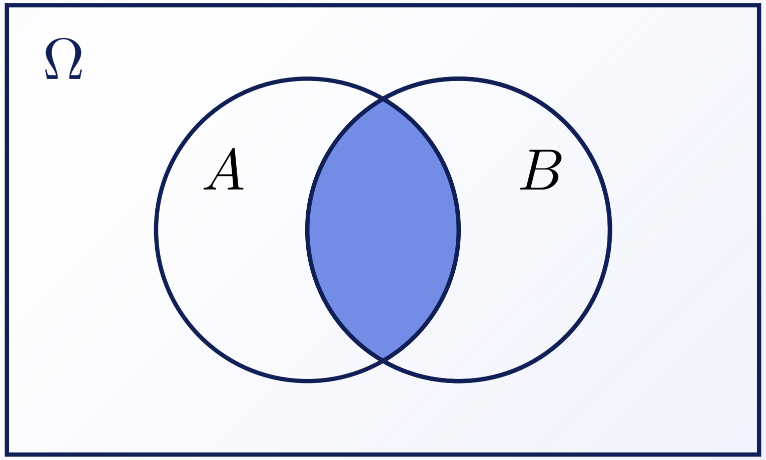
- L'**union** ou la **réunion** de A et B, notée $\boldsymbol{A \cup B}$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (voire aux deux) :

$$\boxed{\boldsymbol{A \cup B} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ ou } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}}.$$



- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B :

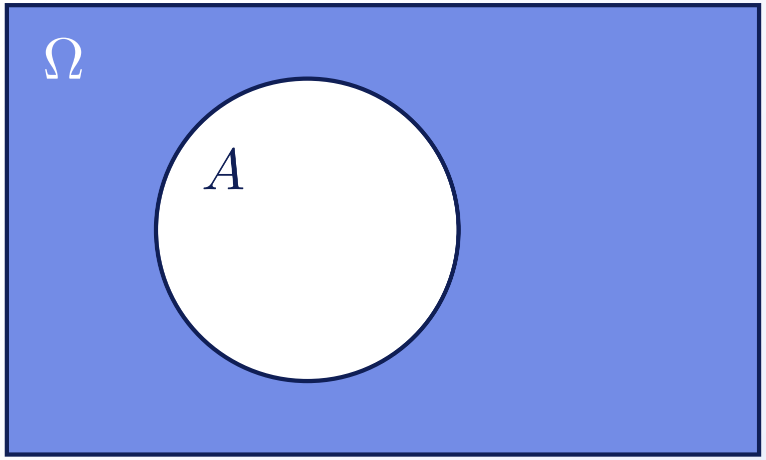
$$\boxed{\boldsymbol{A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}}}.$$



Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si leur intersection est vide, autrement dit si $A \cap B = \varnothing$.

- Le **complément** (absolu) de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de l'ensemble universel n'appartenant pas à A :

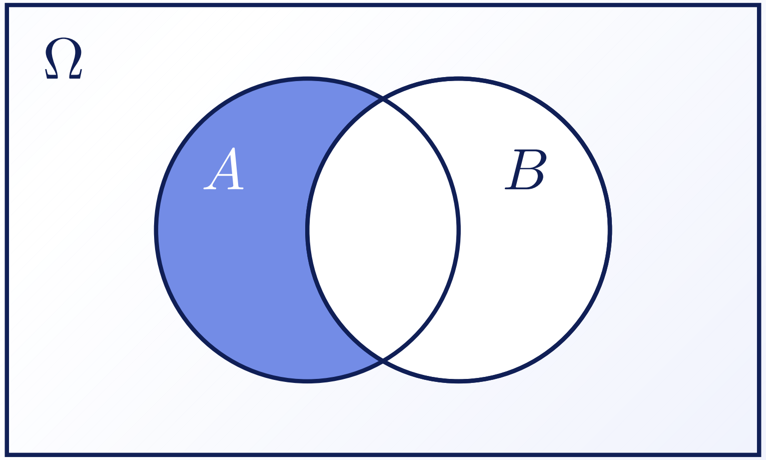
$$\boxed{\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega \mid x \notin A\}}.$$



Opérations sur les ensembles : Différence

- La **différence** entre A et B, notée $\boldsymbol{A \setminus B}$ et souvent lu « A sauf B » ou « A privé de B », est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$\boxed{\boldsymbol{A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}}}.$$



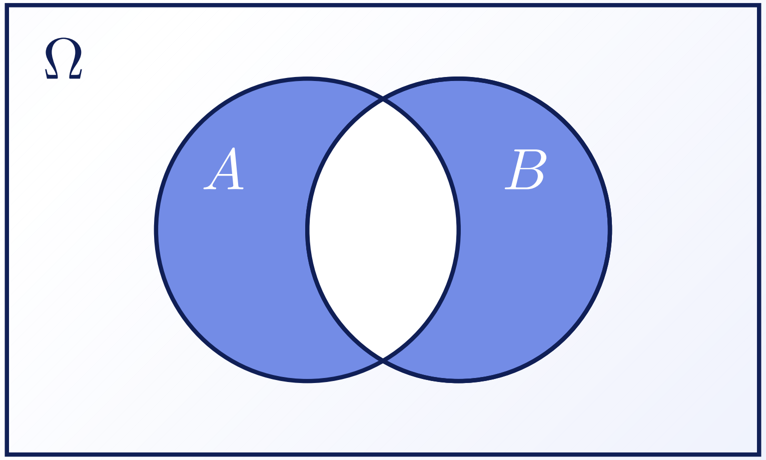
- La différence $A \setminus B$ est aussi appelée le **complément relatif** de B par rapport à A et on a

$$\boxed{\overline{A} = \Omega \setminus A} \quad \text{et} \quad \boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}.$$

Opérations sur les ensembles : Différence symétrique

- La **différence symétrique** de A et B, notée $\boldsymbol{A \triangle B}$ ou $\boldsymbol{A \oplus B}$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit A soit B (mais pas aux deux) :

$$\boxed{\boldsymbol{A \triangle B} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid \text{soit } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ soit } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}}.$$



- En utilisant les opérations précédentes, on montre facilement que

$$\boxed{A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}.$$

Les opérations ensemblistes vérifient de nombreuses propriétés et identités. Pour les trois opérations de base ($\cup$, $\cap$ et $\overline{}$) les plus importantes sont présentées ci-dessous.

Associativités

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Associativité de l'union — Associativité de l'intersection

REMARQUE. Pour les opérations associatives (comme l'union et l'intersection) le parenthésage n'est pas essentiel et une expression du style $A \cup B \cup C$ est bien définie car indépendante du parenthésage et donc de l'ordre dans lequel elle est évaluée :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Commutativités

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

Commutativité de l'union — Commutativité de l'intersection

Propriétés et identités (suite)

Distributivités

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivité de l'union par rapport à l'intersection
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivité de l'intersection par rapport à l'union

Lois de De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
1re loi de De Morgan	2e loi de De Morgan

Absorptions

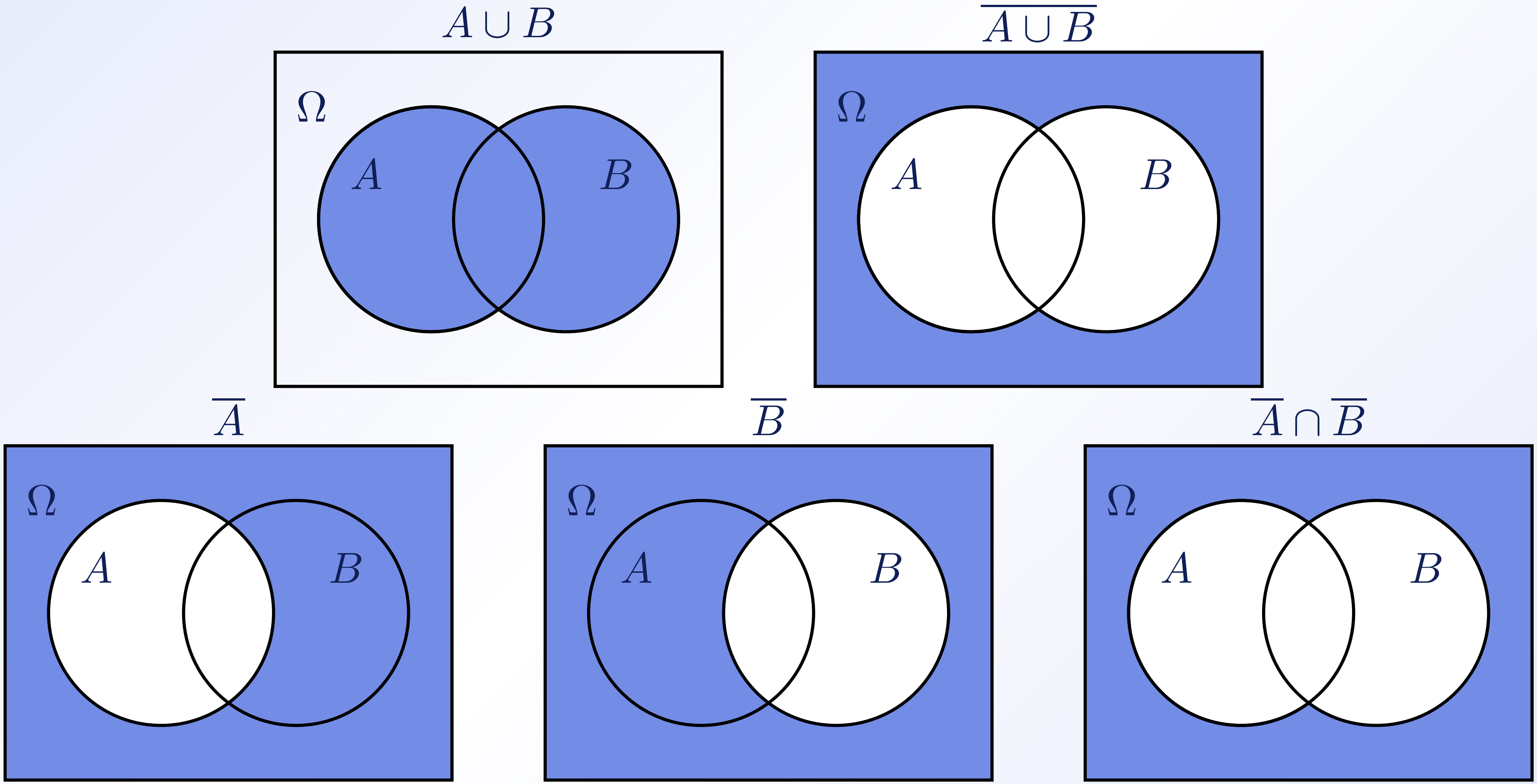
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
1re loi d'absorption	2e loi d'absorption

- Ces propriétés et identités se vérifient facilement à l'aide de diagrammes de Venn ou en montrant (à l'aide de raisonnements logiques) que chaque côté d'une égalité est un sous-ensemble de l'autre.
- On peut aussi recourir à des **tables d'appartenance** pour vérifier une identité.
- À titre d'exemple, pour la première loi de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) on a la table d'appartenance.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

Les colonnes 4 et 7 de cette table étant identiques, la première loi de De Morgan se trouve vérifiée.

Vérification de la 1re loi de De Morgan



La validité de la première loi de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ résulte de l'égalité des deux diagrammes de droite.

