HAUTE ÉCOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION DU CANTON DE VAUD

Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale
Fachhochschule Westschweiz
University of Applied Sciences and Arts Western Switzerland

Mathématiques discrètes

Jean-François Hêche

Automne 2024

Chapitre 1

Ensembles

Ensemble et élément

Intuitivement, un **ensemble** est un regroupement d'**éléments** considérés comme un tout. On note un ensemble en entourant la liste de ses éléments par des accolades.

Exemples

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}\,, \qquad B = \{\text{Oui}, \text{Non}, \text{Peut-être}\}\,.$$

Ensemble vide

L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide** et est noté $\varnothing$ ou $\{\,\}$.

Univers

L'ensemble qui contient tous les éléments (dans un contexte donné) est l'**univers** ou l'**ensemble universel** et sera généralement noté Ω.

1.1 Appartenance et égalité d'ensembles

Relation d'appartenance

Si x est un élément de l'ensemble S, on dit que x **appartient** à S et on note $x \in S$. Dans le cas contraire, x n'appartient pas à S et on note $x \notin S$.

Égalité d'ensembles

Deux ensembles A et B sont **égaux**, et on note $A = B$, s'ils contiennent les mêmes éléments.

Pour définir un ensemble, deux approches principales sont possibles. La première, utilisable dans les cas les plus simples uniquement, consiste à décrire un ensemble **en extension**, c.-à-d. en énumérant complètement (ou partiellement lorsqu'un motif clair peut être établi) ses éléments. La seconde approche consiste à définir en ensemble **en compréhension** en utilisant un **constructeur** d'ensembles qui spécifie une propriété satisfaite par tous les éléments recherchés et par eux seuls.

Exemple

L'ensemble S des chiffres décimaux peut être défini en extension par

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad \text{ou} \quad S = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

et en compréhension par

$$S = \{x \mid x \text{ est entier et } 0 \leq x \leq 9\} \qquad \text{ou} \quad S = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}.$$

1.1 Réécrire en extension chacun des ensembles proposés.

a) $A = \{x \mid x \text{ est entier et } -2 < x \leq 5\}$

b) $B = \{y \mid y \text{ est impair et } |y| < 5\}$

c) $C = \{z \mid z \text{ est réel et } \cos(z) = 3/2\}$

d) $D = \{k \mid k \text{ est entier et } k^2 = -k\}$

1.2 Écrire explicitement chacun des ensembles proposés en énumérant ses éléments.

a) $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 0 \leq k \leq 4\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ \mid n < 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 10\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{R} \mid \log_2(z^2) = 4\}$

Quantificateurs existentiel et universel

1) Le symbole $\exists$, appelé quantificateur existentiel, est l'abréviation de la condition « il existe (au moins) un ».

2) En ajoutant un point d'exclamation au symbole précédent on obtient le quantificateur d'unicité $\exists!$ qui se lit « il existe un seul et unique ».

3) Le quantificateur universel $\forall$ est, lui, l'abréviation de la condition « quel que soit » ou « pour tout ».

1.3 Écrire explicitement les éléments de chaque ensemble.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -4 < n \leq 2\}$

b) $B = \{n \in A \mid n \text{ est impair}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A \text{ tel que } x = |n|\}$

d) $D = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists! n \in A \text{ tel que } y = |n|\}$

1.4 Décider si les appartenances suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{1\} \in \{0, 1\}$

b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$

c) $\{1, 2\} \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

d) $2 \in \{0, 1, 2\}$

e) $1 \in \{\{1\}\}$

f) $2 \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

g) $\varnothing \in \varnothing$

h) $0 \in \varnothing$

i) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

1.5 Parmi les ensembles proposés, déterminer lesquels sont égaux.

$A = \{x \mid |x| = x^2\}$

$B = \{x \mid x^3 = x\}$

$C = \{x \mid x = \sin(k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$

$D = \{1, 1, 0, -1, 0, 1\}$

1.6 Parmi les ensembles proposés, déterminer lesquels sont égaux.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| = 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\ln(x) = \ln(12 - x)\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-2} - \sqrt{x^2 - 8} = 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 9x = 0\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + e^{-x} = 1\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| = |x + 3|\}$

$G = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} = 3^5\}$

$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2/(x + 3) = 9/(x + 3)\}$

1.2 Inclusion et sous-ensembles

Relation d'inclusion

L'ensemble B est **inclus** dans l'ensemble A, et on note $B \subseteq A$, si tout élément appartenant à B appartient également à A :

$$B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A).$$

Sous-ensemble

Si B est inclus dans A, B est appelé un **sous-ensemble** ou une **partie** de A.

Propriétés

1) Tout ensemble est sous-ensemble de lui-même.
2) L'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-ensemble de A quel que soit l'ensemble A.
3) Dans un contexte donné, tous les ensembles considérés sont des parties de l'univers Ω.

Sous-ensemble propre et inclusion stricte

Si B est un sous-ensemble de A mais n'est pas égal à A, B est dit un **sous-ensemble propre** de A. Si on veut insister sur le fait que B est (ou doit être) un sous-ensemble propre de A (et ne peut donc être égal à A), on pourra utiliser la notation $B \subset A$. On a donc

$$B \subset A \iff B \subseteq A \text{ et } B \neq A.$$

1.7 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{3, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$
b) $\{3\} \subseteq \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$
c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$
d) $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4\}$
e) $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$
f) $\varnothing \subseteq \varnothing$

1.8 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{3, 6\} \subset \{3, 4, 5, 6\}$
b) $\{3, 4\} \subset \{3, 4\}$
c) $\{2, 3\} \subseteq \{\{2\}, \{3\}\}$
d) $\{\{4\}\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
e) $\varnothing \subset \varnothing$
f) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$
g) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
h) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
i) $\varnothing \subset \mathbb{Z}$

1.9 Est-il possible de trouver deux ensembles A et B tels que $A \in B$ et $A \subseteq B$?

1.10 Soit T l'ensemble des triangles non dégénérés du plan (c.-à-d. l'ensemble des triangles du plan dont les trois sommets sont distincts et non alignés). Soient, encore, E le sous-ensemble des triangles équilatéraux de T, I le sous-ensemble des triangles isocèles de T et R le sous-ensemble des triangles rectangles de T. Construire un diagramme d'Euler représentant les relations d'inclusion entre ces quatre ensembles.

1.11 Soit Q l'ensemble des quadrilatères convexes du plan. Dans Q, on considère le sous-ensemble C des carrés, le sous-ensemble R des rectangles, le sous-ensemble P des parallélogrammes et le sous-ensemble L des losanges. Construire un diagramme d'Euler représentant les relations d'inclusion entre ces ensembles.

1.3 Opérations sur les ensembles

Les trois opérations ensemblistes de base sont l'*union*, l'*intersection* et le *complément*. Elles correspondent aux opérateurs logiques « ou », « et » et « non ».

Union

L'**union**, ou la **réunion**, de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A ou à B (ou aux deux) :

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Intersection

L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A et à B :

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sans éléments communs, c.-à-d. tels que $A \cap B = \varnothing$, sont dits **disjoints**.

Complément

Le **complément** de l'ensemble A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble formé de tous les éléments de l'univers Ω n'appartenant pas à A :

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

À l'aide des trois opérations de base, on définit deux autres opérations courantes : la *différence* et la *différence symétrique* (cette dernière correspond à l'opérateur logique « ou exclusif »).

