

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Floquet-Theorie, Erwartungswerte und zweite Quantisierung von periodisch getriebenen quantenmechanischen Oszillatoren

Ismael Abu-Nada
geboren in Dortmund

2018

Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Fakultät Physik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter:	Prof. Dr. Frithjof Anders
Zweitgutachter:	apl. Prof. Dr. Joachim Stolze
Abgabedatum:	15.08.2018

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird mit den Wellenfunktionen des periodisch getriebenen harmonischen Oszillators das Floquet-Theorem überprüft und für den Fall, dass ein weiterer ungetriebener Oszillator angekoppelt wird, die Wellenfunktionen hergeleitet. Es werden diverse Erwartungswerte beider Systeme bestimmt und für die gekoppelten Oszillatoren visualisiert. Dabei werden die Quasienergien der Floquet-Theorie verwendet, welche für eine beliebige und eine sinusförmige Treibkraft des einzelnen getriebenen Oszillators bestimmt werden. Außerdem wird das Problem des einzelnen getriebenen Oszillators in die 2. Quantisierung übersetzt, wonach ein weiteres Mal die Erwartungswerte berechnet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Floquet-Theorie des getriebenen harmonischen Oszillators	2
2.1	Grundlagen der Floquet-Theorie	2
2.2	Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung	4
2.3	Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und der Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$	6
2.3.1	Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft	6
2.3.2	Quasienergien für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$	7
3	Berechnung von Erwartungswerten	8
3.1	Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes	8
3.2	Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses	10
3.3	Heisenberg-Unschärferelation	11
3.4	Zeitabhängiger Erwartungswert der Energie	11
3.5	Durchschnittlicher Erwartungswert der Energie	12
4	Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren	13
4.1	Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren	13
4.2	Unitäre Variablentransformation und allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung	14
4.3	Berechnung von Erwartungswerten	17
4.3.1	Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes	17
4.3.2	Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses	18
4.3.3	Erwartungswerte der Energie	19
5	Zweite Quantisierung des getriebenen harmonischen Oszillators	21
5.1	Wellenfunktion	21
5.2	Berechnung von Erwartungswerten	24
6	Zusammenfassung und Ausblick	25
	Literatur	26

1 Einleitung

Nur wenige System können in der Quantenmechanik exakt analytisch gelöst werden. Bei Systemen wie dem harmonischen Oszillator oder dem Wasserstoff-Atom, welche durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator beschrieben werden, wird die Lösung der Schrödinger-Gleichung ein Produktansatz gewählt. Danach muss eine Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator gelöst werden. Wenn der Hamilton-Operator allerdings zeitabhängig ist, funktioniert dieser Ansatz nicht und es muss im Allgemeinen numerisch im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie gerechnet werden. Werden jedoch Probleme betrachtet wie ein einzelnes Atom oder Spin in einem oszillierenden äußeren Feld ([2],[6]), bei denen der Hamilton-Operator periodisch in der Zeit ist, findet die Floquet-Theorie Anwendung. Mit ihr kann die Lösung durch einen neuen Ansatz wieder auf eine Eigenwertgleichung, für einen neuen zeitabhängigen Operator, gebracht werden.

In der vorliegenden Arbeit werden periodisch getriebene harmonische gekoppelte Oszillatoren in der Quantenmechanik im Rahmen der Floquet-Theorie betrachtet.

In folgendem Kap. 2 wird nach einer kurzen Einführung in die Floquet-Theorie die Lösung der Schrödinger-Gleichung für den getriebenen Oszillator in Ortsdarstellung dargestellt. Die Floquet-Theorie ist eine Theorie der Mathematik über lineare gewöhnliche und zudem periodische Differentialgleichungen der Form

$$\dot{f}(t) = A(t)f(t) \text{ mit } A(t) = A(t + T) , \quad (1.1)$$

welche lange vor der Quantenmechanik von Gaston Floquet aufgestellt wurde [2]. Dennoch findet die Theorie genau hier einen Nutzen, da für einen periodischen Hamilton-Operator eine Schrödinger-Gleichung der Form (1.1) vorliegt. Anhand der Wellenfunktionen des getriebenen Oszillators wird das Floquet-Theorem bestätigt, indem die Quasienergien und Floquet-Moden identifiziert werden. Die Quasienergien werden zudem für eine beliebige Treibkraft und ein Beispiel einer sinusförmigen Treibkraft bestimmt. Daraufhin werden in Kap. 3 die Erwartungswerte des getriebenen Oszillators für den Ort, den Impuls und damit die Unschärfe und der Erwartungswert der Energie ermittelt, indem die bekannten Erwartungswerte des ungetriebenen Oszillators verwendet werden. Bei der Berechnung des gemittelten Erwartungswertes der Energie, werden die Ergebnisse der Floquet-Theorie und die Quasienergien verwendet. Die Ergebnisse aus Kap. 2 und 3 werden danach in Kap. 4 genutzt um die Lösung eines Systems aus zwei gekoppelten getriebenen harmonischen Oszillatoren zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird dieses System in neuen Koordinaten zu zwei unabhängigen Oszillatoren entkoppelt. Es werden die Erwartungswerte für den Ort und die Energie berechnet und zudem graphisch dargestellt.

Im nachfolgenden Kap. 5 werden die Zustände des einzelnen getriebenen Oszillators in der Besetzungszahldarstellung aufgestellt und erneut die Erwartungswerte berechnet. Zuletzt werden die Ergebnisse der vorherigen Kapitel in Kap. 6 zusammengefasst.

2 Floquet-Theorie des getriebenen harmonischen Oszillators

Der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators der Masse m , welcher mit einer periodischen äußeren Kraft $S(t) = S(t + T)$ getrieben wird, hat die Form

$$H(t) = H(t + T) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x, \quad (2.1)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ und der Potentialkonstante k .

Im Folgenden werden vorerst die allgemeinen Grundzüge der Floquet-Theorie erläutert, indem die entsprechenden Abschnitte aus [2] und [6] präsentiert werden.

Anschließend wird die Schrödinger-Gleichung (2.3) für eine beliebige Treibkraft $S(t)$ gelöst, wobei die Ergebnisse aus [2],[3] und [4] reproduziert werden. Weiterhin werden die Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ identifiziert, genauso wie die Quasienergien ϵ_n , welche für eine beliebige periodische Treibkraft und explizit für eine sinusförmige Treibkraft bestimmt werden.

2.1 Grundlagen der Floquet-Theorie

Die Floquet-Theorie [2] ist ein nützliches Werkzeug zur Lösung von quantenmechanischen Systemen, welche durch einen zeitlich periodischen Hamilton-Operator

$$H(t) = H(t + T), \quad (2.2)$$

mit der Periode T , beschrieben werden.

Das Floquet-Theorem besagt, dass bei einem solchen System die Lösungen $\Psi_n(x, t)$ der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(x, t) = H(t) \Psi_n(x, t) \quad (2.3)$$

in Ortsdarstellung die Form

$$\Psi_n(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t\right) \Phi_n(x, t) \quad (2.4)$$

haben. Hierbei sind $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$ T -periodische Funktionen, die sogenannten Floquet-Moden, und ϵ_n die zugehörigen reellen Quasienergien. Diese Bezeichnungen wurde gewählt aufgrund der Parallele zu den Bloch-Moden und Quasiimpulsen des Bloch-Theorems [2]. Das Floquet-Theorem kann damit als „Bloch-Theorem in der Zeit“ aufgefasst werden [6].

Durch Einsetzen dieses Ansatzes für die Wellenfunktionen (2.4) in die Schrödinger-Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\epsilon_n \Phi_n(x, t) = \left(H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_n(x, t) = \mathcal{H}(t) \Phi_n(x, t) . \quad (2.5)$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung kann somit auf die Lösung eines Eigenwertproblems für den neuen zeitabhängigen periodischen Operator $\mathcal{H}(t)$ zurückgeführt werden [6]. Die hermiteschen Operatoren $H(t)$ und $\mathcal{H}(t)$ operieren daher auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$. Dabei ist \mathcal{L}^2 der Raum der quadratintegriblen Funktionen und \mathcal{T} der Raum der auf $[0, T]$ integriblen Funktionen, da die Operatoren T -periodisch sind [2]. Nach dem Spektralsatz bilden die Eigenfunktionen $\Phi_n(x, t)$ von $\mathcal{H}(t)$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$, welche auf eine Orthonormalbasis normiert werden kann, wodurch wir das Skalarprodukt definieren können als [2]:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x, t) \Phi_m(x, t) dx dt \\ &= \delta_{n,m} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie \bar{H}_n

Da $H(t)$ nicht zeitlich konstant ist, sind auch dessen Erwartungswerte, die Energien des Systems, zeitabhängig. Ein direkter Vorteil der Floquet-Theorie liegt darin, dass sich die durchschnittliche Energie

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Psi_n(x, t) | H(t) | \Psi_n(x, t) \rangle \rangle \quad (2.7)$$

des n -ten Zustandes $\Psi_n(x, t)$ leicht über die Quasienergien ϵ_n berechnen lässt, ohne explizit Integrale zu lösen.

Dazu ersetzen wir $H(t)$ mit Hilfe von (2.5). Außerdem unterscheiden sich die Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ und die Wellenfunktionen $\Psi_n(x, t)$ nur durch eine komplexe Phase, daher sind deren Skalarprodukte identisch. Weiterhin benutzen wir, dass die Floquet-Moden Eigenfunktionen von $\mathcal{H}(t)$ sind (2.5):

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \mathcal{H}(t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle = \epsilon_n + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.8)$$

Eine nähere Betrachtung zeigt, dass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} , \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.9)$$

gilt [2]. Da für ϵ_n und $\mathcal{H}(t)$ mit (2.5) eine Eigenwertgleichung vorliegt, kann das Hellman-Feynman-Theorem angewendet werden [1]. Dieses gibt eine Verbindung zwischen den Ableitungen der Eigenwerte und der Ableitung des Hamilton-Operators an. In unserem Fall erhalten wir dadurch

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.10)$$

Damit folgt für den Mittelwert der Energie [2]:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} . \quad (2.11)$$

2.2 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Das System mit Hamilton-Operator (2.1) kann exakt gelöst werden, indem die Schrödinger-Gleichung durch einen Variablenwechsel und zwei weitere unitäre Transformationen auf die bekannte Form des ungetriebenen Oszillators reduziert wird [2].