Vérification de la 1re loi de De Morgan (2)

- Dire qu'un élément x appartient au complément de l'union de A et B est équivalent à dire qu'il n'appartient pas à l'union de A et B (par définition du complément).

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$$

- L'élément x n'appartient pas à l'union de A et B si et seulement s'il n'appartient ni à A ni à B.

$$x \notin A \cup B \iff (x \notin A \text{ et } x \notin B)$$

- Dire que l'élément x n'appartient ni à A ni à B et équivalent à dire qu'il appartient au complément de A et au complément de B.

$$(x \notin A \text{ et } x \notin B) \iff \left(x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B}\right)$$

- Finalement l'élément x appartient au complément de A et au complément de B si et seulement s'il appartient à l'intersection de ces deux compléments.

$$\left(x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B}\right) \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Ainsi un élément x appartient à $\overline{A \cup B}$ si et seulement s'il appartient à $\overline{A} \cap \overline{B}$. Ces deux ensembles sont donc égaux.

- Un ensemble A est **fini** si son nombre d’éléments (distincts) est un entier naturel. Dans le cas contraire, l’ensemble A est **infini** (une définition plus précise d’un ensemble fini sera donnée au chapitre 3).

> Si A est un ensemble fini, le **cardinal**, ou la **cardinalité**, de A, noté $|A|$, est égal au nombre d’éléments distincts de A.

- EXEMPLES.
  - $|\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{z}\}| = 26$ (en français tout au moins)
  - $|\{0, 1, 1, 0, 1, 0, 0\}| = 2$
  - $|\varnothing| = 0$

- REMARQUE. Il existe plusieurs notations, plus ou moins répandues, pour noter le cardinal d’un ensemble. Ainsi on trouvera tantôt

$$|A|, \quad \mathrm{Card}(A) \quad \text{ou encore} \quad \#(A).$$

Pour un ensemble A donné, l'**ensemble des parties de A** est l'ensemble $\mathscr{P}(A)$ formé de tous les sous-ensembles de A :

$$\mathscr{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

- EXEMPLE. Pour l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$, on a

$$\mathscr{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\varnothing, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}.$$

- **Propiété.** Quel que soit l'ensemble A, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble A tout entier sont des parties de A, on aura donc toujours

$$\boxed{\varnothing \in \mathscr{P}(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{A \in \mathscr{P}(A)}.$$

Théorème. *Soit A un ensemble fini de cardinal $|A| = n$, alors*

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n.$$

heig-vd

- Un **couple** (a, b) est une liste *ordonnée* de deux éléments a et b.
- Un **triplet** (a, b, c) est une liste *ordonnée* de trois éléments a, b, c.
- Plus généralement, un **n-uple** ou **n-uplet** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une liste *ordonnée* de n éléments appelés ses **composantes**.
- Le nombre n est appelé la **taille** du n-uple.
- Deux n-uples sont égaux si et seulement s'ils sont formés des mêmes éléments aux mêmes positions :

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d$$

et plus généralement

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

Produit cartésien de deux ensembles

Le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble de *tous* les couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$\boldsymbol{A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}}.$$

■ Exemple. Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y, z\}$, on a

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

Théorème. *Si $|A| = n$ et $|B| = m$ alors*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = nm.$$

Produit cartésien de n ensembles

- Le produit cartésien peut être étendu à un nombre quelconque d'ensembles :

$$\boxed{\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}}}.$$

- Un cas particulier et fréquent apparaît lorsque tous les ensembles A_i sont égaux. On a alors $A_i = A$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et on note $\boldsymbol{A^n}$ leur produit cartésien :

$$\boxed{\boldsymbol{A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}}}.$$

On définit ainsi les **puissances** (entières et positives) de l'ensemble A.

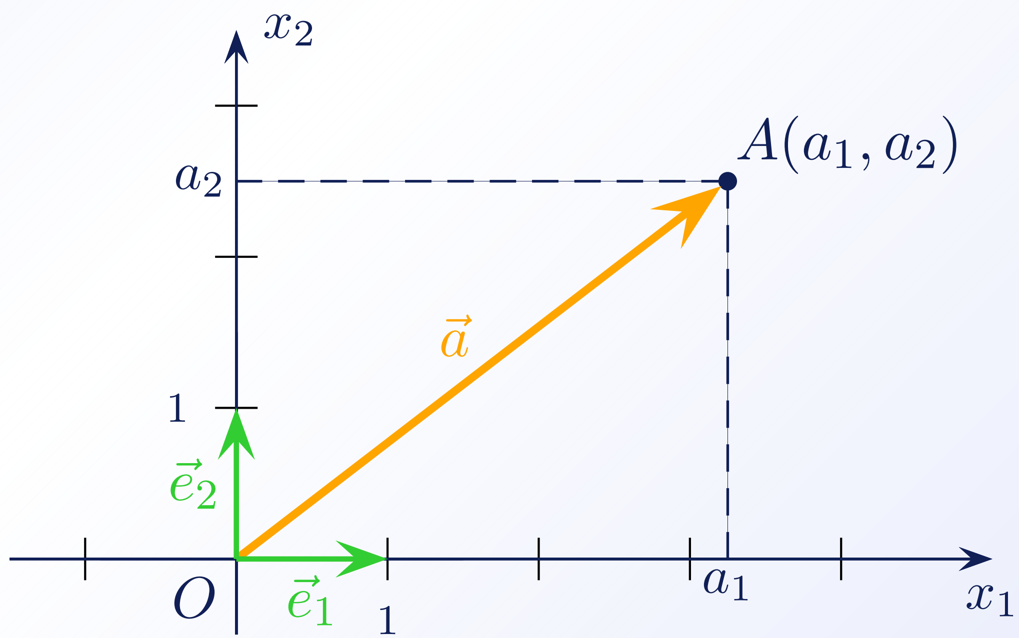
- On a $A^1 = A$ ainsi que la propriété

$$A^k \times A^l = A^{k+l} \qquad \forall\, k, l \in \mathbb{N}^*.$$

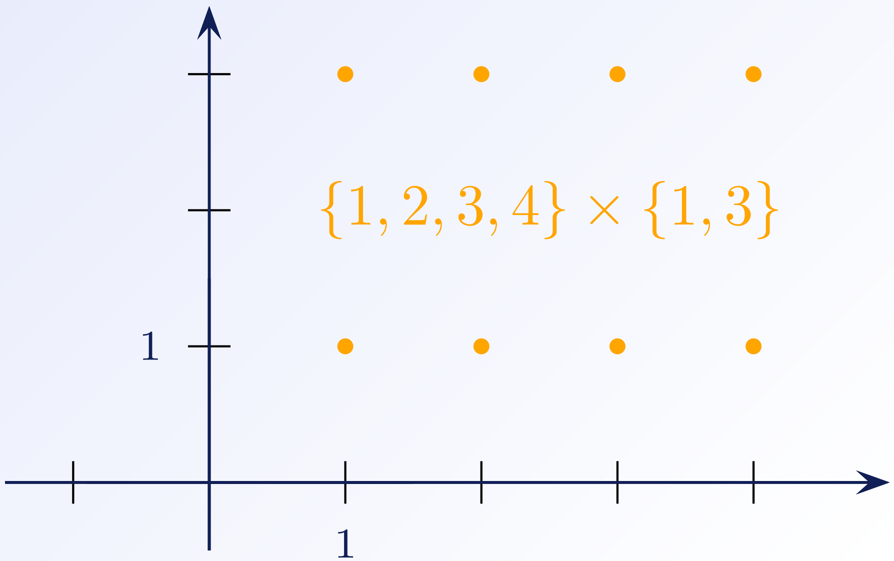
heig-vd

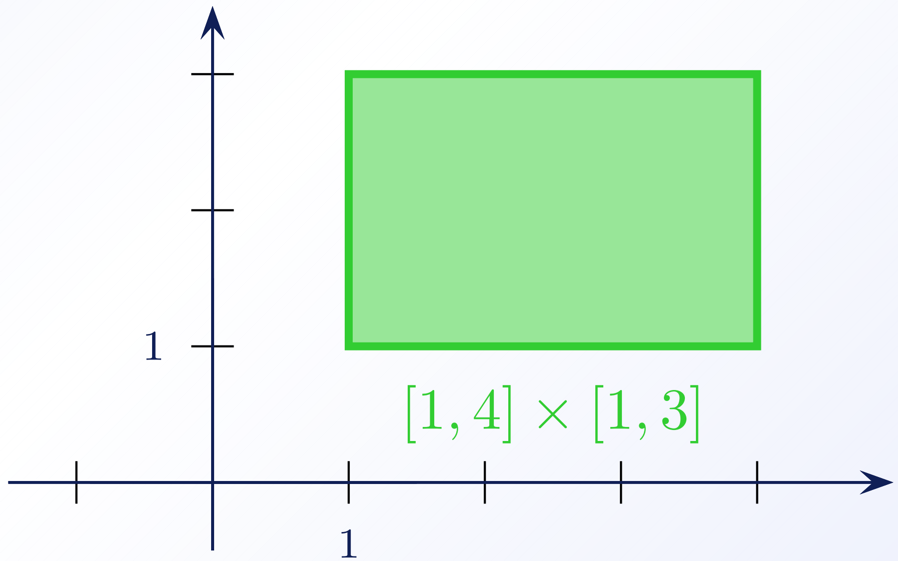
Repère cartésien et coordonnées cartésiennes

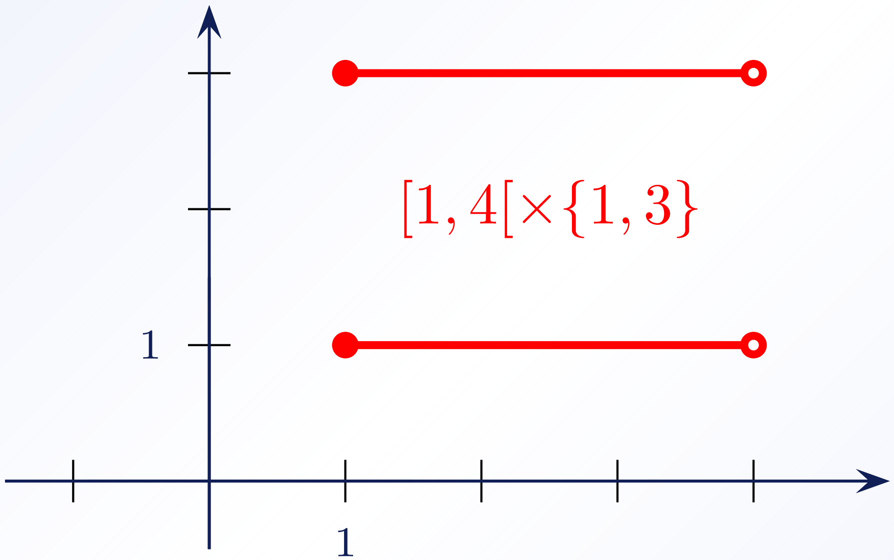
- Pour définir un repère cartésien du plan, on choisit un point O (l'origine), deux axes (généralement orthogonaux) et deux vecteurs de base de longueur 1 (un sur chaque axe).
- Chaque point A du plan est alors identifié (repéré) par ses coordonnées cartésiennes (a_1, a_2), correspondant aux projections du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur chaque axe.
- Chaque point du plan correspond alors à un couple de nombres réels et le plan est assimilé au produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