Différence

La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Différence symétrique

La **différence symétrique** de deux ensembles A et B, notée $A \triangle B$ ou parfois $A \oplus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit à A soit à B mais pas aux deux. À l'aide des opérations précédentes, elle peut être définie par

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ou par

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

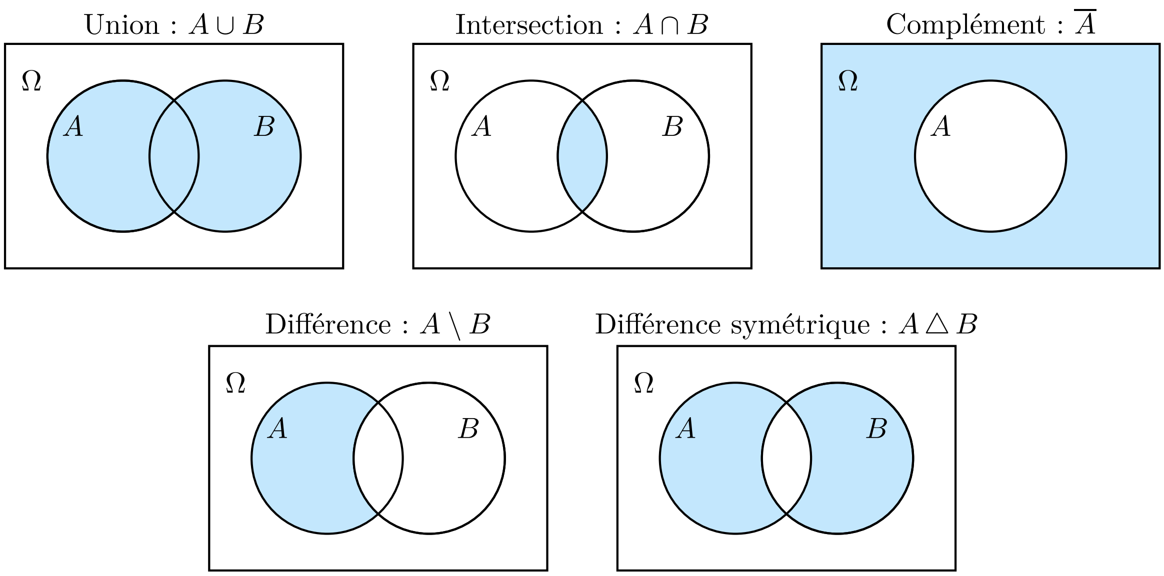


Figure 1.1 – Illustration des opérations ensemblistes à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations.

1.12 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9\}$ et $C = \{1, 3, 7, 11\}$, calculer

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) $B \setminus A$
e) $(A \cup B) \cap C$
f) $A \cup (B \cap C)$
g) $A \setminus C$
h) $(A \setminus C) \setminus B$
i) $A \setminus (C \setminus B)$

1.13 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

a) $A \triangle B$
b) $B \triangle A$
c) $C \triangle C$
d) $C \triangle \varnothing$

1.14 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

a) $A \triangle (B \triangle C)$
b) $(A \triangle B) \triangle C$
c) $A \cup (B \triangle C)$
d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$
e) $A \cap (B \triangle C)$
f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

1.15 Dans chacun des cas suivants, déterminer quelle condition (la plus générale possible) doivent vérifier les ensembles A et B pour que l'égalité ou l'inclusion soit vérifiée.

a) $A \cup B = A$
b) $A \cap B = A$
c) $A \setminus B = A$
d) $A \cap B = B \cap A$
e) $A \setminus B = B \setminus A$
f) $A \cup B \subseteq A \cap B$
g) $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$
h) $A \triangle B = A$

1.16 Dans chaque cas, établir un diagramme de Venn correspondant à l'ensemble proposé.

a) $B \setminus \left(\overline{A \triangle C}\right)$
b) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

Propriétés des opérations ensemblistes

Les principales identités vérifiées par les trois opérations ensemblistes de base sont résumées dans la table 1.1 où A, B et C sont trois sous-ensembles d'un même univers Ω.

Table 1.1 – Principales propriétés des trois opérations ensemblistes de base.

Identité		**Nom**
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		Associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		Distributivité
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$		Commutativité
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$		De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$		Absorption
$\overline{\overline{A}} = A$		Involution
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotence
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$	Identité
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \Omega = \Omega$	Domination
$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complémentarité

1.17 Vérifier la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,

b) à l'aide d'une table d'appartenance,

c) en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

1.18 Soient A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Vérifier l'identité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,

b) à l'aide d'une table d'appartenance,

c) à l'aide des définitions et des propriétés des opérations sur les ensembles (préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée).

1.19 Soient A et B deux ensembles (dans un univers Ω), simplifier les expressions suivantes en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée et vérifier vos résultats à l'aide de diagrammes de Venn.

a) $A \setminus (A \setminus B)$ b) $(A \setminus B) \triangle B$ c) $A \cup (B \setminus A)$ d) $A \cap (B \setminus A)$

1.20 a) La différence est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus B = B \setminus A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

b) La différence est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

quels que soient les ensembles A, B et C ?

1.21 a) La différence symétrique est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

b) La différence symétrique est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$$

quels que soient les ensembles A, B et C ?

Dans l'affirmative, comment peut-on définir la différence symétrique de trois ensembles et plus généralement de k ensembles ?

1.22 Vérifier, à l'aide d'une table d'appartenance si la différence ensembliste est distributive par rapport à l'union.

1.4 Cardinal d'un ensemble fini

Ensemble fini

Un ensemble est **fini** s'il contient n éléments distincts où n est un entier non négatif. Dans le cas contraire, l'ensemble est **infini**.

Cardinal d'un ensemble

Le **cardinal**, ou la **cardinalité**, d'un ensemble fini A, notée $|A|$, est égal au nombre d'éléments distincts formant l'ensemble A.

Certains auteurs préfèrent les notations $\mathrm{Card}(A)$ ou $\#(A)$ pour désigner le cardinal de l'ensemble A.

1.23 Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fini ou non. Dans l'affirmative, donner son cardinal.

a) $A = \{\text{entiers à la fois pairs et impairs}\}$

b) $B = \{\text{cantons suisses}\}$

c) $C = \{\text{réels positifs et inférieurs à } 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = -1\}$

1.24 Déterminer le cardinal des ensembles

a) $\{4\}$

b) $\{\{4\}\}$

c) $\{4, \{4\}\}$

d) $\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}$

e) $\varnothing$

f) $\{\varnothing\}$

g) $\{\varnothing, \{4\}\}$

h) $\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}$

1.25 Soient A et B deux ensembles finis vérifiant $|A| = 26$ et $|B| = 6$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$ si

a) A et B sont disjoints b) $|A \cap B| = 3$ c) $|A \cap B| = 10$

1.26 **Principe d'inclusion-exclusion pour 2 ensembles**
Soient A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \cup B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.27 **Principe d'inclusion-exclusion pour 3 ensembles**
Généraliser le résultat de l'exercice précédent au calcul du cardinal de l'union de trois ensembles finis A, B et C.

1.28 Soient A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \triangle B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.29 Généraliser le résultat de l'exercice précédent au calcul du cardinal de la différence symétrique de trois ensembles finis A, B et C.

