Mathématiques 1

Partie 1 : Rappels et compléments

Jean-François Hêche

Automne 2024

Chapitre 1

Rappels d'algèbre et d'analyse

Quelques ensembles importants de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble des **entiers** relatifs est noté $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble des nombres **rationnels** est noté $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0\}$.
- L'ensemble des nombres **réels** est noté $\mathbb{R}$. Il est souvent illustré graphiquement à l'aide de la droite réelle.

- En ajoutant le suffixe *, on supprime 0 des ensembles précédents :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- En ajoutant le suffixe $_+$, on ne garde que les éléments positifs ou nuls (≥ 0) :

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$$

- En ajoutant le suffixe $_-$, on ne garde que les éléments négatifs ou nuls (≤ 0).

Intervalles réels

- Un **intervalle réel** est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.
- On distingue trois types d'intervalles :
  - les **intervalles fermés** lorsque les deux bornes font partie de l'ensemble :

$$\boxed{[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}\,;$$

  - les **intervalles ouverts** lorsque les deux bornes sont exclues de l'ensemble :

$$\boxed{]a, b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}\,;$$

  - les **intervalles semi-ouverts** lorsqu'une seule des deux bornes appartient à l'ensemble :

$$\boxed{]a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}} \quad \text{et} \quad \boxed{[a, b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}.$$

- La borne inf. peut être égale à $-\infty$ et la borne sup. à $+\infty$ (elles ne sont jamais incluses) :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \qquad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

Puissances entières

- Soient a un nombre réel et n un entier positif, la **puissance n^e** de a, notée a^n, est définie comme le produit de a avec lui-même n fois :

$$\boxed{a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}}.$$

- Si a est non nul et n un entier positif, les puissances négatives de a sont définies par

$$\boxed{a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}}.$$

- Si a est non nul et n est égal à zéro on pose

$$\boxed{a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1}.$$

- REMARQUE. L'expression 0^0 est une forme indéterminée dont la valeur n'est pas définie de manière unique.

heig-vd

Puissances entières : Règles de calcul

- Soient a et b deux nombres réels et n et m deux entiers, les définitions précédentes vérifient les règles de calcul

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \end{aligned}$$

- De plus, tant que les dénominateurs ne sont pas nuls, on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= \frac{1}{a^{m-n}} \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

heig-vd

Identités remarquables

- Les identités suivantes sont valables pour toutes valeurs de a et b et doivent être connues (dans les deux sens).

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \end{aligned}$$

heig-vd

Racines carrées

- Si a est un nombre réel positif ou nul, la **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, désigne l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré (c.-à-d. la puissance 2) est égal à a.
- La racine carrée d'un nombre réel négatif n'est pas définie (et n'est certainement pas un nombre réel).
- RÈGLE DE CALCUL. Pour a et b deux nombres réels positifs ou nuls on a

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}.$$

- PROPRIÉTÉS. Quel que soit le nombre réel a on a

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

alors que pour tout nombre réel positif ou nul a on a

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}.$$

heig-vd

Racines carrées (2)

- Par définition la racine carré de a est un nombre réel positif ou nul ainsi pour $a = 4$ on écrira
$$\sqrt{4} = 2$$
mais certainement pas
$$\cancel{\sqrt{4} = \pm 2}$$
qui serait un raccourci d'écriture pour
$$\sqrt{4} = 2 \quad \text{ou} \quad \cancel{\sqrt{4} = -2.}$$
- En revanche face à l'équation
$$x^2 = 4$$
on pourra noter ses deux solutions sous la forme
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$
ce qui, ici aussi, est un raccourci pour
$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

heig-vd

Racines cubiques, ...

- Pour tout nombre réel a, la **racine cubique** de a, notée $\sqrt[3]{a}$, désigne l'unique nombre réel dont le cube (c.-à-d. la puissance 3) est égal à a.
- Plus généralement, pour tout entier m positif et pair et tout nombre réel a positif ou nul, la **racine m^e** de a, notée $\sqrt[m]{a}$, est l'unique nombre réel positif ou nul qui, élevé à la puissance m, est égal à a :
$$b = \sqrt[m]{a} \quad \text{si et seulement si} \quad b^m = a \text{ et } b \geq 0.$$

Exemple.
$$\sqrt[4]{625} = 5 \quad \text{car} \quad 5^4 = 25^2 = 625.$$

- Pour tout entier m positif et impair, la racine m^e de a est définie pour tout nombre réel a et est égale à l'unique nombre réel qui, élevé à la puissance m, est égal à a.

Exemple.
$$\sqrt[9]{-512} = -2 \quad \text{car} \quad (-2)^9 = -(2^9) = -512.$$

heig-vd

Puissances fractionnaires

- On peut également exprimer les racines à l'aide de puissances fractionnaires.
- Par exemple, si $b = \sqrt{a}$ on veut (et doit) avoir $b^2 = a$. Ainsi si $b = a^p$, la puissance p doit être telle que
$$b^2 = a \quad \text{c.-à-d.} \quad (a^p)^2 = a \quad \text{ou encore} \quad a^{2p} = a^1$$
et la seule valeur possible est $p = \frac{1}{2}$.
- Ainsi pour la racine carrée on a
$$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$$
et pour la racine m^e on a
$$\boxed{\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}}.$$
- Plus généralement pour $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$ on a
$$\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}.$$

heig-vd

Puissances fractionnaires (2)

- Les règles de calcul établies pour la manipulation des puissances entières restent valables pour les puissances fractionnaires (tant que les grandeurs intervenants dans les calculs sont bien définies).
- En particulier, pour a et $b > 0$ on a
$$\begin{array}{rclcrcl}
a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}} & = & (a \cdot b)^{\frac{1}{m}} & \qquad & \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} & = & \sqrt[m]{a \cdot b} \\
\dfrac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} & & \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} & = & \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} \\
\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} & = & a^{\frac{1}{m \cdot n}} & & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} & = & \sqrt[m \cdot n]{a}
\end{array}$$
- Remarque. Sauf cas très particuliers, si l'exposant n'est pas entier, la base est un nombre réel positif car sinon il est facile d'aboutir à des contractions.

Exemple.
$$\sqrt{-4} = (-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \left((-4)^2\right)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} = 2.$$

heig-vd

Relations d'ordre et comparateurs

- Il existe deux ordres naturels (l'un croissant, l'autre décroissant) sur l'ensemble des nombres réels (et ses sous-ensembles) ainsi que les versions strictes correspondantes :

a	$\leq$	b	:	a est inférieur ou égal à b
a	$\geq$	b	:	a est supérieur ou égal à b

a	$<$	b	:	a est inférieur à b
a	$>$	b	:	a est supérieur à b

- Règles de calcul. Quels que soient les nombres réels a, b et c on a

Si $a \leq b$ et $b \leq c$	alors	$a \leq c$	(Transitivité)
Si $a \leq b$	alors	$a + c \leq b + c$	quel que soit c
Si $a \leq b$ et $c > 0$	alors	$a \cdot c \leq b \cdot c$	
Si $a \leq b$ et $c < 0$	alors	$a \cdot c \geq b \cdot c$	

Les deux dernières règles sont particulièrement importantes pour la manipulation et la résolution d'inéquations.

Exemple

- Pour résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < 2$ on commence par multiplier chaque côté par x mais on doit distinguer deux cas selon le signe de x.
- Cas 1 : $x > 0$. La multiplication par x ne change pas le sens de l'inégalité. On obtient alors

$$1 < 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} < x$$

et le premier sous-ensemble de solutions est

$$I_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } x > \tfrac{1}{2}\right\} = \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.$$

- Cas 2 : $x < 0$. La multiplication par x change le sens de l'inégalité. On obtient dans ce cas

$$1 > 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} > x$$

et le deuxième sous-ensemble de solutions est

$$I_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ et } x < \tfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, 0\right[.$$

- L'ensemble S des solutions de l'inéquation est donc

$$S = I_1 \cup I_2 = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Valeurs absolues

- Si a est un nombre réel, sa **valeur absolue**, notée $|a|$, est définie comme

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- Règles de calcul et propriétés. Quels que soient les nombres réels a et b on a

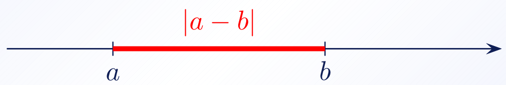
$$\begin{aligned} a &\leq |a| \\ |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \quad \text{(Inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

Valeurs absolues (2)

- La valeur absolue définit une distance entre les points de la droite réelle :

$$|a - b| = \text{distance entre } a \text{ et } b,$$

la distance étant égale à la longueur du segment séparant les points de la droite réelle correspond à a et b.



