

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science

# **Floquet-Theorie, Erwartungswerte und zweite Quantisierung von periodisch getriebenen quantenmechanischen Oszillatoren**

Ismael Abu-Nada  
geboren in Dortmund

2018

Lehrstuhl für Theoretische Physik II  
Fakultät Physik  
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Frithjof Anders  
Zweitgutachter:  
Abgabedatum: 14.08.2018

## **Kurzfassung**

Hier steht eine Kurzfassung der Arbeit in deutscher Sprache inklusive der Zusammenfassung der Ergebnisse. Zusammen mit der englischen Zusammenfassung muss sie auf diese Seite passen.

## **Abstract**

The abstract is a short summary of the thesis in English, together with the German summary it has to fit on this page.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Floquet-Theorie des getriebenen harmonischen Oszillators</b>	<b>2</b>
2.1	Grundlagen der Floquet-Theorie . . . . .	2
2.2	Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung . . . . .	4
2.3	Identifizierung der Quasienergien $\epsilon_n$ und der Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ . . . . .	6
2.3.1	Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft . . . . .	6
2.3.2	Quasienergien für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Berechnung von Erwartungswerten</b>	<b>8</b>
3.1	Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes . . . . .	8
3.2	Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses . . . . .	10
3.3	Heisenberg-Unschärferelation . . . . .	11
3.4	Zeitabhängiger Erwartungswert der Energie . . . . .	11
3.5	Durchschnittlicher Erwartungswert der Energie . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren</b>	<b>13</b>
4.1	Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren . . . . .	13
4.2	Unitäre Variablentransformation und allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung	14
4.3	Erwartungswerte . . . . .	17
4.3.1	Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes . . . . .	17
4.3.2	Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses . . . . .	18
4.3.3	Erwartungswerte der Energie . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Zweite Quantisierung</b>	<b>21</b>
5.1	Wellenfunktion . . . . .	21
5.2	Erwartungswerte . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Ein Anhangskapitel</b>	<b>26</b>
	<b>Literatur</b>	<b>27</b>

# 1 Einleitung

Nur wenige Systeme können in der Quantenmechanik exakt analytisch gelöst werden. Bei Systemen wie dem harmonischen Oszillator oder dem Wasserstoff-Atom, welche durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator beschrieben werden, wird zur Lösung der Schrödinger-Gleichung ein Produktansatz gewählt, wonach hauptsächlich eine Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator gelöst werden muss. Wenn der Hamilton-Operator allerdings zeitabhängig ist, funktioniert dieser Ansatz nicht und es muss im Allgemeinen numerisch im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie gerechnet werden. Werden jedoch Probleme betrachtet wie ein einzelnes Atom oder Spin in einem oszillierenden äußeren Feld ([2],[6]), bei denen der Hamilton-Operator periodisch in der Zeit ist, kann die Lösung unter Verwendung der Floquet-Theorie mit einem neuen Ansatz wieder auf eine Eigenwertgleichung gebracht werden, für einen neuen zeitabhängigen Operator.

In dieser Bachelorarbeit wird der periodisch getriebene harmonische Oszillator thematisiert. In Kap. 2 wird nach einer kurzen Einführung in die Floquet-Theorie die Lösung der Schrödinger-Gleichung für den getriebenen Oszillator in Ortsdarstellung dargestellt. Anhand der Wellenfunktionen wird das Floquet-Theorem bestätigt und im Weiteren die Quasienergien für eine beliebige Treibkraft und ein Beispiel einer sinusförmigen Treibkraft bestimmt. Daraufhin werden in Kap. 3 diverse Erwartungswerte des getriebenen Oszillators ermittelt. Die Ergebnisse aus Kap. 2 und 3 werden danach genutzt um die Lösung sowie die Erwartungswerte eines Systems aus zwei gekoppelten getriebenen harmonischen Oszillatoren zu bestimmen. Im letzten Teil der Arbeit (Kap. 5) werden die Zustände des einzelnen getriebenen Oszillators in der Besetzungszahldarstellung aufgestellt und erneut Erwartungswerte berechnet.

## 2 Floquet-Theorie des getriebenen harmonischen Oszillators

Der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators der Masse  $m$ , welcher mit einer beliebigen aber periodischen äußeren Kraft  $S(t) = S(t + T)$  getrieben wird, hat die Form

$$H(t) = H(t + T) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x, \quad (2.1)$$

mit  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  und der Potentialkonstante  $k$ .

Im Folgenden werden vorerst die allgemeinen Grundzüge der Floquet-Theorie erläutert, indem die entsprechenden Abschnitte aus [2] und [6] präsentiert werden.

Anschließend wird Schrödinger-Gleichung (2.1) für eine beliebige Treibkraft  $S(t)$  gelöst, wobei die Ergebnisse aus [2],[3] und [4] reproduziert werden. Weiterhin werden die Floquet-Moden  $\Phi_n(x, t)$  identifiziert, genauso wie die Quasienergien  $\epsilon_n$ , welche für eine beliebige periodische Treibkraft und explizit für eine sinusförmige Treibkraft bestimmt werden.

### 2.1 Grundlagen der Floquet-Theorie

Die Floquet-Theorie [2] ist ein nützliches Werkzeug zur der Lösung von quantenmechanischen Systemen, welche durch einen zeitlich periodischen Hamilton-Operator

$$H(t) = H(t + T), \quad (2.2)$$

mit der Periode  $T$ , beschrieben werden.

Das Floquet-Theorem besagt, dass bei einem solchen System, die Lösungen  $\Psi_n(x, t)$  der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(x, t) = H(t) \Psi_n(x, t) \quad (2.3)$$

in Ortsdarstellung die Form

$$\Psi_n(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t\right) \Phi_n(x, t) \quad (2.4)$$

haben. Hierbei sind  $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$   $T$ -periodische Funktionen, die sogenannten Floquet-Moden, und  $\epsilon_n$  die zugehörigen reellen Quasienergien, wobei diese Bezeichnungen gewählt wurden aufgrund der Parallele zu den Bloch-Moden und Quasiimpulsen des Bloch-Theorems [2]. Das Floquet-Theorem kann damit als "Bloch-Theorem in der Zeit" aufgefasst werden [6].

Durch Einsetzen dieses Ansatzes für die Wellenfunktionen (2.4) in die Schrödingergleichung (2.3) erhalten wir

$$\epsilon_n \Phi_n(x, t) = \left( H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_n(x, t) = \mathcal{H}(t) \Phi_n(x, t) . \quad (2.5)$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung kann somit auf die Lösung eines Eigenwertproblems für den neuen zeitabhängigen periodischen Operator  $\mathcal{H}(t)$  zurückgeführt werden [6]. Die hermiteschen Operatoren  $H(t)$  und  $\mathcal{H}(t)$  operieren daher auf dem Hilbertraum  $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$ . Dabei ist  $\mathcal{L}^2$  der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen und  $\mathcal{T}$  der Raum der auf  $[0, T]$  integrierbaren Funktionen, da die Operatoren  $T$ -periodisch sind [2]. Nach dem Spektralsatz bilden die Eigenfunktionen  $\Phi_n(x, t)$  von  $\mathcal{H}(t)$  eine Orthogonalbasis von  $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$ , welche auf eine Orthonormalbasis normiert werden kann, wodurch wir das Skalarprodukt definieren können als [2]:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x, t) \Phi_m(x, t) dx dt = \delta_{n,m} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

### Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie $\bar{H}_n$

Da  $H(t)$  nicht zeitlich konstant ist, sind auch dessen Erwartungswerte, die Energien des Systems, zeitabhängig. Ein direkter Vorteil der Floquet-Theorie liegt darin, dass sich die durchschnittliche Energie

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Psi_n(x, t) | H(t) | \Psi_n(x, t) \rangle \rangle \quad (2.7)$$

des  $n$ -ten Zustandes  $\Psi_n(x, t)$  leicht über die Quasienergien  $\epsilon_n$  berechnen lässt, ohne explizit Integrale zu lösen.

