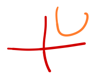
Serie 1 – théorie

exemple: $x^2 + x + 1 > 0$

strictement +



$S = \mathbb{R}$

$(x-2)(x^2-8x+12) < 0$

tableau de signe si produit

$(x-2)(x-6)$

pt important: $-2; 2; 6$

x	$-\infty$	-2	2	6
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2-8x+12$	$+$	$+$	$-$	$+$
$(x+2)(x^2-8x+12)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty; -2[\cup]2; 6[$

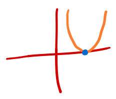
very important ⚠

↳ to use w/ facto ⚠

$x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$\Delta = 0 \qquad S = \{1\}$

$(x+1)(x-2)$



	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$-3x+1$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
A	$+$	$-$	$+$	$-$	

stackable

$S =]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{3}; 1[$

$|a| = c \iff a = \pm c$ si $c \geq 0$

$|a| < c \iff -c < a < c$

$|x-1| < 2 \iff -2 < x-1 < 2$
$\iff -1 < x < 3$

$\rightarrow |a| > c \iff a > c$ ou $a < -c$

$|x-1| > 2 \iff x-1 > 2$ ou $x-1 < -2$
$\iff x > 3$ (ou) $x < -1$

$S =]3; +\infty[\cup]-\infty; -1[$

réunion de deux intervalles

on peut mettre sous le même dénominateur

$\frac{x-1}{x+1} > \frac{x}{x-1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x+1} > 0$

$x \neq -1$
$x \neq 1$

$= \frac{(x-1)^2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0$

$= \frac{\cancel{x^2} - 2xx + 1 - \cancel{x^2} - x}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{-3x+1}{(x+1)(x-1)} \qquad -1; 1$

$= 3x + 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}$

Ex 7:

e) $\frac{2-x}{(x+1)^2(x+2)(x-4)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} =$

$\frac{(2-x)(x+2) + (x+1)(x-4)}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)} = \frac{\cancel{4} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - 3x - \cancel{4}}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)}$

$= \frac{-3x}{(x+1)^2(x+2)^2(x+4)}$

dénominateur commun

↳ on prend le max

$\Rightarrow (x+1)^2(x+2)^2(x+4)$

on peut prendre pour ajouter !

Serie 3 – théorie

Exponentiel:

$a > 0$ & $a \neq 1 \qquad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

$x \to a^x$

fonction expo en base a

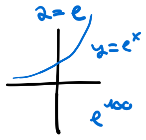
Remarque: $a > 0$?

$a = -2$

$\exp_a \qquad x = \frac{1}{2} \to a^x = -2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$

$\to a \neq 1 \quad 1^x = 1 \Rightarrow$ constante

En analyse $a = e$ $\quad e = 2{,}718\ldots$



$y = e^x$

$e^{-\infty}$

$a = 2 \to$ binaire
$a = 10 \to$

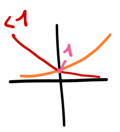
Propriétés: $a > 0 \quad a \neq 1$

$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

$a^0 = 1 \qquad a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$y = a^x \quad a < 1$



$y = a^x$
$a > 1$

⚠ 0^0 = indéfini

Logarithmes: $a > 0 \quad a \neq 1$

$\mathbb{R} \quad]0; +\infty[\qquad$ est bijective $\Rightarrow \forall y \in]0; +\infty[$

$\exp_a = x \Rightarrow a^x \qquad ! \exists x \in \mathbb{R} \quad a^x = y$

$\log_a(y) = x \iff a^x = y$

$y > 0$ ⚠ $\qquad \ln(-4) = x \quad e^x = -4$ IMPOSSIBLE!

Propriétés: ① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

$\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$

$A^B = e^{B \ln(A)}$

Remarque:

Si $a = e$ $(2{,}71\ldots)$ $\log_a = \ln$

$\ln(e^3) = x = e^x = e^3$
$x = 3$

fonction réciproque $\Rightarrow \log_a(a^x) = x$

Compléments:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^b) = b \log_a(x)$

$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$e^{\ln(*)} = * \qquad \ln(e^*) = *$

$\exp(x) \rightleftarrows \log$

aller retour

$10^{\log(*)} = *$

Pw nég handling: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\Rightarrow$ goes both ways

Pw handling:

$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$

Root handling (radical)

$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$b \neq 0$

calculs rules

$x^r \cdot x^s = x^{r+s} \qquad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

