

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

**L^AT_EX-Dokumentenklasse und Vorlage
für Abschlussarbeiten an der TU
Dortmund**

Maximilian Nöthe
geboren in Castrop-Rauxel

2014

Lehrstuhl für Experimentelle Physik V
Fakultät Physik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter:	Prof. Dr. Erstgutachter
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Zweitgutachter
Abgabedatum:	31. September 2015

Kurzfassung

Hier steht eine Kurzfassung der Arbeit in deutscher Sprache inklusive der Zusammenfassung der Ergebnisse. Zusammen mit der englischen Zusammenfassung muss sie auf diese Seite passen.

Abstract

The abstract is a short summary of the thesis in English, together with the German summary it has to fit on this page.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Floquet-Theorie	2
2.2	Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik	5
3	Ergebnisse	9
3.1	Quasienergien des einzelnen getriebenen Oszillators für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$	9
3.2	Zwei getriebene gekoppelte Oszillatoren	10
4	Zusammenfassung und Ausblick	13
A	Ein Anhangskapitel	14
	Literatur	15

1 Einleitung

Hier folgt eine kurze Einleitung in die Thematik der Bachelorarbeit. Die Einleitung muss kurz sein, damit die vorgegebene Gesamtlänge der Arbeit von 25 Seiten nicht überschritten wird. Die Beschränkung der Seitenzahl sollte man ernst nehmen, da Überschreitung zu Abzügen in der Note führen kann. Um der Längenbeschränkung zu genügen, darf auch nicht an der Schriftgröße, dem Zeilenabstand oder dem Satzspiegel (bedruckte Fläche der Seite) manipuliert werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Floquet-Theorie

Die Floquet-Theorie ist ein nützliches Werkzeug zur der Lösung von quantenmechanischen Systemen, welche durch einen zeitlich periodischen Hamilton-Operator

$$H(t) = H(t + T) , \quad (2.1)$$

mit der Periode T , beschrieben werden.

Das Floquet-Theorem besagt, dass bei einem solchen System, die Lösungen $\Psi_n(x, t)$ der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(x, t) = H(t) \Psi_n(x, t) \quad (2.2)$$

in Ortsdarstellung die Form

$$\Psi_n(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t} \Phi_n(x, t) \quad (2.3)$$

haben. Hierbei sind $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$ T -periodische Funktionen, die sogenannten Floquet-Moden, und ϵ_n die zugehörigen reellen Quasienergien, wobei diese Bezeichnungen gewählt wurden aufgrund der Parallele zu den Bloch-Moden und Quasiimpulsen des Bloch-Theorems [**haengi**]. Das Floquet-Theorem kann damit als "Bloch-Theorem in der Zeit" aufgefasst werden [**sherly**].

Durch Einsetzen dieses Ansatzes für die Wellenfunktionen (2.3) in die Schrödinger-Gleichung (2.2) erhalten wir

$$\epsilon_n \Phi_n(x, t) = \left(H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_n(x, t) = \mathcal{H}(t) \Phi_n(x, t) . \quad (2.4)$$

Die Lösung der Schrödinger Gleichung konnte somit auf die Lösung eines Eigenwertproblems für den neuen Operator $\mathcal{H}(t)$ zurückgeführt werden [**sherly**].

Die hermiteschen Operatoren $H(t)$ und $\mathcal{H}(t)$ operieren auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$. Dabei ist \mathcal{L}^2 der Raum der quadratintegriblen Funktionen und \mathcal{T} der Raum der auf $[0, T]$ integriblen Funktionen, da die Operatoren T -periodisch sind [**haenggi**]. Nach

dem Spektralsatz bilden die Eigenfunktionen $\Phi_n(x, t)$ von $\mathcal{H}(t)$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$, welche auf eine Orthonormalbasis normiert werden kann, wodurch wir das Skalarprodukt definieren können als:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x, t) \Phi_m(x, t) dx dt = \delta_{n,m} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1.1 Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie \bar{H}_n

Da $H(t)$ nicht zeitlich konstant ist, sind auch dessen Erwartungswerte, die Energien des Systems, zeitabhängig. Ein direkter Vorteil der Floquet-Theorie liegt darin, dass sich die durchschnittliche Energie

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Psi_n(x, t) | H(t) | \Psi_n(x, t) \rangle \rangle \quad (2.6)$$

des n -ten Zustandes $\Psi_n(x, t)$ leicht über die Quasienergien ϵ_n berechnen lässt, ohne explizit Integrale zu lösen.