- Le « disque de centre c et de rayon r » (en dimension 1) est alors l'ensemble de tous les x à une distance au plus r de c. Son équation est

$$|x - c| \leq r$$

dont l'ensemble des solutions n'est rien d'autre que l'intervalle $[c - r, c + r]$ car on a

$$|x - c| \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad -r \leq x - c \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad c - r \leq x \leq c + r.$$

Chapitre 2

Fonctions : Définitions et propriétés de base

Fonctions

Pour deux ensembles non vides A et B, une **fonction de A dans B** (on dit aussi de A vers B) est une correspondance qui affecte exactement un élément de B à chaque élément de A.

- Pour une fonction f et un élément a de A, l'unique élément de B associé à a par la fonction f est noté $f(a)$ et est appelé la **valeur de f en a** ou l'**image de a par f**.
- Inversement si $b \in B$ est l'image de a par f, c.-à-d. si $b = f(a)$, alors que a est dit un **antécédent de b par f** ou une **préimage de b par f**.
- NOTATION. Une fonction f de A dans B se note : $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & f(a) \end{array}}$
- L'ensemble A est appelé l'**ensemble de définition** de f ou le **domaine de définition** de f (ou simplement le **domaine** de f).
- L'ensemble B est appelé le **codomaine** ou le **but** de f.

Fonctions numériques

- Dans ce cours toutes les fonctions considérées seront définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et retourneront toujours des nombres réels. On parle alors de fonctions réelles d'une variable réelle ou, plus simplement, de **fonctions numériques**.
- Pour une fonction numérique f, si son domaine de définition n'est pas précisé explicitement, il est d'usage de le définir comme le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) où la fonction peut être calculée et il est alors noté $D(f)$.
  Déterminer $D(f)$ est souvent la première étape dans l'étude d'une fonction f. Il faut en particulier faire attention à exclure les valeurs amenant à des divisions par zéro ou au calcul de racines carrées ou de logarithmes de nombres négatifs.
- EXEMPLES. Pour $f(x) = \sqrt{x-1}$ on a $D(f) = [1, +\infty[$ alors que pour $g(x) = \frac{1}{x+3}$ on a $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- Le codomaine d'une fonction numérique f est simplement $\mathbb{R}$.
- L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre f est appelé l'**image**, l'**ensemble image** ou la **portée** de f et est noté $\mathrm{Im}(f)$.

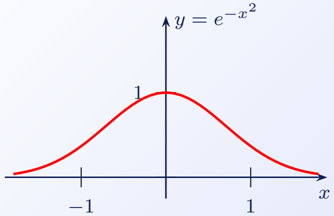
Graphe d'une fonction et représentation graphique

- Le **graphe** d'une fonction numérique f est l'ensemble de tous les couples de nombres réels (x, y) où x parcourt le domaine de définition de f et y est égal la valeur de f en x.

$$\boxed{\textbf{Graphe de } f \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x)\}.}$$

- Le graphe d'une fonction numérique est une relation sur l'ensemble des nombres réels et chaque couple de cette relation peut être interprété comme les coordonnées cartésiennes d'un point du plan dans un repère Oxy. On peut alors représenté tout ou partie de ses points pour obtenir la représentation graphique de f ou la courbe représentative de f (souvent appelée elle-même, abusivement, graphe de f) .
- EXEMPLE.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = e^{-x^2} \end{array}$$



Parité et périodicité

- Une fonction f est dite **paire** si

$$\boxed{f(-x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in D(f)}.$$

La représentation graphique d'une fonction paire présente une symétrie axiale d'axe Oy.

- Une fonction f est dite **impaire** si

$$\boxed{f(-x) = -f(x) \quad \text{pour tout } x \in D(f)}.$$

La représentation graphique de f présente une symétrie centrale de centre 0.

- La fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.
- Une fonction f est dite **périodique de période $T > 0$** si

$$\boxed{f(x+T) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in D(f)}.$$

La période de f est alors la plus petite valeur $T > 0$ vérifiant la propriété précédente.

Opérations sur les fonctions

Si f et g sont deux fonctions numériques on peut

- additionner ou soustraire les deux fonctions

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

- multiplier ou diviser les deux fonctions

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Le domaine de définition de la somme, de la différence, du produit ou du quotient de deux fonctions est égal à l'intersection des domaines de définition individuels. De plus pour le quotient il faut encore retirer les valeurs conduisant à des divisions par zéro.
- Exemple. Pour $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = x - 1$, le domaine de définition de leur quotient est

$$D(f/g) = ([-2, +\infty[\cap \mathbb{R}) \setminus \{1\} = [-2, +\infty[\setminus \{1\} \qquad (= [-2, 1[\cup]1 + \infty[)$$

Décalage et changement d'échelle

Soient f une fonction numérique et c un nombre réel non nul.

- La représentation graphique de la fonction $g(x) = f(x) + c$ est égale à celle de f mais avec un décalage vertical de c unités (vers le haut si $c > 0$ et vers le bas si $c < 0$).
- La représentation graphique de la fonction $g(x) = f(x + c)$ est égale à celle de f mais avec un décalage horizontal de c unités (vers la gauche si $c > 0$ et vers la droite si $c < 0$).
- La représentation graphique de la fonction $g(x) = c \cdot f(x)$ est égale à celle de f mais avec un changement d'échelle vertical d'un facteur $|c|$ et d'une symétrie axiale d'axe Ox si $c < 0$.
- La représentation graphique de la fonction $g(x) = f(c \cdot x)$ est égale à celle de f mais avec un changement d'échelle horizontal d'un facteur $1/|c|$ ainsi qu'une symétrie axiale d'axe Oy si $c < 0$.

Compositions de fonctions

> Pour f et g deux fonctions numériques, la **composition de f par g**, notée $g \circ f$, est la fonction définie par
>
> $$(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{g(f(x))}.$$

- Pour le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ il faut non seulement que la variable appartienne au domaine de f (première fonction à être calculée) mais également que le résultat appartienne à celui de g. Ainsi

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(f) \text{ et } f(x) \in D(g)\}$$

- Exemple. Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ on a
  - La composition de f par g est $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$ et $D(g \circ f) = \mathbb{R}$
  - La composition de g par f est $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ et $D(f \circ g) = \mathbb{R}_+$
- Propriété. En général la composition de fonctions n'est pas commutative.

Fonction réciproque

- Considérons une fonction f définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ (très souvent un intervalle ou $\mathbb{R}^*$) ne prenant jamais deux fois la même valeur lorsque la variable parcourt E (une telle fonction est dite injective), il est alors possible d'inverser la transformation effectuée par f car pour toute valeur retournée par la fonction il n'existe qu'un seul antécédent possible.
- Si on pose $D(f) = E$ et $F = \mathrm{Im}(f)$ la fonction $f : E \to F$ est alors inversible et on peut définir sa **fonction réciproque** ou **fonction inverse de f**, notée f^{-1} ou plus rarement ${}^r\!f$, comme la fonction de F dans E qui associe à chaque élément de F son unique antécédent :

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)}.$$

- PROPRIÉTÉ. Pour une fonction inversible f de E dans F on a

$$\boxed{f^{-1} \circ f = id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = id_F}$$

où id_S dénote la **fonction identité** sur l'ensemble S : $id_S(x) = x, \forall\, x \in S$.