$(x^r)^s = x^{r \cdot s} \qquad x^r \cdot y^r = (xy)^r$

frac. =

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad x \geq 0$

$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

Id remarquable

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

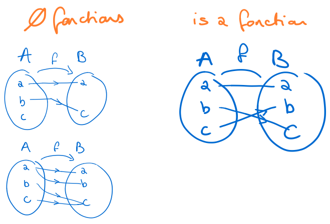
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Serie 2 - théorie

Fonctions : correspondance foreach élément d'un ensemble A, lui associe 1 only 1 élément d'un ensemble B

chaque élément à 1 seule img

$f : A \to B$
$x \mapsto f(x)$



Domaine de définitions d'une fonction
le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ | fonction f est bien définie

Exemple :

① $f(x) = \sqrt{x-1}$

$D(f)$: domaine de déf. f.

$x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$

$D(f) = [1; +\infty[$

② $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$D(f) = x+2 \neq 0$

$x+2 = 0$
$x = -2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Composition de fonctions

f & $g \Rightarrow 2$ fonctions

exemple : $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \frac{1}{x+2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = f(y)$

Dom. de déf. $(f \circ g)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 1ère cond. $x \in D(g)$
2e cond. $g(x) \in D(f)$

$x \neq 2$

$D(f \circ g) =]-2; +\infty[$

$\sqrt{y}$

$= \sqrt{\frac{1}{x+2}} \quad \frac{1}{x+2} \geq 0$

$x+2 > 0$
$x > -2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$x \geq 0 \quad g(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad \sqrt{x}+2 > 0$

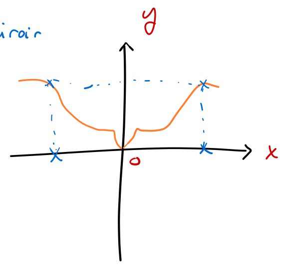
$D(g \circ f) = [0; +\infty[$

Rem. : $f \circ g \neq g \circ f$

Parité

f est paire si $f(-x) = f(x)$

↳ symétrie par rapport à Oy — miroir



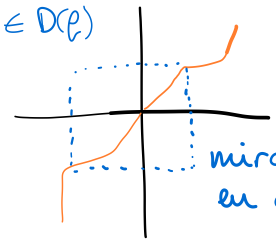
exemple : ① $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

② $f(x) = |x|$

$f(x) = |-x| = |x| = f(x)$

f est impaire $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$



Exemple : ① $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

② $f(x) = \sin(x)$

f est ni paire, ni impaire →

$f(x) = x^2 + x^3$

$f(2) = 2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$

$f(-2) = (-2)^2 + (-2)^3 = 4 - 8 = -4$

$f(2) \neq f(-2)$
$\neq -f(2)$

$f(x) = 0$ — fonction nulle

$f(-x) = 0 = f(x)$
$= -0 = -f(x)$

Fonction partie entière supérieur :

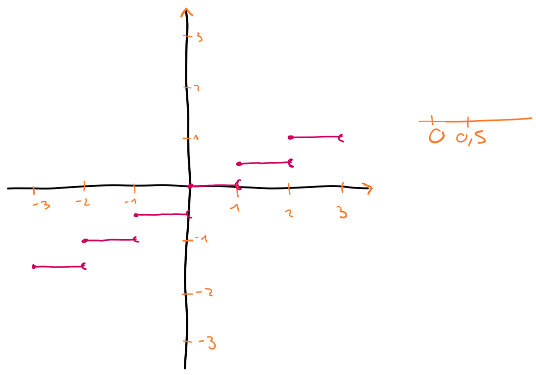
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor$: plus grand entier $\leq x$

$\lfloor 2,3 \rfloor = 2$

$\lfloor -2,3 \rfloor = -3$

ni paire ni impaire



Remarque : $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\lfloor 2 \rfloor = 2 \quad \lfloor -1 \rfloor = -1$

$\lfloor 3 \rfloor = 3$ etc...