Dazu ersetzen wir  $H(t)$  mit Hilfe von (2.5). Außerdem unterscheiden sich die Floquet-Moden  $\Phi_n(x, t)$  und die Wellenfunktionen  $\Psi_n(x, t)$  nur durch eine komplexe Phase, daher sind deren Skalarprodukte identisch. Weiterhin benutzen wir (2.5), dass die Floquet-Moden Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}(t)$  sind:

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \mathcal{H}(t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle = \epsilon_n + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.8)$$

Eine nähere Betrachtung zeigt, dass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} , \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.9)$$

gilt [2]. Da für  $\epsilon_n$  und  $\mathcal{H}(t)$  mit (2.5) eine Eigenwertgleichung vorliegt, kann das Hellman-Feynman-Theorem angewendet werden [1]. Dieses gibt eine Verbindung zwischen den Ableitungen der Eigenwerte und der Ableitung des Hamilton-Operators an. In unserem Fall erhalten wir dadurch

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.10)$$

Damit folgt [2]:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} . \quad (2.11)$$

## 2.2 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Das System mit Hamilton-Operator (2.1) kann exakt gelöst werden, indem die Schrödinger-Gleichung durch einen Variablenwechsel und zwei unitäre Transformationen auf die bekannte Form des ungetriebenen Oszillators reduziert wird [2].

### 1) Unitäre Variablentransformation

Für den neuen Ortsoperator bzw. die Ortsvariable wird eine zeitabhängige Verschiebung angesetzt:

$$x \rightarrow y = x - \zeta(t) . \quad (2.12)$$

Wie zu erwarten verändert sich der Impuls(operator) durch die Translation im Ort nicht, da  $\zeta(t)$  bei der Ortsableitung wegfällt.

Mit der neuen Zeitableitung der Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y(t), t) = i\hbar \dot{\Psi} - \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(y(t), t) \quad (2.13)$$

wird die Schrödinger-Gleichung zu:

$$i\hbar \dot{\Psi}(y, t) = \left[ i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y + \zeta)^2 - (y + \zeta) S(t) \right] \Psi(y, t) . \quad (2.14)$$

### 2) Unitäre Transformation für $\Psi(y, t)$

Im Weiteren wählen wir die unitäre Transformation

$$\Psi(y, t) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta} y \right) \Lambda(y, t) . \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen in beide Seiten der Schrödinger-Gleichung (2.14) und Ausrechnen der Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \exp \left( \frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta} y \right) (i\hbar \dot{\Lambda}(y, t) - m y \ddot{\zeta} \Lambda(y, t)) = \\ & \exp \left( \frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta} y \right) \left[ \left( -m \dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) + i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) - i\hbar \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Lambda(y, t) \right) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y + \zeta)^2 + (y + \zeta) S(t) \right] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Indem auf beiden Seiten durch die Exponentialfunktion geteilt wird, bekommen wir eine Differentialgleichung für  $\Lambda(y, t)$ . Außerdem können durch Umsortieren der Terme die Lagrange-Funktion  $L(\zeta, \dot{\zeta}, t)$

$$L(\zeta, \dot{\zeta}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta^2 + S(t) \zeta , \quad (2.17)$$

sowie die Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators [3]

$$m \ddot{\zeta} + m \omega_0^2 \zeta - S(t) = 0 \quad (2.18)$$



für die Verschiebung  $\zeta(t)$  identifiziert werden. Die Differentialgleichung für  $\Lambda(y, t)$  ist folglich

$$i\hbar \dot{\Lambda}(y, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 + (m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2 y \zeta - S(t))y - L(\zeta, \dot{\zeta}, t) \right] \Lambda(y, t). \quad (2.19)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, wählen wir  $\zeta(t)$  nun so, dass es gerade die klassische Bewegungsgleichung erfüllt, der entsprechende Term in (2.19) also verschwindet. Nur noch die Lagrange-Funktion unterscheidet diese Differential-Gleichung von der des ungetriebenen Oszillators.

### 3) Unitäre Transformation für $\Lambda(y, t)$

Zuletzt wählen wir den Ansatz

$$\Lambda(y, t) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_0^t L \, dt' \right) \chi(y, t) \quad (2.20)$$

für  $\Lambda(y, t)$ , um die Lagrange-Funktion in Gleichung (2.19) zu eliminieren. Dadurch wird die Differential-Gleichung für  $\Lambda(y, t)$  bzw. die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung auf einen ungetriebenen Oszillator für  $\chi(y, t)$  zurückgeführt:

$$i\hbar \dot{\chi}(y, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \right] \chi(y, t). \quad (2.21)$$

Folglich sind die  $\chi_n(y, t)$  die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Gesamtlösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, t) &= \Psi_n(y = x - \zeta(t), t) \\ &= N_n H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) \exp \left[ \frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2 \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) - E_n t + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') \, dt' \right) \right], \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei sind  $H_n$  die Hermiteschen Polynome,  $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$  die bekannten Eigenenergien der Zustände des ungetriebenen Oszillators und

$$N_n = \left( \frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (2.23)$$

dessen Normierungsfaktoren. Die Lösungen des getriebenen Oszillators sind auf  $x \in (-\infty, \infty)$  normiert und somit ist ebenfalls Gleichung (2.6) mit dem Skalarprodukt erfüllt.

Die Lösung entspricht damit einem, um die klassische Lösung  $\zeta(t)$  verschobenen, ungetriebenen Oszillator, mit einer zusätzlichen zeit- und ortsabhängigen komplexen Phase. Die treibende Kraft  $S(t)$  geht in die klassische Lösung  $\zeta(t)$  und, über das Wirkungsintegral, in die komplexe Phase ein.

## 2.3 Identifizierung der Quasienergien $\epsilon_n$ und der Floquet-Moden

$$\Phi_n(x, t)$$

Nach dem Floquet-Theorem für periodische Hamilton-Operatoren (2.4) kann die Lösung des getriebenen Oszillators geschrieben werden als

$$\Psi_n(x, t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\epsilon_n t\right) \Phi_n(x, t), \quad (2.24)$$

mit  $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t+T)$ . Nun können wir alle  $T$ -periodischen Terme als  $\Phi_n(x, t)$  identifizieren, und alle Terme im Exponenten, die linear in  $t$  sind, als  $-i\epsilon_n t/\hbar$  [2].

Alle Funktionen von  $(x - \zeta(t))$  haben die Periode  $T$ , da  $\zeta(T)$  als Lösung der klassischen Bewegungsgleichung mit  $S(t) = S(t+T)$  die Periode  $T$  hat. Das Ergebnis des Integrals über die Lagrange-Funktion kann nur  $T$ -periodisch oder linear in  $t$  sein, deshalb sind die Quasienergien gegeben durch die  $E_n$  und den linearen Teil des Integrals [2]:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{1}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt. \quad (2.25)$$

Die Floquet-Moden sind demnach

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, t) = N_n H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) \exp \left[ \frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2 \right] \\ \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt - \frac{t}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt \right) \right], \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.3.1 Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft

Im Folgenden werden die Quasienergien  $\epsilon_n$  für eine sinusoidale Treibkraft

$$S(t) = S(t+T) = A \sin(\omega t) \quad (2.27)$$

diskutiert, wobei  $T = 2\pi/\omega$  ist. Setzen wir die allgemeine homogene Lösung gleich null, wird die Lösung  $\zeta(t)$  der klassischen Bewegungsgleichung (2.18) zu [4]

$$\zeta(t) = \frac{A \sin(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.28)$$

Das Berechnen des Wirkungsintegrals und anschließendes Identifizieren des linearen Anteils liefert die Quasienergien für die gegebene Kraft [4]:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.29)$$

Wie zu erkennen streben die Quasienergien, und somit die mittlere Energie des Systems (3.19), gegen Unendlich, wenn sich die Treibfrequenz  $\omega$  nahe der Eigenfrequenz des Oszillators  $\omega_0$  befindet. Dieses Ergebnis entspricht der Erwartung, da wir einen getriebenen Oszillator ohne Dämpfung betrachten.