Fonction réciproque (2)

- Il est essentiel de garder à l'esprit que l'inversion considérée ici se fait par rapport à la composition de fonctions (comme le montre la propriété précédente) et nullement au sens de l'inversion d'une multiplication :

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}.$$

- PROPRIÉTÉ. Les représentations graphiques de deux fonctions réciproques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la bissectrice des quadrants I et III.

  En effet, il suffit d'observer que calculer le symétrique d'un point par rapport à la bissectrice des quadrants I et III revient simplement à permuter ses deux coordonnées.
  Ainsi le point de coordonnées (x, y) appartient à la représentation graphique de f si et seulement si $y = f(x)$ alors que celui de coordonnées (y, x) appartient à la représentation graphique de f^{-1} si et seulement si $x = f^{-1}(y)$ mais

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x.$$

Parties entières inférieures et supérieures

Soit x un nombre réel,

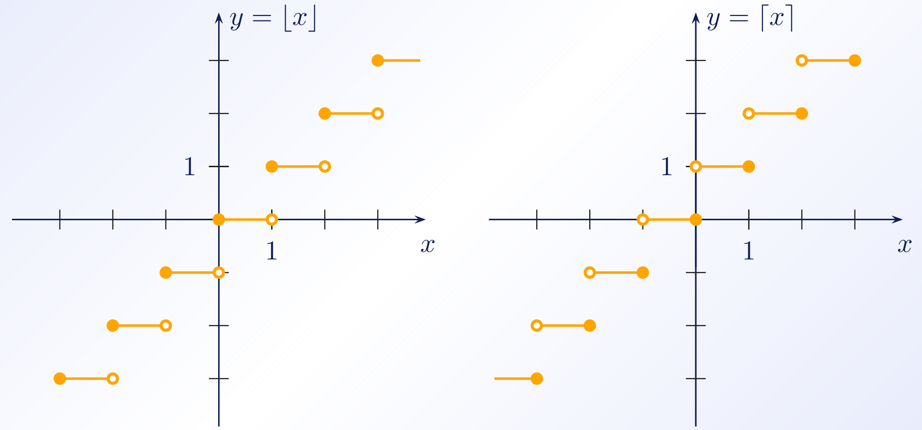
- la **partie entière inférieure de x** (« *floor function* »), notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier plus petit ou égal à x ;
- la **partie entière supérieure de x** (« *ceiling function* »), notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier plus grand ou égal à x.

- EXEMPLES.

$$\left\lfloor \tfrac{1}{2} \right\rfloor = 0 \qquad \left\lceil \tfrac{1}{2} \right\rceil = 1 \qquad \left\lfloor -\tfrac{1}{2} \right\rfloor = -1 \qquad \left\lceil -\tfrac{1}{2} \right\rceil = 0$$

$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3{,}1 \rceil = 4 \qquad \lfloor 7 \rfloor = 7 \qquad \lceil 7 \rceil = 7$$

Graphes des fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$



Chapitre 3

Polynômes et fonctions polynomiales

heig-vd

Polynômes et fonctions polynomiales

- Un **monôme** est le produit d'une constante, appelée coefficient, et d'un facteur littéral égal à une puissance entière et non négative de la variable (ou indéterminée) du monôme.

  EXEMPLES. $3x^3, \quad -4x \ (= -4x^1), \quad 5 \ (= 5x^0), \quad 0$

- Un **polynôme** est une somme de monômes (de même variable), autrement dit une expression de la forme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  où $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, sont les **coefficients** de p et $x \in \mathbb{R}$ est sa **variable** aussi appelée indéterminée.

  EXEMPLES.
$$p(x) = 3x^3 - x^2 + 4x + 7$$
$$p(t) = 1 + t^2 + t^4$$
$$p(z) = -\tfrac{5}{2}$$

- Tout polynôme d'une variable réelle et à coefficients réels définit une **fonction polynomiale** de domaine de définition égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

heig-vd

Degrés

- Le **degré** d'un monôme non nul est égal à l'exposant de sa variable.
- Le **degré** d'un polynôme non nul p est égal au plus grand degré des monômes (non nuls) le formant.

  EXEMPLES.
$$p(x) = 3x^3 - x^2 + 4x + 7 \quad : \quad \text{polynôme de degré } 3$$
$$p(t) = 1 + t^2 + t^4 \quad : \quad \text{polynôme de degré } 4$$
$$p(z) = -\tfrac{5}{2} \quad : \quad \text{polynôme de degré } 0$$

- Le degré du polynôme nul ($p(x) = 0$ pour tout x) n'est pas défini.
- Le coefficient du monôme de plus grand degré de p est appelé le **coefficient dominant** du polynôme.

heig-vd

Fonctions affines et linéaires

- Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$f(x) = m \cdot x + h$$

  où m et h sont deux coefficients (paramètres) réels.

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (non verticale) et toute droite non verticale de plan correspond à la représentation graphique d'une fonction affine.
  - Le paramètre h est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
  - Le paramètre m est la **pente** de la droite.
- Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

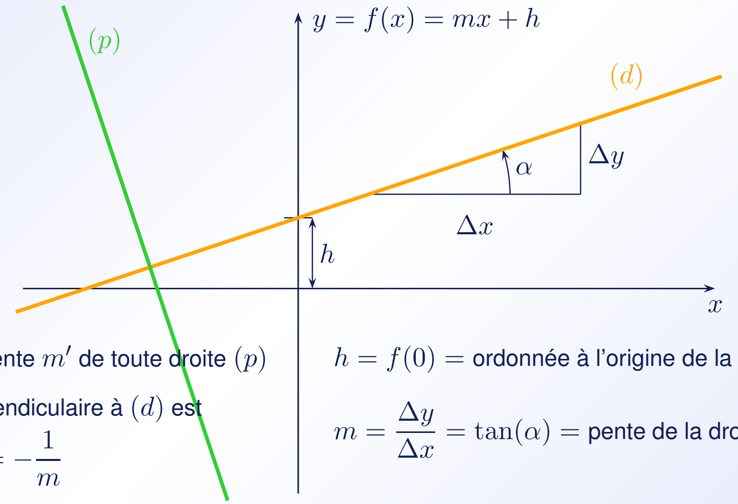
$$f(x) = m \cdot x$$

  avec m un paramètre réel. Sa représentation graphique est une droite (non verticale) passant par l'origine du repère.

- Les fonctions affines et linéaires sont des fonctions polynomiales de degré 1 (si $m \neq 0$).

heig-vd

Illustration graphique



La pente m' de toute droite (p) perpendiculaire à (d) est $m' = -\dfrac{1}{m}$

$h = f(0) =$ ordonnée à l'origine de la droite (d)

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) =$ pente de la droite (d)

Équation d'une droite par un ou deux points

- Si on connait un point de coordonnées (x_0, y_0) de la droite cherchée et sa pente m on obtient facilement une équation cartésienne et, en même temps, une fonction affine dont la représentation graphique est la droite.

  En effet, si un point de coordonnées (x, y) (avec $x \neq x_0$) appartient à la droite alors

  $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \qquad \text{d'où l'équation} \qquad \boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}.$$

- Si on connait les coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de deux points (distincts) d'une droite, on obtient facilement une fonction affine dont la représentation graphique est la droite.

  En effet, la pente de la droite vérifie $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}}, x \neq x_0$.

  Il ne reste plus qu'à isoler y pour obtenir l'équation

  $$\boxed{y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

Opérations sur les polynômes

- On peut additionner et soustraire deux polynômes (de même variable).

  Exemple.

  $$(2x - 5) + (x^3 + 3x^2 - 2x) \quad = \quad x^3 + 3x^2 - 5$$

- On peut multiplier deux polynômes (de même variable) en développant le produit puis en regroupant les monômes de même degré.

  Exemple.

  $$\begin{aligned} (2x - 5) \cdot (x^3 + 3x^2 - 2x) &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 5x^3 - 15x^2 + 10x \\ &= 2x^4 + x^3 - 19x^2 + 10x \end{aligned}$$

- Le degré du produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des deux polynômes multipliés

Opérations sur les polynômes : Division

- On peut diviser un polynôme $p(x)$ (le dividende) par un polynôme $d(x)$ non nul (le diviseur).