Dazu ersetzen wir $H(t)$ mit Hilfe von (2.4). Außerdem unterscheiden sich die Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ und die Wellenfunktionen $\Psi_n(x, t)$ nur durch eine komplexe Phase, daher sind deren Skalarprodukte identisch. Weiterhin benutzen wir (2.4), dass die Floquet-Moden Eigenfunktionen von $\mathcal{H}(t)$ sind:

$$\begin{aligned} \bar{H}_n &= \langle \langle \Phi_n(x, t) | \mathcal{H}(t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle \\ &= \epsilon_n \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle \\ &= \epsilon_n + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nähere Betrachtung zeigt, dass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} \quad (2.8)$$

gilt [haenggi]. Da für ϵ_n und $\mathcal{H}(t)$ mit (2.4) eine Eigenwertgleichung vorliegt, kann das Hellman-Feynman-Theorem angewendet werden [hellmann online quelle]. Dieses gibt eine Verbindung zwischen den Ableitungen der Eigenwerte und der Ableitung des Hamilton-Operators an. In unserem Fall erhalten wir dadurch

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.9)$$

Damit folgt [haenggi]:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} . \quad (2.10)$$

2.2 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators der Masse m , welcher mit einer beliebigen aber periodischen äußeren Kraft $S(t) = S(t + T)$ getrieben wird, hat die Form

$$H(t) = H(t + T) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x, \quad (2.11)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Dieses System kann exakt gelöst werden, indem die Schrödinger-Gleichung durch einen Variablenwechsel und zwei unitäre Transformationen auf die bekannte Form des ungetriebenen Oszillators reduziert wird [haenggi].

1) Variablenwechsel

Für den neuen Ortsoperator bzw. die Ortsvariable wird eine zeitabhängige Verschiebung angesetzt:

$$x \rightarrow y = x - \zeta(t); \quad (2.12)$$

Wie zu erwarten verändert sich der Impuls(operator) durch die Translation im Ort nicht, da $\zeta(t)$ bei der Ortsableitung wegfällt.

Mit der neuen Zeitableitung der Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y(t), t) = i\hbar \dot{\Psi} - \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(y(t), t) \quad (2.13)$$

wird die Schrödinger-Gleichung zu:

$$i\hbar \dot{\Psi}(y, t) = \left[i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 (y + \zeta)^2 - (y + \zeta)S(t) \right] \Psi(y, t). \quad (2.14)$$

2) Unitäre Transformation für $\Psi(y, t)$

Im Weiteren wählen wir die unitäre Transformation

$$\Psi(y, t) = e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} \Lambda(y, t). \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung (2.14) und Ausrechnen der Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} & e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} (i\hbar \dot{\Lambda}(y, t) - m\dot{\zeta} \Lambda(y, t)) = \\ & e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} \left[\left(-m\dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) + i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) - i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Lambda(y, t) \right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 (y + \zeta)^2 + (y + \zeta)S(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Indem auf beiden Seiten durch die Exponentialfunktion geteilt wird, bekommen wir eine Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$. Außerdem können durch geschicktes Umsortieren der Terme die Lagrange-Funktion $L(\zeta, \dot{\zeta}, t)$

$$L(\zeta, \dot{\zeta}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2 + S(t)\zeta \quad (2.17)$$

sowie die Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators [husimi]

$$m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2\zeta - S(t) = 0 \quad (2.18)$$

für die Verschiebung $\zeta(t)$ identifiziert werden. Die Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$ ist folglich

$$i\hbar\dot{\Lambda}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2 + (m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2 y \zeta - S(t))y - L(\zeta, \dot{\zeta}, t) \right] \Lambda(y, t) . \quad (2.19)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, wählen wir $\zeta(t)$ nun so, dass es gerade die klassische Bewegungsgleichung erfüllt, der entsprechende Term in (2.19) also verschwindet. Nur noch die Lagrange-Funktion unterscheidet diese Differential-Gleichung von der des ungetriebenen Oszillators.