### 2.3.2 Quasienergien für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$

Um die Quasienergien bei einer beliebigen periodisch treibenden Kraft auf elegante Weise zu bestimmen, setzen wir eine komplexe Fourier-Reihe an:

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad c_j = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (2.30)$$

Die  $c_j$  sind die Fourier-Koeffizienten mit der Einheit einer Kraft und  $i$  ist die imaginäre Einheit. Für  $\zeta(t)$  wählen wir jetzt den gleichen Reihenansatz mit anderen Koeffizienten  $d_j$ . Wir betrachten wieder nur die inhomogene klassische Bewegungsgleichung und bestimmen die  $d_j$ , indem wir einsetzen und einen Koeffizientenvergleich der  $d_j$  und  $c_j$  machen. Es zeigt sich, dass

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{m(\omega_0^2 - j^2\omega^2)} e^{ij\omega t} \quad (2.31)$$

gilt, womit sich die Lagrange-Funktion (2.17) ergibt zu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta^2 + S(t) \zeta \\ &= \sum_j \sum_l \left[ \frac{-\omega^2}{2m} \frac{j c_j}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \frac{l c_l}{\omega_0^2 - l^2 \omega^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \frac{c_l}{\omega_0^2 - l^2 \omega^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \frac{c_j c_l}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \right] e^{i(j+l)\omega t}, \quad j, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir den linearen Teil des Wirkungsintegrals nach (2.25). Die einzige Zeitabhängigkeit ist in der Exponentialfunktion, deshalb betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(j+l)\omega t} dt = \begin{cases} 1, & l = -j \\ \frac{1}{T} \frac{1}{i(j+l)\omega} (e^{i(j+l)\omega T} - 1) = 0, & \forall j, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.32)$$

Es gibt nur für  $j = -l$  einen Beitrag zum linearen Teil, weswegen die Doppelsumme, die bei der Quadrierung entstanden ist, wieder zu Einzelsumme wird. Hiermit fassen wir den linearen Teil des Wirkungsintegrals zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T L dt &= \sum_j \left[ \frac{\omega^2}{2m} \frac{j^2 c_j c_{-j}}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j c_{-j}}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{\omega_0^2 - j^2 \omega^2} \right] \\ &= \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} = \frac{c_0^2}{2m\omega_0^2} + \sum_j \frac{c_j^2}{m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Quasienergien  $\epsilon_n$  sind hiernach:

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) - \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)}. \quad (2.34)$$

Interessanterweise kommt es in obiger Formel nicht nur bei  $\omega = \omega_0$  zu einer Singularität, wie bei der Beispielkraft  $S(t) = A \sin(\omega t)$ , sondern bei allen  $\omega = \omega_0/j$ .

### 3 Berechnung von Erwartungswerten

In diesem Abschnitt werden die zeitabhängigen Erwartungswerte des periodisch getriebenen Oszillators für den Impuls, den Ort und die Energie berechnet, sowie das zeitliche Mittel des Erwartungswertes der Energie. Dabei werden die Erwartungswerte für alle Zustände  $\Psi_n(x, t)$  auf die bekannten Erwartungswerte des Standard-Oszillators zurückgeführt, womit wir eine Art "2. Quantisierung für die Erwartungswerte" haben.

Die Treibkraft  $S(t) = S(t + T)$  ist nicht weiter festgelegt und geht stets über die klassische Lösung  $\zeta(t)$  (2.18) in die Erwartungswerte ein.

Um die Erwartungswerte des getriebenen Oszillators zu erhalten, werden wir dessen Berechnung auf die Berechnung der bekannten Erwartungswerte des ungetriebenen Oszillators zurückführen. Dafür nutzen wir aus, dass die Wellenfunktionen und die Floquet-Moden nach (2.22) und (2.26) einem um  $\zeta(t)$  verschobenen ungetriebenen Oszillator mit einer zusätzlichen komplexen Phase entsprechen. Da eine komplexe Phase beim Bilden des Betrages wegfällt, gilt

$$\Psi_n^*(x, t)\Psi_n(x, t) = |\Psi_n(x, t)|^2 = |\Phi_n(x, t)|^2 = |\Psi_{n,\text{ung}}(x - \zeta(t), t)|^2 = |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2, \quad (3.1)$$

wobei  $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$  die Zustände des ungetriebenen Oszillators bezeichnen.

Bei dem Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$  ist eine konstante Verschiebung der Variable irrelevant. Außerdem sind die  $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$  auf dem Raum normiert, daher sind auch die  $\Psi_n(x, t)$  auf  $x \in (-\infty, \infty)$  normiert, wie bereits am Ende von Kapitel 2.2 erwähnt.

Eine Visualisierung von Erwartungswerten folgt in Kapitel (4.3), weil es sich bei den Erwartungswerten der zwei gekoppelten Oszillatoren genau um die Summe aus den Erwartungswerten von zwei gesonderten Oszillatoren handelt, wie sich dort zeigen wird.

#### 3.1 Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes

Zuerst betrachten wir den Erwartungswert  $\langle x \rangle_n$  des Ortsoperators  $x$  für den  $n$ -ten Zustand  $\Psi_n(x, t)$  des getriebenen Oszillators, welcher per Definition gegeben ist durch

$$\langle x \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t)x\Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x dx. \quad (3.2)$$

Mit der Substitution  $y = x - \zeta(t)$  und unter Verwendung von (3.1) und der Normierung der ungetriebenen Oszillator-Funktionen gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(x - \zeta(t), t)|^2 x dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2 (y + \zeta(t)) dy \\ &= \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \zeta(t) = \zeta(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da die Erwartungswerte  $\langle y \rangle_{n,\text{ung}}$  für den Ort des ungetriebenen Oszillators verschwinden, ist der Erwartungswert jedes Zustandes des getriebenen Oszillators genau  $\zeta(t)$ .

Das bedeutet, der Erwartungswert  $\langle x \rangle_n$  für den Ort eines beliebigen Zustandes des quantenmechanischen getriebenen Oszillators entspricht genau der Lösung  $\zeta(t)$  der Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen Oszillators. Der Erwartungswert hat deshalb sehr große Amplituden, wenn die Treibfrequenz  $\omega$  von  $S(t)$  in der Nähe der Eigenfrequenz des Systems  $\omega_0$  liegt (2.31), was der klassischen Anschauung entspricht, weil wir ein ungedämpftes System betrachten. Der Erwartungswert des ungetriebenen Oszillators, welcher im Ursprung liegt, ist somit zeitabhängig periodisch um  $\zeta(t) = \zeta(t + T)$  verschoben, mit  $T = 2\pi/\omega_0$ . Dies entspricht dem Ergebnis, wie es auch bei einer konstanten Verschiebung der Ortsvariable/-operator  $x$  erhalten wird, z.B. beim Oszillator im zusätzlichen konstanten elektrischen Feld, nur das die Verschiebung hier die zeitabhängige klassische Lösung ist.

Da  $\langle x \rangle_n = \zeta(t)$  die klassische Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\langle x \rangle}_n + m\omega_0^2 \langle x \rangle_n - S(t) = 0 \quad (3.4)$$

erfüllt, ist ergänzend das Ehrenfest-Theorem bestätigt.

Für den Erwartungswert von  $x^2$  ergibt sich komplett analog

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)|^2 (y + \zeta(t))^2 dy \\ &= \langle y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + 2\zeta(t) \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \zeta^2(t) = s^2(2n + 1) + \zeta^2(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

zusammen mit der charakteristischen Länge des ungetriebenen Oszillators

$$s = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}. \quad (3.6)$$

Der Erwartungswert ist nun um  $\zeta^2(t)$  verschoben.

Insgesamt können alle Erwartungswerte  $\langle x^m \rangle_n$  auf diese Art mit den bekannten ungetriebenen Erwartungswerten berechnet werden. Ab  $\langle x^3 \rangle_n$  kommt es wegen  $(y + \zeta(t))^3$  aber im Allgemeinen nicht nur zu Verschiebungen bzw. zusätzlichen  $\zeta(t)$ -Termen, mit demselben Exponenten wie die ungetriebenen Erwartungswerte, weshalb wir den Erwartungswert  $\langle x^m \rangle_n$  nicht einfacher schreiben können als den linearen Erwartungswert des Klammerausdruckes mit dem binomischen Lehrsatz zu vereinfachen:

$$\langle x^m \rangle_n = \langle (y + \zeta(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \langle y^{m-j} \rangle_{n,\text{ung}} \zeta^j(t). \quad (3.7)$$

In obiger Formel ist

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (3.8)$$

der Binomial-Koeffizient.