  La division polynomiale suit le même schéma que la division euclidienne pour les entiers. Elle retourne un quotient $q(x)$ et un reste $r(x)$ vérifiant

  $$\boxed{p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)}$$

  avec degré$(r) <$ degré(d) (condition automatiquement vérifiée si le reste est nul, c.-à-d. si $r(x) = 0$).

- Si le degré du diviseur d est supérieur à celui du dividende p alors le quotient est nul et le reste est égal au dividende.

- Sinon le degré du quotient q est égal à la différence entre le degré du dividende et celui du diviseur :

  $$\text{degré}(q) = \text{degré}(p) - \text{degré}(d).$$

Exemple

La division de $p(x) = 4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 20x + 1$ par $d(x) = x^2 + 2$ donne

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrr}
 & 4x^4 & + & 8x^3 & + & 9x^2 & + & 20x & + & 1 & x^2 & + & 2 & & \\
\hline
- & 4x^4 & & & + & 8x^2 & & & & & 4x^2 & + & 8x & + & 1 \\
\cline{1-10}
 & & & 8x^3 & + & x^2 & + & 20x & + & 1 & & & & & \\
- & & & 8x^3 & & & + & 16x & & & & & & & \\
\cline{3-10}
 & & & & & x^2 & + & 4x & + & 1 & & & & & \\
- & & & & & x^2 & & & + & 2 & & & & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & 4x & - & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Le quotient est $q(x) = 4x^2 + 8x + 1$ et le reste est $r(x) = 4x - 1$.

On vérifie que

$$4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 20x + 1 = (4x^2 + 8x + 1)(x^2 + 2) + (4x - 1).$$

heig-vd

Valeurs et racines

- La **valeur** du polynôme $p(x)$ en x_0 est le nombre $p(x_0)$ obtenu en remplaçant la variable x par le nombre x_0 et en calculant la valeur numérique qui en résulte.

  Exemple. La valeur de $p(x) = 3x^3 - x^2 + 4x + 7$ en $x_0 = 2$ est

  $$p(2) = 3 \cdot 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 + 7 = 24 - 4 + 8 + 7 = 35.$$

- Une **racine** du polynôme non nul $p(x)$ est une valeur de la variable x qui annule le polynôme. Dit autrement, une racine du polynôme $p(x)$ est une solution de l'équation $p(x) = 0$.
- Si on divise un polynôme $p(x)$ par $d(x) = x - x_0$ on obtient

  $$p(x) = q(x)(x - x_0) + r$$

  où r est une constante.

heig-vd

Racines, divisibilité et multiplicité

- Si on remplace x par x_0 dans l'expression précédente on obtient

  $$p(x_0) = q(x_0)(x_0 - x_0) + r = r.$$

  Ainsi le reste r est égal à la valeur du polynôme en x_0 et ce point est une racine de $p(x)$ si et seulement si le reste est nul.

  Le reste de la division de $p(x)$ par $(x - x_0)$ est égal à $p(x_0)$.

  Un polynôme non nul $p(x)$ est divisible par $(x - x_0)$ $\iff$ x_0 est l'une de ses racines.

- La **multiplicité** d'une racine x_0 d'un polynôme $p(x)$ est la plus grande puissance k pour laquelle $p(x)$ est divisible par $(x - x_0)^k$.

  Exemple. Pour le polynôme $p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x+3)^2$, 0 est une racine simple (c.-à-d. de multiplicité 1) et -3 est une racine double (c.-à-d. de multiplicité 2).

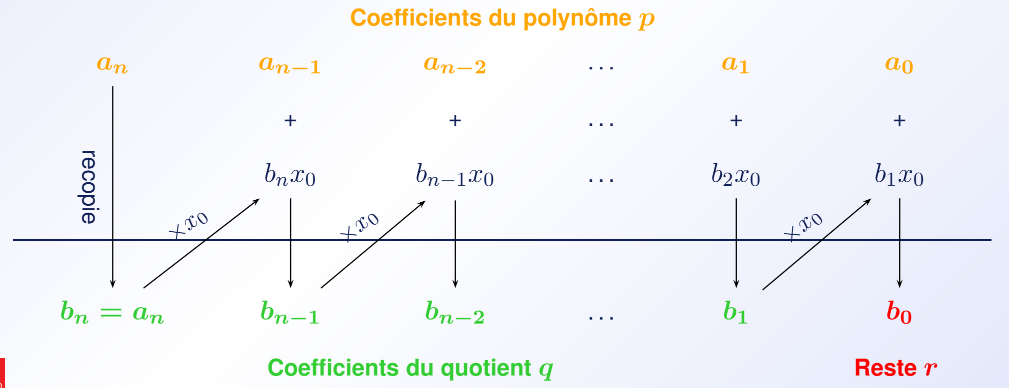
heig-vd

Schéma de Horner

- Le **schéma de Horner** (aussi connu sous le nom de méthode de Ruffini ou de Ruffini-Horner) permet de résoudre efficacement les deux problèmes suivants.

  (1) Diviser $p(x)$ par $(x - x_0)$ afin de l'écrire sous la forme $p(x) = q(x)(x - x_0) + r$.

  (2) Évaluer $p(x)$ en $x = x_0$ (autrement dit calculer $p(x_0)$ pour x_0 donné).



heig-vd

Exemple

Division de $p(x) = 2x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 5x - 20$ par $x + 1$ ($x_0 = -1$) :

Coefficients du polynôme p

$\mathbf{2}$	$\mathbf{-11}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{-20}$
recopie	+	+	+	+
	-2	13	-25	20
$\mathbf{2}$	$\mathbf{-13}$	$\mathbf{25}$	$\mathbf{-20}$	$\mathbf{0}$

$\times(-1)$

Coefficients du quotient q **Reste r**

et $p(x) = (x + 1)(2x^3 - 13x^2 + 25x - 20) + 0$

Factorisation

- Factoriser un polynôme $p(x)$ consiste à l'écrire comme le produit d'une constante et de facteurs irréductibles de degré 1 (des polynômes de la forme $x - x_0$) ou de degré 2 (des polynômes de la forme $x^2 + bx + c$ sans racines réelles).

  Exemples.
$$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$
$$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1) = 2(x-2)(x+\tfrac{1}{2})$$

- La factorisation des polynômes de degré 0 ou 1 est excessivement simple et ne pose aucun problème.
- Celle des polynômes de degré 2 est bien maîtrisée.
- Pour les polynômes de degré 3 ou 4 il n'existe aucune formule générale suffisamment simple pour être utilisable et pour ceux de degré 5 ou plus il n'existe même pas de formule générale. Dans de tels cas on peut essayer de trouver une *racine évidente* pour diminuer, par division, le degré du polynôme à factoriser.

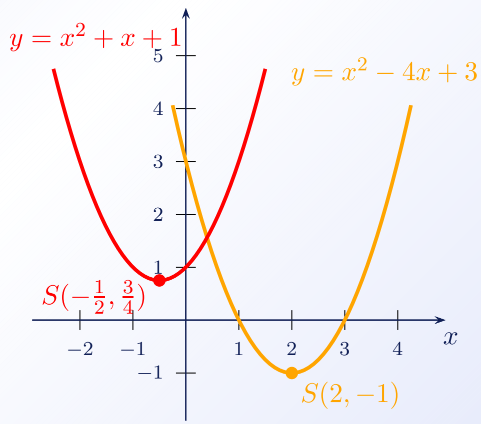
Factorisation des polynômes du second degré

- On considère un polynôme de degré 2 :
$$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{avec } a \neq 0.$$
- Si le polynôme possède deux racines réelles x_1 et x_2 alors il est divisible par $x - x_1$ et par $x - x_2$ et sa factorisation est
$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$
- Si on développe on obtient
$$p(x) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

  et en identifiant les coefficients avec l'expression initiale de p on obtient les formules de Viète :
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Représentation graphique

- Un polynôme de degré 2 correspond à une fonction polynomiale du second degré appelée plus couramment **fonction quadratique**.
- Le graphe représentatif de la fonction quadratique $y = p(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une **parabole**.
- L'abscisse du sommet S de la parabole est
$$x_s = -\frac{b}{2a}$$
  et son ordonnée est
$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$



- L'équation de la parabole s'écrit alors $y = a(x - x_s)^2 + y_s$.

