Serie 1 – théorie

exemple: $x^2 + x + 1 > 0$

strictement +

↳ 

$S = \mathbb{R}$

$(x-2)(x^2-8x+12) < 0$

tableau de signe si produit $(x-2)(x-6)$

pt important : $-2 ; 2 ; 6$

x	$-\infty$	-2	2	6
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2-8x+12$	$+$	$+$	$-$	$+$
$(x+2)(x^2-8x+12)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty ; -2[\cup]2 ; 6[$

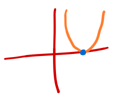
very important ⚠

↳ to use w/ facto ⚠

$x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$\Delta = 0$ $S = \{1\}$

$(x+1)(x-2)$



	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$-3x+1$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
A	$+$	$-$	$+$	$-$	

stackable

$S =]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{3} ; 1[$

$|a| = c \iff a = \pm c$ si $c \geq 0$

$|a| < c \iff -c < a < c$

$|x-1| < 2 \iff -2 < x-1 < 2$
$\iff -1 < x < 3$

→ $|a| > c \iff a > c$ ou $a < -c$

$|x-1| > 2 \iff x-1 > 2$ ou $x-1 < -2$
$\iff x > 3$ ou $x < -1$

$S =]3 ; +\infty[\cup]-\infty ; -1[$

réunion de deux intervalles

on peut mettre sous le same dénominateur

$\frac{x-1}{x+1} > \frac{x}{x-1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x+1} > 0$

$x \neq -1$
$x \neq 1$

$= \frac{(x-1)^2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0$

$= \frac{\cancel{x^2} - 2x + 1 - \cancel{x^2} - x}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{-3x+1}{(x+1)(x-1)}$ $-1 ; 1$

$= 3x + 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}$

Ex 7:

e) $\frac{2-x}{(x+1)^2(x+2)(x-4)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} =$

$\frac{(2-x)(x+2) + (x+1)(x-4)}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)} = \frac{\cancel{4} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - 3x - \cancel{4}}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)}$

$= \frac{-3x}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)}$

dénominateur commun

↳ on prend le max

$\Rightarrow (x+1)^2(x+2)^2(x+4)$

on peut prendre pour ajouter !

Serie 3 – théorie

Exponentiel:

$a > 0$ & $a \neq 1$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

$x \to a^x$

fonction expo en base a

Remarque: $a > 0$?

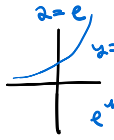
$a = -2$

exp_a $x = \frac{1}{2} \to a^x = -2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$

→ $a \neq 1$ $1^x = 1 \Rightarrow$ constante

En analyse $e = 2,718...$

$a = e$



$y = e^x$

e^{100}

$a = 2 \to$ binaire

$a = 10 \to$

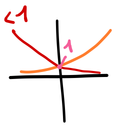
Propriétés: $a > 0$ $a \neq 1$

$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

$a^0 = 1$ $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$y = a^x$ $a < 1$



$y = a^x$
$a > 1$

⚠ 0^0 = indéfini

Logarithmes: $a > 0$ $a \neq 1$

$\mathbb{R}$ $]0 ; +\infty[$ est bijective $\Rightarrow \forall y \in]0 ; +\infty[$

$exp_a = x \Rightarrow a^x$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ $a^x = y$

$\log_a(y) = x \iff a^x = y$

$y > 0$ ⚠ $\ln(-4) = x$ $e^x = -4$ IMPOSSIBLE!

Remarque:

Si $a = e$ $(2,71...)$ $\log_a = \ln$

$\ln(e^3) = x = e^x = e^3$
$x = 3$

fonction réciproque $\Rightarrow \log_a(a^x) = x$

Propriétés: ① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

$\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$

$A^B = e^{B \ln(A)}$

Compléments:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^b) = b \log_a(x)$

$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$e^{\ln(*)} = *$ $\ln(e^*) = *$

$\xrightarrow{exp(x)}$ $\xleftarrow{\log_a}$ aller retour

$10^{\log(*)} = *$

Pw nég handling: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\Rightarrow$ goes both ways

Pw handling:

$a^m a^n = a^{m+n}$ $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$

$(ab)^n = a^n b^n$

Root handling (radical)

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$b \neq 0$

calculs rules

$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

$(x^r)^s = x^{r \cdot s}$ $x^r \cdot y^r = (xy)^r$

fract. =

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $x \geq 0$

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $x \geq 0$

$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

Id remarquable

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

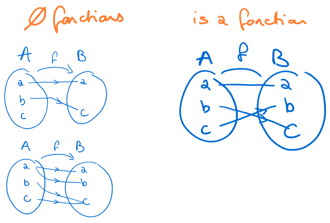
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Serie 2 - théorie

Fonctions : correspondance foreach élément d'un ensemble A, lui associe 1 only 1 élément d'un ensemble B

chaque élément à 1 seule img

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$



Domaine de définitions d'une fonction
le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ | fonction f est bien définie

Exemple :

① $f(x) = \sqrt{x-1}$

$D(f)$: domaine de déf. f.

$x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$

$D(f) = [1;+\infty[$

② $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$D(f) = x+2 \neq 0$

$x+2 = 0$
$x = -2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Composition de fonctions

f & $g \Rightarrow 2$ fonctions

exemple : $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \frac{1}{x+2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = f(y)$

Dom. de déf. $(f \circ g)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 1ère cond. $x \in D(g)$

2e cond. $g(x) \in D(f)$

$x \neq 2$

$D(f \circ g) =]-2;+\infty[$

$\sqrt{y}$

$= \sqrt{\frac{1}{x+2}} \to \frac{1}{x+2} \geq 0$

$x+2 > 0$
$x > 2$

Rem. : $f \circ g \neq g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$x \geq 0 \quad g(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad \sqrt{x}+2 > 0$

$D(g \circ f) = [0;+\infty[$

Parité

f est paire si $f(-x) = f(x)$

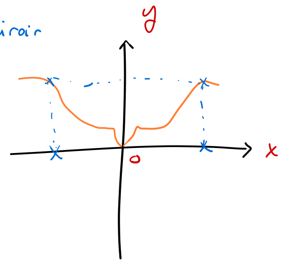
↳ symétrie par rapport à Oy — miroir

exemple : ① $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

② $f(x) = |x|$

$f(x) = |-x| = |x| = f(x)$

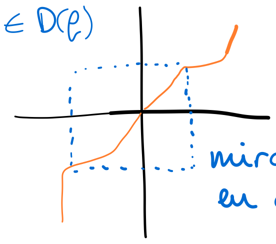


f est impaire $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$

Exemple : ① $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

② $f(x) = \sin(x)$



miroir en diag.

f est ni paire, ni impaire →

$f(x) = x^2 + x^3$

$f(2) = 2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$

$f(-2) = (-2)^2 + (-2)^3 = 4 - 8 = -4$

$f(2) \neq f(-2)$
$\neq -f(2)$

$f(x) = 0$ fonction nulle

$f(-x) = 0 = f(x)$
$= -0 = -f(x)$

Fonction partie entière supérieur :

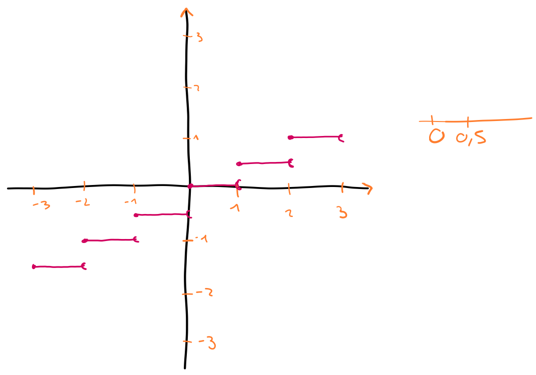
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor$: plus grand entier $\leq x$

$\lfloor 2{,}3 \rfloor = 2$ (2 2,3)

$\lfloor -2{,}3 \rfloor = -3$ (-3 -2,3)

ni paire ni impaire



Remarque : $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\lfloor 2 \rfloor = 2 \quad \lfloor -1 \rfloor = -1$

$\lfloor 3 \rfloor = 3$ etc...