1) Unitäre Variablentransformation

Für den neuen Ortsoperator bzw. die Ortsvariable wird eine zeitabhängige Verschiebung angesetzt:

$$x \rightarrow y = x - \zeta(t) . \quad (2.12)$$

Wie zu erwarten war verändert sich der Impuls(-operator) durch die Translation im Ort nicht, da $\zeta(t)$ bei der Ortsableitung wegfällt.

Mit der neuen Zeitableitung der Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y(t), t) = i\hbar \dot{\Psi} - \dot{\zeta}(t) \frac{\partial}{\partial y} \Psi(y(t), t) \quad (2.13)$$

wird die Schrödinger-Gleichung zu:

$$i\hbar \dot{\Psi}(y, t) = \left[i\hbar \dot{\zeta}(t) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y + \zeta(t))^2 - (y + \zeta(t)) S(t) \right] \Psi(y, t) . \quad (2.14)$$

2) Unitäre Transformation für $\Psi(y, t)$

Im Weiteren wählen wir die unitäre Transformation

$$\Psi(y, t) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y \right) \Lambda(y, t) . \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen in beide Seiten der Schrödinger-Gleichung (2.14) und Ausrechnen der Ableitungen mit der Produktregel ergibt sich

$$\begin{aligned} (i\hbar \dot{\Lambda}(y, t) - m y \ddot{\zeta}(t) \Lambda(y, t)) &= \left[\left(-m \dot{\zeta}(t)^2 \Lambda(y, t) + i\hbar \dot{\zeta}(t) \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2} m \dot{\zeta}(t)^2 \Lambda(y, t) - i\hbar \dot{\zeta}(t) \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Lambda(y, t) \right) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y + \zeta(t))^2 - (y + \zeta(t)) S(t) \right] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Somit haben wir eine Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$ erhalten. Außerdem können durch Umsortieren der Terme die Lagrange-Funktion $L(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t)$

$$L(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t) = \frac{1}{2} m \dot{\zeta}(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta(t)^2 + S(t) \zeta(t) , \quad (2.17)$$

sowie die Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators [3]

$$m \ddot{\zeta}(t) + m \omega_0^2 \zeta(t) - S(t) = 0 \quad (2.18)$$

für die Verschiebung $\zeta(t)$ identifiziert werden. Die Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$ ist folglich

$$i\hbar \dot{\Lambda}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 + (m\ddot{\zeta}(t) + m\omega_0^2 y \zeta(t) - S(t))y - L(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t) \right] \Lambda(y, t) . \quad (2.19)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, wählen wir $\zeta(t)$ nun so, dass es gerade die klassische Bewegungsgleichung erfüllt, der entsprechende Term in (2.19) also verschwindet. Nur noch die Lagrange-Funktion unterscheidet diese Differentialgleichung von der des ungetriebenen Oszillators.

3) Unitäre Transformation für $\Lambda(y, t)$

Zuletzt wählen wir den Ansatz

$$\Lambda(y, t) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t L(\zeta(t'), \dot{\zeta}(t'), t') dt' \right) \chi(y, t) \quad (2.20)$$

für $\Lambda(y, t)$, um die Lagrange-Funktion in Gleichung (2.19) zu eliminieren. Dadurch wird die Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$ bzw. die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung auf einen ungetriebenen Oszillator für $\chi(y, t)$ zurückgeführt:

$$i\hbar \dot{\chi}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \right] \chi(y, t) . \quad (2.21)$$

Folglich sind die $\chi_n(y, t)$ die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Lösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, t) &= \Psi_n(y = x - \zeta(t), t) \\ &= N_n H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) \exp \left[\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2 \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) - E_n t + \int_0^t L(\dot{\zeta}(t'), \zeta(t'), t') dt' \right) \right] , \quad n \in \mathbb{N}_0 . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei sind H_n die Hermiteschen Polynome, $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ die bekannten Eigenenergien der Zustände des ungetriebenen Oszillators und

$$N_n = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (2.23)$$

dessen Normierungsfaktoren. Die Lösungen des getriebenen Oszillators sind auf $x \in (-\infty, \infty)$ normiert und somit ist ebenfalls Gleichung (2.6) mit dem Skalarprodukt erfüllt.

Die Lösung entspricht damit einem, um die klassische Lösung $\zeta(t)$ verschobenen, ungetriebenen Oszillator, mit einer zusätzlichen zeit- und ortsabhängigen komplexen Phase. Die treibende Kraft $S(t)$ geht in die klassische Lösung $\zeta(t)$ und, über das Wirkungsintegral, in die komplexe Phase ein.

2.3 Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und der Floquet-Moden

$$\Phi_n(x, t)$$

Nach dem Floquet-Theorem für periodische Hamilton-Operatoren (2.4) kann die Lösung des getriebenen Oszillators geschrieben werden als

$$\Psi_n(x, t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\epsilon_n t\right) \Phi_n(x, t), \quad (2.24)$$

mit $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t+T)$. Nun können wir alle T -periodischen Terme als $\Phi_n(x, t)$ identifizieren, und alle Terme im Exponenten, die linear in t sind, als $-i\epsilon_n t/\hbar$ [2].

Alle Funktionen von $(x - \zeta(t))$ haben die Periode T , da $\zeta(t)$ als Lösung der klassischen Bewegungsgleichung mit $S(t) = S(t+T)$ die Periode T hat. Das Ergebnis des Integrals über die Lagrange-Funktion kann nur T -periodisch oder linear in t sein, deshalb sind die Quasienergien gegeben durch die E_n und den linearen Teil des Integrals [2]:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{1}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}(t), \zeta(t), t) dt. \quad (2.25)$$

Die Floquet-Moden sind demnach

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, t) = N_n H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) \exp \left[\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2 \right] \\ \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) + \int_0^t L(\dot{\zeta}(t'), \zeta(t'), t') dt' - \frac{t}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}(t), \zeta(t), t) dt \right) \right], \\ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.1 Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft

Im Folgenden werden die Quasienergien ϵ_n für eine sinusoidale Treibkraft

$$S(t) = S(t+T) = A \sin(\omega t) \quad (2.27)$$

diskutiert, wobei $T = 2\pi/\omega$ ist. Setzen wir die allgemeine homogene Lösung gleich null, wird die Lösung $\zeta(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung (2.18) zu [4]

$$\zeta(t) = \frac{A \sin(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.28)$$

Das Berechnen des Wirkungsintegrals und anschließendes Identifizieren des linearen Anteils liefert die Quasienergien für die gegebene Kraft [4]:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.29)$$

Wie zu sehen ist streben die Quasienergien, und somit die mittlere Energie des Systems (3.19), gegen Unendlich, wenn sich die Treibfrequenz ω nahe der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 befindet. Dieses Ergebnis entspricht der Erwartung, da wir einen getriebenen Oszillator ohne Dämpfung betrachten.

2.3.2 Quasienergien für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$

Um die Quasienergien bei einer beliebigen periodisch treibenden Kraft zu bestimmen, setzen wir eine komplexe Fourier-Reihe an:

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad c_j = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (2.30)$$

Die c_j sind die Fourier-Koeffizienten mit der Einheit einer Kraft und i ist die imaginäre Einheit. Für $\zeta(t)$ wählen wir jetzt den gleichen Reihenansatz mit anderen Koeffizienten d_j . Wir betrachten wieder nur die inhomogene klassische Bewegungsgleichung und bestimmen die d_j , indem wir einsetzen und einen Koeffizientenvergleich der d_j und c_j durchführen. Es zeigt sich, dass

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{m(\omega_0^2 - j^2\omega^2)} e^{ij\omega t} \quad (2.31)$$

gilt, womit sich die Lagrange-Funktion (2.17) ergibt zu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\zeta}(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta(t)^2 + S(t) \zeta(t) \\ &= \sum_j \sum_l \left[\frac{-\omega^2}{2m} \frac{j c_j}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \frac{l c_l}{\omega_0^2 - l^2 \omega^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \frac{c_l}{\omega_0^2 - l^2 \omega^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_l}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \right] e^{i(j+l)\omega t}, \\ &\quad j, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir den linearen Teil des Wirkungsintegrals nach (2.25). Die einzige Zeitabhängigkeit ist in der Exponentialfunktion, deshalb betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(j+l)\omega t} dt = \begin{cases} 1, & l = -j \\ \frac{1}{T} \frac{1}{i(j+l)\omega} (e^{i(j+l)\omega T} - 1) = 0, & \forall j, l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Es gibt nur für $j = -l$ einen Beitrag zum linearen Teil, weswegen die Doppelsumme, die bei der Quadrierung entstanden ist, wieder zur Einzelsumme wird. Hiermit fassen wir den linearen Teil des Wirkungsintegrals zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T L dt &= \sum_j \left[\frac{\omega^2}{2m} \frac{j^2 c_j c_{-j}}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j c_{-j}}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \right] \\ &= \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} = \frac{c_0^2}{2m\omega_0^2} + \sum_j \frac{c_j^2}{m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Quasienergien ϵ_n sind hiernach:

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)}. \quad (2.34)$$

Interessanterweise kommt es in obiger Formel nicht nur bei $\omega = \omega_0$ zu einer Singularität, wie bei der Beispielkraft $S(t) = A \sin(\omega t)$, sondern bei allen $\omega = \omega_0/j$.