Factorisation des polynômes du second degré (2)

- Dans le cas général, pour factoriser un polynôme du second degré on commence par compléter le carré :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

- La grandeur $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée le **discriminant** du polynôme p (ou de l'équation $p(x) = 0$).
- Si $\Delta > 0$ le polynôme possède deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$ le polynôme possède une racine réelle double.
- Si $\Delta < 0$ le polynôme est irréductible et ne possède pas de racines réelles.

heig-vd

Factorisation des polynômes du second degré (3)

- Supposons $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, on a alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

et les deux racines du polynôme p sont

$$\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

alors que la factorisation de p est

$$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

heig-vd

Factorisation des polynômes du second degré (4)

- Les deux expressions précédentes pour les racines de p sont souvent présentées sous la forme plus compacte

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

La formule ci-dessus est parfois appelée **formule quadratique**.

- Si le discriminant est nul, il en est de même de sa racine carrée et la seule valeur qui annule p est

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Il s'agit cependant d'un racine double (c.à-d. de multiplicité 2) et la factorisation de p est

$$p(x) = a(x-x_0)^2.$$

heig-vd

Factorisation des polynômes du second degré (5)

- Si le coefficient de x est pair il peut être écrit $b = 2b'$ ce qui permet de simplifier, un peu, les formules précédentes qui deviennent

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b'+\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}}$$

où $\Delta' = (b')^2 - ac$ est le discriminant réduit.

- Exemple. Pour le polynôme $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$ on a $b' = -2$ et

$$\Delta' = (-2)^2 - 2\cdot 1 = 2$$

Les racines de p sont alors

$$x_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

heig-vd

Chapitre 4

Fonctions rationnelles

heig-vd

Fonctions rationnelles

- Une **fonction rationnelle** est le quotient de deux polynômes, c.-à-d. une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

où $n(x)$ et $d(x)$ sont deux polynômes en x.

- Le domaine de définition de la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ est

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les racines du dénominateur $d(x)$.

- Si les factorisations des polynômes $n(x)$ et $d(x)$ n'ont aucun facteur commun, la fonction rationnelle $f(x) = n(x)/d(x)$ est dite irréductible. Dans le cas contraire, la fonction est dite réductible.

  On travaillera le plus souvent avec des fonctions rationnelles irréductibles.

heig-vd

Zéros

Soit $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ une fonction rationnelle.

- Un **zéro** de f est un nombre a tel que $n(a) = 0$ et $d(a) \neq 0$.

  Il s'agit donc d'une racine du numérateur $n(x)$ mais pas du dénominateur $d(x)$ (cette dernière condition est inutile si la fonction est irréductible).

- Un zéro a est dit de multiplicité m si a est une racine de multiplicité m de $n(x)$, c.à-d. si $n(x)$ est divisible par $(x-a)^m$ mais pas par $(x-a)^{m+1}$.

- Soit a un zéro de multiplicité m de f,
  - si m est impair, le graphe représentatif de f traverse l'axe des abscisses au point $(a, 0)$;
  - si m est pair, le graphe représentatif de f touche l'axe des abscisses au point $(a, 0)$ mais reste localement du même côté de cet axe.

heig-vd

Pôles et asymptotes verticales

Soit $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ une fonction rationnelle.

- Un **pôle** de f est un nombre a tel que $d(a) = 0$ et $n(a) \neq 0$.

  Il s'agit donc d'une racine du dénominateur $d(x)$ mais pas du numérateur $n(x)$ (cette dernière condition est inutile si la fonction est irréductible).

- Un pôle a est dit de multiplicité m si a est une racine de multiplicité m de $d(x)$.

- Si a est un pôle de f, la fonction n'est pas définie en a et son graphe représentatif possède une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

- Soit a un pôle de multiplicité m de f,
  - si m est impair, le graphe représentatif de f part vers $+\infty$ d'un côté de l'asymptote $x = a$ et vers $-\infty$ de l'autre côté ;
  - si m est pair, le graphe représentatif de f part vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ des deux côtés de l'asymptote $x = a$.

heig-vd

Asymptotes horizontales et obliques

Soit $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ une fonction rationnelle.

- Si $\text{degre}(n(x)) < \text{degre}(d(x))$ les valeurs de la fonction tendent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ et $y = 0$ est une **asymptote horizontale** du graphe représentatif de f.
- Si $\text{degre}(n(x)) = \text{degre}(d(x))$ les valeurs de la fonction tendent vers une constante non nulle lorsque x tend vers $\pm\infty$ et le graphe représentatif de f admet une **asymptote horizontale** dont l'ordonnée est égale au quotient des coefficients dominants de $n(x)$ et $d(x)$.

  EXEMPLE. Le graphe de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 2}$ possède une A. H. d'équation $y = \dfrac{2}{3}$.
- Si $\text{degre}(n(x)) = \text{degre}(d(x)) + 1$ le graphe représentatif de f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = mx + h$ où $mx + h$ est le quotient de la division de $n(x)$ par $d(x)$.

  EXEMPLE. Pour $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ on a $2x^2 - 3x + 4 = (2x - 7)(x + 2) + 18$ et $y = 2x - 7$ est une asymptote oblique du graphe représentatif de f.

heig-vd

Exemple

Soit la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6}{x^3 - 8} = \frac{2(x+1)^2(x-3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

- Son domaine de définition est $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- La fonction possède un zéro double en $x = -1$ et un zéro simple en $x = 3$.
- La fonction possède un pôle simple en $x = 2$.
- Le graphe représentatif de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ (les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux).
- Le graphe représentatif de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

heig-vd

Exemple (2)

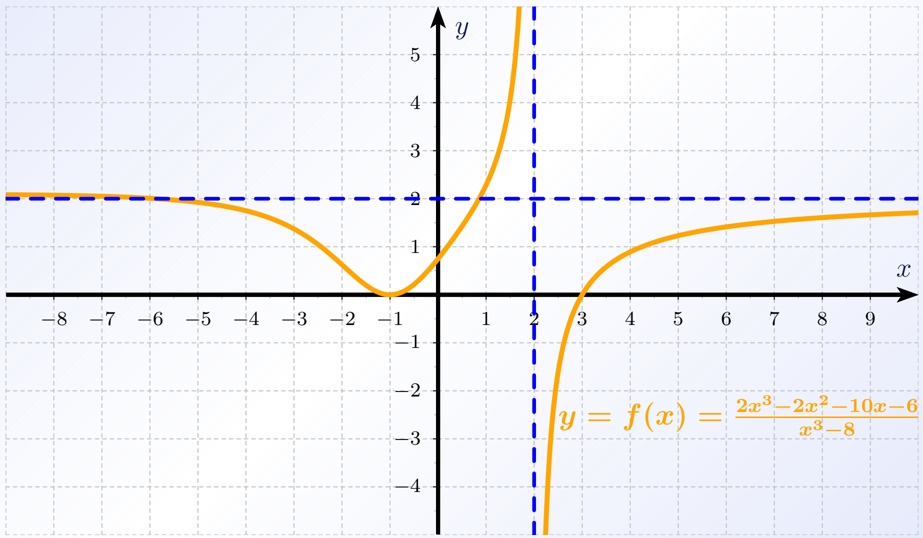
- On peut alors établir un tableau de signes pour f

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0					$+$	
$x-3$		$-$					0	$+$	
$n(x)$		$-$	0		$-$		0	$+$	
$x-2$		$-$			0			$+$	
x^2+2x+4					$+$				
$d(x)$		$-$			0			$+$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

avant d'esquisser son graphe représentatif...

