Hinweise

Empfohlen wird die Verwendung dieser Vorlage mit der jeweils aktuellsten TeXLive Version (Linux, Windows) bzw. MacTeX Version (MacOS). Aktuell ist dies TeXLive 2016. Download hier:

`https://www.tug.org/texlive/`

Bei Verwendung von TexLive Versionen 2014 und älter sollte die Zeile

```
\RequirePackage{fixltx2e}
```

als erste Zeile der Präambel noch vor der Dokumentenklasse eingefügt werden. Dies lädt diverse Bugfixes für LaTeX, die ab TexLive 2015 Standard sind.

Die Vorlage `thesis.tex` ist für die Kompilierung mit `lualatex` ausgelegt, mit wenigen Anpassungen kann sie aber auch mit `pdflatex` oder `xelatex` verwendet werden. Die Dokumentenklasse `tudothesis.cls` kann mit allen drei Programmen verwednet werden.

Achten Sie auch auf die Kodierung der Quelldateien. Bei Verwendung von XeLaTeX oder LuaLaTeX (empfohlen) müssen die Quelldateien UTF-8 kodiert sein. Bei Verwendung von pdfLaTeX nutzen Sie die Pakete `inputenc` und `fontenc` mit der korrekten Wahl der Kodierungen.

Eine aktuelle Version dieser Vorlage steht unter

`https://github.com/maxnoe/tudothesis`

zur Verfügung.

Alle verwendeten Pakete werden im LaTeX Kurs von Pep et al. erklärt:

`http://toolbox.pep-dortmund.org/notes`

Für Rückmeldungen und bei Problemen mit der Klasse oder Vorlage, bitte ein *Issue* auf GitHub aufmachen oder eine Email an maximilian.noethe@tu-dortmund.de schreiben.

Wenn Sie die Dokumentenklasse mit der Option `tucolor` laden, werden verschiedene Elemente in TU-Grün gesetzt.

technische universität
dortmund

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

LaTeX-Dokumentenklasse und Vorlage für Abschlussarbeiten an der TU Dortmund

Maximilian Nöthe
geboren in Castrop-Rauxel

2014

Lehrstuhl für Experimentelle Physik V
Fakultät Physik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter:	Prof. Dr. Erstgutachter
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Zweitgutachter
Abgabedatum:	31. September 2015

Kurzfassung

Hier steht eine Kurzfassung der Arbeit in deutscher Sprache inklusive der Zusammenfassung der Ergebnisse. Zusammen mit der englischen Zusammenfassung muss sie auf diese Seite passen.

Abstract

The abstract is a short summary of the thesis in English, together with the German summary it has to fit on this page.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hier folgt eine kurze Einleitung in die Thematik der Bachelorarbeit. Die Einleitung muss kurz sein, damit die vorgegebene Gesamtlänge der Arbeit von 25 Seiten nicht überschritten wird. Die Beschränkung der Seitenzahl sollte man ernst nehmen, da Überschreitung zu Abzügen in der Note führen kann. Um der Längenbeschränkung zu genügen, darf auch nicht an der Schriftgröße, dem Zeilenabstand oder dem Satzspiegel (bedruckte Fläche der Seite) manipuliert werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Floquet Theorie und Floquet'sches Theorem

Die Floquet Theorie ist ein n"utzliches Werkzeug zur der L"osung von quantenmechanischen Systemen, welche durch einen zeitlich periodischen Hamilton-Operator

$$H(t) = H(t+T) \;, \tag{2.1}$$

mit der Periode T, beschrieben werden.

Das Floquet'sche Theorem besagt, dass bei einem solchen Hamoltionian, die L"osungen $\Psi_n(x,t)$ der Schr"odinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(x,t) = H(t)\Psi_n(x,t) \tag{2.2}$$

in Ortsdarstellung die Form

$$\Psi_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t}\Phi_n(x,t) \tag{2.3}$$

haben. Hierbei sind die $\Phi_n(x,t) = \Phi_n(x,t+T)$ T-periodische Funktionen, die sogenannten Floquet-Moden, und ϵ_n die zugeh"origen reellen Quasienergien, wobei diese Bezeichnungen gew"ahlt wurden aufgrund der Parallele zu den Bloch-Moden und Quasiimpulsen des Bloch-Thoerems [**haenlagrangei**]. Das Floquet-Theorem kann damit als "Bloch-Theorem in der Zeit" aufgefasst werden.