Exercice 2 bs

$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$

$f(x) = |x-1| + |x+1|$ $\begin{cases} -(x+1) - (x-1) & 1 \\ x+1-(x-1) & 2 \\ x+1+x-1 & 3 \end{cases}$ régions

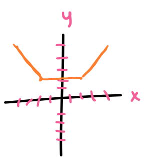
$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$

$|x+1| = -(x+1)$
$|x-1| = -(x-1)$

$x \leq 1$
$-1 \leq x \leq 1$
$x \geq 1$

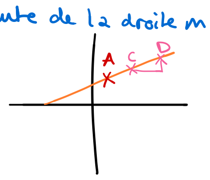
-1		$+1$	
$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$	+
$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$	
$-(x+1)-(x-1)$	$x+1-(x-1)$	$x+1+(x-1)$	
$-2x$	2	$2x$	

for -
Si $x \leq -1$ $|-3| = -(-3)$ $= 3$ bcs -- $= +$
↳ $|x+1|$
→ $-(x+1)$
$x \leq -1$
↳ $|x-1|$
→ $-(x-1)$ $x-1$
⇒ $-(x-1) - x + 1 \Rightarrow -2x$



Rappel sur les droites

To déf. une droite need a point $A(\alpha; \beta)$ et la pente de la droite m



Exemple : ① $m = 5 \quad A = (2; 1)$

$y = 5(x-2) + 1$
$y = 5x - 9$

② $A(2; 1) \quad B(7; 4)$

pente $= m = \frac{4-1}{7-2} = \frac{3}{5}$

$m = \frac{y - \beta}{x - \alpha} \Rightarrow m(x-\alpha) = y - \beta$

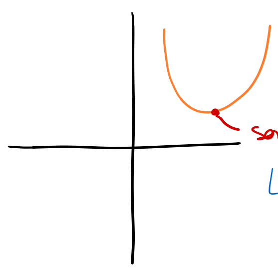
$\boxed{y = m(x-\alpha) + \beta}$ ⚠

Si pente verticale → pente non définie

$x \Rightarrow$ constante — pour une droite verticale

si pente horizontale → y constante

Rappel sur les paraboles



sommet

$x = -\frac{b}{2a}$

↳ axe de symétrie

Remarque : une para. est parfait. déf. si on a le sommet et un pt

$y = ax^2 + bx + c$
$a \neq 0$

$S = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

où

$\Delta = b^2 - 4ac$

$S(\alpha; \beta)$ est le sommet d'une parabole alors

$y = a(x-\alpha)^2 \beta$

Exemple : $S(3;4)$ & passe par $A(1;-2)$ $a = ?$

$y = a(x-3)^2 + 4$

$-2 = a(1-3)^2 + 4$

donc $-2 = a4 + 4$

$-6 = 4a$

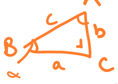
$a = -\frac{6}{4} \to -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}(x-3)^2 + 4$

Serie 5 – théorie

Trigonométrie : Angles = rd ; degré

Triangle rectangle



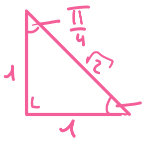
$a^2+b^2=c^2$

$\cos(\alpha)=\frac{a}{c}$
$\sin(\alpha)=\frac{b}{c}$
$\tan(\alpha)=\frac{b}{a}$

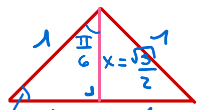
1rd ? → 1rd

$\Rightarrow \frac{\alpha^{rd}}{\pi}=\frac{\alpha^{\circ}}{180}$ $\quad \ell=R\,\alpha^{rd}$ $\quad S=\frac{1}{2}R^2\alpha$

$\alpha=2\pi \quad p=2\pi R$
$\alpha=2\pi \quad S=\pi R^2$
$S=\frac{1}{2}(2\pi)R^2$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\frac{\pi}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}$

$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$
$x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Angles remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
cos	$\sqrt{4}/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0}=0$
$\sqrt{1}=1$
$\sqrt{4}=2$

$\frac{\sin}{\cos}=\tan$

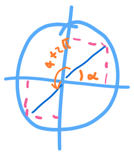
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\alpha)=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$ mesure algébrique
$\sin(\alpha)=\frac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$

$-1\leq\cos(\alpha)\leq1$
$-1\leq\sin(\alpha)\leq1$

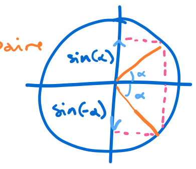
$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

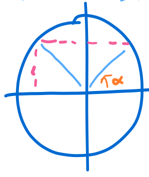
triangle (OIT) = $\tan(\alpha)=\frac{IT}{1}=IT$
si α proche de $\frac{\pi}{2}$ $\tan(\alpha)\Rightarrow+\infty$



$\cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)$

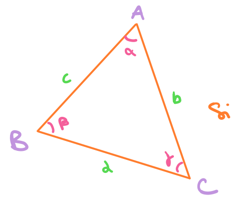
$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ paire
$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$