3 Berechnung von Erwartungswerten

In diesem Abschnitt werden die zeitabhängigen Erwartungswerte des periodisch getriebenen Oszillators für den Impuls, den Ort und die Energie, sowie das zeitliche Mittel des Erwartungswertes der Energie berechnet. Dabei werden die Erwartungswerte für alle Zustände $\Psi_n(x, t)$ auf die bekannten Erwartungswerte des Standard-Oszillators zurückgeführt, womit wir eine Art „2. Quantisierung für die Erwartungswerte“ haben.

Die Treibkraft $S(t) = S(t + T)$ ist nicht weiter festgelegt und geht stets über die klassische Lösung $\zeta(t)$ (2.18) in die Erwartungswerte ein.

Um die Erwartungswerte des getriebenen Oszillators zu erhalten, werden wir dessen Berechnung auf die Berechnung der bekannten Erwartungswerte des ungetriebenen Oszillators zurückführen. Dafür nutzen wir aus, dass die Wellenfunktionen und die Floquet-Moden nach (2.22) und (2.26) einem um $\zeta(t)$ verschobenen ungetriebenen Oszillator mit einer zusätzlichen komplexen Phase entsprechen. Da eine komplexe Phase beim Bilden des Betrages wegfällt, gilt

$$\Psi_n^*(x, t)\Psi_n(x, t) = |\Psi_n(x, t)|^2 = |\Phi_n(x, t)|^2 = |\Psi_{n,\text{ung}}(x - \zeta(t), t)|^2 = |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2, \quad (3.1)$$

wobei $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$ die Zustände des ungetriebenen Oszillators bezeichnen.

Bei dem Integral über \mathbb{R} ist eine konstante Verschiebung der Variable irrelevant. Außerdem sind die $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$ auf dem Raum normiert, daher sind auch die $\Psi_n(x, t)$ auf $x \in (-\infty, \infty)$ normiert, wie bereits am Ende von Kapitel 2.2 erwähnt.

Eine Visualisierung von Erwartungswerten folgt in Kapitel 4.3. Dort werden die Erwartungswerte der gekoppelten Oszillatoren dargestellt, bei denen es sich genau um die Summe aus den Erwartungswerten von zwei gesonderten Oszillatoren handelt, wie sich dort zeigen wird.

3.1 Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes

Zuerst betrachten wir den Erwartungswert $\langle x \rangle_n$ des Ortsoperators x für den n -ten Zustand $\Psi_n(x, t)$ des getriebenen Oszillators, welcher per Definition gegeben ist durch

$$\langle x \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t)x\Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x dx. \quad (3.2)$$

Mit der Substitution $y = x - \zeta(t)$ und unter Verwendung von Gleichung (3.1) und der Normierung der ungetriebenen Oszillator-Funktionen gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(x - \zeta(t), t)|^2 x dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2 (y + \zeta(t)) dy \\ &= \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \zeta(t) = \zeta(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da die Erwartungswerte $\langle y \rangle_{n,\text{ung}}$ für den Ort des ungetriebenen Oszillators verschwinden, ist der Erwartungswert jedes Zustandes des getriebenen Oszillators genau $\zeta(t)$.

Das bedeutet, der Erwartungswert $\langle x \rangle_n$ für den Ort eines beliebigen Zustandes des quantenmechanischen getriebenen Oszillators entspricht genau der Lösung $\zeta(t)$ der Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen Oszillators. Der Erwartungswert hat deshalb sehr große Amplituden, wenn die Treibfrequenz ω von $S(t)$ in der Nähe der Eigenfrequenz des Systems ω_0 liegt (2.31). Dies entspricht der klassischen Anschauung, da wir ein ungedämpftes System betrachten. Der Erwartungswert des ungetriebenen Oszillators, welcher im Ursprung liegt, ist somit zeitabhängig periodisch um $\zeta(t) = \zeta(t + T)$ verschoben, mit $T = 2\pi/\omega$. Dies entspricht dem Ergebnis, wie es auch bei einer konstanten Verschiebung der Ortsvariable/-operator x erhalten wird, z. B. beim Oszillator im zusätzlichen konstanten elektrischen Feld, nur das die Verschiebung hier die zeitabhängige klassische Lösung ist.

Da $\langle x \rangle_n = \zeta(t)$ die klassische Bewegungsgleichung

$$m\langle \ddot{x} \rangle_n + m\omega_0^2 \langle x \rangle_n - S(t) = 0 \quad (3.4)$$

erfüllt, ist zudem das Ehrenfest-Theorem bestätigt.

Für den Erwartungswert von x^2 ergibt sich komplett analog

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2 (y + \zeta(t))^2 dy \\ &= \langle y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + 2\zeta(t) \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \zeta^2(t) = s^2(2n + 1) + \zeta^2(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit der charakteristischen Länge des ungetriebenen Oszillators

$$s = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}. \quad (3.6)$$

Der Erwartungswert ist um $\zeta^2(t)$ verschoben.

Insgesamt können alle Erwartungswerte $\langle x^m \rangle_n$ auf diese Art mit den bekannten ungetriebenen Erwartungswerten berechnet werden. Ab $\langle x^3 \rangle_n$ kommt es wegen $(y + \zeta(t))^3$ aber im Allgemeinen nicht nur zu Verschiebungen bzw. zusätzlichen $\zeta(t)$ -Termen, mit demselben Exponenten wie die ungetriebenen Erwartungswerte, weshalb wir den Erwartungswert $\langle x^m \rangle_n$ nicht einfacher schreiben können als den linearen Erwartungswert des Klammerausdruckes mit dem binomischen Lehrsatz zu vereinfachen:

$$\langle x^m \rangle_n = \langle (y + \zeta(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \langle y^{m-j} \rangle_{n,\text{ung}} \zeta^j(t). \quad (3.7)$$

In obiger Formel ist

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (3.8)$$

der Binomial-Koeffizient. Hiernach setzt sich der Erwartungswert $\langle x^m \rangle_n$ aus allen $\zeta(t) \dots \zeta^m(t)$ zusammen, die mit dem Binomial-Koeffizienten und der jeweiligen Potenz von $\langle y \rangle_{n,\text{ung}}$ gewichtet werden.

3.2 Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses

Um den Erwartungswert $\langle p \rangle_n$ des Impulsoperators für den Zustand $\Psi_n(x, t)$ des getriebenen Oszillators zu ermitteln, nutzen wir gleichermaßen die Beziehung (3.1). Durch Anwenden der Produktregel beschränken wir das Problem erneut auf den ungetriebenen Oszillator.

Wieder wählen wir den Variablenwechsel zur neuen Variable $y = x - \zeta(t)$, weil der Impulsoperator $p = p_x$ in der neuen Koordinate identisch ist, wie schon am Anfang von Kapitel 2.2 angedeutet, was sich mit der Kettenregel zeigen lässt:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \cdot 1, \text{ d. h. } p_x = p_y. \quad (3.9)$$

Weiterhin können wir den y -unabhängigen Teil der komplexen Phasen in den Wellenfunktionen (2.22) zu 1 zusammenfassen, weil der Operator nicht darauf wirkt. Daher schreiben wir $\langle p \rangle_n$ als

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t) p \Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(y + \zeta(t), t) p_y \Psi_n(y + \zeta(t), t) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 - \frac{i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) p_y N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 + \frac{i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) dy, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei der Faktor im Argument der Hermite-Polynome (2.22) als a abgekürzt wird. Mit der Produktregel spalten wir die Anwendung des Impulsoperators in die Anwendung auf die ungetriebene Oszillatorfunktion (in der neuen Koordinate y) und die Anwendung auf die verbleibende komplexe Phase auf:

$$\begin{aligned} &p_y N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 + \frac{i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) (p_y + m\dot{\zeta}(t)) N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hiernach haben wir effektiv den Impulsoperator und die y -abhängige Phase vertauscht. Damit ist es möglich diese verbliebenen Phasen in (3.10) ebenso zu 1 zu vereinfachen. Es verbleiben noch die Anwendung des Impulsoperators auf die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Multiplikation dieser mit dem ortsunabhängigen Term $m\dot{\zeta}(t)$. Zusammen mit dem übrigen linken Teil aus (3.11), welcher nach dem Wegfallen der komplexen Phase jetzt auch der ungetriebenen Wellenfunktion entspricht, ergeben sich dadurch die Erwartungswerte für p_y und den Term $m\dot{\zeta}(t)$.

Schließlich können wir den Erwartungswert für den Impuls in Abhängigkeit der bekannten Erwartungswerte des Standard-Oszillators schreiben:

$$\langle p \rangle_n = \langle p_y \rangle_{n, \text{ung}} + m\dot{\zeta}(t) = m\dot{\zeta}(t). \quad (3.12)$$

Wieder erfüllt der Erwartungswert die Bewegungsgleichung des klassischen Oszillators:

$$\langle \ddot{p} \rangle_n + \omega_0^2 \langle p \rangle_n - \dot{S}(t) = 0. \quad (3.13)$$

Um darüber hinaus den Erwartungswert $\langle p^m \rangle_n$ für einen beliebigen Exponenten $m \in \mathbb{N}$ zu erhalten, muss in Formel (3.11) m -mal die Produktregel angewendet werden. Da sich die komplexe Phase beim Ableiten reproduziert und jedesmal ein ortsunabhängiger Term übrig bleibt, gilt für diesen Erwartungswert analog zu dem Erwartungswert $\langle x^m \rangle_n$:

$$\langle p^m \rangle_n = \langle (p_y + m\dot{\zeta}(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \langle p_y^{m-j} \rangle_{n,\text{ung}} (m\dot{\zeta}(t))^j. \quad (3.14)$$

Speziell für $\langle p^2 \rangle_n$ gilt:

$$\langle p^2 \rangle_n = \langle p_y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + 2m\dot{\zeta}(t) \langle p_y \rangle_{n,\text{ung}} + (m\dot{\zeta}(t))^2 = m^2\omega_0^2 s^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t). \quad (3.15)$$

3.3 Heisenberg-Unschärferelation

Mit den zuvor berechneten Erwartungswerten $\langle x \rangle_n, \langle x^2 \rangle_n, \langle p \rangle_n, \langle p^2 \rangle_n$ wird hier die Unschärfe des periodisch getriebenen Oszillators aufgestellt:

$$\begin{aligned} \Delta x_n \Delta p_n &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2} \sqrt{\langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2} \\ &= \sqrt{s^2(2n+1) + \dot{\zeta}^2(t) - \dot{\zeta}^2(t)} \sqrt{m^2\omega_0^2 s^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t) - m^2\dot{\zeta}^2(t)} \\ &= \frac{\hbar}{2}(2n+1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Unschärfe ist also gleich der des ungetriebenen Oszillators, welche zeitunabhängig ist und für den Grundzustand $n = 0$ minimal ist.