Exercice 2 bs

$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$

$f(x) = |x-1| + |x+1|$ $\begin{cases} -(x+1) - (x-1) & 1 \\ x+1-(x-1) & 2 \\ x+1+x-1 & 3 \end{cases}$ régions

$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$

$|x+1| = -(x+1)$

$|x-1| = -(x-1)$

$x \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$x \geq 1$

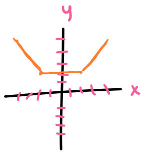
	-1	$+1$	
$-(x+1)$	$x+1$		$x+1$
$-(x-1)$	$-(x-1)$		$x-1$

+

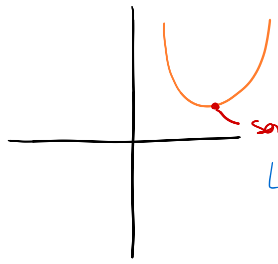
$-(x+1)-(x-1)$ $\quad x+1-(x-1)$ $\quad x+1+(x-1)$

$-2x \quad 2 \quad 2x$

for -
Si $x \leq -1$ $\quad |-3| = -(-3) = 3$ bcs -- → +
↳ $|x+1|$
→ $-(x+1)$
$x \leq -1$
↳ $|x-1|$
→ $-(x-1) \quad x-1$
⇒ $-(x-1) - x + 1 \Rightarrow -2x$



Rappel sur les paraboles



$x = -\frac{b}{2a}$
↳ axe de symétrie

Remarque : une para. est parfait. déf. si on a le sommet et un pt

$y = ax^2 + bx + c$
$a \neq 0$

$S = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

où $\Delta = b^2 - 4ac$

$S(\alpha ; \beta)$ est le sommet d'une parabole alors

$y = a(x-\alpha)^2 \beta$

Exemple : $S(3;4)$ & passe par $A(1;-2)$ $a = ?$

$y = a(x-3)^2 + 4$

$-2 = a(1-3)^2 + 4$

donc $-2 = a4 + 4$

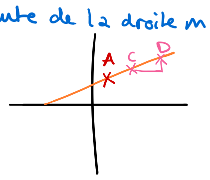
$-6 = 4a$

$a = -\frac{6}{4} \to -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}(x-3)^2 + 4$

Rappel sur les droites

To déf. une droite need a point $A(\alpha ; \beta)$ et la pente de la droite m



Exemple : ① $m = 5 \quad A = (2;1)$

$y = 5(x-2)+1$
$y = 5x - 9$

② $A(7;1) \quad B(7;4)$

pente $= m = \frac{4-1}{7-2} = \frac{3}{5}$

$m = \frac{y-\beta}{x-\alpha} \Rightarrow m(x-\alpha) = y - \beta$

$\boxed{y = m(x-\alpha) + \beta}$ ⚠

Si pente verticale → pente non définie

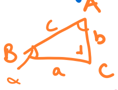
$x \Rightarrow$ constante $\quad$ pour une droite verticale

si pente horizontale → y constante

Serie 5 – théorie

Trigonométrie : Angles = rd ; degré

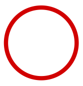
Triangle rectangle



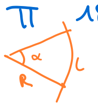
$a^2+b^2=c^2$

$\cos(\alpha)=\frac{a}{c}$
$\sin(\alpha)=\frac{b}{c}$
$\tan(\alpha)=\frac{b}{a}$

1rd ? →



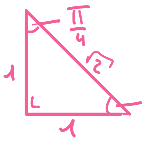
$\Rightarrow \frac{\alpha^{rd}}{\pi}=\frac{\alpha^{\circ}}{180}$ $\quad \ell=R\,\alpha^{rd}$ $\quad S=\frac{1}{2}R^2\alpha$



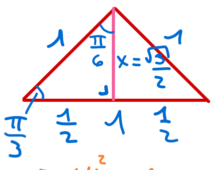
$\alpha=2\pi \quad p=2\pi R$

$\alpha=2\pi \quad S=\pi R^2$

$S=\frac{1}{2}(2\pi)R^2$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$

$x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Angles remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0}=0$
$\sqrt{1}=1$
$\sqrt{4}=2$