$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$
$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$
périodique de 2π

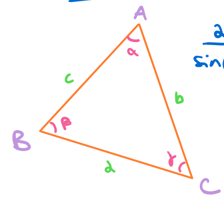
Théorème du cosinus :



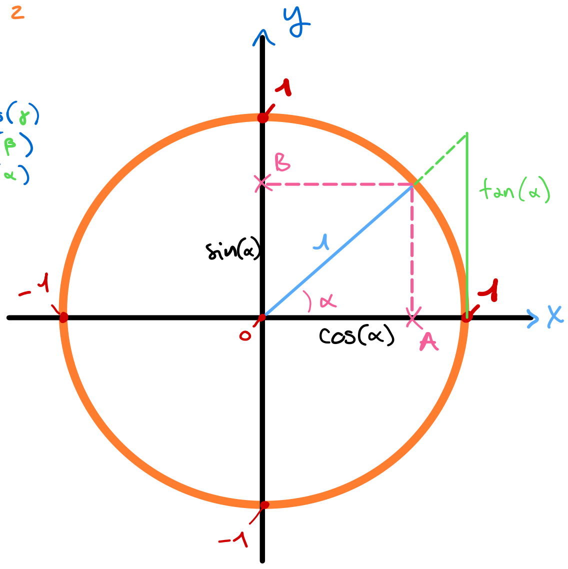
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)$
$a=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$

Si $\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
↳ $a^2+b^2=c^2$

Théorème du sinus :



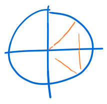
$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$



Équations trigo. :

Résoudre $\cos(x)=\cos(\alpha)$ $\quad \alpha$ donné

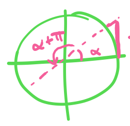
exemple : $\begin{cases} x=\alpha+2n\pi & n\in\mathbb{Z} \\ x=-\alpha+2n\pi & " \end{cases}$ ↳ $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$



i) $\cos(x)=3 \quad \cos\in[-1;1]$ $\quad 2n\pi \Rightarrow$ nb de tours
↳ $S=\emptyset$

Résoudre $\sin(x)=\sin(\alpha)$
$x=\alpha+2n\pi$
$x=\pi-\alpha+2n\pi$

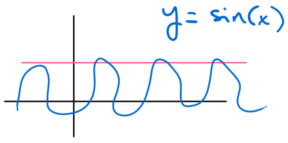
Résoudre $\tan(x)=\tan(\alpha)$
↳ $\tan(x+\pi)=\tan(x)$
$x=\alpha+n\pi \quad n\in\mathbb{Z}$



Trigonométrie inverse :

① Fonction arcsin

sin : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to\sin(x)$
$\emptyset$ bijective
↳ chaque pt à son image

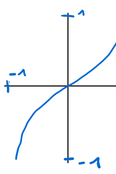


$y=\sin(x)$

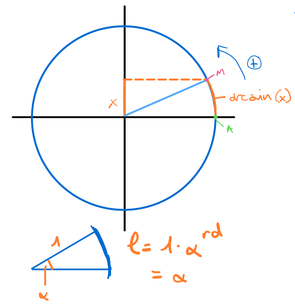
$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow[-1;1]$ $\quad$ ~~sin~~ ⇒ arcsin

sin $\quad x \to \sin(\alpha)$

On peut définir une fonction réciproque
⇒ arcsin
$\alpha=\arcsin(x)$
$-1\leq x\leq1$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=x \quad -\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$



$y=\arcsin(x)$



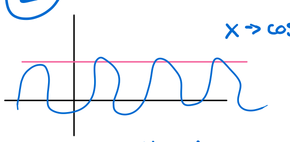
arcsin(x) : longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$
$\arcsin(0)=0$
$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$x\in[-1;1]$
$\sin(\arcsin(x))=x$
$\arcsin(\sin(\alpha))=\alpha$

$\ell=1\cdot\alpha^{rd}$
$=\alpha$

$\ell=R\,\alpha^{rd} \quad R=1$
$\ell=1\alpha^{rd}$

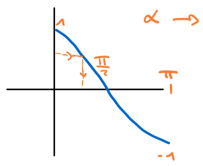
② arccos

$x\to\cos(x)$



↳ $\emptyset$ bijective

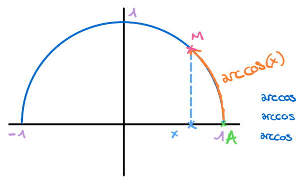
$\Rightarrow \cos=[0;\pi]\to[-1;1]$
$\alpha\to\cos(\alpha)$



fonction réciproque :
arccos : $[-1;1]\to[0;\pi]$
$x \to \arccos(x)$

$\arccos(x)=\alpha \Leftrightarrow \cos(\alpha)=x$
$-1\leq x\leq1 \qquad \alpha\in[0;\pi]$