3) Unitäre Transformation für $\Lambda(y, t)$

Zuletzt wählen wir den Ansatz

$$\Lambda(y, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t L dt'} \chi(y, t) \quad (2.20)$$

für $\Lambda(y, t)$, um die Lagrange-Funktion in (2.19) zu eliminieren. Dadurch wird diese Differential-Gleichung für $\Lambda(y, t)$ bzw. die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung auf einen ungetriebenen Oszillator für $\chi(y, t)$ zurückgeführt:

$$i\hbar\dot{\chi}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2 \right] \chi(y, t) . \quad (2.21)$$

Das bedeutet die $\chi_n(y, t)$ sind die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Gesamtlösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, t) &= \Psi_n(y = x - \zeta(t), t) \\ &= N_n O_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) e^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) - E_n t + \int_0^t L(\zeta, \dot{\zeta}, t') dt')} , \\ &\quad n \in \mathbb{N}_0 . \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik

Dabei sind O_n die Hermit-Polynome, $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ die bekannten Eigenenergien der Zustände des ungetriebenen Oszillators und

$$N_n = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (2.23)$$

dessen Normierungsfaktoren. Die Lösungen des getriebenen Oszillators sind somit bezüglich des Skalarproduktes (2.5) normiert.

Die Lösung entspricht damit einem, um die klassische Lösung $\zeta(t)$ verschobenen, ungetriebenen Oszillator, mit einer zusätzlichen zeit- und ortsabhängigen komplexen Phase. Die treibende Kraft $S(t)$ geht in die klassische Lösung $\zeta(t)$ und direkt, über das Wirkungsintegral, in die komplexe Phase ein.

2.2.1 Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$

Nach dem Floquet-Theorem für periodische Hamilton-Operatoren (2.3) kann die Lösung des getriebenen Oszillators geschrieben werden als

$$\Psi_n(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t} \Phi_n(x, t), \quad (2.24)$$

mit $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$. Nun können wir alle T -periodischen Terme als $\Phi_n(x, t)$ identifizieren, und alle Terme im Exponenten, die linear in t sind, als $-i\epsilon_n t/\hbar$ [haenggi].

Alle Funktionen von $(x - \zeta(t))$ haben die Periode T , da $\zeta(T)$ als Lösung der klassischen Bewegungsgleichung mit $S(t) = S(t+T)$ die Periode T hat. Das Ergebnis des Integrals über die Lagrange-Funktion kann nur T -periodisch oder linear in t sein, deshalb sind die Quasienergien gegeben durch die E_n und den linearen Teil des Integrals:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{1}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt. \quad (2.25)$$

Die Floquet-Moden sind demnach

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, t) = N_n H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) e^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2} \\ \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt - \frac{t}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt \right)}, \quad (2.26) \\ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

2.2.2 Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft

Hier wird ein Beispiel einer treibenden Kraft diskutiert [haenggi]:

$$S(t) = S(t + T) = A \sin(\omega t), \quad (2.27)$$

wobei $T = 2\pi/\omega$ ist. Setzen wir die allgemeine homogene Lösung gleich null, wird die Lösung $\zeta(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung (2.18) zu [mads]

$$\zeta(t) = \frac{A \sin(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.28)$$

Das Berechnen des Wirkungsintegrals und anschließendes Identifizieren des linearen Anteils liefert die Quasienergien für die gegebene Kraft:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.29)$$

Wie zu erkennen streben die Quasienergien, und somit die mittlere Energie des Systems (2.10), gegen Unendlich, wenn sich die Treibfrequenz ω nahe der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 befindet. Da wir einen getriebenen Oszillator ohne Dämpfung betrachten, war dieses Ergebnis zu erwarten [mads].

b

3 Ergebnisse

3.1 Quasienergien des einzelnen getriebenen Oszillators für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$

Um die Quasienergien bei einer beliebigen periodisch treibenden Kraft auf elegante Weise zu bestimmen, und ohne ein Wirkungsintegral berechnen zu müssen, setzen wir eine komplexe Fourier-Reihe an:

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad c_j = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (3.1)$$

Die c_j haben die Einheit einer Kraft.