$\frac{\sin}{\cos}=\tan$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\alpha)=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$ mesure algébrique

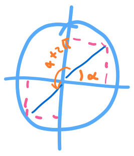
$\sin(\alpha)=\frac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$

$-1\leqslant\cos(\alpha)\leqslant 1$
$-1\leqslant\sin(\alpha)\leqslant 1$

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

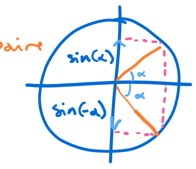
triangle (OIT) = $\tan(\alpha)=\frac{\overline{IT}}{1}=\overline{IT}$

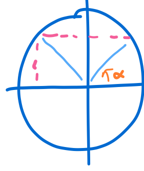
si α proche de $\frac{\pi}{2}$ $\tan(\alpha)\Rightarrow+\infty$



$\cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)$

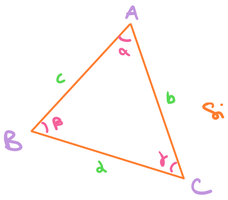
$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ paire
$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$





$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$
$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$
] périodique de 2π

Théorème du cosinus :

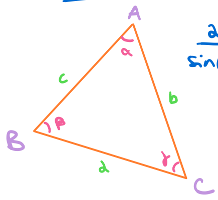


$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)$
$a=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$

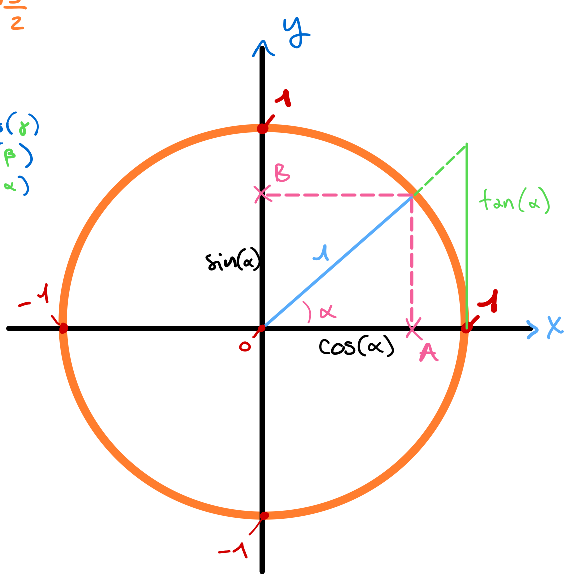
si $\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

↳ $a^2+b^2=c^2$

Théorème du sinus :



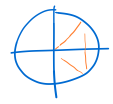
$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$



Équations trigo. :

Résoudre $\cos(x)=\cos(\alpha)$ α donné

exemple : $\begin{cases} x=\alpha+2n\pi & n\in\mathbb{Z} \\ x=-\alpha+2n\pi & " \end{cases}$ ↳ $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$

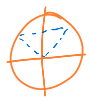


i) $\cos(x)=3 \quad \cos\in[-1;1]$ $\quad 2n\pi \Rightarrow$ nb de tours

↳ $S=\emptyset$

Résoudre $\sin(x)=\sin(\alpha)$

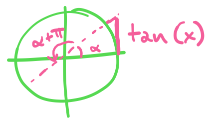
$x=\alpha+2n\pi$
$x=\pi-\alpha+2n\pi$



Résoudre $\tan(x)=\tan(\alpha)$

↳ $\tan(x+\pi)=\tan(x)$

$x=\alpha+n\pi \quad n\in\mathbb{Z}$

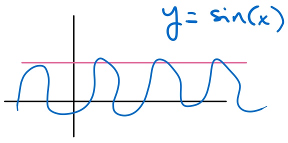


Trigonométrie inverse :