Durch Einsetzen dieses Ansatzes f"ur die Wellenfunktionen (2.3) in die Schr"odingergleichung (2.2) erhalten wir

$$\epsilon_n\Phi_n(x,t) = (H(t) - \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Phi_n(x,t) = \mathcal{H}(t)\Phi_n(x,t) \;. \tag{2.4}$$

Die L"osung der Schr"odinger Gleichung konnte somit auf die L"osung eines Eigenwertproblems f"ur den neuen Operator $\mathcal{H}(t)$ zur"uckgef"uhrt werden [**sherly**].

$\mathcal{H}(t)$ bzw. $H(t)$ ist hermitisch und operiert auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$. $\mathcal{L}^2$ ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen und $\mathcal{T}$ der Raum der auf $[0,T]$ integrablen Funktionen, da die Operatoren T periodisch sind [**haenggi**]. Nach dem Spekralsatz bilden die Eigenfunktionen $\Phi_n(x,t)$ von $\mathcal{H}(t)$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$, welche auf eine Orthonormalbasis normiert werden kann:

$$\begin{aligned}\langle\langle \Phi_n(x,t)|\Phi_m(x,t)\rangle\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \langle \Phi_n(x,t)|\Phi_n(x,t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x,t)\Phi_m(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \delta_{n,m} \;.\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.1 Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie $\bar{H}_n$

Da $H(t)$ nicht zeitlich konstant ist, sind auch seine Observablen, die Energien des Systems, zeitabh"angig. Ein direkter Vorteil der Floquet-Theorie liegt darin, dass die durchschnittliche Energie

$$\bar{H}_n = \langle\langle \Psi_n(x,t)|H(t)|\Psi_m(x,t)\rangle\rangle \tag{2.6}$$

des n-ten Zustandes $\Psi_n(x,t)$ leicht "uber die Quasienergien ϵ_n berechnen l"asst, ohne explizit Integrale zu l"osen.

Dazu ersetzen wir $H(t)$ mit Hilfe von (2.4), au"serdem unterscheiden sich die Floquet-Moden $\Phi_n(x,t)$ und die Wellenfunktionen $\Psi_n(x,t)$ nur durch eine komplexe Phase, daher sind deren Skalarprodukte identisch. Weiterhin benutzen wir (2.4), dass die Floquet-Moden Eigenfunktionen von $\mathcal{H}(t)$ sind:

$$\begin{aligned}\bar{H}_n &= \langle\langle \Phi_n(x,t)|\mathcal{H}(t) + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Phi_n(x,t)\rangle\rangle \\ &= \epsilon_n \,\langle\langle \Phi_n(x,t)|\Phi_n(x,t)\rangle\rangle + \langle\langle \Phi_n(x,t)|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Phi_n(x,t)\rangle\rangle \\ &= \epsilon_n + \langle\langle \Phi_n(x,t)|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Phi_n(x,t)\rangle\rangle \;.\end{aligned} \tag{2.7}$$

N"ahere Betrachtung zeigt, dass

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\omega\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} \tag{2.8}$$

gilt [**haenggi**]. Da f"ur ϵ_n und $\mathcal{H}(t)$ mit (2.4) eine Eigenwertgleichung vorliegt, kann das Hellman-Feynman Theorem angewendet werden [**hellmann online quelle**]. Dieses gibt eine Verbindung zwischen den Ableitungen der Eigenwerte und der Ableitung des Hamiltom-Operators an. In unserem Fall erhalten wir dadurch

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} = \langle\langle \Phi_n(x,t)|\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega}|\Phi_n(x,t)\rangle\rangle \;. \tag{2.9}$$

Damit folgt [**haenggi**]:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} \; . \tag{2.10}$$

2.2 Allgemeine L"osung der Schr"odinger-Gleichung des getriebenen harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators der Masse m, welcher mit einer beliebigen aber periodischen "au"seren Kraft $S(t) = S(t+T)$ getrieben wird, hat die Form

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x \ , \tag{2.11}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Dieses System kann exakt gel"ost werden, indem die Schr"odinger-Gleichung durch einen Variablenwechsel und zwei unit"are Transformationen auf die bekannte Form des ungetriebenen Oszillators reduziert wird [**haenggi**].