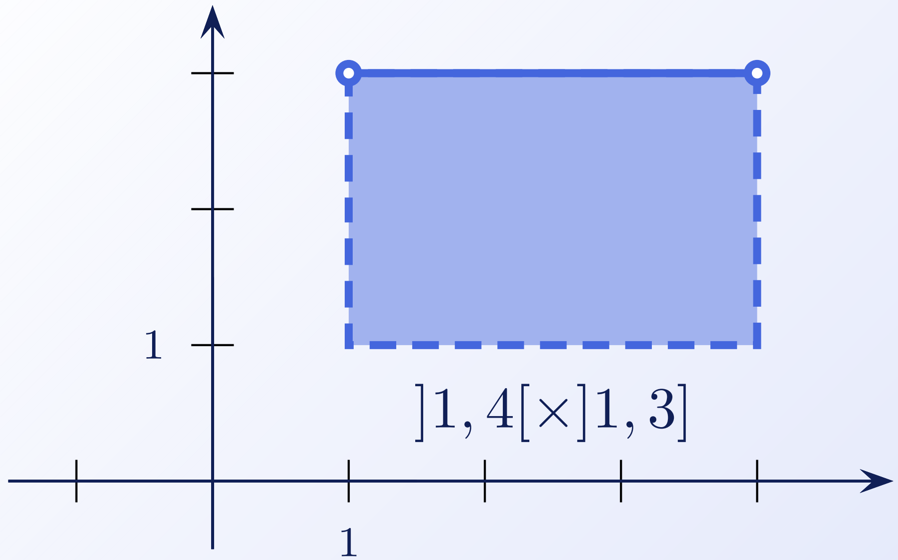


Représentation géométrique de produits cartésiens









Chapitre 2

Les relations

heig-vd

Relation d'un ensemble vers un autre

Une **relation de l'ensemble A vers l'ensemble B** est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

- Si R est une relation de A vers B et si le couple (a, b) appartient à la relation, on dit que **a est en relation avec b** ou que **a est lié à b** et on note $\boldsymbol{(a, b) \in R}$ ou $\boldsymbol{a \, R \, b}$.
- Réciproquement, si le couple (a, b) n'est pas dans la relation R, on dit que **a n'est pas en relation avec b** et on note $\boldsymbol{(a, b) \notin R}$ ou $\boldsymbol{a \not R \, b}$.
- Exemple 1. A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et B l'ensemble des cours dispensés ce semestre. L'ensemble

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit actuellement le cours } b\}$$

est une relation de A vers B.

heig-vd

- EXEMPLE 2. Pour l'ensemble A des couleurs et l'ensemble B des pays, on peut définir une relation R de A vers B qui met la couleur a en correspondance avec le pays b si a apparaît dans le drapeau national de b. On aura, entre autre,

$$(\text{rouge}, \text{Suisse}) \in R \qquad \text{mais} \qquad (\text{vert}, \text{France}) \notin R.$$

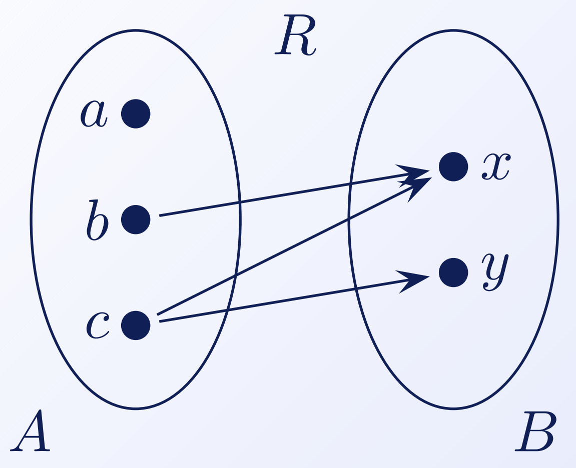
- EXEMPLE 3. Si A et B sont tous deux égaux à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on peut définir une relation de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ formée de tous les couples d'entiers (x, y) où x est inférieur ou égal à y. Si x est en relation avec y on note, classiquement, $x \leq y$, dans le cas contraire on note $x \not\leq y$:

$$3 \leq 7 \qquad\qquad -2 \not\leq -10.$$

- Si les ensembles A et B sont finis, on peut représenter une relation de A vers B par un **graphe** (biparti) :
  - Les éléments de A et de B sont chacun représentés par un point distinct (ce sont les sommets du graphe).
  - Chaque couple (a, b) de R est représenté par une flèche reliant le sommet correspondant à a à celui correspondant à b (ce sont les arcs du graphe).

- EXEMPLE.

$$A = \{a, b, c\},$$
$$B = \{x, y\},$$
$$R = \{(b, x), (c, x), (c, y)\}.$$



- Si les ensembles A et B sont finis, on peut également représenter une relation de A vers B par une **matrice** $\boldsymbol{M(R)}$ (un tableau à deux dimensions) :
  - Chaque élément de A est associé à une ligne de la matrice.
  - Chaque élément de B est associé à une colonne.
  - L’entrée à l’intersection de la ligne associée à l’élément $a \in A$ et de la colonne associée à l’élément $b \in B$ est égale à 1 si $(a, b) \in R$ et est égale à 0 sinon.

- EXEMPLE.

$$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\},$$

$$R = \{(b, x), (c, x), (c, y)\}.$$

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

Une **relation sur l'ensemble A** est une relation de A vers A, c'est-à-dire un sous-ensemble du produit $A^2 = A \times A$.

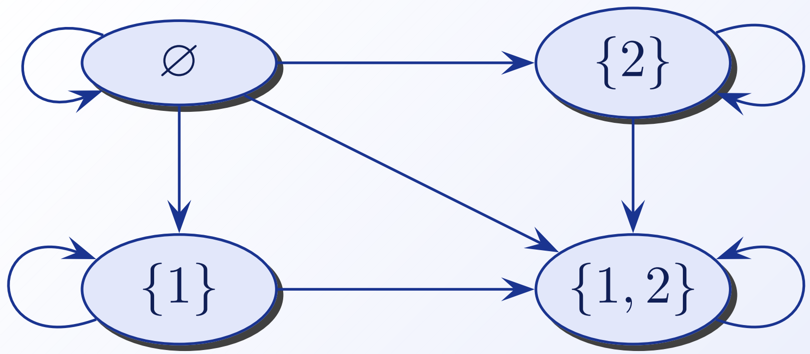
- EXEMPLE 1. Si A est l'ensemble des pays, le sous-ensemble R de A^2 contenant tous les couples de pays limitrophes, c.-à-d. ayant une frontière commune, est une relation sur A. On a, entre autre, $(\text{Suisse}, \text{France}) \in R$ et $(\text{Espagne}, \text{Suisse}) \notin R$.

- EXEMPLE 2. Les trois ensembles suivants sont autant de relations sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs :

  1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$
  2. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
  3. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \leq 3\}$

heig-vd

- Plutôt que de recourir au graphe biparti associé à une relation entre deux ensemble finis, on préférera représenter une relation R sur un ensemble fini A par un **graphe orienté** dont les sommets correspondent aux éléments de A et où deux sommets a et b sont reliés par un arc de a vers b si $(a, b) \in R$.
- EXEMPLE. Soit l'ensemble $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ et la relation R sur A définie par $R = \{(S, T) \mid S$ est un sous-ensemble de $T\}$. Le graphe représentatif de R, qui n'est rien d'autre que la relation d'inclusion ($R = \subseteq$), est



- La **relation complémentaire** d'une relation R de A vers B est la relation $\overline{R}$, elle aussi de A vers B, formée de tous les couples du produit cartésien $A \times B$ n'appartenant pas R :

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \notin \boldsymbol{R}\} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \setminus \boldsymbol{R}}\,.$$

- La **relation inverse** d'une relation R de A vers B est la relation R^{-1}, de B vers A, obtenue en inversant l'ordre des composantes de chacun des couples de R :

$$\boxed{\boldsymbol{R}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}\}}\,.$$

- Exemple. Sur l'ensemble des personnes, la relation complémentaire de la relation « est le fils ou la fille de » est la relation « n'est pas l'enfant de » alors que la relation inverse est la relation « est le père ou la mère de ».

Composition de deux relations

- Soit R une relation de A vers B et S une relation de B vers C. La **composition** de R par S, notée $\boldsymbol{S \circ R}$, est la relation de A vers C formée des couples $(a, c) \in A \times C$ pour lesquels il existe (au moins) un élément $b \in B$ avec $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$:

$$\boxed{\boldsymbol{S \circ R \overset{\text{def}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}}}.$$

- Exemple 1. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, B l'ensemble des cours dispensés ce semestre et C l'ensemble des enseignants et enseignantes de l'école. Soit encore les relations

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit le cours } b\}$$

et

$$S = \{(b, c) \in B \times C \mid \text{le cours } b \text{ est donné par l'enseignant-e } c\}.$$

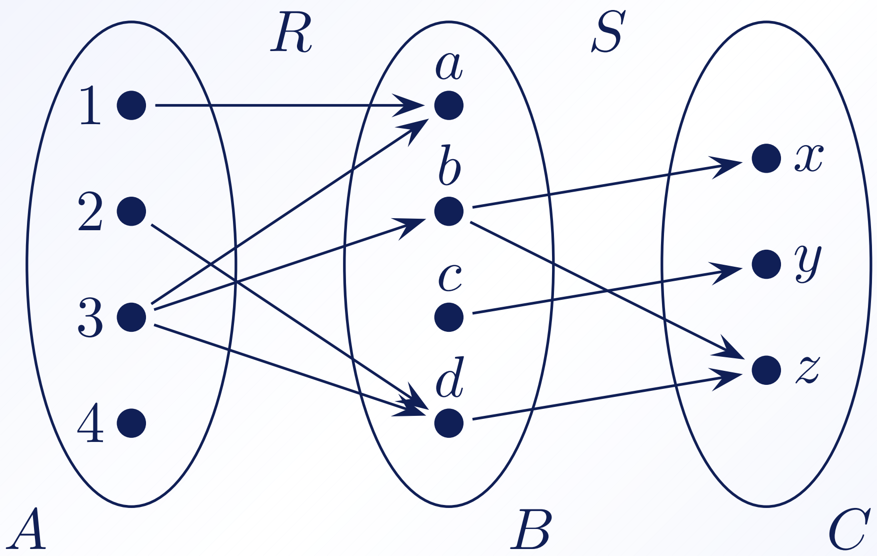
La composition $S \circ R$ est l'ensemble des couples (a, c) où l'étudiant-e a suit au moins un cours donné par l'enseignant-e c ce semestre.