heig-vd

Exemple (3)



heig-vd

Chapitre 5

Exponentielles et logarithmes

Les fonctions exponentielles

- Soit $a > 0$ un réel positif, l'**exponentielle de base a** notée a^x ou $\exp_a(x)$ est l'unique fonction continue transformant une somme en produit, c.-à-d. vérifiant la propriété

$$\boxed{a^{x+y} \;=\; a^x \cdot a^y \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \exp_a(x+y) \;=\; \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)}$$

quels que soient les réels x et y, et prenant la valeur a en 1, c-.à-d. telle que

$$\boxed{a^1 = \exp_a(1) = a.}$$

- Quelle que soit la base $a > 0$, l'exponentielle de base a est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et ne prend que des valeurs positives :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \exp_a(x) = a^x \end{array}}$$

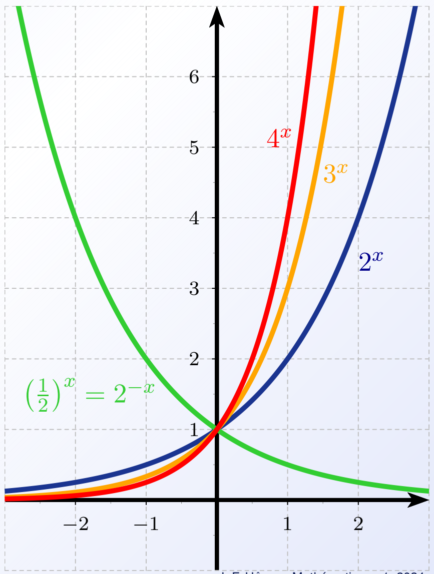
Son image est égale à $\mathbb{R}_+^*$ (sauf si $a = 1$).

Représentation graphique

- Quelle que soit la base $a > 0$ on a

$$\begin{array}{rcl} a^0 & = & 1 \\ a^1 & = & a \\ a^{-1} & = & 1/a \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} \exp_a(0) & = & 1 \\ \exp_a(1) & = & a \\ \exp_a(-1) & = & 1/a \end{array}$$

- L'exponentielle de base a est strictement croissante pour $a > 1$ et strictement décroissante pour $0 < a < 1$.
- Le graphe représentatif d'une exponentielle de base a possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
  - vers $-\infty$ pour $a > 1$ et
  - vers $+\infty$ pour $0 < a < 1$.



Le nombre d'Euler

- La base la plus courante pour les exponentielles est égale à e, le **nombre d'Euler** (aussi appelée constante de Néper). Il s'agit d'un nombre irrationnel dont les premières décimales sont

$$e \approx 2{,}718281828459\ldots$$

- Lorsqu'on parle de la fonction exponentielle on sous-entend l'exponentielle de base e qui associe à tout réel x le nombre positif $e^x = \exp(x)$.
- Il existe deux définitions classiques du nombre e, toutes les deux basées sur la notion de limite. On a, d'une part,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

mais également

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Les fonctions logarithmes

- La fonction réciproque (ou inverse) de l'exponentielle de base a est appelée **logarithme de base a** et est notée $\log_a(x)$. Elle est définit pour des arguments positifs uniquement mais peut prendre n'importe quelle valeur réelle :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a(x) \end{array}}$$

REMARQUE. La base a doit non seulement être positive mais également différente de 1 car l'exponentielle de base 1 n'est pas inversible (il s'agit de la fonction constante 1).

- Si les exponentielles transforment les sommes en produits, les logarithmes transforment, eux, les produits en sommes, c.-à-d. qu'ils vérifient la propriété

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$$

quels que soient les réels positifs x et y.

heig-vd

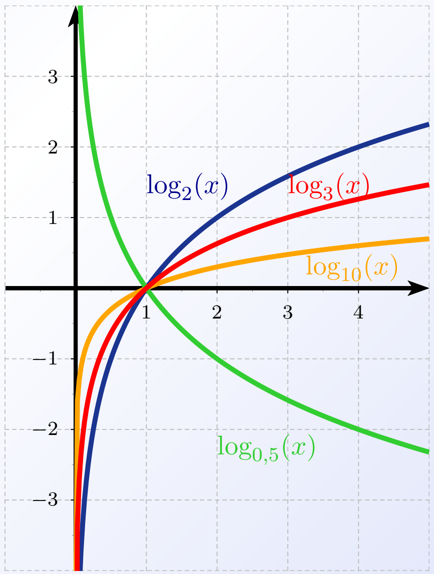
Représentation graphique

- Quelle que soit la base $a > 0$, $a \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= 0 \\ \log_a(a) &= 1 \\ \log_a(1/a) = \log_a(a^{-1}) &= -1 \end{aligned}$$

- Le logarithme de base a est strictement croissant pour une base $a > 1$ et strictement décroissant pour $0 < a < 1$ (les bases entre 0 et 1 sont très rarement utilisées)
- Le graphe représentatif d'un logarithme de base a possède une asymptote verticale d'équation

$$x = 0.$$



heig-vd

Propriétés des logarithmes

- Pour x et y des réels positifs, les logarithmes vérifient les règles de calcul

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a(x/y) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_{\frac{1}{a}}(x) &= -\log_a(x) \end{aligned}}$$

- De plus, quel que soit l'exposant réel z, on a aussi

$$\boxed{\log_a(x^z) = z \log_a(x)}$$

- Exponentielles et logarithmes étant des fonctions réciproques on a aussi, quels que soient x positif et y réel,

$$\boxed{y = \log_a(x) \iff x = a^y}$$

heig-vd

Exemples

- $\log_{10}(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$
- $\log_{1000}(10) = 1/3$ car $10 = \sqrt[3]{1000} = 1000^{1/3}$
- $\log_4(2) = 1/2$ car $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$
- $\log_{1/3}(81) = -4$ car $81 = 9^2 = 3^4 = (1/3)^{-4}$
- on a aussi $\log_{1/3}(81) = -\log_3(81) = -\log_3(3^4) = -4\log_3(3) = -4$
- $\log_5(2500) = \log_5(4 \cdot 625) = \log_5(4) + \log_5(625) = \log_5(2^2) + \log_5(5^4)$
  $= 2\log_5(2) + 4\log_5(5) = 4 + 2\log_5(2)$
- $\frac{1}{4}\log(256) - \frac{1}{3}\log(27) = \log(256^{1/4}) - \log(27^{1/3}) = \log(4) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)$
- pour $x > 0$, $\log(x^2) + 3\log(1/\sqrt[3]{x}) = 2\log(x) + 3\log(x^{-1/3})$
  $= 2\log(x) + 3(-1/3)\log(x) = \log(x)$

heig-vd

Logarithmes décimaux et naturels

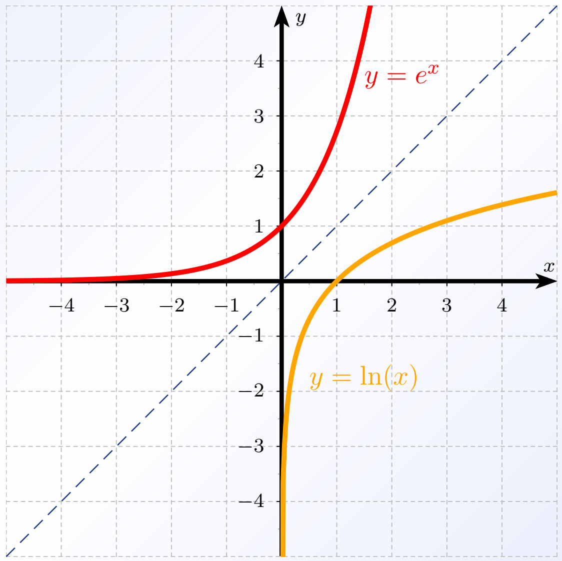
- Les trois bases les plus utilisées sont les bases e, 10 et 2.
  - La base 2 est fréquemment utilisée en algorithme et en théorie de la complexité. Les logarithmes de base 2 sont normalement notés $\log_2$ mais certains ouvrages d'informatique les notent simplement $\log$.
  - Les logarithmes de base 10 sont appelés **logarithmes décimaux**. Il sont normalement notés $\log_{10}$ mais parfois simplement $\log$.
  - Les logarithmes de base e sont appelés **logarithmes naturels** (ou logarithmes népériens) et sont notés $\mathbf{ln}$. On travaille donc le plus souvent avec les deux fonctions réciproques

$$\begin{array}{llll} \mathbf{exp}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{llll} \mathbf{ln}: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

  et, quels que soient x réel ou y positif, on a

$$\ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln(y)} = y$$

Illustration graphique



Changement de base

- Quels que soient les bases a et b et le réel positif x on a $x = a^{\log_a(x)}$ et en prenant le logarithme de base b de chaque côté de l'égalité précédente on obtient

$$\log_b(x) = \log_a(x)\log_b(a),$$

formule qui est généralement présentée sous une des deux formes

$$\log_b(x) = \log_b(a)\log_a(x) \quad \text{ou} \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