① Fonction arcsin

sin : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to\sin(x)$

∅ bijective
↳ chaque pt à son image



$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow[-1;1]$ $\quad \cancel{\sin^{-1}}\Rightarrow \arcsin$

sin $\quad x \to \sin(\alpha)$

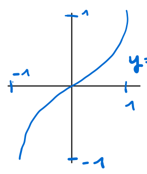
On peut définir une fonction réciproque

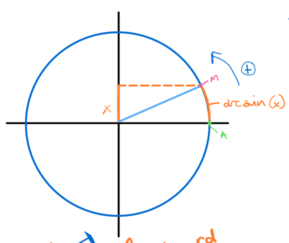
⇒ arcsin

$\alpha=\arcsin(x)$

$-1\leqslant x\leqslant 1$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=x \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$





arcsin (x) : longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$

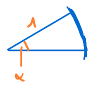
$\arcsin(0)=0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$x\in[-1;1]$

$\sin(\arcsin(x))=x$
$\arcsin(\sin(\alpha))=\alpha$

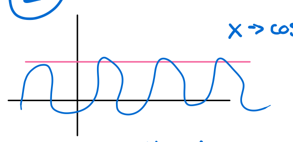


$\ell=1\cdot\alpha^{rd}$
$=\alpha$

$\ell=R\,\alpha^{rd} \quad R=1$

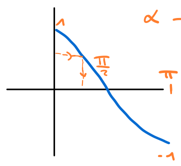
$\ell=1\alpha^{rd}$

② arccos



↳ ∅ bijective

$\Rightarrow \cos=[0;\pi]\to[-1;1]$
$\alpha\to\cos(\alpha)$



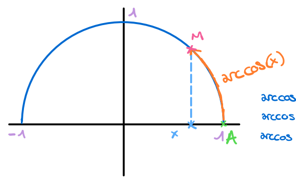
fonction réciproque :

arccos : $[-1;1]\to[0;\pi]$
$x \to \arccos(x)$

$\arccos(x)=\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha)=x$

$-1\leqslant x\leqslant 1 \quad \alpha\in[0;\pi]$

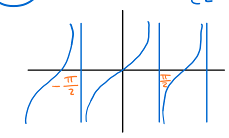
$\cos(\arccos(x))=x \quad x\in[-1;1]$
$\arccos(\cos(\alpha))=\alpha \quad \alpha\in[0;\pi]$



$\arccos(1)=0$
$\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$
$\arccos(-1)=\pi$

③ arctan : $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow\mathbb{R}$

$\alpha\to\tan(\alpha)$ ∅ bijective

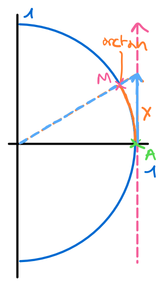


tan $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\mathbb{R}$
$\alpha\to\tan(\alpha)$

arctan : $\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$x\to\arctan(x)$

$\arctan(x)=\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha)=x$
$x\in\mathbb{R} \quad \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(\arctan(x))=x \quad x\in\mathbb{R}$
$\arctan(\tan(\alpha))=\alpha \quad \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

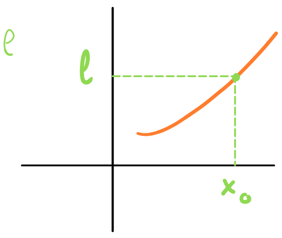


Limites & continuités :

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

pas défini en 0

x est proche de 0



$\frac{\sin(x)}{x}$ proche de 1

réponse sous forme d'intervalles

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Simplification : $F(x) = G(x) \quad x \neq x_0$

alors $\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} G(x)$

Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$

$x \neq 1 \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x - 1} = x - 1$

$\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$

Remarque : pour les fonctions élémentaires (trigo, polynômes, expo, ln, etc...)

si $x_0 \in D(f)$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : $\lim_{x \to 1} 4x^3 + 2x - 1 = 5$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h} = \frac{\not 0}{0}$

multiplication par

$\frac{(4 - \sqrt{16+h})}{h} \frac{(4 - \sqrt{16+h})}{(4 - \sqrt{16+h})} = \frac{\cancel{16} - (\cancel{16} + h)}{h(4 + \sqrt{16+h})}$

$\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(4 + \sqrt{16+h})} = \frac{-1}{4 + \sqrt{16+h}} = \frac{-1}{4+4} = -\frac{1}{8}$