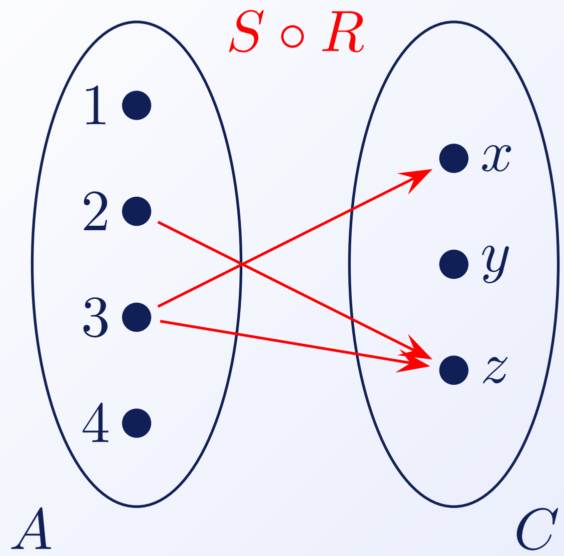
Composition de deux relations (suite)

- Exemple 2. Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ et $C = \{x, y, z\}$ et les relations

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \text{ et } S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

On peut calculer la relation $S \circ R$ à partir des graphes de R et S :





$$S \circ R = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$$

Matrice d'une composition

- Si A, B et C sont trois ensembles finis et si R est une relation de A vers B et S une relation de B vers C, on peut calculer la matrice $\boldsymbol{M}(S \circ R)$ de la relation composée $S \circ R$ à partir du produit des matrices des deux relations R et S.
- Le **produit de deux matrices $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$** (qui sera étudié en détails dans le cours MAT1) s'obtient en appliquant la règle

« **ligne $\times$ colonne** »

- Selon cette règle :

> L'élément (i, j) du produit $\boldsymbol{PQ}$ (l'élément en ligne i et colonne j) s'obtient en sommant les produits des éléments correspondants de la ligne i de $\boldsymbol{P}$ et de la colonne j de $\boldsymbol{Q}$.

- Pour les relations R et S du dernier exemple, on a

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Le produit matriciel $\boldsymbol{M}(R)\boldsymbol{M}(S)$ est

$$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice d'une composition (suite)

- L'élément $(3, 1)$ du produit est obtenu en multipliant, terme à terme, ceux de la 3e ligne de $\boldsymbol{M}(R)$ avec ceux de la 1re colonne de $\boldsymbol{M}(S)$ et en sommant le tout :

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1.$$

- Pour obtenir la matrice de la relation composée $S \circ R$, il suffit de remplacer dans le produit $\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S)$ tous les éléments supérieurs à 1 par 1.
- Pour l'exemple, on obtient dans un premier temps le produit matriciel

$$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

duquel on déduit la matrice de la composition $S \circ R$:

$$\boldsymbol{M}(S \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

heig-vd

- On peut composer plus de deux relations. Ainsi si R est une relation de A vers B, S une relation de B vers C et T une relation de C vers D, **la composition de R, S et T est la relation $T \circ S \circ R$ de A vers D** obtenue en calculant, indifféremment,

$$(T \circ S) \circ R \qquad \text{ou} \qquad T \circ (S \circ R)$$

car la composition de relations est associative !

- On peut composer une relation R sur l'ensemble A avec elle-même, on définit alors les **puissances de R** :

$$R^2 = R \circ R, \quad R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R = R \circ R^2$$

et plus généralement

$$\boxed{R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots}$$

Propriétés d’une relation sur un ensemble

On classifie les relations sur un ensemble à l’aide de quatre propriétés principales :

- la **réflexivité**,
- la **symétrie**,
- l’**antisymétrie**,
- la **transitivité**.

Ces quatre propriétés sont à la base des définitions de deux types particulièrement importants de relations : les **relations d’ordre** et les **relations d’équivalence**.

Une relation R sur un ensemble A est **réflexive** si et seulement si $(a, a) \in R$ pour tout élément $a \in A$.

- Dit autrement, une relation sur l'ensemble A est réflexive si et seulement si *chaque* élément de A est en relation avec lui-même.

- EXEMPLE 1. La relation d'inclusion (sur une collection d'ensembles) est réflexive car $S \subseteq S$ pour tout ensemble S.

- EXEMPLE 2. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas réflexive car personne n'est le fils/la fille de lui/elle-même. (Une telle relation est dite irréflexive.)

- EXEMPLE 3. La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2y\}$ n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R$ (même si $(x, x) \in R$ pour tout $x > 0$).

La relation R sur A est-elle réflexive ?

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est réflexive si et seulement si la diagonale principale de la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation ne contient que des 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est réflexive si et seulement si une boucle relie chaque sommet du graphe à lui-même.

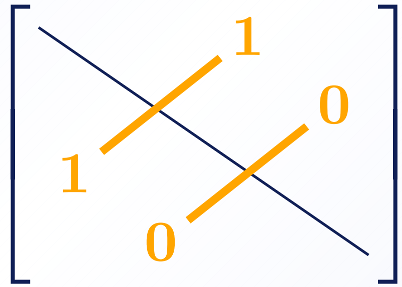
Une relation R sur un ensemble A est **symétrique** si et seulement si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b on a aussi (et obligatoirement) l'élément b en relation avec l'élément a :

$$(a, b) \in R \implies (b, a) \in R \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b \text{ dans } A.$$

- EXEMPLE 1. La relation, sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes est symétrique.
- EXEMPLE 2. La relation sur $\mathbb{Z}$ où x est en relation avec y si et seulement si x a la même parité que y (c.à-d. si et seulement si x et y ont la même parité) est symétrique.
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas symétrique.

La relation R sur A est-elle symétrique ?

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est symétrique si et seulement si la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation est symétrique par rapport à sa diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est symétrique si et seulement si entre deux sommets distincts il y a soit un arc dans chaque direction soit aucun arc (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).

- PROPRIÉTÉ.

> Une relation R est symétrique si et seulement si $R^{-1} = R$.

Une relation R sur un ensemble A est **antisymétrique** si et seulement si la seule situation où il est possible d'avoir simultanément $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$ arrive lorsque $a = b$:

$$(a, b) \in R \text{ et } (b, a) \in R \Longrightarrow a = b \qquad \forall a, b \in A.$$

- Dit autrement, la relation R est antisymétrique si et seulement si pour toute paire d'éléments a et b *distincts*, on a soit a en relation avec b, soit b en relation avec a, soit ni l'un ni l'autre mais en aucun cas les deux.

- Exemple 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est antisymétrique car la seule manière d'avoir simultanément $x \leq y$ et $y \leq x$ est d'avoir $x = y$.

heig-vd

Antisymétrie (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion est antisymétrique car si deux ensembles A et B sont tels que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ on a forcément $A = B$.

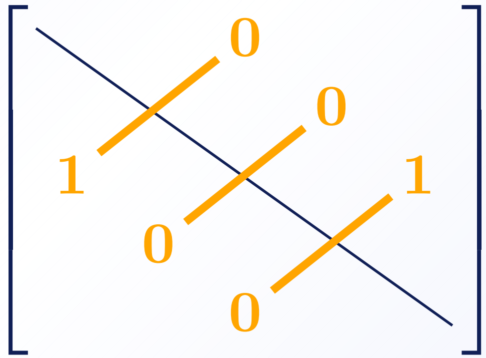
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) est antisymétrique car personne n'est en même temps le fils/la fille *et* le père/la mère de quelqu'un d'autre.

- EXEMPLE 4. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ n'est pas antisymétrique car 1 est en relation avec -1, -1 est en relation avec 1 mais $1 \neq -1$.

- EXEMPLE 5. Sur $\mathbb{N}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ est, elle, antisymétrique !

La relation R sur A est-elle antisymétrique ?

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est antisymétrique si et seulement si, dans la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation, il n'existe pas deux 1 en symétrie par rapport à la diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est antisymétrique si et seulement si il y a *au plus* un arc entre toute paire de sommets distincts (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).

La symétrie et l'antisymétrie ne sont pas deux propriétés opposées ou exclusives l'une de l'autre !

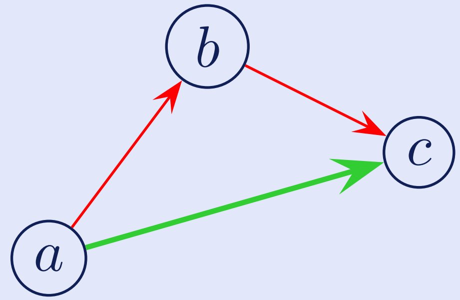
Il existe en effet des relations

- à la fois symétrique et antisymétrique,
- ni symétrique, ni antisymétrique.

EXEMPLE 1. La relation d'égalité sur un ensemble A, c.-à-d. la relation formée de tous les couples $(a, b) \in A \times A$ vérifiant $a = b$, est à la fois symétrique et antisymétrique.

EXEMPLE 2. Les relations « est le frère de » et « est la sœur de » (sur l'ensemble des personnes) ne sont ni symétriques ni antisymétriques.

Une relation R sur un ensemble A est **transitive** si et seulement si à chaque fois que l'on trouve deux couples (a, b) et (b, c) dans R on y trouve également le couple (a, c) :



$$(a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \qquad \forall\, a, b, c \in A.$$

- EXEMPLE 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est transitive car si les trois nombres réels x, y et z vérifient $x \leq y$ et $y \leq z$ on a aussi (et obligatoirement) $x \leq z$.

- EXEMPLE 2. La relation R, sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes n'est pas transitive. On a, en effet,

$$(\text{France}, \text{Suisse}) \in R \quad \text{et} \quad (\text{Suisse}, \text{Autriche}) \in R$$

mais

$$(\text{France}, \text{Autriche}) \notin R.$$

La relation R sur A est-elle transitive ?

Considérons une relation R sur un ensemble A.

- À chaque fois que l'on trouve trois éléments a, b et c de A vérifiant $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, on a $(a, c) \in R^2 = R \circ R$ par définition de la composition. Cependant si R est transitive on a aussi $(a, c) \in R$.

  Ainsi, si une relation R est transitive, tout élément de R^2 est déjà élément de R :

$$\boxed{R \text{ transitive} \Longrightarrow R^2 \subseteq R}.$$

- Réciproquement, si la relation R n'est pas transitive, il existe trois éléments a, b et c dans A avec $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ mais $(a, c) \notin R$. Cependant (a, c) appartient à R^2 (par définition) et on a

$$\boxed{R \text{ non transitive} \Longrightarrow R^2 \not\subseteq R}.$$

La relation R sur A est-elle transitive ? (suite)

En combinant les deux résultats précédents, on obtient

Théorème. *Une relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si*

$$R^2 \subseteq R.$$

- EXEMPLE. Si $A = \{1,2,3,4\}$ et $R = \{(1,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$, on a

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{M}(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}(R^2).$$

Ainsi $R^2 = \{(1,1),(3,1),(3,4)\} \subseteq R$ et R est transitive.

heig-vd

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est simultanément

- **réflexive** : $a\,R\,a$ pour tout $a \in A$,
- **antisymétrique** : si $a\,R\,b$ et $a \neq b$ alors $b \not R\, a$
- **transitive** : si $a\,R\,b$ et $b\,R\,c$ alors $a\,R\,c$.

- EXEMPLE 1. La relation d'ordre la plus connue est la relation $\leq$ (« plus petit ou égal ») qu'elle soit définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, relatifs $\mathbb{Z}$ ou, plus généralement, sur un sous-ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion ($\subseteq$) est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathscr{P}(S)$ d'un ensemble S ou, plus généralement, sur toute collection $\mathcal{C}$ d'ensembles.

heig-vd

- Si R est une relation d'ordre sur A, deux éléments $a, b \in A$ sont dits **comparables** si on a $a\,R\,b$ ou $b\,R\,a$ (voire les deux dans le cas particulier où $a = b$).