Hiernach setzt sich der Erwartungswert  $\langle x^m \rangle_n$  aus allen  $\zeta(t) \dots \zeta^m(t)$  zusammen, die mit dem Binomial-Koeffizienten und der jeweiligen Potenz von  $\langle y \rangle_{n,\text{ung}}$  gewichtet werden.

### 3.2 Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses

Um den Erwartungswert  $\langle p \rangle_n$  des Impulsoperators für den Zustand  $\Psi_n(x, t)$  des getriebenen Oszillators zu ermitteln, nutzen wir gleichermaßen die Beziehung (3.1) und unterdessen ein geschicktes Anwenden der Produktregel, um das Problem erneut auf den ungetriebenen Oszillator zu beschränken.

Wieder wählen wir den Variablenwechsel zur neuen Variable  $y = x - \zeta(t)$ , weil der Impulsoperator  $p = p_x$  in der neuen Koordinate identisch ist, wie schon am Anfang von Kapitel 2.2 angedeutet, was sich mit der Kettenregel zeigen lässt:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \cdot 1, \quad \text{d.h.} \quad p_x = p_y. \quad (3.9)$$

Weiterhin können wir den  $y$ -unabhängigen Teil der komplexen Phasen in den Wellenfunktionen (2.22) sofort am Operator vorbeiziehen und zu 1 zusammenfassen, daher schreiben wir  $\langle p \rangle_n$  als

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t) p \Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(y + \zeta(t), t) p_y \Psi_n(y + \zeta(t), t) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 + \frac{+i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) p_y N_n H_n(ay) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 + \frac{+i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) dy, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei der Faktor im Argument der Hermit-Polynome (2.22) als  $a$  abgekürzt wird. Mit der Produktregel spalten wir die Anwendung des Impulsoperators auf in die Anwendung auf die ungetriebene Oszillatorfunktion (in der neuen Koordinate  $y$ ) und die Anwendung auf die verbleibende komplexe Phase:

$$\begin{aligned} &p_y N_n H_n(y) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2 + \frac{+i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) \\ &= \exp\left(\frac{+i}{\hbar} m\dot{\zeta}(t)y\right) (p_y + m\dot{\zeta}(t)) N_n H_n(y) \exp\left(\frac{-m\omega_0}{2\hbar} y^2\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hiernach haben wir effektiv den Impulsoperator an der  $y$ -abhängigen Phase vorbeigezogen. Damit ist es möglich diese verbliebenen Phasen in (3.10) ebenso zu 1 zu vereinfachen. Es verbleiben noch die Anwendung des Impulsoperators auf die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Multiplikation dieser mit dem ortsunabhängigen Term  $\dot{\zeta}(t)$ . Zusammen mit dem übrigen linken Teil aus (3.11), welcher nach dem Wegfallen der komplexen Phase jetzt auch der ungetriebenen Wellenfunktion entspricht, ergeben sich dadurch die Erwartungswerte für  $p_y$  und den Term  $m\dot{\zeta}(t)$ .

Schließlich können wir den Erwartungswert für den Impuls in Abhängigkeit der bekannten Erwartungswerte des Standard-Oszillators hinschreiben:

$$\langle p \rangle_n = \langle p_y \rangle_{n, \text{ung}} + m\dot{\zeta}(t) = m\dot{\zeta}(t). \quad (3.12)$$

Wieder erfüllt der Erwartungswert die Bewegungsgleichung des klassischen Oszillators:

$$\langle \ddot{p} \rangle_n + \omega_0^2 \langle p \rangle_n - \dot{S}(t) = 0. \quad (3.13)$$

Um darüber hinaus den Erwartungswert  $\langle p^m \rangle_n$  für einen beliebigen Exponenten  $m \in \mathbb{N}$  zu evaluieren, muss in Formel (3.11)  $m$ -mal die Produktregel angewandt werden. Da sich die komplexe Phase beim Ableiten reproduziert und jedesmal ein ortsunabhängiger Term übrig bleibt, gilt für diesen Erwartungswert Gleiches wie für den Erwartungswert  $\langle x^m \rangle_n$ :

$$\langle p^m \rangle_n = \langle (p_y + m\dot{\zeta}(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \langle p_y^{m-j} \rangle_{n,\text{ung}} (m\dot{\zeta}(t))^j. \quad (3.14)$$

Speziell für  $\langle p^2 \rangle_n$  gilt:

$$\langle p^2 \rangle_n = \langle p_y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + 2m\dot{\zeta}(t) \langle p_y \rangle_{n,\text{ung}} + (m\dot{\zeta}(t))^2 = m^2\omega_0^2 s^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t). \quad (3.15)$$

### 3.3 Heisenberg-Unschärferelation

Mit den zuvor errechneten Erwartungswerten  $\langle x \rangle_n, \langle x^2 \rangle_n, \langle p \rangle_n, \langle p^2 \rangle_n$  wird hier die Unschärfe des periodisch getriebenen Oszillators aufgestellt. Diese ist

$$\begin{aligned} \Delta x_n \Delta p_n &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2} \sqrt{\langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2} \\ &= \sqrt{s^2(2n+1) + \dot{\zeta}^2(t) - \dot{\zeta}^2(t)} \sqrt{m^2\omega_0^2 s^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t) - m^2\dot{\zeta}^2(t)} \\ &= \frac{\hbar}{2}(2n+1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Unschärfe ist also gleich der des ungetriebenen Oszillators, welche zeitunabhängig ist und für den Grundzustand  $n = 0$  minimal ist.

Dieses Ergebnis ist sinnvoll in Anbetracht der Tatsache, dass die (zeitabhängige) Verschiebung der Wellenfunktionen im Raum  $\zeta(t)$  (2.22) die Unschärfe nicht ändern sollte. Die Wellenfunktionen haben allerdings noch den weiteren Unterschied der orts- und zeitabhängigen komplexen Phase, verglichen mit den Wellenfunktionen des Standard-Oszillators. Diese spielt zwar keine Rolle bei den Erwartungswerten für den Ort, bei den Impulserwartungswerten aber schon. Dennoch war zu erwarten, dass sich auch beim Impuls eine Standardabweichung  $\Delta p_n$  wie beim ungetriebenen Oszillator ergibt, so wie bei  $\Delta x_n$ , da  $\langle p \rangle_n$  im Wesentlichen die zeitliche Ableitung von  $\langle x \rangle_n$  ist. Demnach folgte die gleiche Unschärfe.

### 3.4 Zeitabhängiger Erwartungswert der Energie

Mit denselben Erwartungswerten für den Ort und den Impuls, wie sie bei der Heisenberg-Unschärferelation von Nöten sind, wird im Folgenden der normale Erwartungswert der Energie

bzw. des Hamilton-Operators  $\langle H(t) \rangle_n$  aufgestellt, es muss nur die Linearität des Erwartungswertes verwendet werden:

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle_n &= \left\langle \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x \right\rangle_n = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle_n + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle_n - S(t) \langle x \rangle_n \\ &= \frac{1}{2m} \langle p_y^2 \rangle_{n,\text{ung}} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle y \rangle_{n,\text{ung}} + \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \zeta^2(t) - S(t)\zeta(t) \\ &= \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) + m\dot{\zeta}^2(t) = E_n - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) + m\dot{\zeta}^2(t) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wir finden wieder den Erwartungswert des ungetriebenen Oszillators, die  $E_n$ , mit einer zeitabhängigen Verschiebung, in welcher die Lagrange-Funktion des klassischen Problems (2.17) mit dem Restterm identifiziert werden kann.

### 3.5 Durchschnittlicher Erwartungswert der Energie

Hier wird der zeitlich, über eine Periode  $T$ , gemittelte Erwartungswert  $\overline{H}_n$  mittels Formel (3.19) für eine beliebige Treibkraft bestimmt, indem wir die Quasienergien  $\epsilon_n$  benutzen, welche wir in Kapitel 2.3.2 für eine allgemeine periodische Treibkraft  $S(t)$ , in Abhängigkeit deren Fourier-Koeffizienten, bestimmt haben.