1.5 Ensemble des parties

Ensemble des parties
La collection de tous les sous-ensembles d'un ensemble A définit l'**ensemble des parties** de A et est notée $\mathscr{P}(A)$:

$$\mathscr{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}\,.$$

Exemple
L'ensemble des parties de l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$ est

$$\mathscr{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\varnothing, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}\,.$$

Théorème
Pour un ensemble fini A on a

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}\,.$$

1.30 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles

a) $\{0\}$ b) $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ c) $\varnothing$ d) $\mathscr{P}(\{0\})$

1.31 Soit A un ensemble non vide de cardinal n. Combien de sous-ensembles propres et non vides possède l'ensemble A ?

1.32 Dans une classe d'un collège, on compte 17 élèves dont 7 qui portent des lunettes. Combien de groupes non vides et formés uniquement d'élèves de la classe ne portant pas de lunettes peut-on définir ?

1.33 Un club de passionnés de sports aériens compte 25 membres possédant tous une licence de deltaplane, de parapente ou de parachutisme (au moins une parmi les trois). Au total on dénombre 45 licences dans le club pour ces trois sports. On sait également que 8 membres ont au moins leurs licences de deltaplane et de parapente, 10 ont au moins celles de parapente et de parachutisme alors que 7 ont au moins celles de deltaplane et de parachutisme.

a) Modéliser la situation et retranscrire les informations fournies à l'aide du langage ensembliste.

b) À l'aide de votre modélisation et en détaillant et commentant correctement votre démarche, déterminer combien de groupes d'au moins deux membres du club mais composés uniquement de personnes possédant les 3 licences il est possible de former.

1.34 Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{-1, 1\}$, déterminer

a) $\mathscr{P}(A)$ c) $\mathscr{P}(A \cup B)$ e) $\mathscr{P}(A \cap B)$

b) $\mathscr{P}(B)$ d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ f) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

1.35 Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{-1, 1\}$, déterminer

a) $\{X \subseteq A \mid X \in \mathscr{P}(B)\}$ c) $\{X \mid X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)\}$

b) $\{X \in \mathscr{P}(A) \mid X \subseteq B\}$ d) $\{X \subset B \mid X \notin \mathscr{P}(A)\}$

1.36 Pour deux ensembles quelconques A et B, comparer (y a-t-il égalité ? inclusion ?)

a) $\mathscr{P}(A \cup B)$ et $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ b) $\mathscr{P}(A \cap B)$ et $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

1.37 Soient A et B deux ensembles finis. Sous quelle condition (la plus générale possible) a-t-on

$$\mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \setminus B)\ ?$$

1.6 Produit cartésien et n-uples

n-uple

Un ***n*-uple** ou ***n*-uplet** est une liste *ordonnée* de n éléments. On note un n-uple en entourant la liste de ses **composantes** par des parenthèses : $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

La **taille** d'un n-uple est égale au nombre n de ses composantes.

Couple et triplet

Un **couple** est un 2-uple, c'est-à-dire une paire ordonnée de deux éléments, alors qu'un **triplet** est un 3-uple.

Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble de *tous* les couples (a, b) où la première composante est un élément de A alors que la seconde est un élément de B :

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\,.$$

Théorème

Si A et B sont deux ensembles finis, on a

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Le produit cartésien $A \times B \times C$ de trois ensembles est l'ensemble de tous les triplets (a, b, c) avec $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. Plus généralement, le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Puissance d'un ensemble

Pour tout entier positif n, le produit cartésien de l'ensemble A avec lui-même n fois définit la $\boldsymbol{n}^{\mathbf{e}}$ **puissance** de A :

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}.$$

1.38 Pour les ensembles $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ et $C = \{0, 1\}$ calculer

a) $A \times B$ c) $A \times B \times C$ e) $C \times \varnothing$

b) $B \times A$ d) $C^2 \times B$ f) $C \times \{\varnothing\}$

1.39 Soients $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{1\}$ et $U = \{2, 3\}$. Déterminer

a) $|T \times U|$ b) $|S^3|$ c) $|S \times \mathscr{P}(U)|$ d) $|\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(U)|$

1.40 Sous quelles conditions sur les ensembles A et B a-t-on $A \times B = B \times A$?

1.41 On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ et les intervalles fermés $I = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ et $J = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

a) $I \times J$ b) $I \times \mathbb{R}$ c) $I^2 \setminus J^2$

1.42 Soient $A = \{1, 3, 4, 6\}$ et $B = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

a) $A \times B$ b) $\mathbb{R} \times A$ c) $B \times \mathbb{Z}$

1.43 Soient les ensembles

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 4) $D = \{2, 3, 4\}$,

2) $B = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$, 5) $E = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$,

3) $C =]1, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$, 6) $F =]2, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

À l'aide de ces ensembles, **et uniquement de ceux-là**, exprimer chacun des ensembles de la figure 1.2.

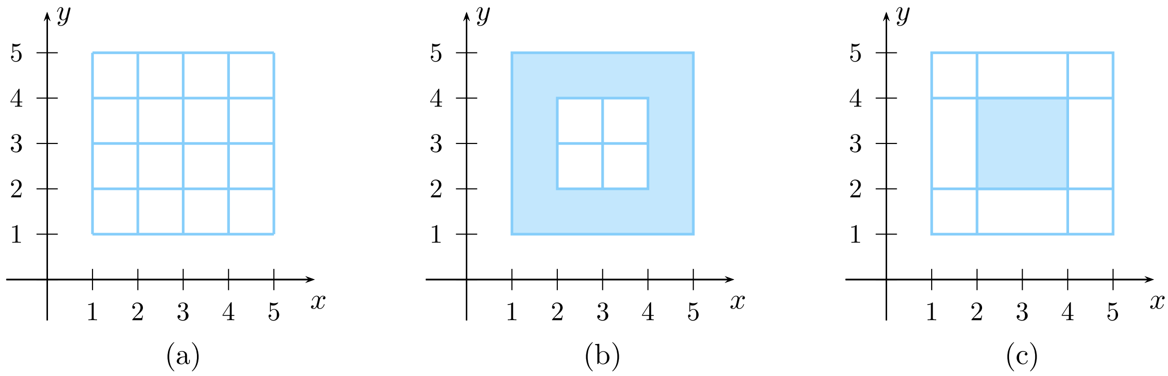


Figure 1.2 – Ensembles de l'exercice 1.43.

1.7 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

1.44 Si $A = \{1, 2, 3\}$, déterminer tous les éléments de l'ensemble

$$S = \{X \subseteq A \mid 1 \in X\}.$$

1.45 Si $x \in y$ et $y \in z$, peut-on en déduire que $x \in z$?

1.46 Si $S \subseteq T$ et $T \subseteq U$, peut-on en déduire que $S \subseteq U$?

1.47 Si $S \subseteq T$, peut-on en déduire que $\mathscr{P}(S) \subseteq \mathscr{P}(T)$?

1.48 Décider – en justifiant votre réponse – si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, alors $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{P}(B)$ sont disjoints.