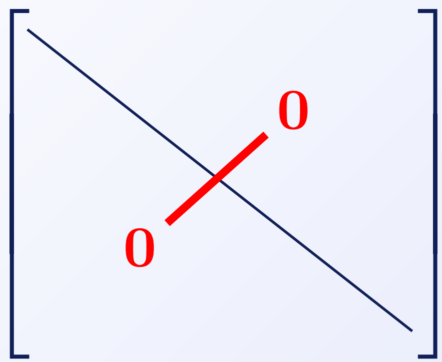
> Une relation d'ordre R est
> - un **ordre partiel** s'il existe au moins deux éléments a et b non comparables,
> - un **ordre total** ou **linéaire** si chaque paire d'éléments de A est comparable.

- EXEMPLE 1. La relation d'ordre $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$ (et, plus généralement, sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$) car si n et m sont deux entiers non négatifs, on a soit $n \leq m$, soit $m \leq n$ (voire les deux si n et m sont égaux).

Ordre partiel ou total (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties $\mathscr{P}(S)$ d'un ensemble S (de cardinal ≥ 2) est un ordre partiel mais pas total, car il existe des sous-ensembles de S qui ne sont pas comparables. En effet, si A et B sont deux sous-ensembles non vides et disjoints de S ($A \cap B = \varnothing$), on n'a ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. A et B ne sont donc pas comparables par la relation $\subseteq$.

- PROPRIÉTÉ. Si R est une relation d'ordre sur un ensemble A fini, R est un ordre total si et seulement si la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ ne contient pas deux 0 en symétrie par rapport à sa diagonale principale car cette disposition correspondrait à deux éléments non comparables.



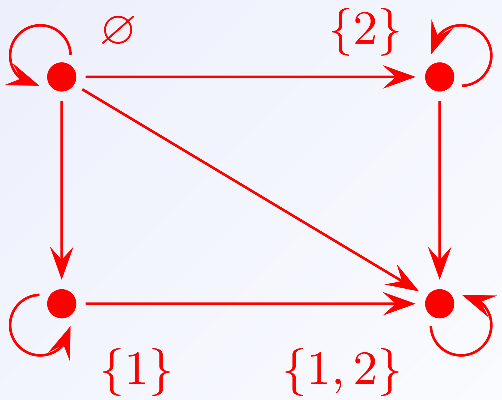
Diagrammes de Hasse

Le **diagramme de Hasse** d'un ordre, partiel ou total, est une simplification du graphe de la relation.

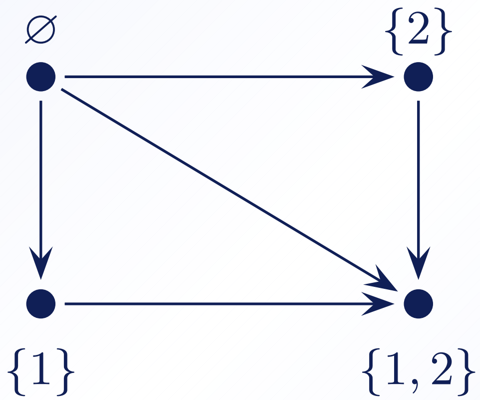
- Les boucles ne sont pas représentées (leur présence se déduisant de la réflexivité de la relation).
- Les arcs se déduisant par transitivité ne sont pas représentés.
- On oublie l'orientation des arcs en adoptant la convention : si $a\,R\,b$ alors a est placé en dessous de b dans le dessin (tous les arcs sont dirigés vers le haut).

Exemple

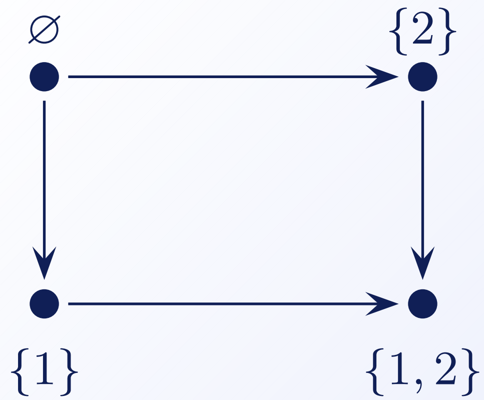
Pour la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ on a la suite de graphes :



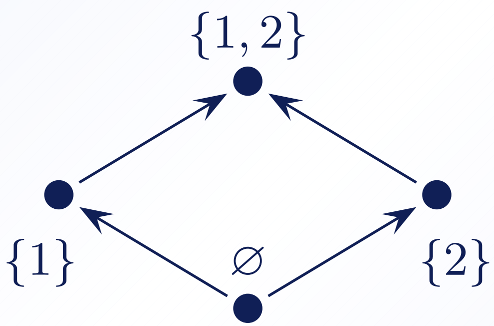
1. Graphe de R



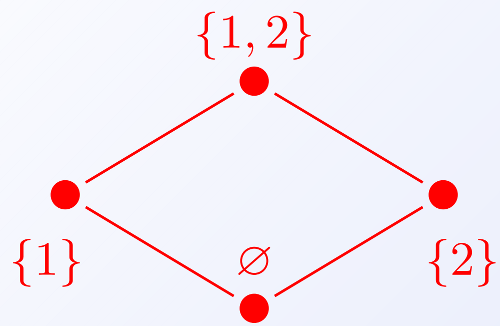
2. Suppression des boucles



3. Suppression des arcs transitifs



4. Orientation des arcs vers le haut



5. Diagramme de Hasse de R

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est simultanément

- **réflexive** : $a\,R\,a$ pour tout $a \in A$,
- **symétrique** : si $a\,R\,b$ alors $b\,R\,a$,
- **transitive** : si $a\,R\,b$ et $b\,R\,c$ alors $a\,R\,c$.

- Deux éléments $a, b \in A$ liés par une telle relation (on a forcément $a\,R\,b$ et $b\,R\,a$ par symétrie) sont dits **équivalents**.
- Le symbole usuel pour noter l'équivalence de deux éléments a et b est le « triple égal » : $\boldsymbol{a \equiv b}$.
- Exemple 1. Si A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, l'ensemble des couples de personnes du même département définit une relation d'équivalence sur A.

- EXEMPLE 2. Si A est l'ensemble des mots de la langue française, l'ensemble des couples de mots ayant le même nombre de lettres définit une relation d'équivalence sur A.

- EXEMPLE 3. La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y$ ou $x = -y\}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour cette relation, qui s'écrit aussi $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y|\}$, les entiers 2 et -2 sont équivalents car $|2| = |-2|$ et plus généralement chaque entier est équivalent à son opposé (et à lui-même évidemment).

- EXEMPLE 4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble formé de tous les couples de points $(P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2))$ pour lesquels

$$\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2)$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

heig-vd

Relations d'équivalence (suite des exemples)

- Quel que soit le point $P(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il est en relation avec lui-même car on a (trivialement)

  $$\max(x_1, y_1) = \max(x_1, y_1).$$

  La relation est donc réflexive.

- Quels que soient les points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$, si le premier est en relation avec le second alors le second l'est avec le premier car l'égalité est symétrique :

  $$\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \max(x_2, y_2) = \max(x_1, y_1).$$

  La relation est donc symétrique.

- La transitivité de la relation découle, elle aussi, de celle de l'égalité :

  $$\left.\begin{array}{c} \max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \\ \text{et} \\ \max(x_2, y_2) = \max(x_3, y_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \max(x_1, y_1) = \max(x_3, y_3)$$

  quels que soient les points $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ et $R(x_3, y_3)$ du plan.

heig-vd

Pour une relation d'équivalence R sur l'ensemble A, le sous-ensemble de A formé de tous les éléments équivalents à $a \in A$ s'appelle la **classe d'équivalence de a** et se note $[a]_R$ ou, simplement, $[a]$ (lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur R) :

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in A \mid a \, R \, s\} = \{s \in A \mid (a, s) \in R\}.$$

- Propriétés.
  - *Si les éléments a et b sont équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \in R$) alors $[a]_R = [b]_R$.*
  - *Si les éléments a et b ne sont pas équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \notin R$) alors $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.*
- **Théorème.** *Deux classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont ou bien égales ou bien disjointes.*

- EXEMPLE 1. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, la relation R formée de tous les couples d'entiers de même parité est une relation d'équivalence. Elle possède deux classes d'équivalence, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs :

$$\begin{aligned}[1] &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = [-1] = [3] = [-3] = \ldots \\ [2] &= \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = [0] = [-2] = [4] = \ldots\end{aligned}$$

- EXEMPLE 2. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et R la relation d'équivalence formée de tous les couples de personnes d'un même département.

  Les classes d'équivalence de R sont les groupes d'étudiants et étudiantes des différents départements de l'école. Ces classes sont disjointes car on ne peut être inscrit que dans un seul département à la fois.

- EXEMPLE 3. La relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$

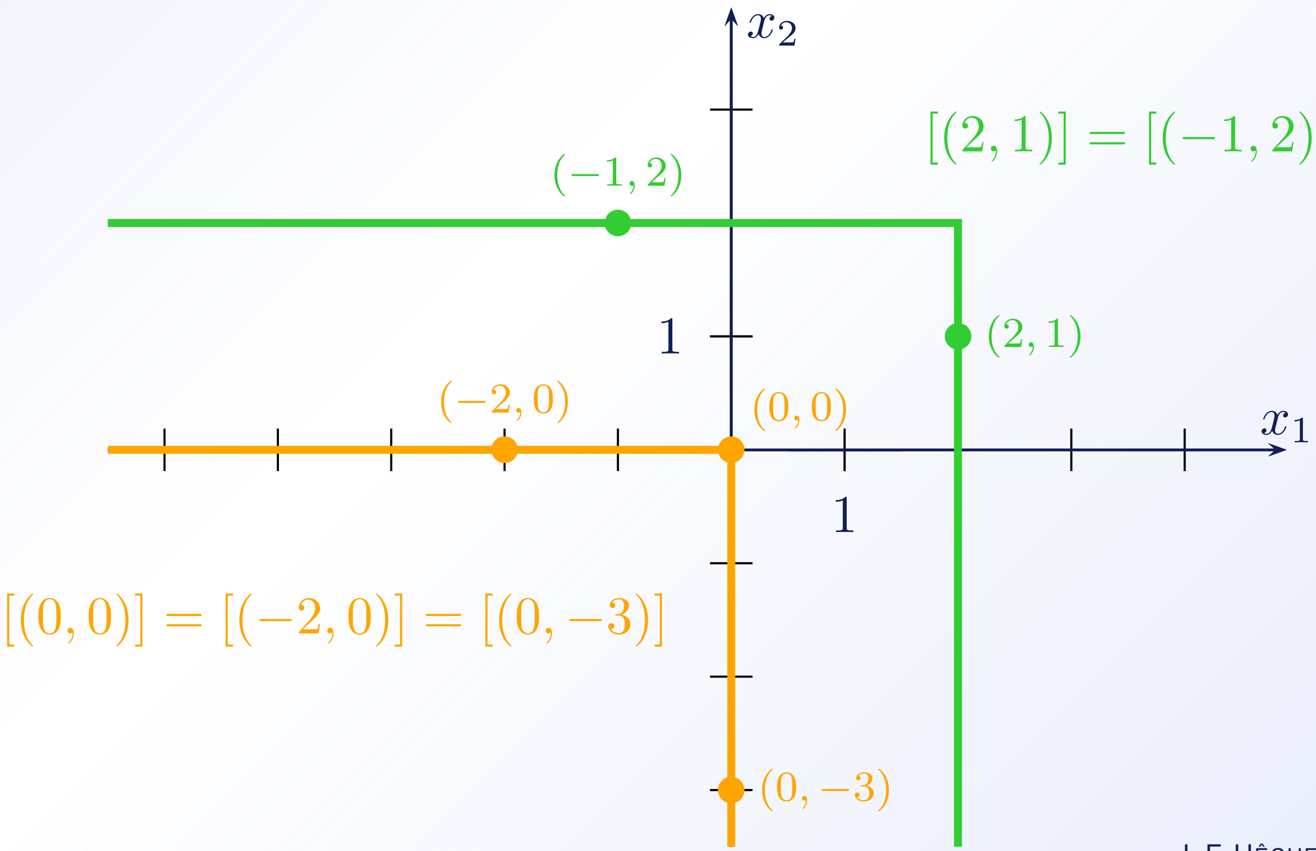
$$R = \{(X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2)\}$$

possède une infinité de classes d'équivalence.