1) Variablenwechsel
F"ur den neuen Ortsoperator bzw. die Ortsvariable wird eine zeitabh"angige Verschiebung angesetzt:

$$x \to y = x - \zeta(t) \ ; \tag{2.12}$$

Wie zu erwarten ver"andert sich der Impuls(operatur) durch die Translation im Ort nicht, da $zeta(t)$ bei der Ortsableitung wegf"allt.

Mit der neuen Zeitableitung der Wellenfunktion

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(y(t),t) = \mathrm{i}\hbar\dot{\Psi} - \dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\Psi(y(t),t) \tag{2.13}$$

wird die Schr"odinger-Gleichung zu:

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi}(y,t) = \left[\mathrm{i}\hbar\dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(y+\zeta)^2 - (y+\zeta)S(t)\right]\Psi(y,t) \ . \tag{2.14}$$

2) Unit"are Trafe f"ur $\Psi(y,t)$
Im Weiteren w"ahlen wir die unit"are Transformation

$$\Psi(y,t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}m\dot{\zeta}y}\Lambda(y,t) \ . \tag{2.15}$$

Durch Einsetzen in die Schr"odinger-Gleichung (2.14) und Ausrechnen der Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}m\dot{\zeta}y}(\mathrm{i}\hbar\dot{\Lambda}(y,t) - my\ddot{\zeta}\Lambda(y,t)) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}m\dot{\zeta}y}\left[\left(-m\dot{\zeta}^2\Lambda(y,t) + \mathrm{i}\hbar\dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\Lambda(y,t)\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2\Lambda(y,t) - \mathrm{i}\hbar\dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\Lambda(y,t) - \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Lambda(y,t)\right)\right. \\ &\qquad\left. + \frac{1}{2}m\omega_0^2(y+\zeta)^2 + (y+\zeta)S(t)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Indem aud beiden Seiten durch die Exponentialfunktion geteilt wird, erhalten wir eine Differentialgleichung f"ur $\Lambda(y,t)$. Au"serdem k"onnen durch geschicktes Umsortieren der Terme die Lagrange-Funktion $L(\zeta,\dot{\zeta},t)$

$$L(\zeta,\dot{\zeta},t) = \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2 + S(t)\zeta \tag{2.17}$$

sowie die Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators [**husimi**]

$$m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2\zeta - S(t) = 0 \tag{2.18}$$

f"ur die Verschiebung $\zeta(t)$ identifiziert werden. Die Differentialgleichung f"ur $\Lambda(y,t)$ ist

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Lambda}(y,t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 + (m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2y\zeta - S(t))y - L(\zeta,\dot{\zeta},t)\right]\Lambda(y,t)\ . \tag{2.19}$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, w"ahlen wir $\zeta(t)$ nun so, dass es gerade die klassische Bewegungsgleichung erf"ullt, der entsprechende Term in (2.19) also verschwindet. Nur noch die Lagrangge-Funktion unterscheidet diese Differential-Gleichung von der des ungetriebenen Oszillators.

3) Unit"are Trafe f"ur $\Lambda(y,t)$
Zuletzt w"ahlen wir den Ansatz

$$\Lambda(y,t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t L\,\mathrm{d}t'}\chi(y,t) \tag{2.20}$$

f"ur $\Lambda(y,t)$, um die Lagrange-Funktion in (2.19) zu elilminieren. Dadurch wird die Differential-Gleichung f"ur $\Lambda(y,t)$ bzw. die urspr"ungliche Schr"odinger-Gleichung auf einen ungetriebenen Oszillator f"ur $\chi(y,t)$ reduziert:

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\chi}(y,t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2\right]\chi(y,t)\ . \tag{2.21}$$

Das bedeutet die $\chi_n(y,t)$ sind die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Gesamtl"osung der Schro"dinger-Gleichung des getriebenen Oszillators ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}\Psi_n(x,t) &= \Psi_n(y = x-\zeta(t),t)\\ &= N_nH_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}(x-\zeta(t))\right)\mathrm{e}^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar}(x-\zeta(t))^2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(m\dot{\zeta}(t)(x-\zeta(t))-E_nt+\int_0^t L(\dot{\zeta},\zeta,t')\,\mathrm{d}t'\right)}\ ,\\ &\quad n\in\mathbb{N}_0\ .\end{aligned} \tag{2.22}$$

Dabei sind H_n die Hermit-Polynome, $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ die bekannten Eigenenergien des ungetriebenen Oszillators und

$$N_n = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \tag{2.23}$$

dessen Normierungsfaktoren. Die L”osungen des getriebenen Oszillators sind somit bez”uglich des Skalarproduktes (2.5) normiert.