Für $\zeta(t)$ wählen wir jetzt ebenfalls einen Reihenansatz:

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{ij\omega t}. \quad (3.2)$$

Wir betrachten wieder nur die inhomogene klassische Bewegungsgleichung und bestimmen die d_j , indem wir einsetzen und einen Koeffizientenvergleich der d_j und c_j machen. Es zeigt sich, dass

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{m(-j^2\omega^2 + \omega_0^2)} e^{ij\omega t} \quad (3.3)$$

gilt, womit sich die Lagrange-Funktion (2.17) ergibt zu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta^2 + S(t) \zeta \\ &= \sum_j \sum_l \left[\frac{-\omega^2}{2m} \frac{j c_j}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \frac{l c_l}{-l^2 \omega^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \frac{c_l}{-l^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \frac{c_j c_l}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right] e^{i(j+l)\omega t}, \quad j, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nun identifizieren wir alle Terme der Lagrange-Funktion, welche nach der Ausführung des Wirkungsintegrals linear in der Zeit t sind, ohne dieses explizit zu

berechnen. Denn wir wissen, dass die Exponentialterme, welche sich beim Integrieren nach der Zeit reproduzieren, periodisch in der Zeit sind. Daher werden nur die konstanten Terme, welche entstehen wenn die Exponentialterme wegfallen, eine lineare Abhängigkeit aufweisen. Die Exponentialterme werden 1 wenn $j = -l$ ist. Infolgedessen wird die Doppelsumme, die bei der Quadrierung entstanden ist, wieder zur Einzelsumme. Wir fassen den linearen Teil des Wirkungsintegrals zusammen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_0^T L dt \\
 &= \sum_j \left[\frac{\omega^2}{2m} \frac{j^2 c_j c_{-j}}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j c_{-j}}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right] \\
 &= \sum_j \left[\frac{1}{2m} \frac{c_j c_{-j} (j^2 \omega^2 - \omega_0^2)}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right] \\
 &= \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)} = \frac{c_0^2}{2m\omega_0^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^2}{m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Quasienergien ϵ_n sind hiernach:

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)} . \tag{3.6}$$

Interessanterweise kommt es in obiger Formel nicht nur bei $\omega = \omega_0$ zu einer Singularität, wie bei der Beispieldkraft $S(t) = A \sin(\omega t)$, sondern bei allen $\omega = \omega_0/j$.

3.1.1 Beispiele für $S(t)$ dreieck rechteck delta

3.2 Zwei getriebene gekoppelte Oszillatoren

In diesem Teil der Arbeit wird mit Hilfe der aus (2.2) bekannten Lösung des einzelnen getriebenen Oszillators, die Wellenfunktionen für ein System hergeleitet, dass aus zwei gekoppelten Oszillatoren x_1 und x_2 der gleichen Masse m besteht, von denen einer mit der periodischen Kraft $S(t) = S(t+T)$ angetrieben wird. Die Potentialkonstanten k der beiden Oszillatoren sind ebenfalls identisch, die Kopplungskonstante κ zwischen den Oszillatoren ist allerdings anders. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann direkt aus der klassischen Mechanik übernommen werden:

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1)^2 - S(t) x_1 . \tag{3.7}$$

Es werden auch die Erwartungswerte für den Ort $\langle x_{1,2} \rangle_{n,l}$ und den Impuls $\langle p_{1,2} \rangle_{n,l}$, genauso wie der Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_{n,l}$ und dessen zeitliches Mittel $\bar{H}_{n,l}$ berechnet und visualisiert.

Zur Lösung des Systems wird eine unitäre Koordinatentransformation eingeführt, welche den Hamilton-Operator $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$ zu zwei in den neuen Koordinaten unabhängigen Hamilton-Operatoren $H_+(x_+, p_+, t)$ und $H_-(x_-, p_-, t)$ mit effektiven Potentialkonstanten k_+, k_- entkoppelt. Dann ergeben sich die Wellenfunktionen leicht aus denen des einzelnen getriebenen Oszillators.