1.49 Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

a) $1 \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
b) $\{1, 2\} \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
d) $\mathscr{P}(\{1\}) \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$
e) $\varnothing \in \mathscr{P}(\{1\})$
f) $\{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(\{1\})$
g) $(\varnothing, \varnothing) \in \varnothing^2$
h) $\{0, 1\} \in \mathscr{P}(\{0, 1\})$
i) $\{0, 1\} \subseteq \mathscr{P}(\{0, 1\})$

1.50 Soit l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des chiffres décimaux. Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

a) $\{3\} \in A$
b) $\{\{0, 2\}, \{4\}\} \in \mathscr{P}(A)$
c) $\{\varnothing\} \subseteq A$
d) $(1, 7) \in A^2$
e) $9 \in A$
f) $\{\varnothing\} \in \mathscr{P}(A)$
g) $(7, 7) \in A$
h) $\{(1, 7)\} \subseteq \mathscr{P}(A^2)$
i) $\{\{3, 9\}, \{3, 3\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
j) $\{(5, 5)\} \subseteq A^2$
k) $(1, 5, 9) \in A^3$
l) $\{2, -1, 0\} \subseteq A$

1.51 Soit l'ensemble $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Parmi les ensembles A, A^2, $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A)^2$ et $\mathscr{P}(A^2)$,

a) lesquels admettent $\{4\}$ comme élément ?
b) lesquels admettent $\{(2, 6)\}$ comme sous-ensemble ?
c) lesquels admettent $(\{8\}, \{8\})$ comme élément ?
d) lesquels admettent $\varnothing$ comme sous-ensemble ?
e) lesquels admettent $\{\varnothing\}$ comme élément ?
f) lesquels admettent $\{\{0, 8\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.52 Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Parmi les ensembles A, A^2, $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A^2)$, $\mathscr{P}(A)^2$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$,

a) lesquels admettent $(3, 5)$ comme élément ?

b) lesquels admettent $\{\{4,1\}\}$ comme sous-ensemble ?

c) lesquels admettent $\{\{3\},\{5\}\}$ comme élément ?

d) lesquels admettent $\{(4,2)\}$ comme sous-ensemble ?

e) lesquels admettent $\varnothing$ comme élément ?

f) lesquels admettent $\{1,3\}$ comme sous-ensemble ?

g) lesquels admettent $(\{4,3\},\{\varnothing\})$ comme élément ?

h) lesquels admettent $\{\varnothing,\{5\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.53 Soit $A = \{1,3,5,7,9\}$ l'ensemble des chiffres impairs. Dans chacun des cas qui suivent, décider si le losange peut être remplacé par une appartenance, une inclusion, les deux ou aucune des deux.

a) $A \lozenge \mathscr{P}(A)$

b) $\{3,9\} \lozenge A$

c) $A \lozenge \mathbb{N}$

d) $\varnothing \lozenge \mathscr{P}(A)$

e) $\mathbb{Z} \lozenge \mathbb{R}^2$

f) $\{\varnothing\} \lozenge \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$

g) $\{\{3,5\},\{1,7,9\}\} \lozenge \mathscr{P}(A)$

h) $\{(1,3,7)\} \lozenge A^2$

1.54 Une société de développement informatique a passé une annonce pour recruter un nouveau développeur. Afin d'aider le responsable des ressources humaines de la société, les noms des candidat.e.s ont été introduits dans une base de données et les trois listes suivantes ont été créées :

- ▷ une liste A contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous Linux,
- ▷ une liste B contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous MacOS,
- ▷ une liste C contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous Windows.

Formuler à l'aide du langage ensembliste (c.-à-d. à l'aide des opérations sur les ensembles) une requête permettant au responsable des ressources humaines de sélectionner tous les candidat.e.s qui n'ont de l'expérience de développement que sous un seul système d'exploitation.

1.55 Dans une classe, un sondage a montré que les trois activités sportives les plus pratiquées sont l'aïkido (pratiqué par un sous-ensemble A des étudiant.e.s), le *bare foot* (sous-ensemble B) et la chute libre (sous-ensemble C). En utilisant les opérations sur les ensembles, proposer une formule permettant de calculer, à partir des sous-ensembles A, B et C précédents, l'ensemble D des personnes pratiquant exactement deux de ces trois activités sportives.

1.56 Dans chacun des cas suivants, déterminer (et justifier) quelle condition, la plus générale possible, doivent satisfaire les ensembles A et B pour que l'égalité soit vérifiée.

a) $A \triangle B = \varnothing$ b) $A \setminus (A \setminus B) = B$ c) $|A \cup B| = |A| + |B|$

1.57 Déterminer les trois parties A, B et C de $\mathbb{N}$ vérifiant

- ▷ $1 \in A$
- ▷ $\{2,4\} \cap B = \varnothing$
- ▷ $3 \in A \cap B \cap C$
- ▷ $4 \in A \cap C$
- ▷ $A \cap B \not\subseteq C$
- ▷ $B \cup C \not\subseteq A$
- ▷ $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4\}$

1.58 Déterminer les éléments de l'univers Ω et ceux de ses trois sous-ensembles A, B et C en sachant que

- ▷ $\overline{A \cup B \cup C} = \{1, 8, 12\}$
- ▷ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- ▷ $B \cap C = \varnothing$
- ▷ $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$
- ▷ $A \cap C = \{5\}$
- ▷ $\overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$

Détailler clairement chaque étape de votre résolution.

1.59 Dans un groupe de 26 personnes, 9 n'ont ni piercings ni tatouages alors que, parmi les 12 personnes tatouées, 4 ont également des piercings. Combien de personnes du groupe ont-elles des piercings (peu importe qu'elles aient également des tatouages ou non) ?

a) Modéliser la situation et retranscrire les informations fournies à l'aide du langage ensembliste.

b) À l'aide de votre modélisation et en détaillant, expliquant et commentant correctement votre démarche de résolution, déterminer le nombre de personnes du groupe ayant des piercings

1.60 Pour les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, déterminer le cardinal des ensembles

a) $\mathscr{P}(A \cap B)$ b) $\mathscr{P}(A \cup B)$ c) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

Indication. Utiliser les résultats des exercices 1.26 et 1.36.

1.61 Soient A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω), montrer que $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,

b) à l'aide d'une table d'appartenance,

c) en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

1.62 Soient A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Décider si l'identité suivante est valide ou non à l'aide d'une table d'appartenance.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C).$$

1.63 Soient A et B deux ensembles (dans un univers Ω), vérifier l'identité suivante en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée.

$$\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B.$$

1.64 Soient A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 7, \quad |B| = 6 \quad \text{et} \quad |A \triangle B| = 5.$$

Déterminer, en précisant les étapes intermédiaires de calcul,

a) $|A \cap B|$, b) $|A^2 \times B|$, c) $|\mathscr{P}(B)|$, d) $|\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)|$.

1.65 Soient A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 8, \quad |B| = 10 \quad \text{et} \quad |A \cup B| = 12.$$

Déterminer, en expliquant et en détaillant les étapes intermédiaires de calcul,

a) $|B \setminus A|$, b) $|A \times B|$, c) $|\mathscr{P}(A)|$, d) $|\mathscr{P}(A) \triangle \mathscr{P}(B)|$.

1.66 Soient les ensembles $I = [0,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $J = [2,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$ et $K = \{0,2,4\}$. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère les ensembles

a) $I \times K$ b) $K \times \mathbb{R}_+$ c) $I^2 \setminus (\mathbb{R} \times J)$

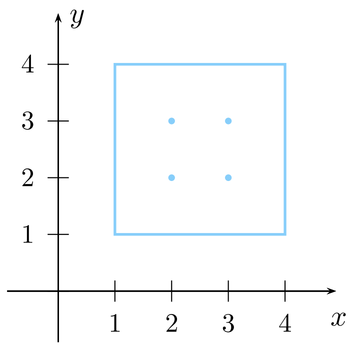
1.67 Soient les ensembles

1) $A = \{1,2,3,4\}$,
2) $B = [1,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$,
3) $C =]1,4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$,
4) $D = \{2,3\}$,
5) $E = [2,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
6) $F =]2,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

a) Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

i) $(C \setminus F) \times D$, ii) $(B \times E) \triangle (E \times B)$.

b) À l'aide des ensembles proposés, et uniquement de ceux-là, exprimer l'ensemble représenté ci-dessous.