Dieses Ergebnis ist sinnvoll in Anbetracht der Tatsache, dass die (zeitabhängige) Verschiebung der Wellenfunktionen im Raum $\zeta(t)$ (2.22) die Unschärfe nicht ändern sollte. Die Wellenfunktionen haben allerdings noch den weiteren Unterschied der orts- und zeitabhängigen komplexen Phase, verglichen mit den Wellenfunktionen des Standard-Oszillators. Diese spielt zwar keine Rolle bei den Erwartungswerten für den Ort, bei den Impulserwartungswerten allerdings schon. Dennoch war zu erwarten, dass sich auch beim Impuls eine Standardabweichung Δp_n wie beim ungetriebenen Oszillator ergibt, so wie bei Δx_n , da $\langle p \rangle_n$ im Wesentlichen die zeitliche Ableitung von $\langle x \rangle_n$ ist. Demnach folgt die gleiche Unschärfe.

3.4 Zeitabhängiger Erwartungswert der Energie

Mit den gleichen Erwartungswerten für den Ort und den Impuls, wie sie bei der Heisenberg-Unschärferelation von Nöten sind, wird im Folgenden der Erwartungswert der Energie bzw. des Hamilton-Operators $\langle H(t) \rangle_n$ aufgestellt. Es muss nur die Linearität des Erwartungswertes

verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 \langle H(t) \rangle_n &= \left\langle \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x \right\rangle_n = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle_n + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle_n - S(t) \langle x \rangle_n \\
 &= \frac{1}{2m} \langle p_y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \zeta^2(t) - S(t)\zeta(t) \\
 &= \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) + m\dot{\zeta}^2(t) = E_n - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) + m\dot{\zeta}^2(t) . \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Wir finden wieder den Erwartungswert des ungetriebenen Oszillators E_n , mit einer zeitabhängigen Verschiebung, in welcher die Lagrange-Funktion des klassischen Problems (2.17) mit einem Restterm identifiziert werden kann.

3.5 Durchschnittlicher Erwartungswert der Energie

Im Nachfolgenden wird der zeitlich, über eine Periode T , gemittelte Erwartungswert \bar{H}_n mittels Formel (3.19) für eine beliebige Treibkraft bestimmt, indem wir die Quasienergien ϵ_n benutzen, welche wir in Kapitel 2.3.2 für eine allgemeine periodische Treibkraft $S(t)$, in Abhängigkeit derer Fourier-Koeffizienten, bestimmt haben.

Unter der Annahme, dass die Summe in ϵ_n (2.3.2) konvergiert, weil es sich im Wesentlichen um die Summe über $1/j^2$ handelt, leiten wir nach ω ab, indem wir die Ableitung und Summe vertauschen, dann haben wir:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon_n = E_n - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} \left(1 - \frac{2j^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} \right) \right] . \quad (3.18)$$

Für den expliziten Fall der Sinus-Treibkraft $S(t) = A \sin(\omega t)$ folgt:

$$\bar{H}_n = E_n - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) . \quad (3.19)$$

Für $\omega_0^2 > \omega^2$ erhalten wir in diesem Beispiel demnach einen Anstieg des Energiemittelwertes gegenüber den Quasienergien, andernfalls eine Absenkung.

4 Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren

In diesem Teil der Arbeit werden mit Hilfe der aus (2.2) bekannten Lösung des einzelnen getriebenen Oszillators die Wellenfunktionen für ein System hergeleitet, das aus zwei gekoppelten Oszillatoren x_1 und x_2 der gleichen Masse m besteht, von denen einer mit der periodischen Kraft $S(t) = S(t+T)$ angetrieben wird. Die Potentialkonstanten k der beiden Oszillatoren sind ebenfalls identisch, aber im Allgemeinen unterschiedlich zur Kopplungskonstante κ zwischen den Oszillatoren. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann direkt aus der Hamilton-Funktion der klassischen Mechanik übernommen werden:

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1 . \quad (4.1)$$

Es werden auch die Erwartungswerte für den Ort $\langle x_{1,2} \rangle_{n,l}$ und den Impuls $\langle p_{1,2} \rangle_{n,l}$, genauso wie der Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_{n,l}$ und dessen zeitliches Mittel $\bar{H}_{n,l}$ berechnet, indem auf die bekannten Erwartungswerte des einzelnen getriebenen Oszillators zurückgeführt wird. Die Erwartungswerte werden zudem graphisch dargestellt.

Zur Lösung des Systems wird eine unitäre Koordinatentransformation eingeführt, welche den Hamilton-Operator $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$ zu zwei in den neuen Koordinaten unabhängigen Hamilton-Operatoren $H_+(x_+, p_+, t)$ und $H_-(x_-, p_-, t)$ mit effektiven Potentialkonstanten k_+, k_- entkoppelt, welche je einen einzelnen (getriebenen) Oszillator beschreiben. Dann ergeben sich die Wellenfunktionen aus denen des einzelnen Oszillators.

4.1 Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren

Liegt ein Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_i H_i(x_i, p_i, t) , \quad H_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \quad (4.2)$$

vor, führt der Ansatz

$$\Psi = \prod_i \Psi(x_i, p_i, t) , \quad \Psi_i \in \mathcal{H}_i \quad (4.3)$$

auf unabhängige Schrödinger-Gleichungen für die einzelnen Wellenfunktionen $\Psi_i(x_i, p_i, t)$, sodass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i = \delta_{i,j} H_j \Psi_i \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Um dies zu zeigen, schauen wir uns den Fall von zwei unabhängigen Operatoren an:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \iff \Psi_2 H_1 \Psi_1 + \Psi_1 H_2 \Psi_2 = i\hbar \left(\Psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 \right) . \quad (4.5)$$

Da die Operatoren nur auf Funktionen wirken, die auf dem selben Raum definiert sind, können sie mit der jeweils anderen Funktion vertauscht werden. Wenn wir weiterhin durch unseren Ansatz $\Psi_1\Psi_2$ dividieren, wird die Gleichung zu:

$$\frac{1}{\Psi_1}H_1\Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2}H_2\Psi_2 = i\hbar \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t \Psi_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t \Psi_2} \right). \quad (4.6)$$

Die linke und rechte Seite müssen für alle unabhängigen x_1, p_1, x_2, p_2 gleich sein, dadurch folgen die einzelnen Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 :

$$\frac{1}{\Psi_1}H_1\Psi_1 = i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t \Psi_1}, \quad \frac{1}{\Psi_2}H_2\Psi_2 = i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t \Psi_2}. \quad (4.7)$$

Wie an diesem Beispiel zu sehen, gilt Gleiches auch für beliebig viele unabhängige Hamilton-Operatoren, womit (4.4) erfüllt ist und wir wissen, dass die Lösung Ψ die Form (4.3) hat.

4.2 Unitäre Variablentransformation und allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Um für unseren Hamilton-Operator $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$ (4.1) eine entkoppelte Form $H(x_+, x_-, p_+, p_-, t) = H_+(x_+, p_+, t) + H_-(x_-, p_-, t)$ nach (4.2) in den neuen Koordinaten/Variablen x_+, x_-, p_+, p_- zu erhalten, wählen wir die unitären Koordinatentransformationen [5]

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_1), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \quad (4.8)$$

welche durch die Eigenmoden/Eigenvektoren des klassischen Problems motiviert sind. Dessen Normierung stellt sicher, dass die Transformation unitär ist. Durch einfaches Umstellen folgen x_1 und x_2 in Abhängigkeit der neuen Koordinaten x_+ und x_- :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ + x_-). \quad (4.9)$$

Indem wir x_1 und x_2 im Hamilton-Operator (4.1) ersetzen, formen wir den ortsabhängigen Teil um zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1 \\ &= \frac{1}{2}kx_+^2 + \frac{1}{2}(k + 2\kappa)x_-^2 - S(t)\frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es tauchen nun keine Kopplungsterme $\propto x_+x_-$ mehr auf, wie es in den alten Koordinaten der Fall war.

Jetzt betrachten wir die neuen Impulse und überprüfen, dass es durch den Variablenwechsel nicht zu neuen Kopplungstermen $\propto p_+p_-$ kommt. Mit der Kettenregel folgt für die Ableitungen der Impulsoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{\pm}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad (4.11)$$

weshalb für die Impulsoperatoren, analog zu den Ortsoperatoren, gilt

$$p_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_1), \quad p_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_1). \quad (4.12)$$

Wir setzen erneut in unseren Hamilton-Operator (4.1) ein und erhalten für den impulsabhängigen Teil:

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_+^2}{2m} + \frac{p_-^2}{2m}. \quad (4.13)$$

Der gesamte Hamilton-Operator der zwei gekoppelten getriebenen Oszillatoren ist in den neuen Variablen folglich

$$\begin{aligned} H(t) &= H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1 \\ &= \frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_+^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}S(t)x_+ + \frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}(k+2\kappa)x_-^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}S(t)x_- \\ &= \frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2}k_+x_+^2 - S_+(t)x_+ + \frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}k_-x_-^2 - S_-(t)x_- \\ &= H_+(x_+, p_+, t) + H_-(x_-, p_-, t), \quad H_{\pm} : \mathcal{H}_{\pm} \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Hamilton-Operator in den neuen Variablen x_{\pm}/p_{\pm} beschreibt demnach ein System aus zwei unabhängigen getriebenen harmonischen Oszillatoren mit neuen Potentialkonstanten $k_+ = k$ und $k_- = k + 2\kappa$ bzw. neuen Eigenfrequenzen

$$w_+ = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k+2\kappa}{m}}. \quad (4.15)$$

Die beiden Oszillatoren werden, wegen dem verschiedenen Vorzeichen von $S_+(t) = S_+(t+T)$ und $S_-(t) = S_-(t+T)$, periodisch aber phasenversetzt um π mit der ursprünglichen Treibkraft $S(t)$ angetrieben, wobei diese mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ skaliert wird.