Die L”osung entspricht damit einem ,um die klassiche L”osung $\zeta(t)$ verschobenen, ungetriebenen Oszillator, mit einer zus”atlichen zeit- und ortsabh’angigen komplexen Phase. Die treibende Kraft $S(t)$ geht in die klassiche L”osung $\zeta(t)$ und direkt, ”uber das Wirkungsintegral, in die komplexe Phase mit ein.

2.2.1 Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und Floquet-Moden $\Phi_n(x,t)$

Nach dem Floquet’schen-Theorem f”ur periodische Hamilton-Operatoren (2.3) kann die L”osung des getriebenen Oszillators geschrieben werden als

$$\Psi_n(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{u}}{\hbar}\epsilon_n t}\Phi_n(x,t) \ , \tag{2.24}$$

mit $\Phi_n(x,t) = \Phi_n(x,t+T)$. Nun k”onnen wir alle T-periodischen Terme als $\Phi_n(x,t)$ identifizieren, und alle Terme im Exponenten die linear in t sind als $\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon_n t$ [**haenggi**].

Alle Funktionen von $(x - \zeta(t))$ haben die Periode T, da $\zeta(T)$ als L”osung der klassichen Bewegungsgleichung mit $S(t) = S(t+T)$ die Periode T hat. Das Ergebnis des Integrals ”uber die Lagrange Funktion kann nur T-periodisch oder linear in t sein, deshalb sind die Quasienergien gegeben durch die E_n und den linearen Teil des Integrals:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{1}{T}\int_0^T L(\dot\zeta,\zeta,t)\,\mathrm{d}t \ . \tag{2.25}$$

Die Floquet-Moden sind demnach

$$\begin{aligned}&\Phi_n(x,t)\\ &= N_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}(x-\zeta(t))\right)\mathrm{e}^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar}(x-\zeta(t))^2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(m\dot\zeta(t)(x-\zeta(t))+\int_0^t L(\dot\zeta,\zeta,t')\,\mathrm{d}t-\frac{t}{T}\int_0^T L(\dot\zeta,\zeta,t)\,\mathrm{d}t\right)} \ .\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.2.2 Quasienergien f'ur eine sinusodiale Treibkraft

Hier wird ein Beispiel einer treibenden Kraft diskutiert [**haenggi**];

$$S(t) = S(t+T) = Asin(\omega t), \tag{2.27}$$

wobei $T = 2\pi/\omega$ ist. Setzen wir die allgemeine homogene L"osung gleich null, wird die L"osung $\zeta(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung (2.18) zu [**mads**]

$$\zeta(t) = \frac{A\sin(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \ . \tag{2.28}$$

Das Berechnen des Wirkungsintegrals und anschlie"sendes Identifizieren des linearen Anteils liefert die Quasienergien f"ur die gegebene Kraft:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} \ . \tag{2.29}$$

Wie zu erkennen streben die Quasienergien, und somit die mittlere Energie des Systems (2.10), gegen Unendlich, wenn sich die Treibfrequenz ω nahe der Eigenfrequentz des Oszillators ω_0 befindet. Da wir einen getriebenen Oszillator ohne D"ampfung betrachten, war dieses Ergebnis zu erwarten [**mads**].

b

3 Ergebnisse

3.1 Quasienergien des einzelnen getriebenen Oszillators f"ur eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$

Um die Quasienergien einer beliebigen periodisch treibenden Kraft auf elegante Weise zu bestimmen, und ohne ein Wirkungsintegral berechnen zu m"ussen, setzen wir eine komplexe Furier-Reihe an:

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t}, \; c_j = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{e}^{-ij\omega t}\,\mathrm{d}t \,. \tag{3.1}$$

Die c_j haben die Einheit einer Kraft.