1.68 Soient les ensembles

1) $A = \{1,2,3,4\}$,
2) $B = [1,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$,
3) $C =]1,4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$,
4) $D = \{2,3\}$,
5) $E = [2,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
6) $F =]2,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

a) $A \times F$, b) $A^2 \setminus C^2$, c) $(B \triangle E)^2$.

1.69 Pour les quatre ensembles

$$A = \{0,1\}, \quad B = \{-1,1\}, \quad C = \{-2,0,2\} \quad \text{et} \quad D = \{0,2,4\}$$

déterminer

a) $\mathscr{P}(B)$,
b) $A \triangle B \triangle C \triangle D$,
c) $(D \setminus C) \times (A \cup B)$,
d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathscr{P}(C)\}$.

1.70 Pour A et B deux ensembles finis de cardinal respectif n et m, déterminer le cardinal de

a) $\mathscr{P}(A \times B)$ b) $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ c) $\mathscr{P}(A^k)$, $k \geq 1$

1.71 **Paradoxe de Russell**

Soit S l'ensemble contenant tous les ensembles X qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes :

$$S = \{X \mid X \notin X\}.$$

a) Pour chacun des ensembles X suivants, décider s'il appartient ou non à S :

$$X = \varnothing, \qquad X = \{\text{Oui}, \text{Non}\}, \qquad X = \{1, \{1\}\}, \qquad X = \mathbb{N}.$$

b) Montrer que l'affirmation $S \in S$ conduit à une contradiction.

c) Montrer que l'affirmation $S \notin S$ conduit, également, à une contradiction.

1.8 Solutions d'exercices choisis

1.1 a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $C = \varnothing$
b) $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ d) $D = \{-1, 0\}$

1.2 a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ c) $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $B = \varnothing$ d) $D = \{-4, 4\}$

1.3 a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ c) $C = \{0, 1, 2, 3\}$
b) $B = \{-3, -1, 1\}$ d) $D = \{0, 3\}$

1.4 a) $\{1\} \notin \{0, 1\}$ d) $2 \in \{0, 1, 2\}$ g) $\varnothing \notin \varnothing$
b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$ e) $1 \notin \{\{1\}\}$ h) $0 \notin \varnothing$
c) $\{1, 2\} \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ f) $2 \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ i) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

1.5 $A = B = D = \{-1, 0, 1\}$ mais $C = \{0\}$

1.6 $A = D = \{0, 3\}$, $B = C = G = H = \{3\}$, $E = \varnothing$ et $F = \{0\}$

1.7 a) $\{3, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$ c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ e) $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$
b) $\{3\} \nsubseteq \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ d) $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4\}$ f) $\varnothing \subseteq \varnothing$

1.8 a) $\{3, 6\} \subset \{3, 4, 5, 6\}$ d) $\{\{4\}\} \nsubseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ g) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
b) $\{3, 4\} \not\subset \{3, 4\}$ e) $\varnothing \not\subset \varnothing$ h) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
c) $\{2, 3\} \nsubseteq \{\{2\}, \{3\}\}$ f) $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$ i) $\varnothing \subset \mathbb{Z}$

1.9 Oui, par exemple $A = \{1\}$ et $B = \{1, \{1\}\}$ ou, plus simplement, $A = \varnothing$ et $B = \{\varnothing\}$.

1.12 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ d) $B \setminus A = \{5, 9\}$ g) $A \setminus C = \{2, 4\}$
b) $A \cap B = \{1\}$ e) $(A \cup B) \cap C = \{1, 3\}$ h) $(A \setminus C) \setminus B = \{2, 4\}$
c) $A \setminus B = \{2, 3, 4\}$ f) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$ i) $A \setminus (C \setminus B) = \{1, 2, 4\}$

1.13 a) $A \triangle B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ c) $C \triangle C = \varnothing$
b) $B \triangle A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} = A \triangle B$ d) $C \triangle \varnothing = C$

1.14 a) $A \triangle (B \triangle C) = \{2, 5, 8\}$ d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = \{8\}$
b) $(A \triangle B) \triangle C = \{2, 5, 8\}$ e) $A \cap (B \triangle C) = \{1, 3, 4, 6\}$
c) $A \cup (B \triangle C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, 3, 4, 6\}$

1.15 a) $B \subseteq A$ c) $A \cap B = \varnothing$ e) $A = B$ g) $A \subseteq B$
b) $A \subseteq B$ d) Toujours vrai f) $A = B$ h) $B = \varnothing$

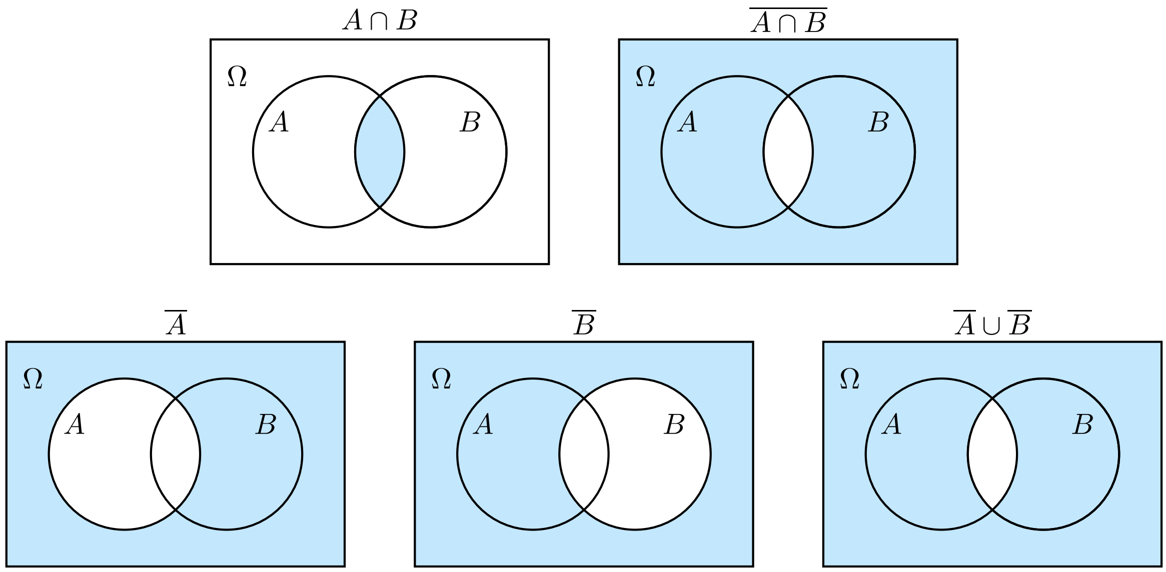
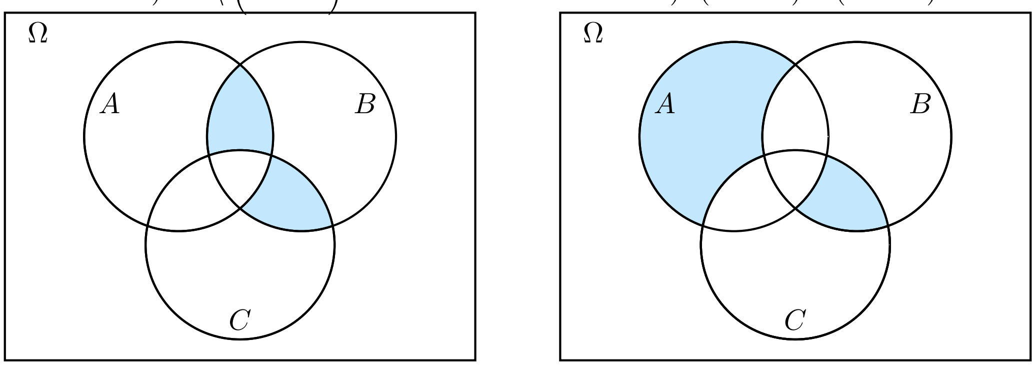


Figure 1.3 – Vérification de la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations. La validité de la loi résulte de l'égalité des deux diagrammes de droite.