Betrachten wir den Fall, dass beide Oszillatoren x_1 und x_2 des Systems in den alten Koordinaten getrieben sind, und zwar genau wie durch die neuen Koordinaten x_+ und x_- vorgegeben, das heißt

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)(x_2 + x_1) \\ \text{oder } H(t) &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

liegt in den neuen Variablen ein vereinfachtes System vor, bei dem nur ein Oszillator x_+ oder x_- getrieben ist. Es muss also in den klassischen Normalmoden getrieben werden, damit nach dem Variablenwechsel ein System mit nur noch einem getriebenen Oszillator vorliegt.

Lösung der Schrödinger-Gleichung

Mit den Ergebnissen dieses und des vorherigen Abschnittes können wir nun die Wellenfunktion $\Psi_{n,l}$ des Systems zweier gekoppelter getriebener Oszillatoren (4.1), für eine allgemeine Treibkraft $S(t) = S(t+T)$, in den neuen, entkoppelten Koordinaten x_+ und x_- , nach Formel (4.4)

schreiben. Durch Ersetzen der neuen Variablen nach Formel (4.8) und (4.13) ist auch die Wellenfunktion in den ursprünglichen Variablen bekannt:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{n,l}(x_+, x_-, t) &= \Psi_{+,n}(x_+, t) \Psi_{-,l}(x_-, t) \\
 &= N_{+,n} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} (x_+ - \zeta_+(t)) \right) \exp \left(\frac{-m\omega_+}{2\hbar} (x_+ - \zeta_+(t))^2 \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}_+(t) (x_+ - \zeta_+(t)) - E_{+,n} t + \int_0^t L_+ dt' \right) \right] \\
 &\quad \cdot N_{-,l} H_l \left(\sqrt{\frac{m\omega_-}{\hbar}} (x_- - \zeta_-(t)) \right) \exp \left(\frac{-m\omega_-}{2\hbar} (x_- - \zeta_-(t))^2 \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}_-(t) (x_- - \zeta_-(t)) - E_{-,l} t + \int_0^t L_- dt' \right) \right], \Psi_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm} \\
 &= N_{+,n} N_{-,l} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right) \right) H_l \left(\sqrt{\frac{m\omega_-}{\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right) \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[\frac{-m}{2\hbar} \left(\omega_+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right)^2 + \omega_- \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right)^2 \right) \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m\zeta_+(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right) + m\zeta_-(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right) \right) \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(-(E_{+,n} + E_{-,l}) + \int_0^t L_+ + L_- dt' \right) \right] \\
 &= \Psi_{n,l}(x_1, x_2, t), \quad n, l \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die klassischen Lösungen $\zeta_{\pm}(t)$ und die Lagrange-Funktionen L_{\pm} sind wie bei der Lösung des einzelnen Oszillators bestimmt über (2.18) und (2.17). Genauso sind die Normierungskonstanten $N_{+,n}/N_{-,l}$ und ungetriebenen Eigenenergien $E_{+,n}/E_{-,l}$ wie beim einzelnen getriebenen Oszillator definiert. Nur die Eigenfrequenz ω_0 wird durch die neuen Eigenfrequenzen ω_+/ω_- (4.15) ersetzt.

Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, ist Ψ in den neuen Variablen das Produkt aus den unabhängigen Wellenfunktionen Ψ_+ und Ψ_- , welche Lösungen der einzelnen Schrödinger-Gleichungen mit $H_+(t)/H_-(t)$ sind. Dadurch ist Ψ auch auf dem Raum, das heißt auf $x_{\pm} \in (-\infty, \infty)$, normiert, wie am Anfang von Kapitel (3) gezeigt wurde:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,l}(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,l}(x_+, x_-, t)|^2 dx_+ dx_- \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{+,n}(x_+, t)|^2 dx_+ \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{-,l}(x_-, t)|^2 dx_- = 1 \cdot 1 = 1.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

In den ursprünglichen Koordinaten sind Kopplungsterme $\propto x_1 x_2$ in der Wellenfunktion vorhanden. Durch die Hermit-Polynome H_n/H_l treten hierbei im Allgemeinen unterschiedliche Potenzen der x_1 und x_2 auf.

Die Floquet-Moden $\Phi_{n,l}(x_+, x_-, t) = \Phi_{+,n}(x_+, t) \Phi_{-,l}(x_-, t)$ sind in den neuen Koordinaten das Produkt aus den einzelnen Floquet-Moden (2.26). Die Quasienergien sind dadurch die Summe der einzelnen Quasienergien (2.25):

$$\epsilon_{n,l} = \epsilon_{+,n} + \epsilon_{-,l}.$$

4.3 Berechnung von Erwartungswerten

Um die Erwartungswerte für die Observablen x_1, x_2, p_1, p_2 zu berechnen, verwenden wir die benutzten Transformationen für den Ort (4.8) und den Impuls (4.12), mit welchen wir die Berechnung auf die schon bekannten Erwartungswerte des einzelnen getriebenen Oszillators zurückführen können. Es werden alle Erwartungswerte für eine allgemeine T -periodische Treibkraft $S(t)$ berechnet und einige Erwartungswerte für die sinusförmige Treibkraft aus Kapitel (2.3.1), für einfache Konstanten, visualisiert (4.1).

Die „+“ und „−“ Operatoren wirken auf verschiedene Variablen, das heißt, sie operieren auf den verschiedenen Räumen $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$. Aus diesem Grund gilt für den Erwartungswert eines Operators $U_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$ bezüglich einer Wellenfunktion der Form $\Psi_{n,l} = \Psi_{+,n}\Psi_{-,l}$ mit $\Psi_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm}$, wegen der Normierung nach Formel (4.18):

$$\begin{aligned} \langle U_+ \rangle_{n,l} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* U_+ \Psi \, dx_+ dx_- = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_-|^2 \, dx_- \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{+,n}^* U_+ \Psi_{+,n} \, dx_+ \\ &= 1 \cdot \langle U_+ \rangle_n^+ . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für einen Operator U_+ ist der Erwartungswert der Gesamtwellenfunktion $\Psi_{n,l}$ der gekoppelten getriebenen Oszillatoren also identisch zum Erwartungswert der Wellenfunktion des einzelnen getriebenen Oszillators, in den „+“-Koordinaten. Für U_- ergibt sich dies analog.

Demnach folgt für den Erwartungswert $\langle U_+ U_- \rangle_{n,l}$

$$\langle U_+ U_- \rangle_{n,l} = \langle U_- U_+ \rangle_{n,l} = \langle U_+ \rangle_n^+ \langle U_- \rangle_l^- . \quad (4.20)$$

4.3.1 Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes

Mit der Transformation (4.8), der Überlegung zum gekoppelten Erwartungswert (4.19) und dem Erwartungswert des einzelnen getriebenen Oszillators (3.3) aus Kapitel 3, sind nun die Erwartungswerte $\langle x_1 \rangle_{n,l} / \langle x_2 \rangle_{n,l}$ bekannt:

$$\langle x_1 \rangle_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle x_+ \rangle_{n,l} \mp \langle x_- \rangle_{n,l} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle x_+ \rangle_n^+ \mp \langle x_- \rangle_l^- \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta_+(t) \mp \zeta_-(t)) . \quad (4.21)$$

Der Mittelwert des Ortes für einen der beiden Oszillatoren x_1 oder x_2 des gekoppelten Systems ist somit die quantenzahlunabhängige Differenz oder die Summe der beiden klassischen Lösungen $\zeta_+(t)$ und $\zeta_-(t)$ der entkoppelten Oszillatoren nach der Variablentransformation, multipliziert mit $1/\sqrt{2}$.

Der Erwartungswert für x_1^2/x_2^2 ergibt sich darüber hinaus mit Formel (4.20) und zusätzlich dem Erwartungswert (3.5) zu

$$\begin{aligned} \langle x_1^2 \rangle_{n,l} &= \frac{1}{2} \langle (x_+ \mp x_-)^2 \rangle_{n,l} = \frac{1}{2} \left(\langle x_+^2 \rangle_n^+ \mp 2 \langle x_+ \rangle_n^+ \langle x_- \rangle_l^- + \langle x_-^2 \rangle_l^- \right) \\ &= \frac{1}{2} (s_+^2 (2n+1) + \zeta_+^2(t) \mp 2\zeta_+(t)\zeta_-(t) + s_-^2 (2l+1) + \zeta_-^2(t)) , \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit s_{\pm} als charakteristische Länge des ungetriebenen Oszillators nach Formel (3.6), mit der jeweiligen Eigenfrequenz ω_{\pm} .

Sinusoidale Treibkraft

Für eine sinusoidale Treibkraft $S(t) = A \sin(\omega t)$ und entsprechenden $S_{\pm}(t)$ (4.14) sind $\zeta_{\pm}(t)$ gegeben durch (2.28)

$$\zeta_{\pm}(t) = \frac{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} A \sin(\omega t)}{m(\omega_{\pm}^2 - \omega^2)} . \quad (4.23)$$

Hiermit werden im Folgenden die Erwartungswerte $\langle x_1 \rangle_{n,l}$ und $\langle x_2 \rangle_{n,l}$ für die Konstanten

$$\omega = 2 \text{ Hz} , \quad A = 1 \text{ N} , \quad k = 1 \text{ Nm}^{-1} , \quad m = 1 \text{ kg} , \quad \hbar = 1 \text{ J s} \quad (4.24)$$

dargestellt. Hierbei untersuchen wir, für welche Kopplungskonstanten κ die beiden Erwartungswerte gleichphasig oder gegenphasig bzw. mit gleichem oder unterschiedlichem Vorzeichen der Amplitude schwingen, also bei welchem κ die Amplitude $\langle x_1 \rangle_{n,l}$ ihr Vorzeichen ändert. Wir betrachten somit die Situation einer schwachen (gegenphasigen) und starken (gleichphasigen) Kopplung.