Théorème des 2 gendarmes :

$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad x \neq x_0$

et si $\lim_{x \to x_0} = g(x) \ \lim_{x \to x_0} = \ell$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

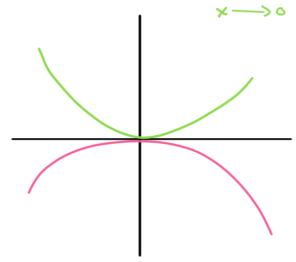
Exemple : $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ $\quad -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$\downarrow 0 \quad \downarrow \not\exists$

$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$

ou $\lim_{x \to 0} -x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

donc $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$



Limite à gauche & limite à droite :

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \to 0} f(x)$

Limite à gauche : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

si x est proche de x_0 mais $x < x_0$ $f(x)$ est proche de ℓ_1

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$

si x est proche de x_0 avec $x > x_0$ alors $f(x)$ est proche de ℓ_2

Exemple $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$

valable pour les limites à droite & à gauche

ln on a l'unicité de la limite

$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$

$\lim_{x \to 0} \varnothing$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1$

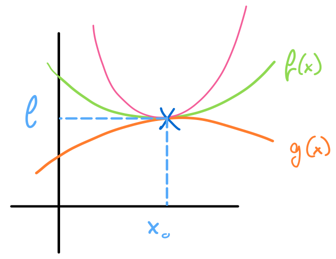
$\lim_{x \to 0} f(x) \ \varnothing$

Exemple : limite inexistante

$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = 1$

h(x)

$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = -1$



$x = 0, \cos 1 \ r$

$\frac{\sin(x)}{x} \simeq 1$

$S(\Delta OAM) \leq S(\text{secteur } \widehat{AM}) \leq S(\Delta OAT)$

$S(\Delta OAM) = \frac{1}{2}(1)\sin(x)$

$(\text{secteur } \widehat{AM}) = \frac{1}{2}(1)x$

$S(\Delta OAT) = \frac{1}{2}(1)\tan(x)$

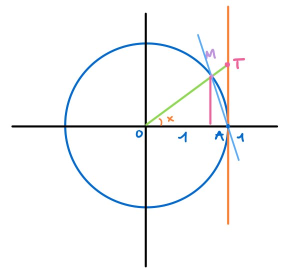
$\cancel{\frac{1}{2}}\sin(x) \leq \cancel{\frac{1}{2}} x \leq \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} 1 = 1$

théorème des gendarmes



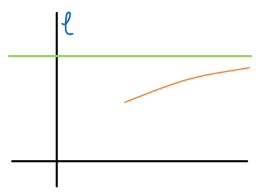
Remarque : $\lim_{* \to 0} \frac{\sin(*)}{*} = 1$

Exemples : $\lim_{x \to 0} (\frac{\sin(3x)}{3x}) 3 = 3$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \sin(3x)}{x}$

$\lim_{x \to 0} 2(\frac{\sin(2x)}{2x}) + (\frac{\sin(3x)}{3x}) 3 = 5$

Limites à l'infini :



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ quand x est assez grand, $f(x)$ est proche de ℓ

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x \geq N \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

aussi défini $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ par |x| assez grand avec $x < 0$ $f(x)$ est proche de ℓ

Exemple :

① $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7}$

$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7} = \frac{\cancel{x^3}(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3})} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{2}{5}$

Exemple : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7}$

$\frac{\cancel{x^3}(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3})} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{2}{5}$

Formes indéterminés (F.I) :

$'(+\infty) - (\infty)', \ '\frac{0}{0}', \ '\frac{\infty}{\infty}', \ '0 \cdot \infty'$

$'1^\infty'$

$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \quad (1 + \frac{1}{1000})^{1000} \simeq e$