- On peut aussi se concentrer sur le passage de la base e à une autre (et se rappeler que la formule s'applique à toute paire de bases), on a alors

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Chapitre 6

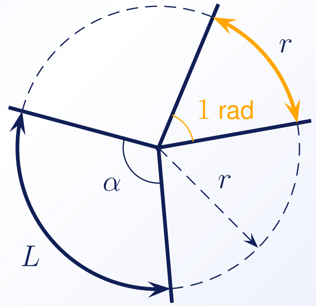
Fonctions trigonométriques

Mesures de l'angle

Deux unités courantes pour mesurer un angle : le **radian** (symbole `rad`) et le **degré** (symbole °).

$$\boxed{L = \alpha \cdot r}$$

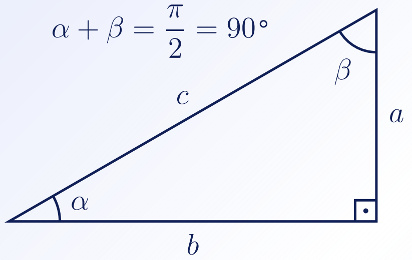
$$\boxed{\alpha = \frac{L}{r}}$$



Définition. Au centre d'un cercle, un **angle de 1 rad** intercepte, sur le cercle, un arc de longueur égale à celle du rayon du cercle.

Trigonométrie dans le triangle rectangle

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90°$$



$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \tan(\beta)$$

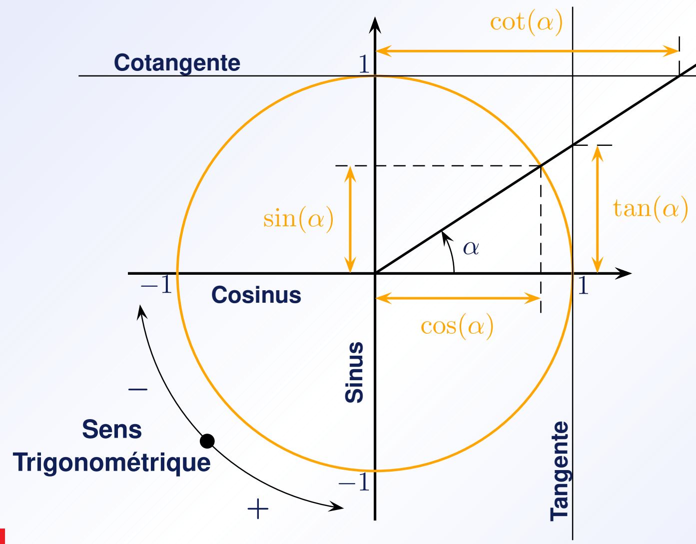
Avec les abréviations

$a =$ OPP $\quad b =$ ADJ $\quad c =$ HYP

on retrouve les formules bien connues

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{ADJ}}{\text{HYP}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{OPP}}{\text{HYP}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{OPP}}{\text{ADJ}}$$

Le cercle trigonométrique

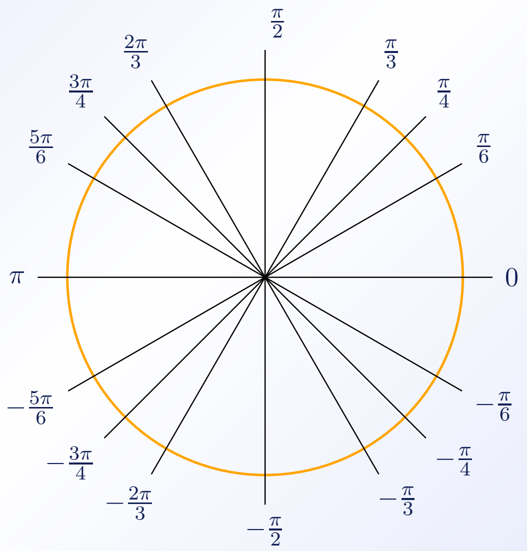


Identités de base

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

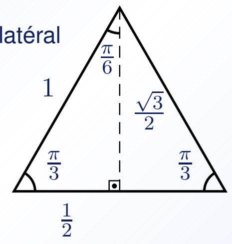
Angles usuels et cercle trigonométrique



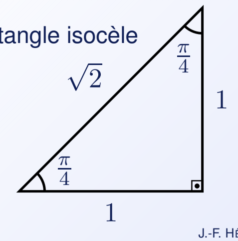
Angles usuels

α	$\cos(\alpha)$		$\sin(\alpha)$		$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0	1	$(\sqrt{4}/2)$	0	$(\sqrt{0}/2)$	0	–
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$(\sqrt{3}/2)$	$1/2$	$(\sqrt{1}/2)$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}/2)$	$1/\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}/2)$	1	1
$\pi/3$	$1/2$	$(\sqrt{1}/2)$	$\sqrt{3}/2$	$(\sqrt{3}/2)$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	$(\sqrt{0}/2)$	1	$(\sqrt{4}/2)$	–	0