Die Amplitude von $\langle x_2 \rangle_{n,l}$ kann ihr Vorzeichen nicht ändern, da negative physikalisch Kopplungskonstanten nicht sinnvoll sind. Der Erwartungswert verschwindet genau für $\kappa = 0 \text{ Nm}^{-1}$, wie in Abb.(4.1a) veranschaulicht. Dies entspricht der Erwartung, da es sich bei x_2 ohne Kopplung um einen einzelnen ungetriebenen Oszillator handelt, da nur x_1 getrieben ist.

Der Erwartungswert von x_1 wechselt sein Vorzeichen für $\kappa = \omega^2 m - k = 3 \text{ Nm}^{-1}$, wie in Abb.(4.1b) gezeigt. Die gegenphasige (schwache) Kopplung ist für $\kappa = 1 \text{ Nm}^{-1} < 3 \text{ Nm}^{-1}$ in Abb.(4.1c) dargestellt. Wie klassisch anzunehmen, ist die Amplitude des Erwartungswertes $\langle x_2 \rangle_{n,l}$ des angekoppelten Oszillators in diesem Fall geringer als die des getriebenen Oszillator-Erwartungswertes $\langle x_1 \rangle_{n,l}$, da weniger Energie auf x_2 übertragen wird. Die gleichphasige (starke) Kopplung ist für $\kappa = 15 \text{ Nm}^{-1} > 3 \text{ Nm}^{-1}$ in Abb.(4.1d) dargestellt. Für eine starke Kopplung werden die Erwartungswerte identisch und die Amplitude geringer, was der klassischen Anschauung zweier starr gekoppelter Oszillatoren entspricht.

4.3.2 Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses

Die Transformation der Impulsoperatoren (4.12) hat die gleiche Form wie bei den Ortsoperatoren (4.8), die Berechnung der Erwartungswerte $\langle p_{1,2} \rangle_{n,l}$ und $\langle p_{1,2}^2 \rangle_{n,l}$ erfolgt darum analog, mit den Impuls-Erwartungswerten (3.12) und (3.15). Es gilt:

$$\langle p_1 \rangle_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p_+ \rangle_{n,l} \mp \langle p_- \rangle_{n,l}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p_+ \rangle_n^+ \mp \langle p_- \rangle_l^-) = \frac{m}{\sqrt{2}} (\dot{\zeta}_+(t) \mp \dot{\zeta}_-(t)) \quad (4.25)$$

und

$$\begin{aligned} \langle p_1^2 \rangle_{n,l} &= \frac{1}{2} \langle (p_+ \mp p_-)^2 \rangle_{n,l} \\ &= \frac{m^2}{2} (\omega_+^2 s_+^2 (2n+1) + \dot{\zeta}_+^2(t) \mp 2\dot{\zeta}_+(t)\dot{\zeta}_-(t) + \omega_-^2 s_-^2 (2l+1) + \dot{\zeta}_-^2(t)) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Erwartungswerte sind ähnlich zu denen des Ortes. Es kommt nur ein Faktor hinzu und die $\zeta_{\pm}(t)$ werden zu ihren Ableitungen.

Für eine sinusförmige Treibkraft, sehen die Erwartungswerte für $p_{1,2}$ demnach so aus wie die $\langle x_{1,2} \rangle_{n,l}$ nur mit skaliertener Amplitude und phasenverschoben um π . Das Verhalten für die verschiedenen Kopplungskonstanten κ ist ebenfalls identisch.

4.3.3 Erwartungswerte der Energie

Der zeitabhängige Erwartungswert $\langle H(t) \rangle_{n,l}$ des Hamilton-Operators für eine beliebige Treibkraft $S(t)$ ist auch mit dem Erwartungswert des einzelnen Oszillators berechenbar, indem wir wieder in den neuen Koordinaten arbeiten:

$$\langle H(t) \rangle_{n,l} = \langle H_+(t) \rangle_n^+ + \langle H_-(t) \rangle_l^- = E_{+,n} + E_{-,l} - L_+ - L_- + m\dot{\zeta}_+^2(t) + m\dot{\zeta}_-^2(t) . \quad (4.27)$$

Außerdem wird der mittlere Erwartungswert $\bar{H}_{n,l}$ wieder, in den neuen Koordinaten, mit Formel (3.19), berechnet. Weil die Quasienergien $\epsilon_{n,l}$ die Summe von $\epsilon_{+,n}$ und $\epsilon_{-,l}$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{H}_{n,l} &= \bar{H}_{+,n} + \bar{H}_{-,l} \\ &= E_{+,n} + E_{-,l} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}A}{4m(\omega_+^2 - \omega^2)} \left(1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_+^2 - \omega^2)} \right) - \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}A}{4m(\omega_-^2 - \omega^2)} \left(1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_-^2 - \omega^2)} \right) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sinusoidale Treibkraft

Für das Beispiel der sinusoidalen Kraft folgt $\langle H(t) \rangle_{n,l}$ mit den entsprechenden Orts- und Impulserwartungswerten aus dem vorherigen Abschnitt und $\bar{H}_{n,l}$ folgt aus Gleichung (4.28). Der Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_{0,0}$ und dessen zeitliches Mittel $\bar{H}_{0,0}$ sind für die gleichen Konstanten wie zuvor

$$\omega = 2 \text{ Hz} , \quad A = 1 \text{ N} , \quad k = 1 \text{ Nm}^{-1} , \quad m = 1 \text{ kg} , \quad \hbar = 1 \text{ Js} , \quad (4.29)$$

in Abb.(4.1) aufgetragen. Da beide Erwartungswerte wegen den $E_{+,n}/E_{-,l}$ abhängig von den Quantenzahlen sind, wird hier der einfachste Fall $n = l = 0 \Rightarrow E_{\pm,0} = \hbar\omega_{\pm}/2$ betrachtet. Ohne Kopplung, das heißt $\kappa = 0 \text{ Nm}^{-1}$ (4.1e) ist die mittlere Energie am geringsten, weil nur x_1 schwingt. Für eine möglichst starke/starre Kopplung $\kappa = 15 \text{ Nm}^{-1}$ wird die mittlere Energie im System maximal, weil die Treibkraft so möglichst viel Energie auf den angekoppelten Oszillator x_2 übertragen kann. Diese Situation ist in Abb. (4.1f) dargestellt.

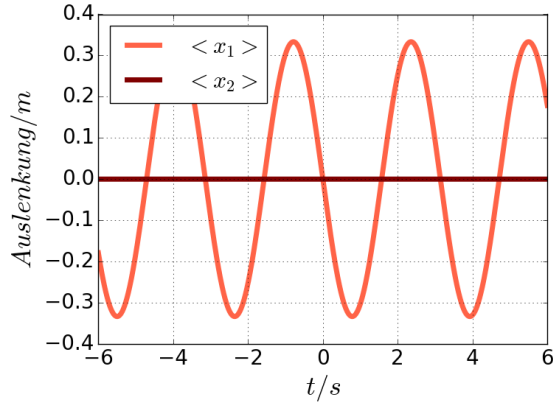
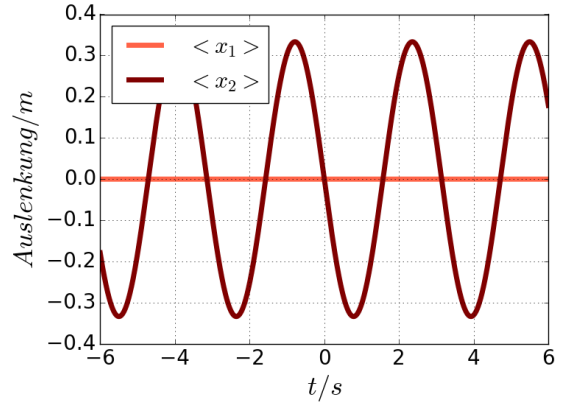
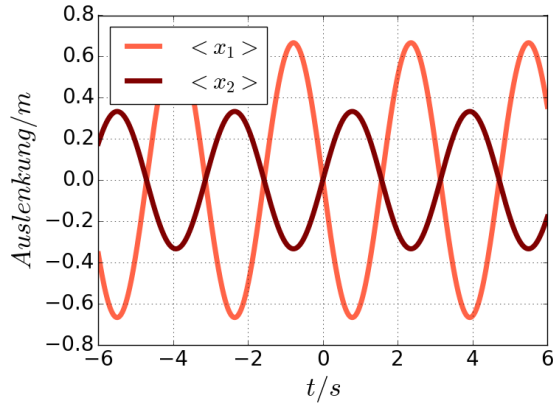
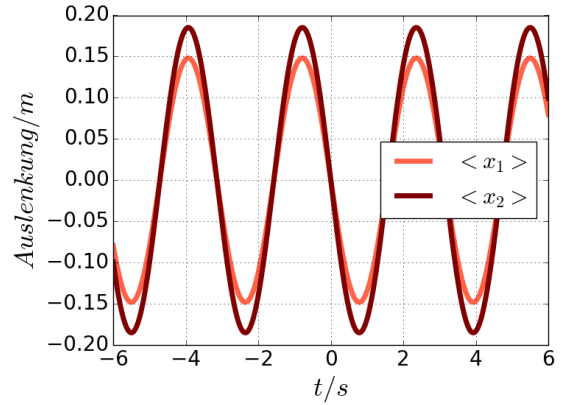
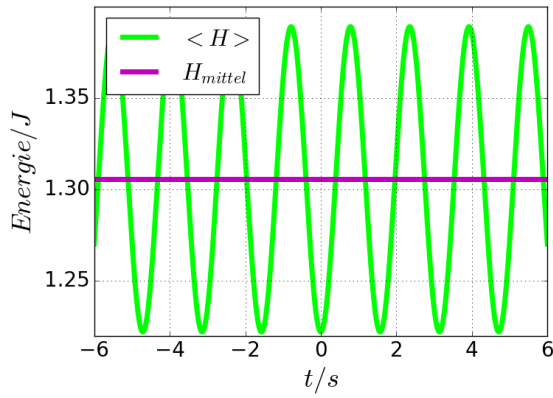
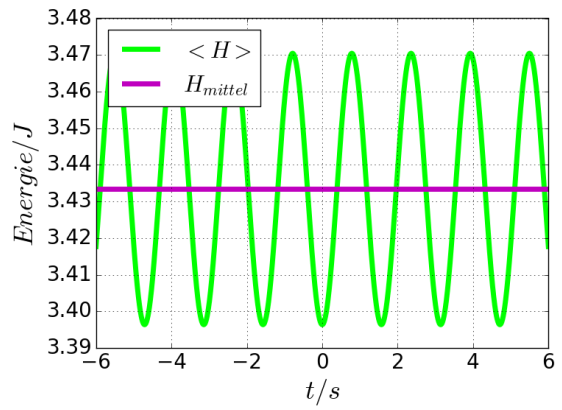

(a) $\kappa = 0 \text{ Nm}^{-1}$.