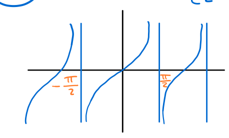
$\begin{cases}\cos(\arccos(x))=x & x\in[-1;1] \\ \arccos(\cos(\alpha))=\alpha & \alpha\in[0;\pi]\end{cases}$



$\arccos(1)=0$
$\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$
$\arccos(-1)=\pi$

③ arctan : $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow\mathbb{R}$

$\alpha\to\tan(\alpha)$ $\quad \emptyset$ bijective

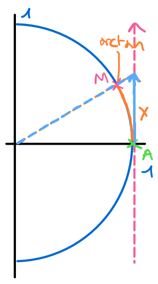


tan $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\mathbb{R}$
$\alpha\to\tan(\alpha)$

arctan : $\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$x\to\arctan(x)$

$\arctan(x)=\alpha \Leftrightarrow \tan(\alpha)=x$
$x\in\mathbb{R} \qquad \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(\arctan(x))=x \quad x\in\mathbb{R}$
$\arctan(\tan(\alpha))=\alpha \quad \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$



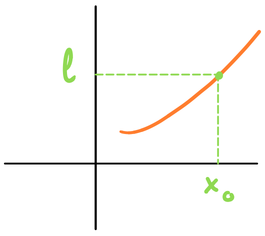
Limites & continuités :

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

pas défini en 0

x est proche de 0

les $\frac{\sin(x)}{x}$ proche de 1



réponse sous forme d'intervalles

$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Simplification : $F(x) = G(x) \quad x \neq x_0$

alors $\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} G(x)$

Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$

$x \neq 1 \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$

$\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$

Remarque : pour les fonctions élémentaires (trigo, polynômes, expo, ln, etc...)

si $x_0 \in D(f) \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : $\lim_{x \to 1} 4x^3 + 2x - 1 = 5$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h} = \cancel{\frac{0}{0}}$

multiplication par

$\frac{(4 - \sqrt{16+h})}{h} \frac{(4 - \sqrt{16+h})}{(4 - \sqrt{16+h})} = \frac{\cancel{16} - (\cancel{16} + h)}{h(4 + \sqrt{16+h})}$

$\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(4 + \sqrt{16+h})} = \frac{-1}{4 + \sqrt{16+h}} = \frac{-1}{4+4} = -\frac{1}{8}$

Théorème des 2 gendarmes :

$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad x \neq x_0$

et si $\lim_{x \to x_0} = g(x) \; \lim_{x \to x_0} = \ell$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

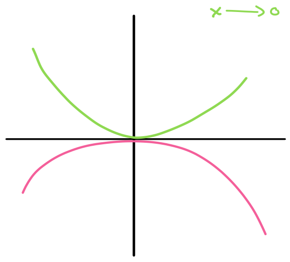
Exemple : $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ $\quad -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$x^2 \to 0$, $\sin(\frac{1}{x})$: $\not\exists$

$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$

ou $\lim_{x \to 0} -x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

donc $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$



Limite à gauche & limite à droite :

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \to 0} f(x)$

Limite à gauche : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

si x est proche de x_0 mais $x < x_0$ $f(x)$ est proche de ℓ_1

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$

si x est proche de x_0 avec $x > x_0$ alors $f(x)$ est proche de ℓ_2

Exemple $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

valable pour les limites à droite & à gauche

les on a l'unicité de la limite

$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$

$\lim_{x \to 0} \varnothing$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1$