Unter der Annahme, dass die Summe in  $\epsilon_n$  (2.3.2) konvergiert, weil es sich im Wesentlichen um die Summe über  $1/j^2$  handelt, leiten wir nach  $\omega$  ab, indem wir die Ableitung und Summe vertauschen, dann haben wir:

$$\overline{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon_n = E_n - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{c_j c_{-j}}{2m(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} \left( 1 - \frac{2j^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - j^2 \omega^2)} \right) \right] . \quad (3.18)$$

Für den expliziten Fall der Sinus-Treibkraft  $S(t) = A \sin(\omega t)$  folgt:

$$\overline{H}_n = E_n - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) . \quad (3.19)$$

Für  $\omega_0^2 > \omega^2$  erhalten wir in diesem Beispiel demnach einen Anstieg des Energiemittelwertes gegenüber den Quasienergien, andernfalls eine Absenkung.



## 4 Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren

In diesem Teil der Arbeit werden mit Hilfe der aus (2.2) bekannten Lösung des einzelnen getriebenen Oszillators die Wellenfunktionen für ein System hergeleitet, das aus zwei gekoppelten Oszillatoren  $x_1$  und  $x_2$  der gleichen Masse  $m$  besteht, von denen einer mit der periodischen Kraft  $S(t) = S(t+T)$  angetrieben wird. Die Potentialkonstanten  $k$  der beiden Oszillatoren sind ebenfalls identisch, aber im Allgemeinen unterschiedlich zur Kopplungskonstante  $\kappa$  zwischen den Oszillatoren. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann direkt aus der Hamilton-Funktion der klassischen Mechanik übernommen werden:

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1 . \quad (4.1)$$

Es werden auch die Erwartungswerte für den Ort  $\langle x_{1,2} \rangle_{n,l}$  und den Impuls  $\langle p_{1,2} \rangle_{n,l}$ , genauso wie der Erwartungswert der Energie  $\langle H \rangle_{n,l}$  und dessen zeitliches Mittel  $\bar{H}_{n,l}$  berechnet, indem auf die bekannten Erwartungswerte des einzelnen getriebenen Oszillators zurückgeführt wird. Die Erwartungswerte werden auch graphisch dargestellt.

Zur Lösung des Systems wird eine unitäre Koordinatentransformation eingeführt, welche den Hamilton-Operator  $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$  zu zwei in den neuen Koordinaten unabhängigen Hamilton-Operatoren  $H_+(x_+, p_+, t)$  und  $H_-(x_-, p_-, t)$  mit effektiven Potentialkonstanten  $k_+, k_-$  entkoppelt, welche je einen einzelnen (getriebenen) Oszillator beschreiben. Dann ergeben sich die Wellenfunktionen leicht aus denen des einzelnen Oszillators.

### 4.1 Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren

Liegt ein Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_i H_i(x_i, p_i, t) , \quad H_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \quad (4.2)$$

vor, führt der Ansatz

$$\Psi = \prod_i \Psi(x_i, p_i, t) , \quad \Psi_i \in \mathcal{H}_i \quad (4.3)$$

auf unabhängige Schrödinger-Gleichungen für die einzelnen Wellenfunktionen  $\Psi_i(x_i, p_i, t)$ , sodass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i = \delta_{i,j} H_j \Psi_i \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Um dies schnell zu zeigen, schauen wir uns den Fall von zwei unabhängigen Operatoren an:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \iff \Psi_2 H_1 \Psi_1 + \Psi_1 H_2 \Psi_2 = i\hbar \left( \Psi_1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 + \Psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 \right) . \quad (4.5)$$

Da die Operatoren nur auf Funktionen wirken, die auf dem selben Raum definiert sind, kann man sie an der jeweils anderen Funktion vorbei ziehen. Wenn wir weiterhin durch unseren Ansatz  $\Psi_1 \Psi_2$  teilen, wird die Gleichung zu:

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = i\hbar \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial t \Psi_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t \Psi_2} \right). \quad (4.6)$$

Weil die linke und rechte Seite für alle unabhängigen  $x_1, p_1, x_2, p_2$  gleich sein müssen, folgen die einzelnen Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$ :

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 = i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t \Psi_1}, \quad \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t \Psi_2}. \quad (4.7)$$

Wie an diesem Beispiel zu sehen, gilt Gleiches auch für beliebig viele unabhängige Hamilton-Operatoren, womit (4.4) erfüllt ist und wir wissen, dass die Lösung  $\Psi$  die Form (4.3) hat.

## 4.2 Unitäre Variablentransformation und allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Um für unseren Hamilton-Operator  $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$  (4.1) eine entkoppelte Form  $H(x_+, x_-, p_+, p_-, t) = H_+(x_+, p_+, t) + H_-(x_-, p_-, t)$  nach (4.2) in den neuen Koordinaten/Variablen  $x_+, x_-, p_+, p_-$  zu erhalten, wählen wir die unitären Koordinationstransformationen [5]

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_1), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \quad (4.8)$$

welche aus den Eigenmoden/Eigenvektoren des klassischen Problems folgen. Dessen Normierung stellt sicher, dass die Transformation unitär ist. Durch einfaches Umstellen folgen  $x_1$  und  $x_2$  in Abhängigkeit der neuen Koordinaten  $x_+$  und  $x_-$ :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ + x_-). \quad (4.9)$$

Indem wir  $x_1$  und  $x_2$  so im Hamilton-Operator (4.1) ersetzen, formen wir den ortsabhängigen Teil um zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1)^2 - S(t) x_1 = \\ \frac{1}{2} k x_+^2 + \frac{1}{2} (k + 2\kappa) x_-^2 - S(t) \frac{1}{\sqrt{2}} (x_+ - x_-). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es tauchen nun keine Kopplungsterme  $x_+ x_-$  mehr auf, wie es in den alten Koordinaten der Fall war.

Jetzt betrachten wir die neuen Impulse und überprüfen, dass es durch den Variablenwechsel nicht zu neuen Kopplungstermen in den  $p_+, p_-$  kommt. Mit der Kettenregel folgt für die Ableitungen der Impulsoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{\pm}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad (4.11)$$

weshalb für die Impulsoperatoren identisch zu den Ortsoperatoren gilt

$$p_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_1), \quad p_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_1). \quad (4.12)$$

Wir setzen erneut in unseren Hamilton-Operator (4.1) ein und erhalten für den impulsabhängigen Teil

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_+^2}{2m} + \frac{p_-^2}{2m}. \quad (4.13)$$

Der gesamte Hamilton-Operator der zwei gekoppelten getriebenen Oszillatoren ist in den neuen Variablen folglich

$$\begin{aligned} H(t) &= H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1 \\ &= \frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_+^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}S(t)x_+ + \frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}(k+2\kappa)x_-^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}S(t)x_- \\ &= \frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2}k_+x_+^2 - S_+(t)x_+ + \frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}k_-x_-^2 - S_-(t)x_- \\ &= H_+(x_+, p_+, t) + H_-(x_-, p_-, t), \quad H_\pm : \mathcal{H}_\pm \rightarrow \mathcal{H}_\pm. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Hamilton-Operator in den neuen Variablen  $x_\pm/p_\pm$  beschreibt demnach ein System aus zwei unabhängigen getriebenen harmonischen Oszillatoren mit neuen Potentialkonstanten  $k_+ = k$  und  $k_- = k + 2\kappa$  bzw. neuen Eigenfrequenzen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k+2\kappa}{m}}. \quad (4.15)$$

Die beiden Oszillatoren werden, wegen dem verschiedenen Vorzeichen von  $S_+(t) = S_+(t+T)$  und  $S_-(t) = S_-(t+T)$ , periodisch aber phasenversetzt um  $\pi$  mit der ursprünglichen Treibkraft  $S(t)$  angetrieben, wobei diese mit dem Faktor  $1/\sqrt{2}$  skaliert wird.

Betrachten wir den Fall, dass beide Oszillatoren  $x_1$  und  $x_2$  des Systems in den alten Koordinaten getrieben sind, und zwar genau wie durch die neuen Koordinaten  $x_+$  und  $x_-$  vorgegeben, das heißt

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)(x_2 + x_1) \\ \text{oder } H(t) &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

liegt in den neuen Variablen ein vereinfachtes System vor, bei dem nur ein Oszillator  $x_+$  oder  $x_-$  getrieben ist. Es muss also in den klassischen Normalmoden getrieben werden, damit nach dem Variablenwechsel ein möglichst einfaches System mit nur noch einem getriebenen Oszillator vorliegt.