(b) $\kappa = \omega^2 m - k = 3 \text{ Nm}^{-1}$.

(c) $\kappa = 1 \text{ Nm}^{-1}$.

(d) $\kappa = 15 \text{ Nm}^{-1}$.

(e) $\kappa = 0 \text{ Nm}^{-1}$.

(f) $\kappa = 15 \text{ Nm}^{-1}$.

Abbildung 4.1: Erwartungswerte der gekoppelten Oszillatoren $\langle x_1 \rangle_{n,l}$ und $\langle x_2 \rangle_{n,l}$ für einen beliebigen Zustand $\Psi_{n,l}$, außerdem der Erwartungswert der Gesamtenergie $\langle H(t) \rangle_{0,0}$ und zeitliches Mittel $\bar{H}_{0,0}$ für den Grundzustand $\Psi_{0,0}$. Mit $\omega = 2 \text{ Hz}$, $A = 1 \text{ N}$, $k = 1 \text{ Nm}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$, $\hbar = 1 \text{ J s}$, für verschiedene Kopplungskonstanten κ .

5 Zweite Quantisierung des getriebenen harmonischen Oszillators

In diesem Kapitel werden wir die Wellenfunktionen $\Psi_n(x, t)$ in der Ortsdarstellung (2.22) in die Besetzungszahldarstellung übersetzen, das heißt wir werden $\Psi(x, t)$ darstellen in der Orthonormalbasis der Eigenzustände $|n\rangle$ des Besetzungszahloperators N des ungetriebenen Oszillators. Die $|n\rangle$ sind auch Eigenzustände des Hamilton-Operators

$$H_{\text{ung}}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = H_{\text{ung}}(N) = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (5.1)$$

des ungetriebenen Systems. Hierbei gilt

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Um das darstellungsunabhängige Ket $|\Psi(t)\rangle$ in der 2. Quantisierung zu erhalten, wird ein geeigneter Ansatz gewählt, welcher mit Hilfe der Lösungen in Ortsdarstellung gefunden wird. Der Ansatz wird in die Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators eingesetzt, wonach mit Hilfe von Kommutatorrelationen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten hergeleitet werden, welche gelöst werden können.

Mit dem bekannten $|\Psi(t)\rangle$ werden im zweiten Teil erneut die Erwartungswerte $\langle x^m \rangle_n$ und $\langle p^m \rangle_n$ des einzelnen getriebenen Oszillators berechnet.

5.1 Wellenfunktion

Da die $|n\rangle$ Eigenzustände des hermiteschen Besetzungszahloperators N sind, kann jede Wellenfunktion $|\Psi_n(t)\rangle$ bzw. Gesamtwellenfunktion $|\Psi(t)\rangle$ auf dem selben Raum geschrieben werden als

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\Psi_n(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |n\rangle, \quad (5.3)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_n(t)$.

Für die $|\Psi_n(t)\rangle$ des getriebenen harmonischen Oszillators wählen wir den Ansatz

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\theta_n(t)\right) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varphi(t)x\right) |n\rangle = K_n O_p O_x |n\rangle. \quad (5.4)$$

Dieser Ansatz folgt aus der Betrachtung der Lösung $\Psi_n(x, t)$ in Ortsdarstellung (2.22). Die ungetriebenen Eigenzustände $|n\rangle$ haben in der Ortsdarstellung die Form einer Gauß-Glocke. Da bei den $\Psi_n(x, t)$ zur (verschobenen) Gauß-Glocke eine zeit- und ortsabhängige Phase

hinzu kommt und der Ortsoperator in Ortsdarstellung einfach der Multiplikation mit der Ortskoordinate entspricht, wählen wir

$$\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varphi(t)x\right) = O_x \quad (5.5)$$

als Ansatz. Hier ist x der Ortsoperator. Sowohl die zusätzliche orts- und zeitabhängige Phase als auch die Gauß-Glocke in $\Psi_n(x, t)$ sind verschoben (um $\zeta(t)$), daher wenden wir von links den Operator

$$\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) = O_p \quad (5.6)$$

an. Denn dieser Operator bewirkt bei der Transformation genau die Verschiebung des Ortsoperators (5.11), wie sie im Argument der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ vorliegt:

$$O_p x O_p^{-1} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) x \exp\left(\frac{+i}{\hbar}\alpha(t)p\right) = x - \alpha(t). \quad (5.7)$$

Zuletzt wird die ausschließlich zeitabhängige Phase der Wellenfunktion $\Psi_n(x, t)$, in welche die einzige quantenzahlabhängige Größe E_n eingeht, durch die Exponentialfunktion K_n ohne Operator berücksichtigt.

Jetzt setzen wir diesen Ansatz (5.4) in die Schrödinger-Gleichung (2.3) ein. Das Ziel ist unseren Hamilton-Operator

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x = H_{\text{ung}}(N) - S(t)x \quad (5.8)$$

an den Operatoren im Ansatz vorbeizukommutieren, sodass $H_{\text{ung}}(N)$ auf die $|n\rangle$ angewendet wird. Währenddessen entstehen Resterme mit p und x , die auch auf $|n\rangle$ wirken. Auf der anderen Seite der Gleichung müssen der p - und x -Operator, welche durch die Zeitableitung entstehen, ebenfalls bis zum $|n\rangle$ durchkommutiert werden. Dann erhalten wir die Differentialgleichungen zum Bestimmen von $\theta_n(t)$, $\alpha(t)$ und $\varphi(t)$ durch Koeffizientenvergleich beider Seiten.

Für dieses Vorgehen brauchen wir die Vertauschungsrelationen von x/p mit O_x/O_p . Wenn beide Operatoren nur von x oder p abhängen, verschwindet der Kommutator, das heißt es gilt

$$[x^m, O_x] = [p^m, O_p] = 0 \iff x^m O_x = O_x x^m \quad \text{und} \quad p^m O_p = O_p p^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.9)$$

Zusätzlich berechnen wir die gemischten Vertauschungsrelationen mit der Kommutatorregel

$$[A, f(B)] = \frac{\partial}{\partial B} f(B) [A, B] \quad (\text{für } [B, [A, B]] = 0) \quad (5.10)$$

und dem bekannten Kommutator $[x, p] = i\hbar$. Es ergibt sich:

$$[x, O_p] = \alpha(t) O_p \iff x O_p = O_p (x + \alpha(t)) \quad \text{bzw.} \quad x^m O_p = O_p (x + \alpha(t))^m \quad (5.11)$$

$$[p, O_x] = -\varphi(t) O_x \iff p O_x = O_x (p - \varphi(t)) \quad \text{bzw.} \quad p^m O_x = O_x (p - \varphi(t))^m, \quad (5.12)$$

$m \in \mathbb{N}.$

Für die Anwendung des Hamilton-Operators $H(x, p, t)$ des getriebenen Oszillators auf den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ folgt

$$\begin{aligned}
 H|\Psi(t)\rangle &= K_n H O_p O_x |n\rangle = K_n O_p \left(H + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) \right) O_x |n\rangle \\
 &= K_n O_p O_x \left(H + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\alpha(t)x + \alpha^2(t)) - \alpha(t)S(t) \right) |n\rangle \\
 &= K_n O_p O_x \left(E_n - S(t)x + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\alpha(t)x + \alpha^2(t)) - \alpha(t)S(t) \right) |n\rangle .
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Weiterhin ist die Zeitableitung