1.16

a) $B \setminus \left(\overline{A \triangle C}\right)$ b) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$



1.17 a) Voir figure 1.3.

b) L'identité est vraie car les colonnes 4 et 7 de la table d'appartenance qui suit sont identiques.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

c) Premièrement, supposons que $x \in \overline{A \cap B}$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Dit autrement, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Ainsi $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Supposons maintenant que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. On doit avoir $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, c.-à-d. $x \notin A$ ou $x \notin B$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ceci montre que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ et la propriété est vérifiée.

1.18 b) L'identité est vraie car les colonnes 5 et 8 de la table d'appartenance qui suit sont identiques.

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

c) L'identité $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ est vraie car on a d'une part

$$\begin{array}{rcll} A \setminus (B \cup C) & = & A \cap \overline{(B \cup C)} & \text{(définition de la différence : } S \setminus T = S \cap \overline{T}) \\ & = & A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) & (1^{\text{re}} \text{ loi de De Morgan}) \\ & = & A \cap \overline{B} \cap \overline{C} & \text{(associativité de l'intersection)} \end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcll} (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & = & (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) & \text{(déf. de la différence)} \\ & = & A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} & \text{(associativité de l'intersection)} \\ & = & (A \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{C} & \text{(commutativité et associativité de } \cap) \\ & = & A \cap \overline{B} \cap \overline{C} & \text{(idempotence : } A \cap A = A) \end{array}$$

1.19 a)

$$\begin{array}{rcll} A \setminus (A \setminus B) & = & A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} & \text{(définition de la différence : } S \setminus T = S \cap \overline{T}) \\ & = & A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) & (2^{\text{e}} \text{ loi de De Morgan}) \\ & = & A \cap (\overline{A} \cup B) & \text{(involution)} \\ & = & (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) & \text{(distributivité de } \cap) \\ & = & \varnothing \cup (A \cap B) & \text{(complémentarité)} \\ & = & A \cap B & \text{(identité)} \end{array}$$

b) Premier développement :

$$\begin{array}{rcll} (A \setminus B) \triangle B & = & (A \cap \overline{B}) \triangle B & \text{(déf. de la différence)} \\ & = & \Big((A \cap \overline{B}) \setminus B\Big) \cup \Big(B \setminus (A \cap \overline{B})\Big) & \text{(déf. de la différence sym.)} \\ & = & \Big(A \cap \overline{B} \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\Big) & \text{(déf. de la différence)} \\ & = & \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\Big) & \text{(idempotence : } \overline{B} \cap \overline{B} = \overline{B}) \\ & = & \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})\Big) & \text{(De Morgan)} \\ & = & \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap (\overline{A} \cup B)\Big) & \text{(involution : } \overline{\overline{B}} = B) \\ & = & \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup B & \text{(absorption)} \\ & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) & \text{(distributivité de } \cup) \\ & = & (A \cup B) \cap \Omega & \text{(complémentarité)} \\ & = & A \cup B & \text{(identité)} \end{array}$$

Autre développement possible :

$$\begin{aligned}
(A\setminus B)\triangle B &= (A\cap\overline{B})\triangle B && \text{(déf. de la différence)}\\
&= \big((A\cap\overline{B})\setminus B\big)\cup\big(B\setminus(A\cap\overline{B})\big) && \text{(déf. de la diff. sym.)}\\
&= \big(A\cap\overline{B}\cap\overline{B}\big)\cup\big(B\cap\overline{(A\cap\overline{B})}\big) && \text{(déf. de la différence)}\\
&= \big(A\cap\overline{B}\big)\cup\big(B\cap\overline{(A\cap\overline{B})}\big) && \text{(idempotence)}\\
&= \big((A\cap\overline{B})\cup B\big)\cap\big((A\cap\overline{B})\cup\overline{(A\cap\overline{B})}\big) && \text{(distributivité de }\cup)\\
&= \big((A\cap\overline{B})\cup B\big)\cap\Omega && \text{(complémentarité)}\\
&= (A\cap\overline{B})\cup B && \text{(identité)}\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B) && \text{(distributivité de }\cup)\\
&= (A\cup B)\cap\Omega && \text{(complémentarité)}\\
&= A\cup B && \text{(identité)}
\end{aligned}$$

1.20 a) Non, la différence de deux ensembles n'est pas une opération commutative. Les points c) et d) de l'exercice 1.12 fournissent un contre-exemple. Plus généralement, selon le point e) de l'exercice 1.14, on a $A\setminus B = B\setminus A$ uniquement dans le cas où les ensembles A et B sont égaux.

b) Non, la différence ensembliste n'est pas associative. Les points h) et i) de l'exercice 1.12 fournissent un contre-exemple.

1.21 a) Oui, la différence symétrique de deux ensembles est une opération commutative. Cela découle de la définition même de l'opération, la construction « soit . . . soit . . . » étant commutative.

b) Oui, la différence symétrique est une opération associative. Pour trois ensembles, le résultat est formé des éléments appartenant à un seul de ces ensembles ou aux trois. **Plus généralement, pour k ensembles, leur différence symétrique est formée des éléments appartenant à un nombre impair de ces ensembles et uniquement à un nombre impair**.

1.22 La différence ne se distribue pas, à gauche, sur l'union comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 ne sont pas identiques.

A	B	C	$B\cup C$	$A\setminus(B\cup C)$	$A\setminus B$	$A\setminus C$	$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	**0**	1	0	**1**
1	1	0	1	**0**	0	1	**1**
1	1	1	1	0	0	0	0

En revanche la différence se distribue, à droite, sur l'union comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 sont identiques.

A	B	C	$A\cup B$	$(A\cup B)\setminus C$	$A\setminus C$	$B\setminus C$	$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**	0	0	**0**
1	1	0	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

1.23 a) A est fini ($A = \varnothing$) et $|A| = 0$
b) B est fini et $|B| = 26$
c) C est infini ($C =]0, 1[$)
d) D est infini ($D = \{x \mid x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)

1.24 a) $|\{4\}| = 1$
b) $|\{\{4\}\}| = 1$
c) $|\{4, \{4\}\}| = 2$
d) $|\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}| = 2$
e) $|\varnothing| = 0$
f) $|\{\varnothing\}| = 1$
g) $|\{\varnothing, \{4\}\}| = 2$
h) $|\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}| = 3$

1.25 a) 32 b) 29 c) Données incohérentes

1.26 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1.27 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

1.28 $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

1.29 $|A \triangle B \triangle C| = |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C| + 4|A \cap B \cap C|$

1.30 a) $\mathscr{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$
b) $\mathscr{P}(\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}) = \{\varnothing, \{\mathrm{x}\}, \{\mathrm{y}\}, \{\mathrm{z}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{z}\}, \{\mathrm{y}, \mathrm{z}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}\}$
c) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
d) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0\})) = \mathscr{P}(\{\varnothing, \{0\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{0\}\}, \{\varnothing, \{0\}\}\}$

1.31 L'ensemble A possède $2^n - 2$ sous-ensembles propres et non vides.

1.32 Il est possible de former 1023 groupes non vides ne comprenant que des élèves ne portant pas de lunettes.

1.33 Il existe 26 groupes de cardinal au moins égal à deux et composés uniquement de membres du club possédant les 3 licences.