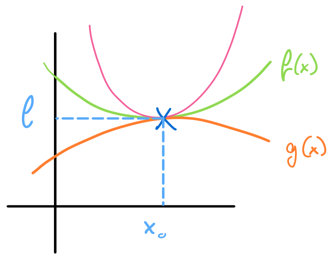
$\lim_{x \to 0} f(x) \; \varnothing$

Exemple : Limite inexistante

$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = 1$

$h(x)$

$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = -1$



$x = 0, \cos 1 r$

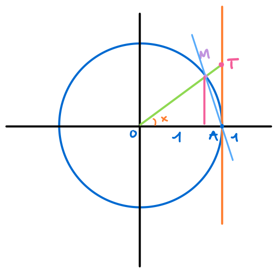
$\frac{\sin(x)}{x} \simeq 1$

$S(\Delta OAM) \leq S(\text{secteur } \widehat{AM}) \leq S(\Delta OAT)$

$S(\Delta OAM) = \frac{1}{2}(1)\sin(x)$

$(\text{secteur } \widehat{AM}) = \frac{1}{2}(1)x$

$S(\Delta OAT) = \frac{1}{2}(1)\tan(x)$



$\cancel{\frac{1}{2}} \sin(x) \leq \cancel{\frac{1}{2}} x \leq \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} 1 = 1$

théorème des gendarmes

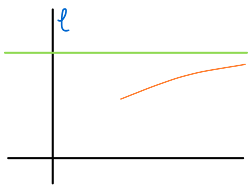
Remarque : $\lim_{* \to 0} \frac{\sin(*)}{*} = 1$

Exemples : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) 3 = 3$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \sin(3x)}{x}$

$\lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right) + \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) 3 = 5$

Limites à l'infini :



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ quand x est assez grand, $f(x)$ est proche de ℓ

$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \quad \forall x \geq N \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Exemple :

① $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7}$

$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7} = \frac{\cancel{x^3}(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3})} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{2}{5}$

aussi défini $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ par $|x|$ assez grand avec $x < 0$ $f(x)$ est proche de ℓ

Exemple : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^3 + 2x^2 + 7}$

$\frac{\cancel{x^3}(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3})} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{2}{5}$

on peut aussi définir $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, f(x) = -\infty$

Formes indéterminées (F.I) :

'$(+\infty) - (\infty)$', '$\frac{0}{0}$', '$\frac{\infty}{\infty}$', '$0 \cdot \infty$'

'1^{∞}'

$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \quad (1 + \frac{1}{1000})^{1000} \simeq e$

$(1 + \frac{2}{1000})^{1000} \simeq e^2$

$A^B = e^{B \ln(A)}$

$1^\infty = e^{\infty \ln(1)} = e^{\infty \cdot 0}$

Number field sieve

algo de facto

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Exemples : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

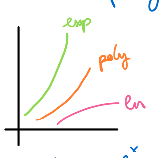
Croissance comparée (à l'infini)

$\ln << \text{poly} << \exp$

$\ln(1000) = 7$

$(1000)^2$

e^{1000}



$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

Remarque : $\pi(x) = |\{p \mid p \text{ premier} \leq x\}|$

$\pi(3) = 2$

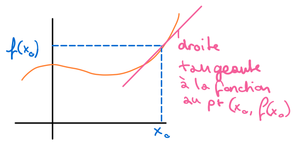
Théorème des nb premiers $\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$

$\pi(x) \simeq \frac{x}{\ln(x)}$

Dérivées

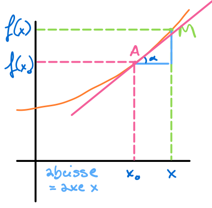
Calcul différentiel

idée



droite tangeante
⇒ approximation locale de la fonction quand x est proche de x_0

on cherche la droite la plus proche de la courbe au niveau du point



La pente de la droite AM

$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tan(\alpha)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ si elle existe, serait la pente de la droite tangeante

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangeante à la courbe au pt $(f(x), f(x_0))$

Formule: tangeante ⇒ $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

exemple: ① $f(x) = \sin(x)$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$ $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

approximation $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{100})$

x proche de x_0 $f(x) \simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

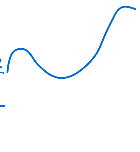
$x = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{100}$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{100}) \simeq \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{100}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

$\simeq \frac{\sqrt{3}}{200}+\frac{1}{2} = 0{,}5086$

$\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{100}) = 0{,}5086$

Remarque:



dérivable = fonction lisse

∅ dérivable = ↳ on se prend le mur

On dérive sur un point donné

Continuité = $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

∅ continue = lim à droite & gauche !=

Propriétés: f, g dérivable sur un domaine donné

① $(c f(x))' = c f'(x)$ c ⇒ const
$(3x^2)' = 3(x^2)'$

② $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
$(x^2+\sin(x))' = (x^2)'+\sin(x)'$

③ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

④ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $g \neq 0$

$f'(x) = \frac{(\tan(x))'x^2 - \tan(x)(x^2)'}{(x^2)^2}$

↳ $\frac{(1+\tan^2(x))x^2 - 2\tan(x)x}{x^4}$

Formulaire: par coeur ♥

$f(x)$	$f'(x)$
2 (const)	0
x	1
x^a	$a x^{a-1}$ ⇒ $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ $x \neq 0$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$

exemple: $f(x) = \sin(x)e^x$
↳ $f'(x) = \sin(x)'e^x \quad \cos(x)e^x$

Composition de fonctions

$(f\circ g)(x) = f'(g(x))g'(x)$ dérivation interne

Exemple: 1) $(e^{\sin(x)})' = e^{\sin(x)} \sin(x)'$
$= e^{\sin(x)} \cos(x)$

3) $(\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{\ln(\ln(x))}(\ln(x))'$
$= \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$

2) $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)'$
$e^{x^2} \, 2x \to 2xe^{x^2}$

4) $(\tan(\ln(x)))' = (1+\tan^2(\ln(x)))(\ln(x))'$
$(1+\tan^2(\ln(x)))\frac{1}{x}$

Formulaire: par coeur ♥

$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x))^a$	$a(f(x))^{a-1} f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f(x)'}{2\sqrt{f(x)}}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\ln(\lvert f(x)\rvert)$	$\frac{1}{f(x)} f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x)) f'(x)$
$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x)) f'(x)$
$\tan(f(x))$	$1+\tan^2(f(x)) f'(x)$
$\arctan(f(x))$	$\frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$

$f(x) = x$
$(x)' = 1$

Règle de l'Hospital
ne pas confondre avec règle de base de dérivation du quotient

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$ ou $\text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$ fonctionne si on a un quotient

Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

exemple: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Remarque: valable aussi si $x_0 = \pm\infty$
et aussi pour $\lim_{x\to x_0^+}$ ou $\lim_{x\to x_0^-}$

Exemples:

① $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ si replace w/ 7 → $\text{'}\frac{0}{0}\text{'}$

B.H. $(\sqrt{x-3})' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$\lim_{x\to 7} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x} = -\frac{\frac{1}{4}}{14} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{1} = -\frac{7}{2}$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

B.H. $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} ⇒ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} ⇒ \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ boucle infinie!

Use old school! ⇒ $x > 0$ $1+x^2 = x^2(\frac{1}{x^2}+1)$
$\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} = 1$

③ $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \text{'}0\,(-\infty)\text{'}$ F.I

Si pas de quotient:
$ab = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{a}}$

$x\ln(x) = Ⓐ \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$ Ⓑ $\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

TE2-2.12
1 dérivée
2 limites

Ⓐ $x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'}$

Ⓑ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$\frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (-1)f(x)^{-2} f'(x)$

$\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = -(\ln(x))^{-2}\frac{1}{x}$
$= -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$

$-\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$

④ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = (+\infty)(0) =$ F.I

$xe^{-x} = \frac{x}{e^x} ⇒ \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

B.H. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

Sens de variation d'une fonction

f est croissante sur $I \subseteq D(f)$ si
$\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 \leq x_2 ⇒ f(x_1) \leq f(x_2)$

Remarque
f est croissante $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$
$\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 \neq x_2$

Théorème: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable
$I \subseteq D$ $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ f est croissante sur I
$\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$ f est décroissante sur I

⇒ pour étudier le sens de variation d'une fonction dérivable, il suffit d'étudier le signe de $f'(x)$

Tableau de variations

T.V.

x		
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

Exemple: Étudier le sens de var. de la func.
⇒ $f(x) = xe^{-x}$ $f'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x}+x(e^{-x})'$
$D(f) = \mathbb{R}$ $= e^{-x}-xe^{-x}$
$= e^{-x}(x-1)$

Signe $(f'(x)) = \text{sgn}(1-x)$ car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$ max global	↘ 0

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ ou

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ croissance comparée

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$

$f(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$

B.H ⇒ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

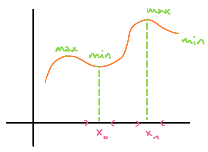
Maximum - minimum - extremum

Au pt $(x_0, f(x_0))$ on a un minimum local
$(\exists S > 0$ $]x_0-S, x_0+S[$ $f(x_0)$ est le minimum

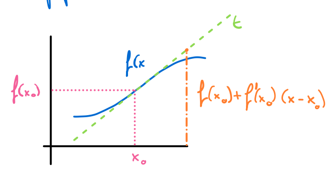
Au pt $(x_1, f(x_1))$ on a le maximum local si sur
$]x_1-S, x_1+S[$ $f(x_1)$ est un maximum