### Lösung der Schrödinger-Gleichung

Nach den Ergebnissen dieses und des vorherigen Abschnittes können wir nun die Wellenfunktion  $\Psi_{n,l}$  des Systems zweier gekoppelter getriebener Oszillatoren (4.1), für eine allgemeine Treibkraft  $S(t) = S(t+T)$ , in den neuen entkoppelten Koordinaten  $x_+$  und  $x_-$ , nach Formel (4.4)

hinschreiben. Durch Ersetzen der neuen Variablen nach Formel (4.8) und (4.13) ist auch die Wellenfunktion in den ursprünglichen Variablen bekannt:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{n,l}(x_+, x_-, t) &= \Psi_{+,n}(x_+, t) \Psi_{-,l}(x_-, t) \\
 &= N_{n,+} O_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} (x_+ - \zeta_+(t)) \right) \exp \left( \frac{-m\omega_+}{2\hbar} (x_+ - \zeta_+(t))^2 \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\dot{\zeta}_+(t) (x_+ - \zeta_+(t)) - E_{+,n} t + \int_0^t L_+ dt' \right) \right] \\
 &\quad \cdot N_{l,-} O_l \left( \sqrt{\frac{m\omega_-}{\hbar}} (x_- - \zeta_-(t)) \right) \exp \left( \frac{-m\omega_-}{2\hbar} (x_- - \zeta_-(t))^2 \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\dot{\zeta}_-(t) (x_- - \zeta_-(t)) - E_{-,l} t + \int_0^t L_- dt' \right) \right], \Psi_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm} \\
 &= N_{+,n} N_{-,l} O_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right) \right) O_l \left( \sqrt{\frac{m\omega_-}{\hbar}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right) \right) \\
 &\quad \cdot \exp \left[ \frac{-m}{2\hbar} \left( \omega_+ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right)^2 + \omega_- \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right)^2 \right) \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\dot{\zeta}_+(t) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 + x_1) - \zeta_+(t) \right) + m\dot{\zeta}_-(t) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) - \zeta_-(t) \right) \right) \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( -(E_{+,n} + E_{-,l}) + \int_0^t L_+ + L_- dt' \right) \right] \\
 &= \Psi_{n,l}(x_1, x_2, t), \quad n, l \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die klassischen Lösungen  $\zeta_{\pm}(t)$  und die Lagrange-Funktionen  $L_{\pm}$  sind wie bei der Lösung des einzelnen Oszillators bestimmt über (2.18) und (2.17). Genauso sind die Normierungskonstanten  $N_{+,n}/N_{-,l}$  und ungetriebenen Eigenenergien  $E_{+,n}/E_{-,l}$  wie beim einzelnen getriebenen Oszillator definiert, nur die Eigenfrequenz  $\omega_0$  wird ersetzt durch die neuen Eigenfrequenzen  $\omega_+/\omega_-$  (4.15).

Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, ist  $\Psi$  in den neuen Variablen das Produkt aus den unabhängigen Wellenfunktionen  $\Psi_+$  und  $\Psi_-$ , welche Lösungen der einzelnen Schrödinger-Gleichungen mit  $H_+/H_-$  sind. Dadurch ist  $\Psi$  auch auf dem Raum, das heißt auf  $x_{\pm} \in (-\infty, \infty)$ , normiert, wie am Anfang von Kapitel (3) gezeigt:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,l}(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,l}(x_+, x_-, t)|^2 dx_+ dx_- \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{+,n}(x_+, t)|^2 dx_+ \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{-,l}(x_-, t)|^2 dx_- = 1 \cdot 1 = 1.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

In den ursprünglichen Koordinaten sind Kopplungsterme  $x_1 x_2$  in der Wellenfunktion vorhanden, durch die Hermit-Polynome  $O_n/O_l$  treten hierbei im Allgemeinen unterschiedliche Potenzen der  $x_1$  und  $x_2$  auf.

Die Floquet-Moden  $\Phi_{n,l}(x_+, x_-, t) = \Phi_+(x_+, t) \Phi_-(x_-, t)$  sind in den neuen Koordinaten das Produkt aus den einzelnen Floquet-Moden (2.26), so wie die Wellenfunktionen. Die Quasienergien sind dadurch die Summe der einzelnen Quasienergien (2.25):

$$\epsilon_{n,l} = \epsilon_{+,n} + \epsilon_{-,l}.$$

## 4.3 Erwartungswerte

Um die Erwartungswerte für die Observablen  $x_1, x_2, p_1, p_2$  zu evaluieren, verwenden wir die benutzten Transformationen für den Ort (4.8) und den Impuls (4.12), mit welchen wir die Berechnung auf die schon bekannten Erwartungswerte des einzelnen getriebenen Oszillators zurückführen können. Es werden alle Erwartungswerte für eine allgemeine  $T$ -periodische Treibkraft  $S(t) = A \sin(\omega t)$  berechnet und einige Erwartungswerte für die konkrete sinusförmige Treibkraft aus Kapitel (2.3.1), für einfache Konstanten, visualisiert.

Die "+" und "-" Operatoren wirken auf verschiedene Variablen/operieren auf den verschiedenen Räumen  $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ . Aus diesem Grund gilt für den Erwartungswert eines Operators  $U_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$  bezüglich einer Wellenfunktion der Form  $\Psi_{n,l} = \Psi_{+,n} \Psi_{-,l}$  mit  $\Psi_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm}$ , wegen der Normierung nach Formel (4.18):

$$\begin{aligned} \langle U_+ \rangle_{n,l} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* U_+ \Psi \, dx_+ dx_- = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_-|^2 \, dx_- \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{+,n}^* U_+ \Psi_{+,n} \, dx_+ \\ &= 1 \cdot \langle U_+ \rangle_n^+ . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für einen Operator  $U_+$  ist Erwartungswert der Gesamtwellenfunktion  $\Psi_{n,l}$  der gekoppelten getriebenen Oszillatoren also identisch zum Erwartungswert der Wellenfunktion des einzelnen getriebenen Oszillators, in den "+"-Koordinaten. Für  $U_-$  gilt Gleiches.

Demnach folgt für den Erwartungswert  $\langle U_+ U_- \rangle_{n,l}$

$$\langle U_+ U_- \rangle_{n,l} = \langle U_- U_+ \rangle_{n,l} = \langle U_+ \rangle_n^+ \langle U_- \rangle_l^- . \quad (4.20)$$

### 4.3.1 Zeitabhängige Erwartungswerte des Ortes

Mit der Transformation (4.8), der Überlegung zum gekoppelten Erwartungswert (4.19) und dem Erwartungswert des einzelnen getriebenen Oszillators (3.3) aus Kapitel (3), sind nun die Erwartungswerte  $\langle x_1 \rangle_{n,l} / \langle x_2 \rangle_{n,l}$  bekannt:

$$\langle x_1 \rangle_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle x_+ \rangle_{n,l} \mp \langle x_- \rangle_{n,l} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle x_+ \rangle_n^+ \mp \langle x_- \rangle_l^- \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta_+(t) \mp \zeta_-(t)) . \quad (4.21)$$

Der Mittelwert des Ortes für einen der beiden Oszillatoren  $x_1$  oder  $x_2$  des gekoppelten Systems ist somit die quantenzahlunabhängige Differenz oder die Summe der beiden klassischen Lösungen  $\zeta_+(t)$  und  $\zeta_-(t)$  der entkoppelten Oszillatoren nach der Variablentransformation, multipliziert mit  $1/\sqrt{2}$ .

Der Erwartungswert für  $x_1^2/x_2^2$  ergibt sich darüber hinaus mit Formel (4.20) und zusätzlich dem Erwartungswert (3.5) zu

$$\begin{aligned} \langle x_1^2 \rangle_{n,l} &= \frac{1}{2} \langle (x_+ \mp x_-)^2 \rangle_{n,l} = \frac{1}{2} \left( \langle x_+^2 \rangle_n^+ \mp 2 \langle x_+ \rangle_n^+ \langle x_- \rangle_l^- + \langle x_-^2 \rangle_l^- \right) \\ &= \frac{1}{2} (s_+^2 (2n+1) + \zeta_+^2(t) \mp 2 \zeta_+(t) \zeta_-(t) + s_-^2 (2l+1) \zeta_-^2(t)) , \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit  $s_{\pm}$  als der charakteristischen Länge des ungetriebenen Oszillators nach Formel (3.6), mit der jeweiligen Eigenfrequenz  $\omega_{\pm}$ .