- La classe d'équivalence de l'origine est

$$[(0,0)] = \{(x_1, 0) \mid x_1 \leq 0\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \leq 0\}.$$

- Celle du point $(2,1)$ est $[(2,1)] = \{(x_1, 2) \mid x_1 \leq 2\} \cup \{(2, x_2) \mid x_2 \leq 2\}$.



Partitions

Une **partition** d'un ensemble A est une décomposition de A en sous-ensembles disjoints.

- PROPRIÉTÉ. Si R est une relation d'équivalence sur A, l'ensemble des classes d'équivalence de R forme une partition de A.
- EXEMPLE. Sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relation R de matrice

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possède 2 classes d'équivalence :

$$A_1 = [1] = [4] = \{1, 4\} \quad \text{et} \quad A_2 = [2] = [3] = \{2, 3\}.$$

Ces deux classes sont disjointes : $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ et leur union est égale à A tout entier : $A_1 \cup A_2 = A$, elles forment donc une partition de A.

Chapitre 3

Les fonctions

Soit A et B deux ensembles non vides. Une **fonction de A dans B** (on dit aussi de A vers B) est une correspondance affectant d'exactement un élément de B à chaque élément de A.

- L'élément de B associé à a par la fonction f est noté $f(a)$. De plus, si $b = f(a)$, b est dit l'**image de a par f** ou la **valeur de f en a** alors que a est dit une **préimage de b par f** ou un **antécédent de b par f**.
- NOTATION. Une fonction f de A dans B se note :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & f(a) \end{array}}$$

- REMARQUE. Un élément de l'ensemble B peut avoir une ou plusieurs préimages, tout comme il peut n'en avoir aucune.

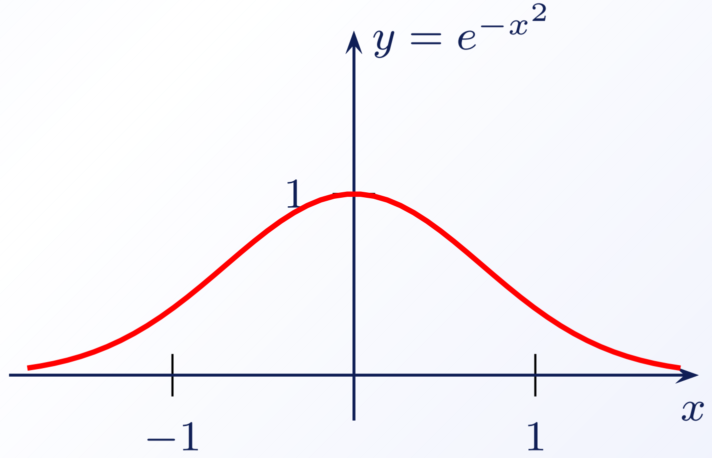
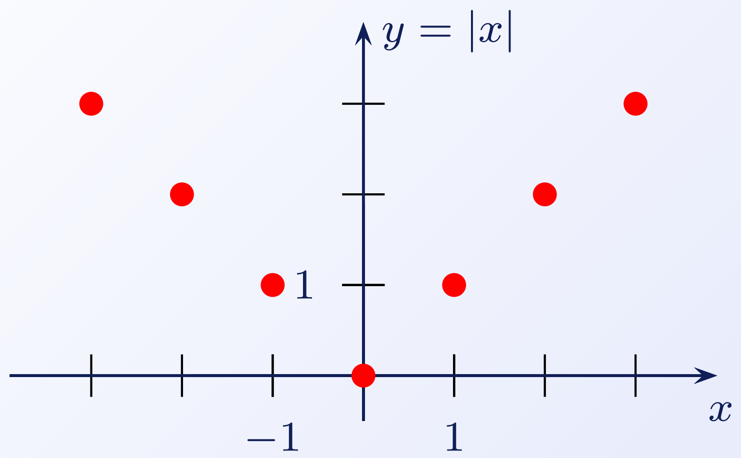
heig-vd

- Si f est une fonction de A dans B, l’ensemble de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et $b = f(a)$ est l’unique image de a par f définit le **graphe de la fonction f** :

$$\textbf{Graphe de } \boldsymbol{f} \overset{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\}.$$

- Pour les fonctions numériques, c.-à-d. celles où les ensembles A et B sont égaux à $\mathbb{R}$ (ou à des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ ou des intervalles réels), le graphe d’une fonction f de A dans B peut être identifié à l’ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ (muni d’un repère Oxy) dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$. Cette représentation graphique ou courbe représentative de f (souvent appelée, elle-même, graphe de f) est très courante et peut s’avérer particulièrement utile lors de l’étude des propriétés de f.

heig-vd

Fonction	Représentation graphique
$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = e^{-x^2} \end{array}$	
$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & y = \lvert x \rvert \end{array}$	

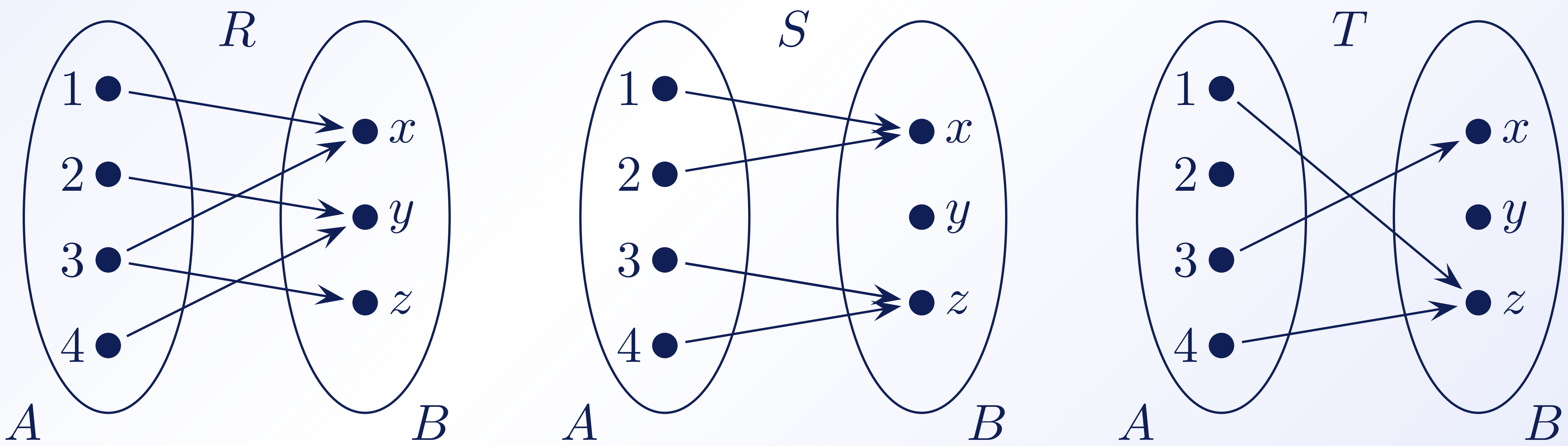
- Le graphe d'une fonction f de A dans B étant un sous-ensemble de $A \times B$, il peut être vu comme une relation de A vers B. Dans cette optique,

> **Une fonction de A dans B** est une relation de A vers B avec la propriété que chaque élément de A est en relation avec un et un seul élément de B.

- EXEMPLE 1. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x\}$ est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier est en relation avec un et un seul autre entier (son double).
- EXEMPLE 2. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier non nul est en relation avec deux entiers (lui-même et son opposé).

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{x, y, z\}$. Parmi les trois relations R, S et T de A vers B dont les graphes sont donnés ci-dessous, seule la relation S définit une fonction de A dans B.
En effet,

- la relation R n'est pas une fonction car l'élément 3 est en relation avec deux éléments de B ;
- la relation T n'est pas une fonction car l'élément 2 n'est en relation avec aucun élément de B.



heig-vd

Domaine de définition et ensemble image

Soit f une fonction de A dans B,

- l'ensemble A est appelé le **domaine de définition** de f (ou l'**ensemble de définition** de f, ou simplement le **domaine** de f),
- l'ensemble B est appelé le **codomaine** ou le **but** de f,
- l'ensemble de toutes les images des éléments de A par f est appelé l'**image**, l'**ensemble image** ou la **portée** de la fonction et est noté $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(A)$,
- plus généralement, pour tout sous-ensemble S de A, l'**image de S par f**, notée $f(S)$, est le sous-ensemble de B formé de toutes les images des éléments de S :

$$f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(s) \mid s \in S\},$$

- pour tout sous-ensemble T de B, l'**image réciproque de T par f**, notée $f^{-1}(T)$, est le sous-ensemble de A formé de toutes les préimages des éléments de T :

$$f^{-1}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Soit f une fonction A dans B et g une fonction de B dans C, la **composition de f par g**, notée $g \circ f$, est la fonction de A dans C définie par

$$(g \circ f)(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(a)) \qquad \forall\, a \in A.$$

- EXEMPLE. Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définies par

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3x + 2.$$

  - La composition de f par g est

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3) + 2 = 6x + 11$$

  - alors que la composition de g par f est

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2) + 3 = 6x + 7.$$

- PROPRIÉTÉ. En général la composition de fonctions n'est pas commutative.

Une fonction f de A dans B est **injective** si et seulement si **elle ne prend jamais deux fois la même valeur**.