3.2.1 Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren

Liegt ein Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_i H_i(x_i, p_i, t), \quad H_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \quad (3.8)$$

vor, führt der Ansatz

$$\Psi = \prod_i \Psi(x_i, p_i, t), \quad \Psi_i \in \mathcal{H}_i \quad (3.9)$$

auf unabhängige Schrödinger-Gleichungen für die einzelnen Wellenfunktionen $\Psi_i(x_i, p_i, t)$, sodass [\[online quelle\]](#)

$$\delta_{i,j} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i = H_j \Psi_i \quad (3.10)$$

erfüllt ist. Um dies schnell zu zeigen, schauen wir uns den Fall von zwei unabhängigen Operatoren an:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \iff \Psi_2 H_1 \Psi_1 + \Psi_1 H_2 \Psi_2 = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 \Psi_2 + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 \right). \quad (3.11)$$

Da die Operatoren nur auf Funktionen wirken, die auf dem selben Raum definiert sind, kann man sie an der jeweils anderen Funktion vorbei ziehen. Wenn wir weiterhin durch den Ansatz $\Psi_1 \Psi_2$ teilen, wird die Gleichung zu:

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = i\hbar \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1}{\Psi_1} + \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_2}{\Psi_2} \right). \quad (3.12)$$

Weil die linke und rechte Seite für alle unabhängigen x_1, p_1, x_2, p_2 gleich sein müssen, folgen die einzelnen Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 :

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1}{\Psi_1}, \quad \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_2}{\Psi_2}. \quad (3.13)$$

b

4 Zusammenfassung und Ausblick

A Ein Anhangskapitel

Hier könnte ein Anhang stehen, falls Sie z.B. Code, Konstruktionszeichnungen oder Ähnliches mit in die Arbeit bringen wollen. Im Normalfall stehen jedoch alle Ihre Resultate im Hauptteil der Bachelorarbeit und ein Anhang ist überflüssig.

Literatur

- [1] A. Einstein. „A Generalization of the relativistic theory of Gravitation“. In: *Annals of Mathematics* 46.4 (1945), S. 578–584.
- [2] Marc Ensenbach und Mark Trettin. *Das LATEX2-Sündenregister*. 2011. URL: <ftp://ftp.mpi-sb.mpg.de/pub/tex/mirror/ftp.dante.de/pub/tex/info/l2tabu/german/l2tabu.pdf>.
- [3] *Git Bash - Download*. 2014. URL: <http://msysgit.github.io/>.
- [4] *Gnu-Make Homepage*. 2014. URL: <http://www.gnu.org/software/make/>.
- [5] Markus Kohm und Jens-Uwe Morawski. *KOMA -Script. ein wandelbares LaTeX-Paket*. 2013. URL: <http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/doc/scrguide.pdf>.
- [6] Friedhelm Kuypers. *Klassische Mechanik*. 9. Auflage. Wiley-VCH, 2010.
- [7] Philipp Lehman et al. *The Biblalex Package. Programmable Bibliographies and Citations*. 2014. URL: <ftp://ftp.fu-berlin.de/tex/CTAN/macros/latex/contrib/biblalex/doc/biblalex.pdf>.
- [8] *Pep et al. Toolbox – LATEX-Folien*. 2014. URL: <http://toolbox.pep-dortmund.org/files/archive/2014/latex.pdf>.
- [9] D. Satas, Hrsg. *Handbook of pressure sensitive adhesive technology*. 2nd. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.
- [10] *Texmaker. The universal LaTeX editor, Downloads*. 2014. URL: <http://www.xmlmath.net/texmaker/download.html>.
- [11] Joseph Wright. *siunitx - A comprehensive (SI) units package*. 2013. URL: <http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/siunitx/siunitx.pdf>.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel „L^AT_EX-Dokumentenklasse und Vorlage für Abschlussarbeiten an der TU Dortmund“ selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

Ort, Datum

Unterschrift