Correction TE3 - matin 20-21

Ex 1

$$f_a'(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}}(a+x)^2}{a^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a^3}(x^2+4ax+3a^2)$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a^3}(x+a)(x+3a)$$

$$f_a''(-3) = \frac{e^{-\frac{3}{a}}}{a^3}(a-3)(3a-x)$$

$f_a''(-3)=0 \iff a=1$ ou $a=3$

$a=1$

$$f_1''(x) = e^x(x^2+4x+3)$$

$$= e^x(x+3)(x+1)$$

x		-3		-1	
$f_1''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

changement de signe en $x=-3$ de $f_1''(x)$

$a=3$

$$f_3''(x) = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3^3}(x^2+12x+27)$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{3}}}{27}(x+3)(x+9)$$

		-9		-3	
	$+$		$-$		$+$

Changement de signe de $f_3''(x)$ en $x=-3$

Donc $a=1$ ou $a=3$

Ex2 $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x^2)}{2x}$ (f impaire on peut supposer $x > 0$ et $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{2x}$)

a) $D(f) = \mathbb{R}^*$

b) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x^2)}{2}$

f'(x)= (1-ln(x^2))/ 2 x^2

$\ln(x^2) = 1 \qquad x^2 = e \qquad x = \pm\sqrt{e}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	||	$+$	|	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	||	$\nearrow$		$\searrow$	

c) $f''(x) = \dfrac{-2 + \ln(x^2)}{x^3}$

$\ln(x^2) = 2 \qquad x^2 = e^2 \qquad x = \pm e$

x		$-e$		0		e	
$f''(x)$	$-$	|	$+$	||	$-$	|	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	||	$\cap$		$\cup$

d) abscisses des pts d'inflexion $x = \pm e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \ln(x^2)}{2x} = 0$ croissance comparée (ou B-H)

donc $y = 0$ asymptote horizontale (en $+\infty$)

de même $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \ln(x^2)}{2x} = 0$

$y = 0$ asymptote horizontale (en $-\infty$)

Ex3

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 4 & -12 & -4 \\ 12 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

Ex4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -t & 2t^2 & 4 \\ -1 & 2t & 4 \end{vmatrix} \overset{C_2-2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 2t^2+2t & 4 \\ -1 & 2t+2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2t^2+2t & 4 \\ 2t+2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} t^2+t & 1 \\ t+1 & 1 \end{vmatrix} = 8\,(t^2+t-t-1)$$

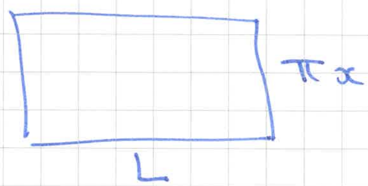
$$= 8\,(t^2-1)$$

le système est régulier si $8(t^2-1) \neq 0$

c-a-d $t \neq \pm 1$

Cramer $\quad x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2t^2 & 4 \\ 0 & 2t & 4 \end{vmatrix}}{8(t^2-1)} = \dfrac{t^2-t-4}{t^2-1}$

Ex5



$V = \dfrac{\pi x^2}{2} L \qquad$ donc $L = \dfrac{2V}{\pi x^2}$

Prix $= P(x, L) = 45\pi x^2 + 15\pi x L$

$= 15\pi\,(3x^2 + xL)$ on remplace L par sa valeur

$$P(x) = 15\pi\left(3x^2 + x\,\frac{2V}{\pi x^2}\right) = 15\pi\left(3x^2 + \frac{2V}{\pi x}\right)$$

$$p'(x) = 15\pi\left(6x - \frac{2V}{\pi x^2}\right)$$

$$= 15\pi\left(\frac{6\pi x^3 - 2V}{\pi x^2}\right) = 15\left(\frac{6\pi x^3 - 2V}{x^2}\right)$$

$p'(x) = 0 \qquad 6\pi x^3 = 2V$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$	
$p'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$

On a bien un minimum pour

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$$

$$L = \frac{2V}{\pi x^2}.$$

Remarque on peut aussi utiliser le fait que

$x_0^3 = \frac{V}{3\pi}$ et comme $\pi x_0^2 = \frac{2V}{L}$

$\pi x_0^2 \, x_0 = \frac{V}{3}$ et donc $\frac{2V}{L} x_0 = \frac{V}{3}$

$$\frac{2}{L} x_0 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{6x_0 = L}$$

EX2 8) Le graphe de $f(x) = \frac{1 + \ln(x^2)}{2x}$