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle &= K_n \left(\dot{\theta}(t) O_p O_x + O_p \dot{\alpha}(t) p O_x + O_p O_x \dot{\varphi}(t) x \right) |n\rangle \\
 &= K_n O_p O_x \left(\dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)(p - \varphi(t)) + \dot{\varphi}(t)x \right) |n\rangle .
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Da alle Restterme auf beiden Seiten der Schrödinger-Gleichung auf die Besetzungszustände $|n\rangle$ angewendet werden, wenden wir einen Koeffizientenvergleich von (5.13) und (5.14) an und setzen jeweils die Terme vor x , p und die Terme ohne Operator gleich. Dies liefert die Differentialgleichungen zu Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Phasen im Ansatz:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \dot{\theta}_n(t) &= E_n + \frac{1}{2}m\omega_0^2\alpha^2(t) + \frac{1}{2m}\varphi^2(t) + \dot{\alpha}(t)\varphi(t) - S(t)\alpha(t) \\
 2) \quad \dot{\varphi}(t) &= m\omega_0^2\alpha(t) - S(t) \quad , \quad 3) \quad \dot{\alpha}(t) = \frac{-1}{m}\varphi(t) .
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Einsetzen von Gleichung 2) in Gleichung 3) führt auf die klassische Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators (2.18) für $\alpha(t)$

$$m\ddot{\alpha}(t) + m\omega_0\alpha(t) - S(t) = 0 , \tag{5.16}$$

weshalb $\alpha(t) = \zeta(t)$ ist, wie nach der Transformation (5.7) erwartet, weil x in der Lösung $\Psi(x, t)$ genau um $-\zeta(t)$ verschoben ist. Demnach ist $\varphi(t) = -m\dot{\zeta}(t)$ durch 3) gegeben. Weiterhin setzen wir das bekannte $\alpha(t)$ und $\varphi(t)$ in 1) ein und identifizieren die Lagrange-Funktion für $\zeta(t)$ (2.17). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_n(t) &= E_n + \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2(t) + \frac{1}{2m}\dot{\zeta}^2(t) - m\dot{\zeta}^2(t) - S(t)\zeta(t) = E_n - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) \\
 \Rightarrow \theta_n(t) &= E_n t - \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt' .
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Daher ist K_n genau die rein zeitabhängige Phase von $\Psi_n(x, t)$ (2.22) und $|\Psi_n(t)\rangle$ (5.4) ist insgesamt

$$\begin{aligned}
 |\Psi_n(t)\rangle &= K_n O_p O_x \\
 &= \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(-E_n t + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt' \right) \right) \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \zeta(t) p \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) x \right) |n\rangle .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

5.2 Berechnung von Erwartungswerten

Mit dem bekannten Wellenfunktion-Ket $|\Psi(t)\rangle$, sowie den Vertauschungsrelationen in (5.11-5.12) werden wir in diesem Teil die zeitabhängigen Erwartungswerte des Ortes $\langle x^m \rangle_n$ und des Impulses $\langle p^m \rangle_n$ des einzelnen getriebenen Oszillators in der Besetzungszahldarstellung bestimmen.

Es wird verwendet, dass die Erwartungswerte der Zustände $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$ des ungetriebenen Oszillators, gleich den Erwartungswerten der Besetzungszahlzustände $|n\rangle$ sind, da sich $|n\rangle$ und $|\Psi_{n,\text{ung}}(t)\rangle$ nur um eine komplexe Phase unterscheiden, welche bei den Erwartungswerten wegfällt. Außerdem kann beim Erwartungswert eines Operators U für die Zustände $|\Psi(t)\rangle$ die komplexe Phase K_n in $|\Psi(t)\rangle$ (5.18) sofort am Operator vorbeigezogen werden und mit K_n^{-1} zu 1 vereinfacht werden, weil K_n , im Gegensatz zu O_x und O_p , kein Operator ist:

$$\langle U \rangle_n = \langle \Psi_n(t) | U | \psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} U O_p O_x | n \rangle . \quad (5.19)$$

Es liegt nun eine (Rück-)Transformation von U bezüglich O_p und dann O_x vor. Für $U = x^m/p^m$ können wir das Ergebnis der Transformation direkt den Relationen (5.11-5.12) entnehmen, indem wir damit $U_{x/p}$ jeweils mit p^m/x^m vertauschen und dann $U_{x/p}^{-1} U_{x/p}$ zu 1 zusammenfassen. Weil danach entweder nur O_p und p^m oder O_x und x^m verbleiben, und diese Operatoren kommutieren, kann man diesen letzten Operator ebenso mit seinem Inversen zu 1 zusammenfassen.

Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes

Mit den vorangegangenen Überlegungen lassen sich die Erwartungswerte des Ortsoperators x berechnen:

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_n &= \langle \Psi_n(t) | x^m | \Psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} x^m O_p O_x | n \rangle = \langle n | (x + \alpha(t))^m | n \rangle \\ &= \langle (x^m + \alpha(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \langle (y + \zeta(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dieses Ergebnis ist identisch zum entsprechenden Ergebnis (3.7) aus Kapitel 3.

Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses

Für die Impuls-Erwartungswerte ergibt sich analog zu den Ort-Erwartungswerten

$$\begin{aligned} \langle p^m \rangle_n &= \langle \Psi_n(t) | p^m | \Psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} p^m O_p O_x | n \rangle = \langle n | (p - \varphi(t))^m | n \rangle \\ &= \langle (p_y^m - \varphi(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \langle (p_y + m\dot{\zeta}(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Auch für den Impuls bekommen wir die gleichen Erwartungswerte wie bei der ersten Berechnung in Gleichung (3.14) aus Kapitel 3.

Schließlich erhalten wir für den Ort und den Impuls des einzelnen getriebenen Oszillators und folglich auch für die Energie in der Besetzungszahldarstellung die Erwartungswerte, wie wir sie schon in Kapitel 3 in der Ortsdarstellung erhalten haben.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das quantenmechanische Problem eines periodisch getriebenen harmonischen Oszillators näher betrachtet. Nachdem die Floquet-Theorie in Grundzügen erklärt wurde, konnte das Floquet-Theorem anhand der Wellenfunktionen des getriebenen Oszillators verifiziert werden. Mit einem Fourier-Reihen-Ansatz konnten die Quasienergien der Floquet-Theorie für eine beliebige periodische Treibkraft im System, in Abhängigkeit der Fourier-Koeffizienten der Kraft bestimmt werden. Mit den Quasienergien kann unter anderem das zeitliche Mittel des Energie-Erwartungswertes berechnet werden, ohne diesen selbst zu kennen, wodurch ein einfacher erster Eindruck des Systems möglich ist. Wir konnten z. B. frühzeitig feststellen, dass die Energie divergieren wird, wenn sich die Treibfrequenz nah der Oszillator-Eigenfrequenz befindet.

Nachdem die Erwartungswerte für den Ort, den Impuls und die Energie berechnet wurden, haben wir das System um einen weiteren angekoppelten Oszillator erweitert. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung gelang hier mit einer Koordinatentransformation, welche den Hamilton-Operator in eine Summe aus zwei unabhängigen Hamilton-Operatoren überführte. Damit wussten wir, dass die Lösung durch ein Produkt der Wellenfunktionen in den neuen Koordinaten gegeben ist, was für beliebig viele Hamilton-Operatoren ebenso korrekt ist. Die Form der Koordinaten-Transformation kann hierbei aus den klassischen Normalmoden gewonnen werden, welche wiederum durch das Diagonalisieren einer Matrix bei der Lösung des klassischen Problems erhalten werden. Dies sollte ebenso für beliebig viele gekoppelte Oszillatoren funktionieren, womit die Wellenfunktionen für ein System aus n gekoppelten Oszillatoren genauso aufgestellt werden können. Für ungleiche Massen und Potentialkonstanten ergeben sich im Allgemeinen aber kompliziertere Normalmoden und Transformationen.

Für die zwei gekoppelten getriebenen Oszillatoren haben wir, unter Ausnutzung der neuen Variablen und der Erwartungswerte des einzelnen Oszillators, ebenfalls die Erwartungswerte berechnet und zudem visualisiert. Es ergab sich an vielen Stellen ein Verhalten der Erwartungswerte, welches dem des klassischen Systems entspricht.

Zum Schluss der Arbeit wurde ein weiteres Mal der einzelne getriebene Oszillator behandelt. Diesmal wurde das Problem in der 2. Quantisierung betrachtet. Mit einem geeigneten Ansatz, welchen wir anhand der Lösung in Ortsdarstellung motiviert haben, haben wir das darstellungsunabhängige Wellenfunktion-Ket aufstellen können. In der 2. Quantisierung haben wir damit die gleichen Erwartungswerte wie in der Ortsdarstellung erhalten. Um mehrere gekoppelte Oszillatoren in der Besetzungszahldarstellung zu betrachten, können die gleichen Transformationen für die Operatoren gewählt werden wie zuvor in der Ortsdarstellung. Da die Operatoren beim Wellenfunktion-Ket nur im Exponenten vorkommen, führt dies sofort auf die Produktform.

Literatur

- [1] A. G. Fainshtein, N. L. Manakov und L. P. Rapoport. „Some general properties of quasi-energetic spectra of quantum systems in classical monochromatic fields“. In: *J. Phys. B* 11.14 (1978), S. 2561.
- [2] P. Hänggi et al. *Quantum Transport and Dissipation*. 1. Auflage. Wiley-VCH, 1998. Kap. 5.
- [3] K. Husimi. „Miscellanea in Elementary Quantum Mechanics,II“. In: *Prog. Theor. Phys.* 9.4 (1953), S. 381–402. DOI: 10.1143/ptp/9.4.381.
- [4] M. Jørgensen. „Driven Problems in Quantum and Classical Mechanics with Floquet Theory“. Bachelorarbeit. University of Copenhagen, 2015.
- [5] R. M. McDermott und I. H. Redmount. „Coupled Classical and Quantum Oscillators“. In: *eprint arXiv:quant-ph/0403184* (März 2004). Zugriff am: 03.08.18.
- [6] J. Shirley. „Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time“. In: *Phys. Rev.* 138.4B (1965), S. 979–987. DOI: 10.1103/PhysRev.138.B979.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei allen, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein Dank gebührt zuallererst Herrn Prof. Dr. Frithjof Anders für die Vergabe der Bachelorarbeit und dafür, dass er sich trotz seines engen Zeitplans mindestens einmal pro Woche Zeit für mich genommen hat. Ebenso möchte ich mich bei Herrn apl. Prof. Dr. Joachim Stolze für die Zweitkorrektur dieser Arbeit bedanken. Mein Dank gilt weiterhin Iris Kleinjohann, die immer Zeit für meine Fragen hatte und mit ihrer tatkräftigen Betreuung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Auch bei allen, die diese Bachelorarbeit Korrektur gelesen haben möchte ich mich bedanken, wobei vor allem Julian Hochhaus und Niko Salewski zu nennen sind. Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung während des Studiums.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel „Floquet-Theorie, Erwartungswerte und zweite Quantisierung von periodisch getriebenen quantenmechanischen Oszillatoren“ selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

Ort, Datum

Unterschrift