$(1 + \frac{2}{1000})^{1000} \simeq e^2$

$A^B = e^{B\ln(A)}$

$1^\infty = e^{\infty \ln(1)} = e^{\infty \cdot 0}$

Number field sieve

algo de facto

on peut aussi définir $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

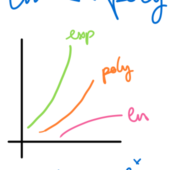
$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Exemples : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Croissance comparée (à l'infini)

ln << poly << exp



$\ln(1000) = 7$

$(1000)^2$

e^{1000}

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

Remarque : $\pi(x) = |\{p \mid p \text{ premier} \leq x\}|$

$\pi(3) = 2$

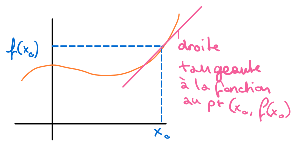
Théorème des nb premiers $\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$

$\pi(x) \simeq \frac{x}{\ln(x)}$

Dérivées

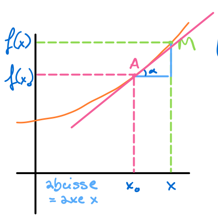
Calcul différentiel

idée



droite tangeante
⇒ approximation locale de la fonction quand x est proche de x_0

on cherche la droite la plus proche de la courbe au niveau du point



La pente de la droite AM

$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tan(\alpha)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si elle existe,

serait la pente de la droite tangeante

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangeante à la courbe au pt $(f(x), f(x_0))$

Remarque:

dérivable = fonction lisse

∅ dérivable = ↳ on se prend le mur

On dérive sur un point donné

Continuité = $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

∅ continue = lim à droite & gauche $!=$

Formule: tangeante ⇒ $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

exemple: ① $f(x) = \sin(x)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$ $\quad f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

approximation $\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{100})$

x proche de x_0: $f(x) \simeq f'(x)(x-x_0) + f(x_0)$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{100}$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

$\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{100}) \simeq \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{100} - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$

$\simeq \frac{\sqrt{3}}{200} + \frac{1}{2} = 0{,}5086$

$\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{100}) = 0{,}5086$

Propriétés: f, g dérivable sur un domaine donné

① $(cf(x))' = cf'(x)$ c ⇔ const
$(3x^2)' = 3(x^2)'$

② $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^2 + \sin(x))' = (x^2)' + \sin(x)'$

③ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g(x)'$
$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

④ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\quad g \neq 0$

$f'(x) = \frac{(\tan(x))'x^2 - \tan(x)(x^2)'}{(x^2)^2}$

↳ $\frac{(1+\tan^2(x))x^2 - 2\tan(x)x}{x^4}$

Composition de fonctions

$(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x)$ dérivation interne

Exemple: 1) $(e^{\sin(x)})' = e^{\sin(x)} \sin(x)'$
$= e^{\sin(x)} \cos(x)$

2) $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)'$
$e^{x^2} 2x \rightarrow 2x e^{x^2}$

3) $(\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{\ln(x)} (\ln(x))'$
$= \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x}$

4) $(\tan(\ln(x)))' = (1+\tan^2(\ln(x)))(\ln(x))'$
$(1+\tan^2(\ln(x)))\frac{1}{x}$

Formulaire: par coeur ♥

$f(x)$	$f'(x)$
2 (const)	0
x	1
x^2	$a x^{a-1}$ ⇒ $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$

exemple: $f(x) = \sin(x)e^x$

↳ $f'(x) = \sin(x)'e^x \quad \cos(x)e^x$

Règle de l'Hospital

ne pas confondre avec règle de base de dérivation du quotient

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$ ou $\text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$ fonctionne si on a un quotient

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

exemple: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Remarque: valable aussi si $x_0 = \pm\infty$
et aussi pour $\lim_{x \to x_0^+}$ ou $\lim_{x \to x_0^-}$

Exemples:

① $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ si replace w/ 7 $\rightarrow \frac{0}{0}$

B.H. $(\sqrt{x-3})' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$\lim_{x \to 7} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x} = -\frac{\frac{1}{4}}{14} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{14}{1} = -\frac{7}{2}$

② $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

B.H. $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ boucle infinie!