F"ur $\zeta(t)$ w"ahlen wir jetzt ebenfalls einen Reihenansatz:

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} \,. \tag{3.2}$$

Wir betrachten wieder nur die inhomogene klassische Bewegungsgleichung und bestimmen die d_j, indem wir einsetzen und einen Koeffizientenvergleich der d_j und c_j machen. Es zeigt sich, dass

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{m(-j^2\omega^2 + \omega_0^2)} \mathrm{e}^{ij\omega t} \tag{3.3}$$

gilt, womit sich die Lagrange-Funktion (2.17) ergibt zu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2 + S(t)\zeta \\ &= \sum_j \sum_l \left[\frac{-\omega^2}{2m} \frac{jc_j}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \frac{lc_l}{-l^2\omega^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \frac{c_l}{-l^2\omega^2 + \omega_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \frac{c_j c_l}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+l)\omega t} \;,\; j, l \in \mathbb{Z} \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nun identifizieren wir alle Terme der Lagrange-Funktion, welche nach der Ausf"uhrung des Wirkungsintegrals linear in der Zeit t sind, ohne dieses explizit zu berechnen.

Denn wir wissen, dass die Exponentialterme, welche sich beim Integrieren nach der Zeit reproduzieren, nicht linear in t sein k"onnen. Daher werden nur die konstanten Terme, welche entstehen wenn die Exponentialterme wegfallen, eine lineare Abh"angigkeit aufweisen. Die Exponentialterme werden 1 wenn $j = -l$ ist. Infolgedessen wird die Doppelsumme, die bei der Quadrierung entstanden ist, wieder zur Einzelsumme. Wir fassen den linearen Teil des Wirkungsintegrals zusammen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T L\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_j \left[\frac{\omega^2}{2m}\frac{j^2 c_j c_{-j}}{(-j^2\omega^2+\omega_0^2)^2} - \frac{\omega_o^2}{2m}\frac{c_j c_{-j}}{(-j^2\omega^2+\omega_0^2)^2} + \frac{1}{m}\frac{c_j c_{-j}}{-j^2\omega^2+\omega_0^2}\right] \\
&= \sum_j \left[\frac{1}{2m}\frac{c_j c_{-j}(j^2\omega^2-\omega_0^2)}{(-j^2\omega^2+\omega_0^2)^2} + \frac{1}{m}\frac{c_j c_{-j}}{-j^2\omega^2+\omega_0^2}\right] \\
&= \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2\omega^2+\omega_0^2)} = \frac{c_0^2}{2m\omega_0^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^2}{m(-j^2\omega^2+\omega_0^2)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Quasienergien ϵ_n sind hiernach:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0(n+\frac{1}{2}) - \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2\omega^2+\omega_0^2)} \tag{3.6}$$

Interessanterweise kommt es in obiger Formel nicht nur bei $\omega = \omega_0$ zu einer Singularit"at, wie bei der Beispielkraft $S(t) = A\sin(\omega t)$, sondern bei allen $\omega = \omega_0/j$.

3.1.1 Beispiele f"ur S(t) dreieck rechteck delta

3.2 Zwei getriebene gekoppelte Oszillatoren

In diesem Teil der Arbeit wird mit Hilfe der aus (2.2) bekannten L"osung des einzelnen getrieben Oszillators, die Wellenfunktionen f"ur ein System hergeleitet, das aus zwei gekoppelten Oszillatoren x_1 und x_2 der gleichen Masse m besteht, von denen einer mit einer periodischen Kraft $S(t) = S(t+T)$ angetrieben wird. Die Potentialkonstanten k der beiden Oszillatoren sind ebenfalls identisch, die Koplungskonstante κ zwischen den Oszillatoren ist allerdings anders. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann direkt aus der klassichen Mechanik "ubernommen werden:

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2-x_1)^2 - S(t)x_1\ . \tag{3.7}$$

Es werden auch die Erwartungswerte f"ur den Ort $\langle x_{1,2}\rangle_{n.l}$ und den Impuls $\langle p_{1,2}\rangle_{n.l}$, genauso wie der Erwartungswert der Energie $\langle H\rangle_{n,l}$ und dessen zeitliches Mittel $\bar{H}_{n,l}$ berechnet und visualisiert.