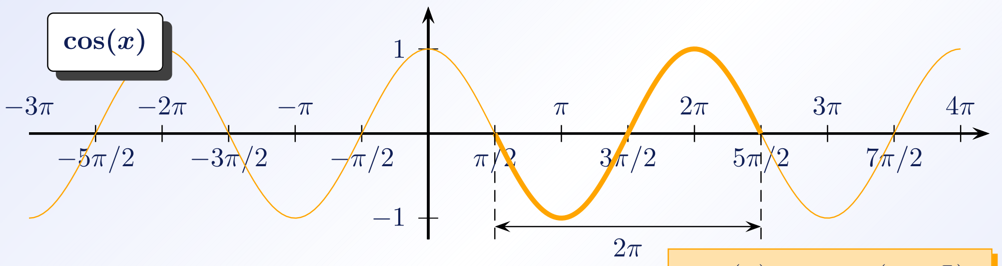
Triangle équilatéral



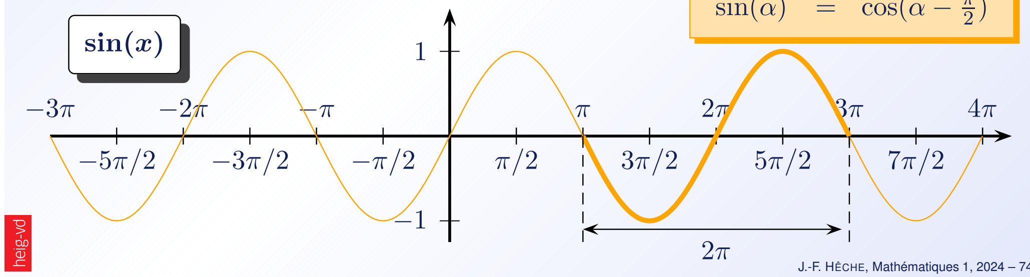
Triangle rectangle isocèle



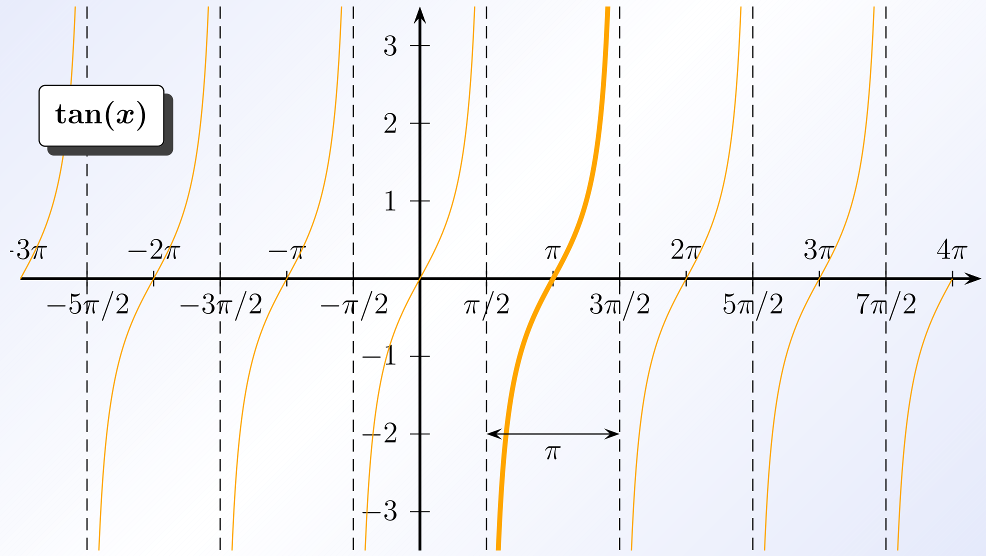
Représentations graphiques



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) &= \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$



Représentations graphiques

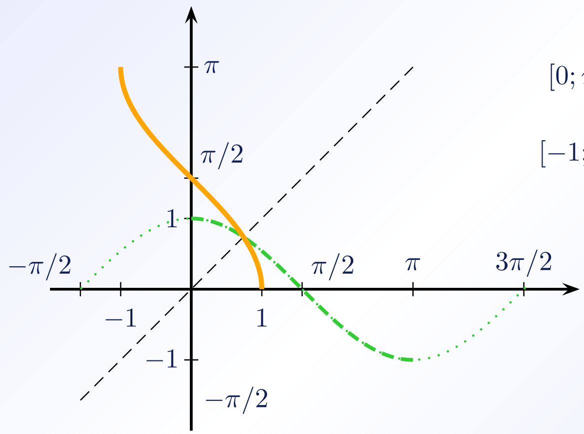


Domaine de définition, image, parité, période et zéros

	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
Domaine de définition	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x \neq k \cdot \pi$
Ensemble image	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	paire	impaire	impaire	impaire
Zéros	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x = k \cdot \pi$	$x = k \cdot \pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Remarque. La variable k désigne à chaque fois un entier quelconque.

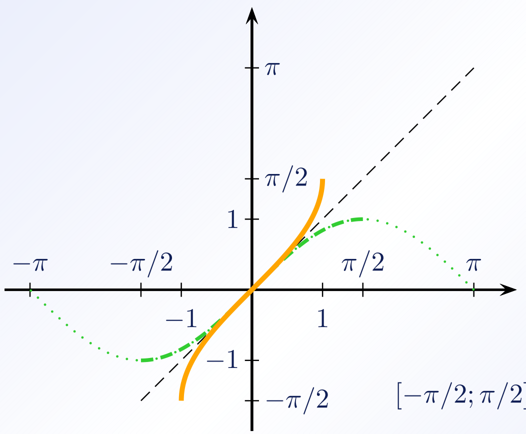
Fonctions trigonométriques réciproques : $\arccos$



$[0; \pi] \xrightarrow{\cos(x)} [-1; 1]$

$[-1; 1] \xrightarrow{\arccos(x)} [0; \pi]$

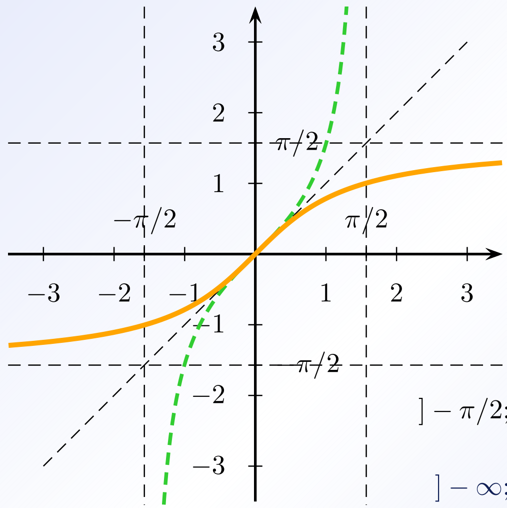
Fonctions trigonométriques réciproques : $\arcsin$



$[-\pi/2; \pi/2] \xrightarrow{\sin(x)} [-1; 1]$

$[-1; 1] \xrightarrow{\arcsin(x)} [-\pi/2; \pi/2]$

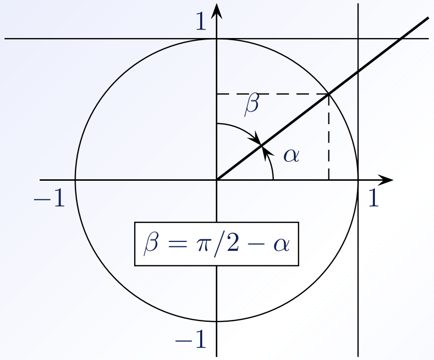
Fonctions trigonométriques réciproques : $\arctan$



$]-\pi/2; \pi/2[\xrightarrow{\tan(x)}]-\infty; \infty[$

$]-\infty; \infty[\xrightarrow{\arctan(x)}]-\pi/2; \pi/2[$

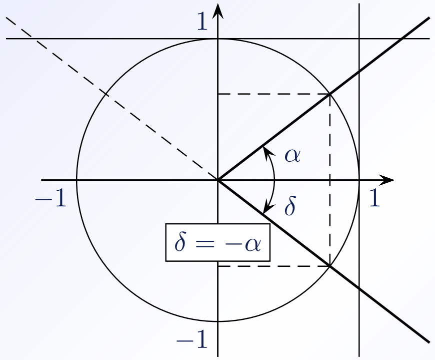
Angles complémentaires



$$\begin{aligned} \cos(\pi/2-\alpha) &= \sin(\alpha) \\ \sin(\pi/2-\alpha) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \cos(\pi/2-\alpha) &&= \sin(\alpha) \\ \sin(\beta) &= \sin(\pi/2-\alpha) &&= \cos(\alpha) \\ \tan(\beta) &= \tan(\pi/2-\alpha) &&= \cot(\alpha) \\ \cot(\beta) &= \cot(\pi/2-\alpha) &&= \tan(\alpha) \end{aligned}$$

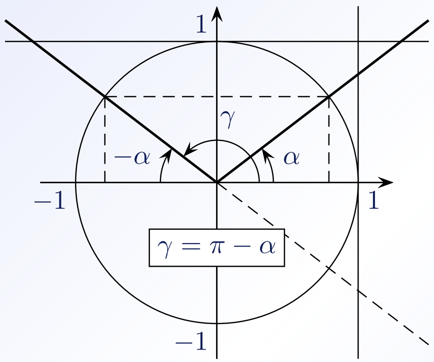
Angles opposés



$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\delta) &= \cos(-\alpha) &&= \cos(\alpha) \\ \sin(\delta) &= \sin(-\alpha) &&= -\sin(\alpha) \\ \tan(\delta) &= \tan(-\alpha) &&= -\tan(\alpha) \\ \cot(\delta) &= \cot(-\alpha) &&= -\cot(\alpha) \end{aligned}$$

Angles supplémentaires



$$\begin{aligned} \cos(\pi-\alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\pi-\alpha) &= \sin(\alpha) \\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \cos(\pi-\alpha) &&= -\cos(\alpha) \\ \sin(\gamma) &= \sin(\pi-\alpha) &&= \sin(\alpha) \\ \tan(\gamma) &= \tan(\pi-\alpha) &&= -\tan(\alpha) \\ \cot(\gamma) &= \cot(\pi-\alpha) &&= -\cot(\alpha) \end{aligned}$$