Use old school! ⇒ $x > 0$ $\quad 1+x^2 = x^2(\frac{1}{x^2}+1)$
$\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} = 1$

③ $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = \text{'}0 \cdot (-\infty)\text{'}$ F.I

Si pas de quotient:

$ab = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{a}}$

$x\ln(x) = \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

TE2-2.12
1 dérivée
2 limites

Ⓐ $x\ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$

Ⓑ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$-\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0$

$\frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (-1)f(x)^{-2} f'(x)$

$\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = -(\ln(x))^{-2}\frac{1}{x}$
$= -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$

④ $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = (+\infty)(0) =$ F.I

$xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \Rightarrow \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

B.H. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$

Sens de variation d'une fonction

f est croissante sur $I \subseteq D(f)$ si
$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Remarque

f est croissante $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$
$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 \neq x_2$

Théorème: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable
$I \subseteq D$ $\quad \forall x \in I \; f'(x) \geq 0$ f est croissante sur I
$\forall x \in I \; f'(x) \leq 0$ f est décroissante sur I

⇒ pour étudier le sens de variation d'une fonction dérivable, il suffit d'étudier le signe de $f'(x)$

Tableau de variations

T.V.

x		
$f'(x)$	$\times$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Exemple: Etudier le sens de var. de la func.

⇒ $f(x) = xe^{-x}$ $\quad f'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})'$

$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad = e^{-x} - xe^{-x}$
$= e^{-x}(x-1)$

Signe $(f'(x)) = \text{sgn}(1-x)$ car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$ max global	↘ 0

$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ ou

$f(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ croissance comparée

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

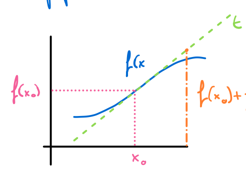
B.H ⇒ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Formulaire: par coeur ♥

$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x))^a$	$a(f(x))^{a-1} f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\ln(\lvert f(x) \rvert)$	$\frac{1}{f(x)} f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x)) f'(x)$
$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x)) f'(x)$
$\tan(f(x))$	$1+\tan^2(f(x)) f'(x)$
$\arctan(f(x))$	$\frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$

$f(x) = x$
$(x)' = 1$

Approximation linéaire



exemple $(x^a)' = ax^{a-1}$

approximation $= \sqrt[4]{17}$

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\quad x_0 = 16$ $\quad \sqrt[4]{16} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ $\quad f'(16) = \frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}}$

$\sqrt[4]{17} \simeq 2 + \frac{1}{32}(17-16)$ $\quad = \frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}2^{-3}$

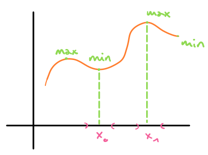
$\simeq \frac{65}{32} = 2{,}03125$ $\quad \sqrt[4]{17} = 2{,}0305$

Maximum - minimum - extremum

Au pt $(x_0, f(x_0))$ on a un minimum local
$(\exists \delta > 0 \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x_0)$ est le minimum

Au pt $(x_1, f(x_1))$ on a le maximum local si sur $]x_1 - \delta, x_1 + \delta[\quad f(x_1)$ est un maximum

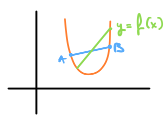
Extremum = min ou max.



x				
$f'(x)$	$\times$	$-$	$-$	$\times$
$f(x)$	↗ max	↘	min	↗

Convexité, concavité, pt d'inflexivité

$f: I \subseteq \mathbb{R}$ ⇒ convexe



f est convexe si ◡

f est concave ◠

Si f est dérivable 2x du I
↳ f est convexe si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
↳ concave si $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Remarque: Pour étudier la convexité et la concavité d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de $f''(x)$

x			
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexe	concave	convexe

Définition En $(x_0, f(x_0))$ on a un pt. d'inflexion si autour de x_0 il y a un changement de convexité

x_0		ou	x_0	
convexe	concave		concave	convexe

Exemple: Étudier la convexité/concavité puis déterminer les pts d'inflexibilité de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = (e^{-x^2})(-2x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})(-2x) =$

$\text{sgn}(f''(x)) = \text{sgn}(2x^2 - 1)$ car $e^{-x^2} > 0$

$2x^2 - 1 = 0$
$x^2 = \frac{1}{2}$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	convexe		concave		convexe