### Sinusoidale Treibkraft

Für eine sinusoidale Treibkraft  $S(t) = A \sin(\omega t)$  und entsprechenden  $S_{\pm}(t)$  (4.14) sind  $\zeta_{\pm}(t)$  gegeben durch (2.28)

$$\zeta_{\pm}(t) = \frac{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} A \sin(\omega t)}{m(\omega_{\pm}^2 - \omega^2)} . \quad (4.23)$$

Hiermit werden die Erwartungswerte  $\langle x_1 \rangle_{n,l}$  und  $\langle x_2 \rangle_{n,l}$ , für die Konstanten

$$\omega = 2 , \quad A = 1 , \quad k = 1 , \quad m = 1 , \quad \hbar = 1 , \quad (4.24)$$

dargestellt. Hierbei untersuchen wir, für welche Kopplungskonstanten  $\kappa$  die beiden Erwartungswerte gleichphasig oder gegenphasig bzw. mit selbem oder unterschiedlichem Vorzeichen der Amplitude schwingen, also bei welchem  $\kappa$  die Amplitude  $\langle x_1 \rangle_{n,l}$  ihr Vorzeichen ändert. Wir betrachten somit die Situation einer schwachen (gegenphasig) und starken (gleichphasig) Kopplung.

Die Amplitude von  $\langle x_2 \rangle_{n,l}$  kann ihr Vorzeichen nicht ändern, da negative Kopplungskonstanten nicht sinnvoll sind. Der Erwartungswert verschwindet genau für  $\kappa = 0$ , wie in Abb.(4.1a) veranschaulicht. Dies entspricht der Erwartung, da es sich bei  $x_2$  ohne Kopplung um einen einzelnen ungetriebenen Oszillator handelt, weil nur  $x_1$  getrieben ist.

Der Erwartungswert von  $x_1$  wechselt sein Vorzeichen für/ist genau null für  $\kappa = \omega^2 m - k = 3$ , wie in Abb.(4.1b) gezeigt. Die gegenphasige (schwache) Kopplung ist für  $\kappa = 1 < 3$  in Abb.(4.1c) dargestellt. Wie klassisch anzunehmen, ist die Amplitude des Erwartungswertes  $\langle x_2 \rangle_{n,l}$  des angekoppelten Oszillators in diesem Fall geringer als die des getriebenen Oszillator-Erwartungswertes  $\langle x_1 \rangle_{n,l}$ , weil weniger Energie auf  $x_2$  übertragen wird. Die gleichphasige (starke) Kopplung ist für  $\kappa = 15 > 3$  in Abb.(4.1d) dargestellt. Für eine starke Kopplung werden die Erwartungswerte identisch und die Amplitude geringer, was der klassischen Anschauung zweier starr gekoppelter Oszillatoren entspricht.

### 4.3.2 Zeitabhängige Erwartungswerte des Impulses

Die Transformation der Impulsoperatoren (4.12) hat die gleiche Form wie bei den Ortsoperatoren (4.8), die Berechnung der Erwartungswerte  $\langle p_1 \rangle_{n,l}$  und  $\langle p_2 \rangle_{n,l}$  erfolgt darum analog, mit den Impuls-Erwartungswerten (3.12) und (3.15). Es gilt:

$$\langle p_2 \rangle_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p_+ \rangle_{n,l} \mp \langle p_- \rangle_{n,l}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p_+ \rangle_n^+ \mp \langle p_- \rangle_l^-) = \frac{m}{\sqrt{2}} (\dot{\zeta}_+(t) \mp \dot{\zeta}_-(t)) \quad (4.25)$$

und

$$\begin{aligned} \langle p_1^2 \rangle_{n,l} &= \frac{1}{2} \langle (p_+ \mp p_-)^2 \rangle_{n,l} \\ &= \frac{m^2}{2} (\omega_+^2 s_+^2 (2n+1) + \dot{\zeta}_+^2(t) \mp 2\dot{\zeta}_+(t)\dot{\zeta}_-(t) + \omega_-^2 s_-^2 (2l+1)\dot{\zeta}_-^2(t)) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Erwartungswerte sind ähnlich zu denen des Ortes. Es kommt nur ein Faktor hinzu und die  $\zeta_{\pm}(t)$  werden zu ihren Ableitungen.

Für eine Sinus-Treibkraft, sehen die Erwartungswerte für  $p_1$  demnach so aus wie die  $\langle x_1 \rangle_{n,l}$  nur mit skaliertem Amplitude und phasenverschoben um  $\pi$ . Das Verhalten für die verschiedenen Kopplungskonstanten  $\kappa$  ist ebenfalls identisch.

### 4.3.3 Erwartungswerte der Energie

Der zeitabhängige Erwartungswert  $\langle H(t) \rangle_{n,l}$  des Hamilton-Operators für eine beliebige Treibkraft  $S(t)$  ist auch mit dem Erwartungswert des einzelnen Oszillators berechenbar, indem wir wieder in den neuen Koordinaten arbeiten:

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle_{n,l} &= \langle H_+(t) \rangle_n^+ + \langle H_-(t) \rangle_l^- \\ &= E_{+,n} + E_{-,l} - L_+ - L_- + m\dot{\zeta}_+^2(t) + m\dot{\zeta}_-^2(t) . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Der mittlere Erwartungswert  $\overline{H}_{n,l}$  wird wieder in den neuen Koordinaten, mit Formel (3.19), berechnet. Weil die Quasienergien  $\epsilon_{n,l}$  die Summe von  $\epsilon_{+,n}$  und  $\epsilon_{-,l}$  ist, kriegen wir sofort