1.34 a) $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
b) $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$
c) $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$
d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}\}$
e) $\mathscr{P}(A \cap B) = \{\varnothing, \{1\}\}$
f) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}\}$

1.35 a) $\{X \subseteq A \mid X \in \mathscr{P}(B)\} = \{\varnothing, \{1\}\}$
b) C'est le même ensemble qu'au point a)
c) C'est le même ensemble qu'aux points a) et b)
d) $\{X \subset B \mid X \notin \mathscr{P}(A)\} = \{\{-1\}\}$

1.36 a) Quels que soient les ensembles A et B on a toujours

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$$

car on a la suite d'équivalences et d'implications

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad X \in \mathscr{P}(A) \text{ ou } X \in \mathscr{P}(B) \quad &&\Longleftrightarrow \quad X \subseteq A \text{ ou } X \subseteq B \\ &\Longrightarrow \quad X \subseteq A \cup B &&\Longleftrightarrow \quad X \in \mathscr{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

Mais il n'y a pas égalité en général (voir les points c) et d) de l'exercice 1.34 pour un contre-exemple). En fait il y a égalité si et seulement si l'un des deux ensembles est inclus dans l'autre car s'il existe $a \in A \setminus B$ et $b \in B \setminus A$, la paire $\{a, b\}$ est un élément de $\mathscr{P}(A \cup B)$ mais pas de $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

b) Quels que soient les ensembles A et B on a toujours

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$$

car on a la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) &\iff X \in \mathscr{P}(A) \text{ et } X \in \mathscr{P}(B) &&\iff X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B \\ &\iff X \subseteq A \cap B &&\iff X \in \mathscr{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

1.37 Il n'y a jamais égalité car, quels que soient les ensembles A et B, l'ensemble vide est toujours élément de $\mathscr{P}(A \setminus B)$ mais n'est jamais élément de $\mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.

1.38 a) $A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

b) $B \times A = \{(x,a),(y,a),(x,b),(y,b),(x,c),(y,c)\}$

c) $A \times B \times C = \{(a,x,0),(a,x,1),(a,y,0),(a,y,1),(b,x,0),(b,x,1),$
$(b,y,0),(b,y,1),(c,x,0),(c,x,1),(c,y,0),(c,y,1)\}$

d) $C^2 \times B = C \times C \times B = \{(0,0,x),(0,0,y),(0,1,x),(0,1,y),(1,0,x),$
$(1,0,y),(1,1,x),(1,1,y)\}$

e) $C \times \varnothing = \varnothing$

f) $C \times \{\varnothing\} = \{(0,\varnothing),(1,\varnothing)\}$

1.39 a) $|T \times U| = |T| \cdot |U| = 1 \cdot 2 = 2$

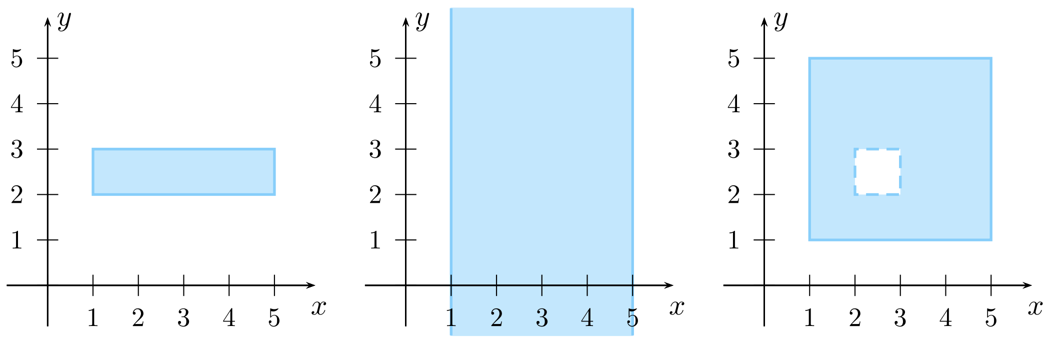
b) $|S^3| = |S|^3 = 3^3 = 27$

c) $|S \times \mathscr{P}(U)| = |S| \cdot |\mathscr{P}(U)| = |S| \cdot 2^{|U|} = 3 \cdot 2^2 = 12$

d) $|\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(U)| = |\mathscr{P}(T)| \cdot |\mathscr{P}(U)| = 2^{|T|} \cdot 2^{|U|} = 2^1 \cdot 2^2 = 8$

1.40 Si les deux ensembles sont égaux ou si l'un des deux ensembles (au moins) est vide.

1.41



(a) (b) (c)

1.43 a) $(A \times B) \cup (B \times A)$

b) $(B^2 \setminus F^2) \cup (D \times E) \cup (E \times D)$

c) $((A \setminus F) \times B) \cup (B \times (A \setminus F)) \cup E^2$

1.44 $S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

1.45 Non, contre-exemple : $x = 1$, $y = \{1\}$ et $z = \{\{1\}\}$, on a bien $x \in y$ et $y \in z$ mais $x \notin z$.

1.46 Oui, la relation d'inclusion est transitive : si tout élément de S est également élément de T et que simultanément tout élément de T est également élément de U alors tout élément de S est élément de U.

1.47 Oui, $X \in \mathscr{P}(S)$ si et seulement $X \subseteq S$ ainsi si $S \subseteq T$ on en déduit immédiatement, par transitivité de l'inclusion (voir l'exercice précédent), que $X \subseteq T$ autrement dit que $X \in \mathscr{P}(T)$.

1.48 L'affirmation est fausse. Deux ensembles des parties ne sont jamais disjoints car ils ont au minimum l'ensemble vide en commun.

1.49 a) $1 \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
b) $\{1, 2\} \notin \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
d) $\mathscr{P}(\{1\}) \not\subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$
e) $\varnothing \in \mathscr{P}(\{1\})$
f) $\{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(\{1\})$
g) $(\varnothing, \varnothing) \notin \varnothing^2$
h) $\{0, 1\} \in \mathscr{P}(\{0, 1\})$
i) $\{0, 1\} \not\subseteq \mathscr{P}(\{0, 1\})$

1.50 a) $\{3\} \notin A$
b) $\{\{0, 2\}, \{4\}\} \notin \mathscr{P}(A)$
c) $\{\varnothing\} \not\subseteq A$
d) $(1, 7) \in A^2$
e) $9 \in A$
f) $\{\varnothing\} \notin \mathscr{P}(A)$
g) $(7, 7) \notin A$
h) $\{(1, 7)\} \not\subseteq \mathscr{P}(A^2)$
i) $\{\{3, 9\}, \{3, 3\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
j) $\{(5, 5)\} \subseteq A^2$
k) $(1, 5, 9) \in A^3$
l) $\{2, -1, 0\} \not\subseteq A$

1.51 a) $\mathscr{P}(A)$
b) A^2
c) $\mathscr{P}(A)^2$
d) Tous
e) Aucun
f) $\mathscr{P}(A)$

1.52 a) A^2
b) $\mathscr{P}(A)$
c) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$
d) A^2
e) $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A^2)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$
f) A
g) Aucun
h) $\mathscr{P}(A)$

1.53 a) Appartenance uniquement
b) Inclusion uniquement
c) Inclusion uniquement
d) Appartenance et inclusion
e) Ni l'une ni l'autre
f) Appartenance et inclusion
g) Inclusion uniquement
h) Ni l'une ni l'autre

1.54 $(A \triangle B \triangle C) \setminus (A \cap B \cap C)$ ou $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$ ou ...

