

---

**TE 3**

---

**Nom:**

**Prénom:**

- Durée : 90 minutes
- Les téléphones et les machines à calculer sont interdits.
- Aucun formulaire n'est autorisé.

**Exercice 1** (6 pts). Pour  $a \in \mathbb{R}^*$  on considère la fonction

$$f_a(x) = \left(a + \frac{x^2}{a}\right) e^{\frac{x}{a}}$$

Déterminer toutes les valeurs du paramètre  $a$  pour lesquelles le graphe représentatif de la fonction  $f_a$  admet un point d'inflexion d'abscisse  $x = -3$ .

**Exercice 2** (14 pts). Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x^2)}{2x}$$

- Donner le domaine de définition de  $f$ .
- Calculer  $f'$ , étudier son signe et préciser sur quels intervalle  $f$  est croissante ou décroissante.
- Calculer  $f''$ , étudier son signe et préciser sur quels intervalle  $f$  est convexe ou concave.
- Donner le(s) abscisse(s) éventuelle(s) de(s) point(s) d'inflexion de  $f$ .
- Trouver le(s) asymptote(s) éventuelle(s) de  $f$ .
- Tracer le graphe de  $f$ .

**Exercice 3** (6 pts). Soit la matrice suivante:

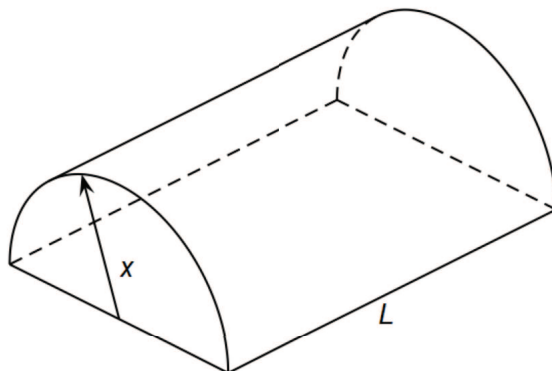
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est-elle inversible? si oui, calculer son inverse en utilisant la méthode des cofacteurs.

**Exercice 4** (8 pts). Pour quelles valeurs du paramètre  $t$ , le système suivant est-il-régulier, et dans ce cas calculer  $x_1$  en utilisant la méthode de Cramer ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 1 \\ -tx_1 + 2t^2x_2 + 4x_3 & = 4 \\ -x_1 + 2tx_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$$

**Exercice 5** (9 pts). On souhaite construire une serre de volume  $V$  donné. On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon  $x$  (en m) et un toit rectangulaire de largeur  $L$  que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.



Le but est de minimiser le coût du matériel, sachant que le prix des parois verticales est de 45 CHF/m<sup>2</sup> alors que celui du toit est de 15 CHF/m<sup>2</sup>.

Déterminer les dimensions de la serre minimisant le coût total du matériel (justifier qu'il s'agit bien d'un minimum).

RAPPELS

- Le volume d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est :  $V = \pi r^2 h$ .
- La surface latérale d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est :  $S = 2\pi r h$ .