- Autrement dit, la fonction f de A dans B est injective si et seulement si des éléments distincts de A ont toujours des images distinctes :

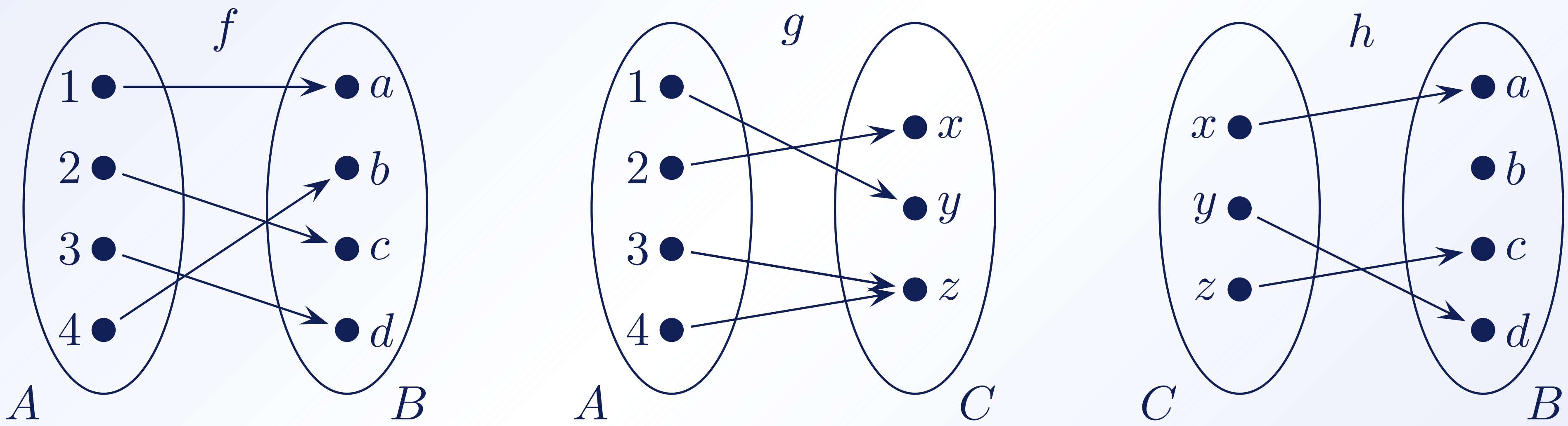
$$\boxed{\forall\, x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)}\,.$$

- Passant à la contraposée, on a aussi que la fonction f de A dans B est injective si et seulement si **tout élément de B a *au plus* une préimage** :

$$\boxed{\forall\, x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y}\,.$$

- Une fonction injective est appelée une **injection**.

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et h sont injectives.



- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$ mais $1 \neq -1$.

- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est injective car $x \neq y$ implique $x + 1 \neq y + 1$.

Fonctions surjectives

Une fonction f de A dans B est **surjective** si et seulement si **chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A**, c'est-à-dire si et seulement si **chaque élément de B a *au moins* une préimage**.

- **Propriété.** Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si l'ensemble image de f est égal au codomaine tout entier :

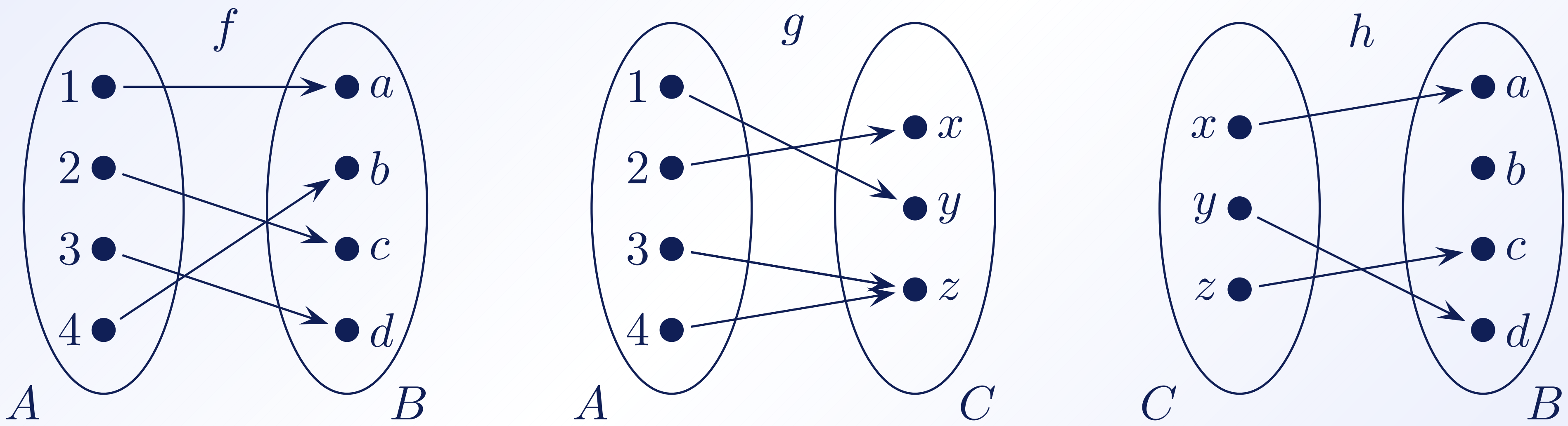
$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff \mathbf{Im}(f) = B}$$

ou encore

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff f(A) = B}.$$

- Une fonction surjective est appelée une **surjection**.

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et g sont surjectives.



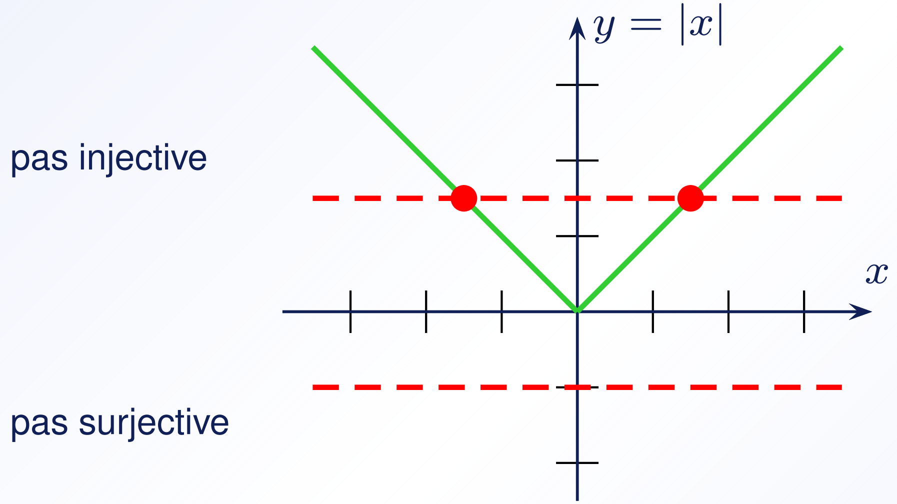
- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier x avec $f(x) < 0$.

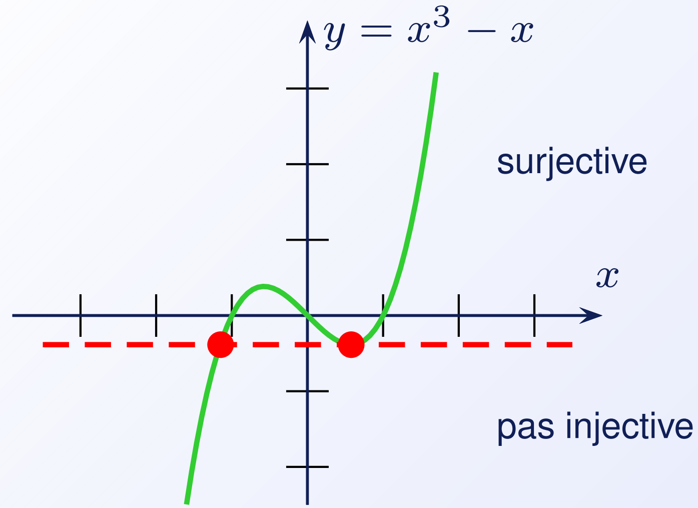
- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est surjective car pour tout entier y, il existe un entier x tel que $f(x) = y$, à savoir $x = y - 1$.

Cas des fonctions réelles

Une fonction réelle (d'une variable réelle) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction réelle est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au plus 1 point**.
- Une fonction réelle est surjective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au moins 1 point**.





- Le caractère injectif ou surjectif d'une fonction f est très sensible au choix de son domaine de définition A et de son codomaine B.
- Ainsi, la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre positif possède deux préimages) mais le devient si elle est définit de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- De manière similaire, cette même fonction n'est pas surjective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre négatif ne possède pas de préimage) mais le devient si elle est définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
- En théorie, il est toujours possible d'obtenir une surjection à partir d'une fonction f de A dans B en restreignant, si nécessaire, le codomaine B à l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$. En pratique, encore faut-il être capable de calculer $\mathrm{Im}(f)$.

Une fonction f de A dans B est **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

- Si f est une **bijection** de A dans B, chaque élément de B possède *une et une seule* préimage.
- On peut alors définir la **fonction réciproque** ou **inverse de f**, notée f^{-1} ou plus rarement ${}^{r}f$, comme la fonction de B dans A qui associe à chaque élément de B son unique préimage :

$$\boxed{\boldsymbol{f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)}}.$$

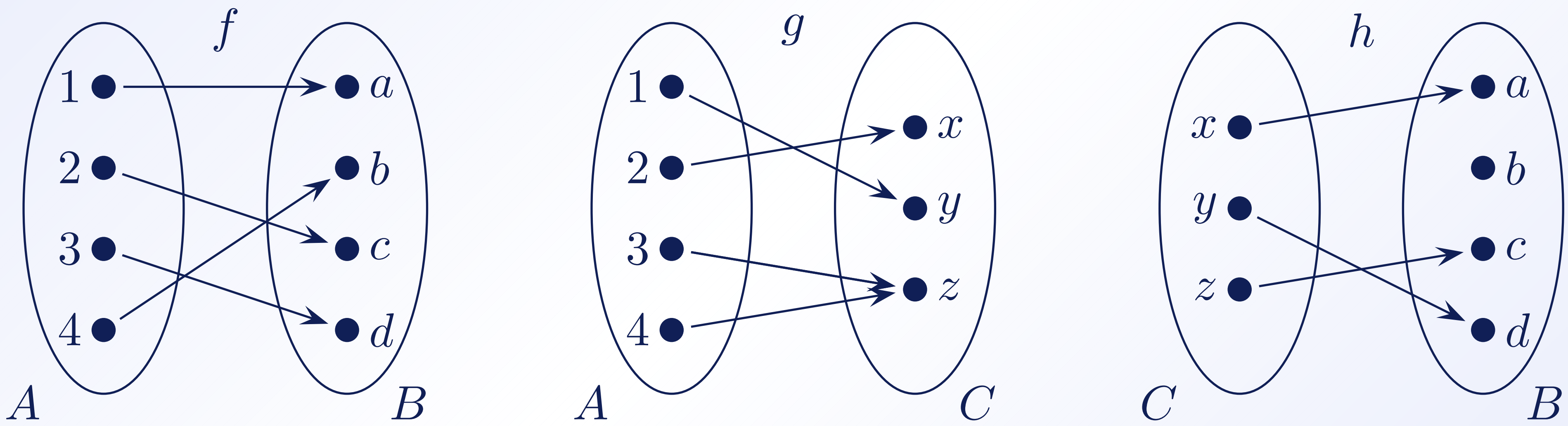
- **Propriété.** Pour une fonction bijective f de A dans B on a

$$\boxed{f^{-1} \circ f = id_A \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = id_B}$$

où id_S dénote la **fonction identité** sur l'ensemble S : $id_S(x) = x, \forall\, x \in S$.

Exemples

- Exemple 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seule la fonction f est bijective.



- Exemple 2. La fonction f qui à x associe $f(x) = x^2$ est bijective si elle est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Son inverse est alors la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$).

Soit x un nombre réel,

- la **partie entière inférieure de x** (« *floor function* »), notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier plus petit ou égal à x ;
- la **partie entière supérieure de x** (« *ceiling function* »), notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier plus grand ou égal à x.