1.55 $(A \cup B \cup C) \setminus (A \triangle B \triangle C)$ ou $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$ ou ...

1.56 a) $A = B$
b) $B \subseteq A$
c) $A \cap B = \varnothing$

1.57 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3, 4\}$

1.58 1) $\Omega = B \cup \overline{B} = A \cup B) \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
2) $B = \Omega \setminus \overline{B} = \{3, 4, 7, 9\}$
3) $B \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{7, 9\}$
4) $B \setminus A = B \setminus (A \cup C) = \{7, 9\}$ car $B \cap C = \varnothing$
5) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \{2, 3, 4, 5\}$
6) $C \setminus A = (A \cup C) \setminus A = \{6, 10, 11\}$
7) $C = (C \setminus A) \cup (A \cap C) = \{5, 6, 10, 11\}$

1.59 a) On définit les ensembles
- ▷ Ω égal au groupe de 26 personnes (l'univers du problème),
- ▷ P égal à l'ensemble des personnes de Ω possédant des piercings,
- ▷ T égal à l'ensemble des personnes de Ω possédant des tatouages.

De l'énoncé on obtient
- ▷ $|\Omega| = 26$ (26 personnes dans le groupe),
- ▷ $|\overline{P \cup T}| = 9$ (9 personnes n'ont ni piercings ni tatouages),
- ▷ $|T| = 12$ (12 personnes sont tatouées)
- ▷ $|P \cap T| = 4$ (4 personnes ont des tatouages et des piercings).

b) On cherche le nombre de personnes ayant des piercings, c.-à-d. le cardinal de P.

▷ On obtient facilement la cardinal de $P \cup T$:

$$|P \cup T| = |\Omega| - |\overline{P \cup T}| = 26 - 9 = 17.$$

▷ La formule d'inclusion-exclusion permet ensuite d'obtenir la valeur cherchée :

$$|P| = |P \cup T| + |P \cap T| - |T| = 17 + 4 - 12 = 9.$$

Le groupe compte donc 9 personnes avec des piercings.

1.60 a) $\begin{aligned}[t] |\mathscr{P}(A \cap B)| &= 2^{|A \cap B|} && \text{(thm. page 8)} \\ &= 2^3 = 8 && (A \cap B = \{0,2,4\}) \end{aligned}$

b) $\begin{aligned}[t] |\mathscr{P}(A \cup B)| &= 2^{|A \cup B|} && \text{(thm. page 8)} \\ &= 2^8 = 256 && (A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned}[t] |\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)| &= |\mathscr{P}(A \cap B)| && \text{(ex. 1.36)} \\ &= 2^3 = 8 && \text{(point a)} \end{aligned}$

d) $\begin{aligned}[t] |\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)| &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)| && \text{(ex. 1.26)} \\ &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A \cap B)| && \text{(ex. 1.36)} \\ &= 2^{|A|} + 2^{|B|} - 2^{|A \cap B|} = 2^6 + 2^5 - 2^3 \\ &= 64 + 32 - 8 = 88 \end{aligned}$

1.62 L'identité n'est pas valide comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 ne sont pas identiques.

A	B	C	$B \triangle C$	$A \cup (B \triangle C)$	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	**0**	1	1	**1**
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	**1**	0	0	**0**

1.64 a) On sait que $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ (ex. 1.28). Ainsi

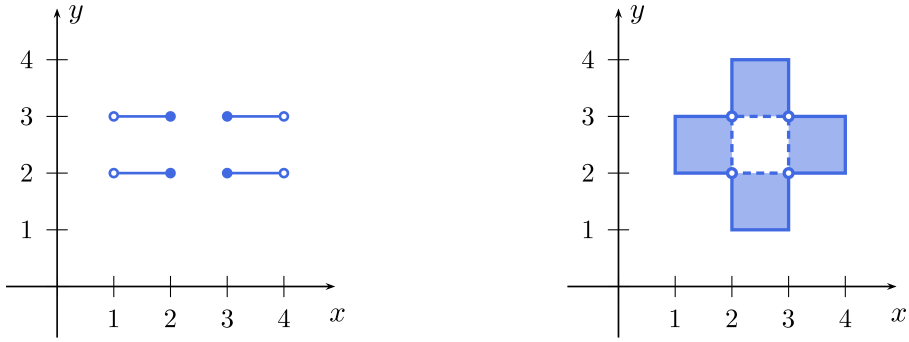
$$|A \cap B| = \frac{|A| + |B| - |A \triangle B|}{2} = \frac{7 + 6 - 5}{2} = 4$$

b) $|A^2 \times B| = |A^2| \cdot |B| = |A|^2 \cdot |B| = 7^2 \cdot 6 = 49 \cdot 6 = 294$

c) $|\mathscr{P}(B)| = 2^{|B|} = 2^6 = 64$

d) $\begin{aligned}[t] |\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)| &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)| && \text{(ex. 1.26)} \\ &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A \cap B)| && \text{(ex. 1.36)} \\ &= 2^{|A|} + 2^{|B|} - 2^{|A \cap B|} = 2^7 + 2^6 - 2^4 \\ &= 128 + 64 - 16 = 176 \end{aligned}$

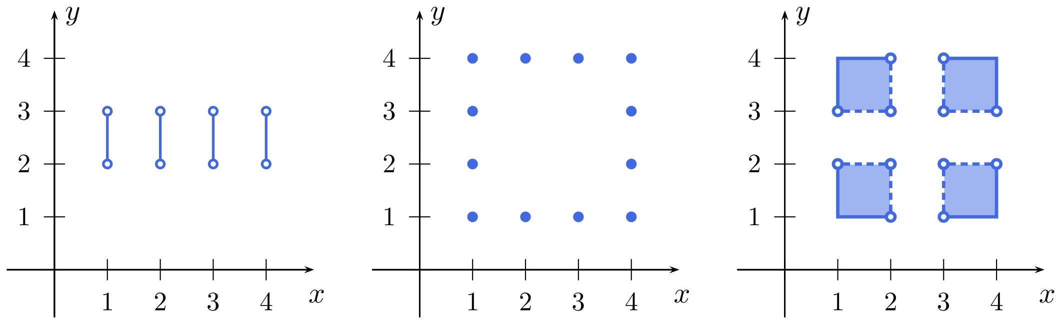
1.67 a)



(i) (ii)

b) $(B^2 \setminus C^2) \cup D^2$

1.68



(a) (b) (c)

1.69 a) $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$

b) $A \triangle B \triangle C \triangle D = \{-2, -1, 0, 4\}$ (ensemble des éléments appartenant à 1 ou 3 des 4 ensembles)

c) $(D \setminus C) \times (A \cup B) = \{(4, -1), (4, 0), (4, 1)\}$

d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathscr{P}(C)\} = \{X \subseteq D \mid X \nsubseteq C\} = \{\{4\}, \{0, 4\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}\}$

1.70 a) 2^{nm} b) $2^{(n+m)}$ c) 2^{n^k}, $k \geq 1$