Extremum = min ou max.

x				
$f'(x)$	x	−	−	x
$f(x)$	max ↘		min	↗



Approximation linéaire



exemple $(x^a)' = ax^{a-1}$

approximation $= \sqrt[4]{17}$

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $x_0 = 16$ $\sqrt[4]{16} = 2$

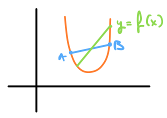
$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ $f'(16) = \frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}}$

$\sqrt[4]{17} \simeq 2+\frac{1}{32}(17-16)$ $= \frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}2^{-3}$

$\simeq \frac{65}{32} = 2{,}03125$ $\sqrt[4]{17} = 2{,}0305$

Convexité, concavité, pt d'inflexité

$f: I \subseteq \mathbb{R}$ ⇒ convexe



f est convexe si: ◡

f est concave ◠

Si f est dérivable 2x dans I
↳ f est convexe si $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$
↳ concave si $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$

Remarque: Pour étudier la convexité et la concavité d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de $f''(x)$

x			
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	convexe	concave	convexe

Définition: En $(x_0, f(x_0))$ on a un pt. d'inflexion si autour de x_0 il y a un changement de convexité

x_0		ou	x_0	
convexe	concave		concave	convexe

Exemple: Étudier la convexité/concavité puis déterminer les pts d'inflexibilité de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = (e^{-x^2})(-2x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2}+(-2x)(e^{-x^2})(-2x) =$

$\text{sgn}(f''(x)) = \text{sgn}(2x^2-1)$ car $e^{-x^2} > 0$

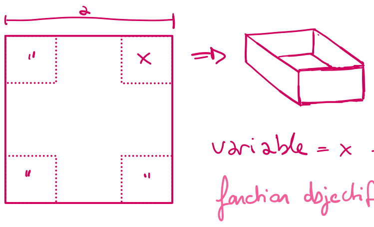
$2x^2-1 = 0$
$x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+		−		+
$f(x)$	convexe		concave		convexe

Optimisation

Exemple théorique

(1) "À l'aide d'une feuille de carton carrée, on construit une boîte rectangulaire ouverte en découpant des carrés sur les angles et en pliant les rebords du dessin.
Comment couper pour que le volume de la boîte soit maximale ?"



variable = $x \Rightarrow 0 \le x \le \frac{a}{2}$

fonction objectif $\Rightarrow$ V

$V = (a-2x)^2 x \qquad x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$

$V' = 2(a-2x)(-2)\cdot x + (a-2x)\cdot 1$

$= (a-2x)(-4x + (a-2x))$

$= (a-2x)(a-6x)$

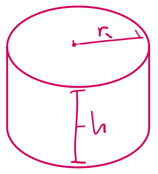
$\to$ obligé $+$

donc $\text{sgn}(V'(x)) = \text{sgn}(a-6x)$

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

[max = $x = \frac{a}{6}$]

(2) "On veut construire une boîte de conserve cylindrique de volume V construite avec le min. de fer blanc"



variables : $r, h > 0$

Volume $= \pi r^2 h \quad (r,h) \in \mathbb{R}$

$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad V = 1\,dm^3$

Surface $= 2\pi r h + 2\pi r^2$

$S = 2\cancel{\pi} r \frac{1}{\cancel{\pi} r^2} + 2\pi r^2 \qquad r > 0$

$S(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$

$S'(r) = -\frac{2}{r^2} + 2\pi\, 2r$

$= -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$

$= \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2} \qquad (r,h) \in \mathbb{R}$

donc $\text{sgn}(S'(r)) = \text{sgn}(4\pi r^3 - 2)$

$\hookrightarrow$ $4\pi r^3 = 2$

$r^3 = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}$

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$h = \frac{1}{\pi r^2}$

$V = \pi r^2 h$

$\pi r^2 h = 1$

r	0		r_0		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$	

$\cancel{\pi} \frac{1}{2\cancel{\pi}} h = r$

$\frac{h}{2} = r \quad h = 2r$

[diamètre = hauteur]

Remarques : Dans un problème d'optimisation, en général

- $\to$ 2 variables
- $\to$ R entre elles
- $\to$ fonction à optimiser en fonction d'une seule des deux variables

Tableau de variations de cette fonction pour chercher un optimum