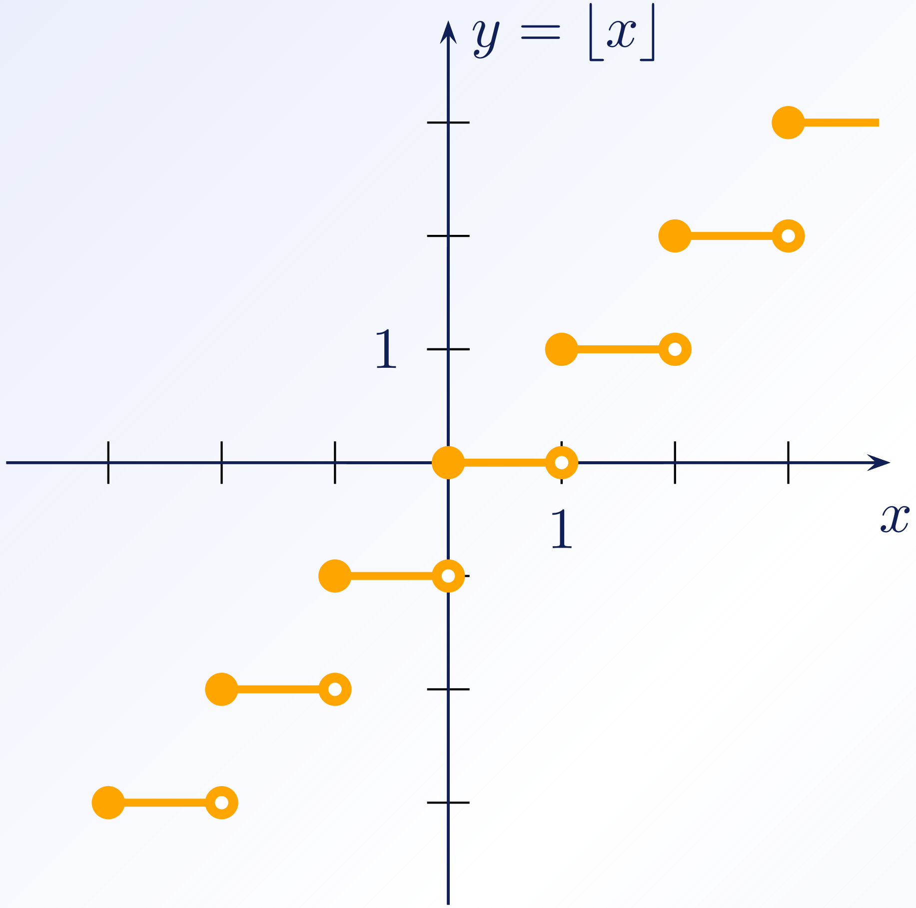
■ EXEMPLES.

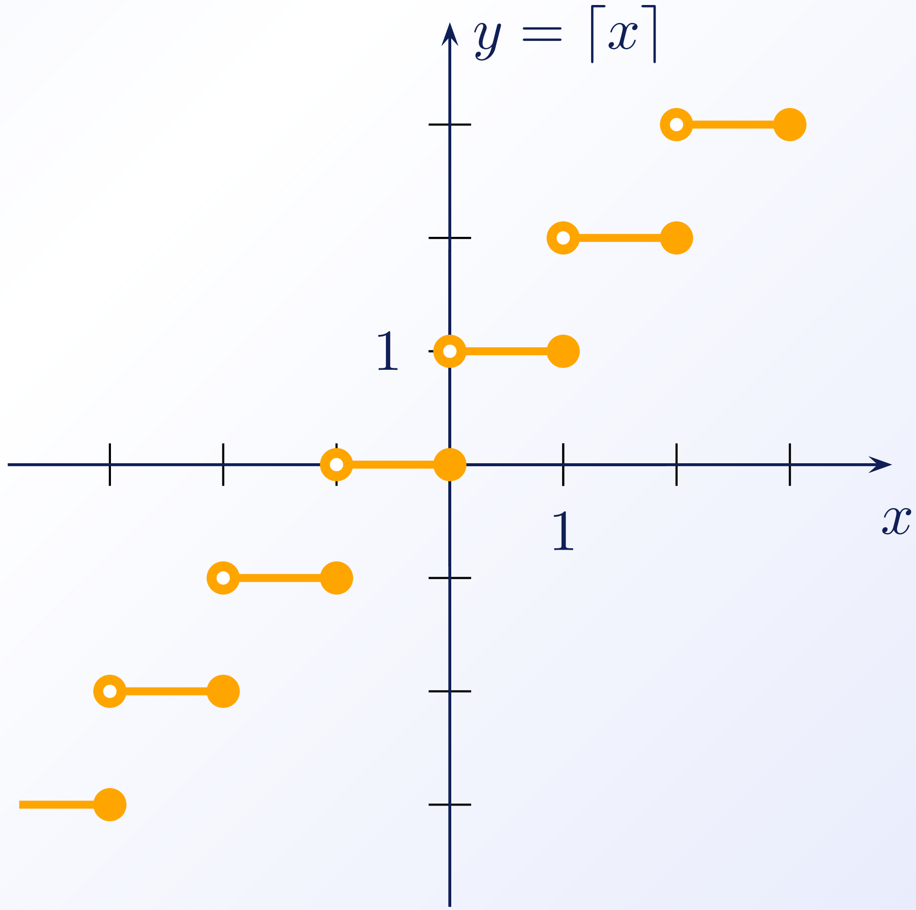
$$\left\lfloor \tfrac{1}{2} \right\rfloor = 0 \qquad \left\lceil \tfrac{1}{2} \right\rceil = 1 \qquad \left\lfloor -\tfrac{1}{2} \right\rfloor = -1 \qquad \left\lceil -\tfrac{1}{2} \right\rceil = 0$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3.1 \rceil = 4 \qquad \lfloor 7 \rfloor = 7 \qquad \lceil 7 \rceil = 7$$

heig-vd

Graphes des fonctions $\lfloor\cdot\rfloor$ et $\lceil\cdot\rceil$





heig-vd

L’opération modulo

Soit a un entier et $m \geq 1$ un entier positif. On note $\mathbf{a \bmod m}$ (lu « a modulo m ») le reste de la division (entière) de a par m.

- Par définition, le reste de la division de a par m est l’unique entier r *non négatif* permettant d’écrire $a = mq + r$ avec q entier et $0 \leq r < m$.

- EXEMPLES.

$$17 \bmod 5 = 2, \quad 134 \bmod 205 = 134 \quad \text{et} \quad -94 \bmod 9 = 5.$$

- REMARQUE. Pour calculer le modulo d’un entier négatif a il est souvent plus simple de calculer le modulo de son opposé $-a$ puis de soustraire le résultat à m :

$$\text{Soient } a < 0 \text{ alors } a \bmod m = m - (-a \bmod m)$$

sauf si a est un multiple de m auquel cas $a \bmod m = -a \bmod m = 0$.

- EXEMPLE.

$$94 \bmod 9 = 4 \text{ et } -94 \bmod 9 = 9 - (94 \bmod 9) = 9 - 4 = 5$$

Si n est un entier positif, la **factorielle de n**, notée $n!$, est le produit des entiers de 1 à n :

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Pour $n = 0$, on pose $0! = 1$.

- La factorielle croît très rapidement. Pour $n \geq 4$ on a $n! > 2^n$.
- La factorielle apparaît fréquemment en combinatoire mais également en analyse :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

et plus généralement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Rappelons que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments distincts dans l'ensemble.
- On peut étendre la notion de cardinal à tous les ensembles (finis ou infinis) :

> Deux ensembles A et B ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de A sur B.

- Deux ensembles de même cardinal sont dits **équipotents**.
- Si un ensemble A (non vide) est fini, il est possible de numéroter ses éléments de 1 à n. On crée alors une bijection de A vers l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Ainsi un ensemble (non vide) est fini si et seulement s'il est équipotent avec l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et on a alors $|A| = n$.

Cardinal de $\mathbb{N}$

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble infini.

- Son cardinal est noté $\aleph_0$ (Aleph zéro).

- Si on retire 0 de $\mathbb{N}$ on obtient l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers positifs. Cet ensemble est, lui aussi, infini et son cardinal est le même que celui de $\mathbb{N}$.

  En effet la fonction $f(n) = n + 1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ et ces deux ensembles ont donc même cardinal.

- L'ensemble $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ des entiers pairs positifs ou nuls est un ensemble infini de même cardinal que $\mathbb{N}$.

  En effet la fonction $f(n) = 2n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{P}$.

- En fait toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit de même cardinal que $\mathbb{N}$ tout entier. En ce sens l'ensemble des entiers naturels est « le plus petit ensemble infini ».

Un ensemble qui est soit fini soit de même cardinal que l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$) est dit **dénombrable**. Si tel n'est pas le cas, l'ensemble est dit **non dénombrable**.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs contient (strictement) l'ensemble $\mathbb{N}$ mais il est également dénombrable.
  En effet la fonction

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

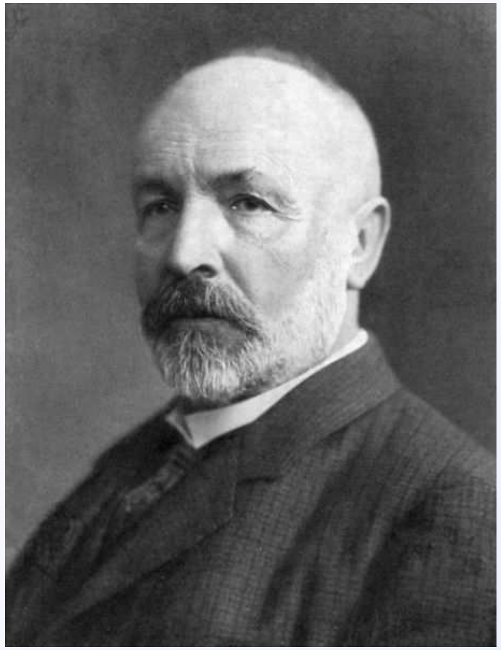
  est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
- On montre que les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{N}^3$,... sont tous dénombrables.
  Mais existe-t-il des ensembles non dénombrables ?

heig-vd

- Le théorème suivant, dû à G. Cantor, montre qu'il existe des ensembles non dénombrables, « plus grands que $\mathbb{N}$ ».

Théorème (G. Cantor). *Pour tout ensemble A, $|\mathscr{P}(A)| > |A|$.*

- Ainsi $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ et l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable. Cet ensemble a le même cardinal que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels qui est donc lui aussi non dénombrable.
- QUELQUES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 1)$, $\ldots$
- QUELQUES ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES : $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $\ldots$



Georg Cantor (1845-1918)

- QUELQUES PROPRIÉTÉS.
  - Si $B \subseteq A$ alors $|B| \leq |A|$. En particulier, si A est dénombrable alors tous ses sous-ensembles le sont et, réciproquement, si B est non dénombrable alors tous ses sur-ensembles le sont aussi.
  - S'il existe une injection de A dans B alors $|A| \leq |B|$ et si B est dénombrable alors A l'est aussi. Réciproquement, s'il existe une surjection de A dans B alors $|A| \geq |B|$ et si B est non dénombrable alors A l'est aussi.