Zur L"osung des Systems wird eine unit"are Koordinatentransformation eingef"uhrt, welche den Hamilton-Operator $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$ zu zwei in den neuen Koordinaten unabh"h"angigen Hamilton-Operatoren $H_+(x_+, p_+, t)$ und $H_-(x_-, p_-, t)$ mit effektiven Potentialkonstanten k_+, k_- entkoppelt. Dann ergeben sich die Wellenfunktionen leicht aus denen des einzelnen getriebenen Oszillators.

3.2.1 Schr"odinger-Gleichung mit unabh"angigen Hamilton-Operatoren

Liegt ein Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_i H_i(x_i, p_i, t) \ , \ H_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i \tag{3.8}$$

vor, f"uhrt der Ansatz

$$\Psi = \prod_i \Psi(x_i, p_i, t) \ , \ \Psi_i \in \mathcal{H}_i \tag{3.9}$$

auf unabh"angige Schr"odinger-Gleichungen f"ur die einzelnen Wellenfunktionen $\Psi_i(x_i, p_i, t)$ [**online quelle**]. Um dies schnell zu zeigen, schauen wir uns den Fall von zwei unabh"angigen Hamiltonions an:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \iff \Psi_2 H_1 \Psi_1 + \Psi_1 H_2 \Psi_2 = \mathrm{i}\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 \Psi_2 + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 \right) \ . \tag{3.10}$$

Da die Operatoren nur auf Funktionen wirken, die auf dem selben Raum operieren, kann man sie an der jewails anderen Funktion vorbei ziehen. Wenn wir weiterhin durch den $\Psi_1\Psi_2$ teilen, wird die Gleichung zu:

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_2 + \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_1 = \mathrm{i}\hbar \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1}{\Psi_1} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2}{\Psi_2} \right) \ . \tag{3.11}$$

Weil die linke und rechte Seite fur alle unabh"angigen x_1, p_1, x_2, p_2 gleich sein m"ussen, folgen die einzelnen Schr"odinger-Gleichungen:

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1}{\Psi_1} \ , \ \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_1 1 = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2}{\Psi_2} \ . \tag{3.12}$$

b

4 Zusammenfassung und Ausblick

A Ein Anhangskapitel

Hier könnte ein Anhang stehen, falls Sie z.B. Code, Konstruktionszeichnungen oder Ähnliches mit in die Arbeit bringen wollen. Im Normalfall stehen jedoch alle Ihre Resultate im Hauptteil der Bachelorarbeit und ein Anhang ist überflüssig.

Literatur

[1] A. Einstein. „A Generalization of the relativistic theory of Gravitation“. In: *Annals of Mathematics* 46.4 (1945), S. 578–584.

[2] Marc Ensenbach und Mark Trettin. *Das LATEX2-Sündenregister*. 2011. URL: `ftp://ftp.mpi-sb.mpg.de/pub/tex/mirror/ftp.dante.de/pub/tex/info/l2tabu/german/l2tabu.pdf`.

[3] *Git Bash - Download*. 2014. URL: `http://msysgit.github.io/`.

[4] *Gnu-Make Homepage*. 2014. URL: `http://www.gnu.org/software/make/`.

[5] Markus Kohm und Jens-Uwe Morawski. *KOMA -Script. ein wandelbares LaTeX-Paket*. 2013. URL: `http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/doc/scrguide.pdf`.

[6] Friedhelm Kuypers. *Klassische Mechanik*. 9. Auflage. Wiley-VCH, 2010.

[7] Philipp Lehman et al. *The Biblatex Package. Programmable Bibliographies and Citations*. 2014. URL: `ftp://ftp.fu-berlin.de/tex/CTAN/macros/latex/contrib/biblatex/doc/biblatex.pdf`.

[8] *Pep et al. Toolbox – LaTeX-Folien*. 2014. URL: `http://toolbox.pep-dortmund.org/files/archive/2014/latex.pdf`.

[9] D. Satas, Hrsg. *Handbook of pressure sensitive adhesive technology*. 2nd. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.

[10] *Texmaker. The universal LaTeX editor, Downloads*. 2014. URL: `http://www.xm1math.net/texmaker/download.html`.

[11] Joseph Wright. *siunitx - A comprehensive (SI) units package*. 2013. URL: `http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/siunitx/siunitx.pdf`.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel „LaTeX-Dokumentenklasse und Vorlage für Abschlussarbeiten an der TU Dortmund“ selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum	Unterschrift

Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

Ort, Datum	Unterschrift