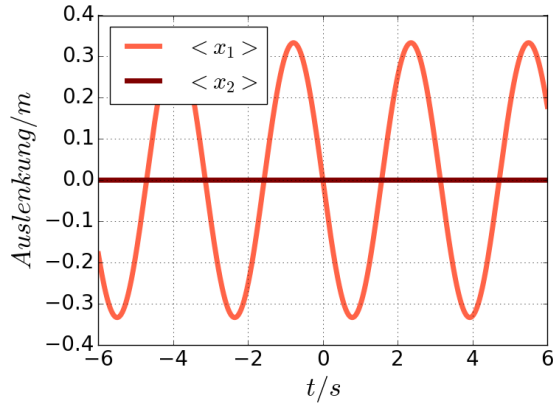
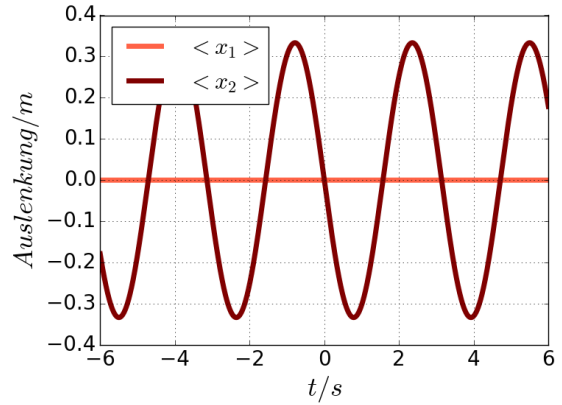
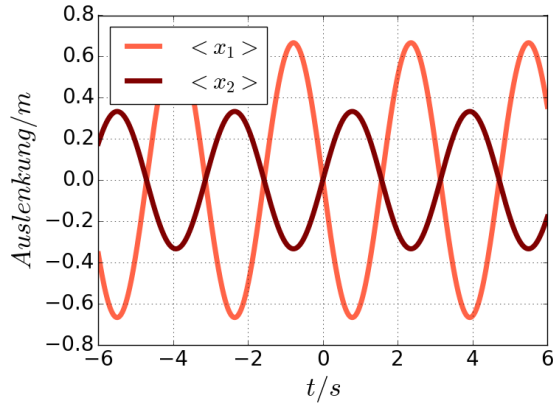
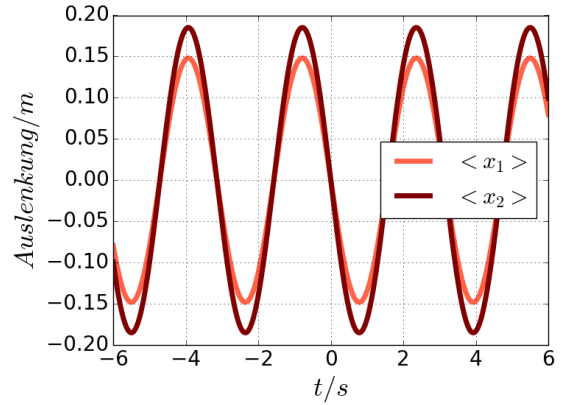
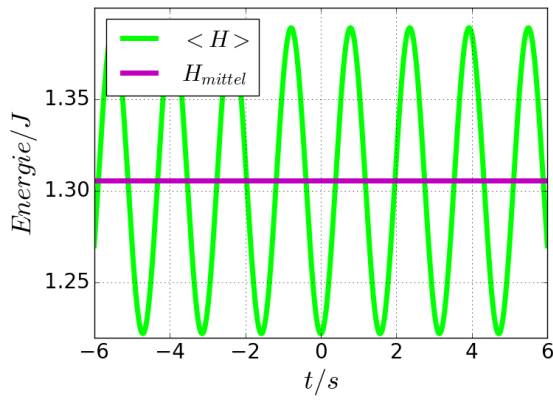
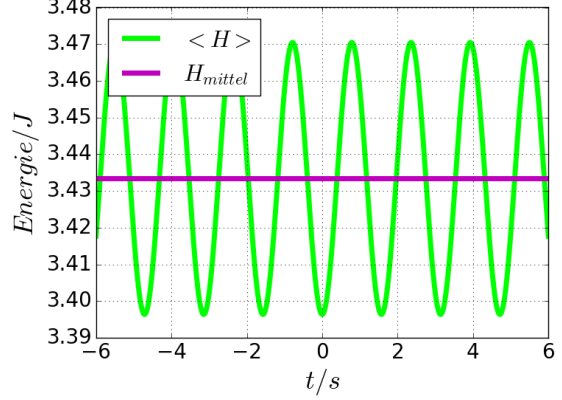
$$\begin{aligned} \overline{H}_{n,l} &= \overline{H}_{+,n} + \overline{H}_{-,l} \\ &= E_{+,n} + E_{-,l} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}A}{4m(\omega_+^2 - \omega^2)} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_+^2 - \omega^2)} \right) - \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}A}{4m(\omega_-^2 - \omega^2)} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{(\omega_-^2 - \omega^2)} \right) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

### Sinusoidale Treibkraft

Für das Beispiel der Sinus-Kraft folgt  $\langle H(t) \rangle_{n,l}$  mit den entsprechenden Orts- und Impulserwartungswerten aus vorherigem Abschnitt und  $\overline{H}_{n,l}$  folgt aus Gleichung (3.19). Der Erwartungswert der Energie  $\langle H \rangle_{0,0}$  und dessen zeitliches Mittel  $\overline{H}(t)_{0,0}$  sind für die selben Konstanten wie zuvor

$$\omega = 2 , \quad A = 1 , \quad k = 1 , \quad m = 1 , \quad \hbar = 1 , \quad (4.29)$$

in Abb.(4.1) aufgetragen. Da beide Erwartungswerte wegen den  $E_{+,n}/E_{-,l}$  abhängig von den Quantenzahlen sind, wird hier der einfachste Fall  $n = l = 0 \Rightarrow E_{\pm,0} = \hbar\omega_{\pm}/2$  betrachtet. Ohne Kopplung (4.1e) ist die mittlere Energie am geringsten, für eine möglichst starke/starre Kopplung (4.1f) wird die mittlere Energie im System maximal, weil die Treibkraft so möglichst viel Energie auf den angekoppelten Oszillator  $x_2$  übertragen kann.


(a)  $\kappa = 0$ .

(b)  $\kappa = \omega^2 m - k = 3$ .

(c)  $\kappa = 1$ .

(d)  $\kappa = 15$ .

(e)  $\kappa = 0$ .

(f)  $\kappa = 15$ .

**Abbildung 4.1:** Erwartungswerte der gekoppelten Oszillatoren  $\langle x_1 \rangle_{n,l}$  und  $\langle x_2 \rangle_{n,l}$  für beliebigen Zustand  $\Psi_{n,l}$ , außerdem der Erwartungswert der Gesamtenergie  $\langle H(t) \rangle_{0,0}$  und zeitliches Mittel  $\bar{H}_{0,0}$  für den Grundzustand  $\Psi_{0,0}$ . Mit  $\omega = 2$ ,  $A = 1$ ,  $k = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\hbar = 1$ , für verschiedene Kopplungskonstanten  $\kappa$ .



## 5 Zweite Quantisierung

In diesem Kapitel werden wir die Wellenfunktionen  $\Psi_n(x, t)$  der Ortsdarstellung (2.22) in die Besetzungszahldarstellung übersetzen, das heißt wir werden  $\Psi(x, t)$  darstellen in der Orthonormalbasis der Eigenzustände  $|n\rangle$  des Besetzungszahloperators  $N$  des ungetriebenen Oszillators. Die  $|n\rangle$  sind auch Eigenzustände des Hamilton-Operators

$$H_{\text{ung}}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = H_{\text{ung}}(N) = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (5.1)$$

des ungetriebenen Systems. Hierbei gilt

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Um das darstellungsunabhängige Ket  $|\Psi(t)\rangle$  in der Besetzungszahldarstellung zu erhalten, wird ein geeigneter Ansatz gewählt und in die Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators eingesetzt, wonach mit Hilfe von Kommutatorrelationen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten erhalten werden, welche gelöst werden können.

Mit dem bekannten  $|\Psi(t)\rangle$  werden im zweiten Teil erneut die Erwartungswerte  $\langle x^m \rangle_n$  und  $\langle p^m \rangle_n$  des getriebenen Oszillators berechnet.

### 5.1 Wellenfunktion

Da die  $|n\rangle$  Eigenzustände des hermiteschen Besetzungszahloperators  $N$  sind, kann man jede Wellenfunktion  $|\Psi_n(t)\rangle$  bzw. Gesamtwellenfunktion  $|\Psi(t)\rangle$  auf dem selben Raum schreiben als

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\Psi_n(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |n\rangle, \quad (5.3)$$

mit geeigneten Koeffizienten  $c_n(t)$ .

Für die  $|\Psi_n(t)\rangle$  des getriebenen harmonischen Oszillators wählen wir konkret den Ansatz

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\theta_n(t)\right) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varphi(t)x\right) |n\rangle = K_n O_p O_x |n\rangle. \quad (5.4)$$

Dieser Ansatz folgt aus der Betrachtung der Lösung  $\Psi_n(x, t)$  in Ortsdarstellung (2.22). Die ungetriebenen Eigenzustände  $|n\rangle$  haben in Ortsdarstellung die Form einer Gauss-Glocke. Da bei den  $\Psi_n(x, t)$  zur (verschobenen) Gauss-Glocke eine zeit- und ortsabhängige Phase hinzu kommt und der Ortsoperator in Ortsdarstellung einfach der Multiplikation entspricht, wählen wir also

$$\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varphi(t)x\right) = O_x \quad (5.5)$$

im Ansatz. Hier ist  $x$  der Ortsoperator. Sowohl die zusätzliche orts- und zeitabhängige Phase als auch die Gauss-Glocke in  $\Psi_n(x, t)$  sind verschoben (um  $\zeta(t)$ ), daher wenden wir von links den Operator

$$\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) = O_p \quad (5.6)$$

an. Denn dieser Operator bewirkt bei der Transformation genau die Verschiebung des Ortsoperators (5.11), wie auch im Argument der Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$ :

$$O_p x O_p^{-1} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\alpha(t)p\right) x \exp\left(\frac{+i}{\hbar}\alpha(t)p\right) = x - \alpha(t). \quad (5.7)$$

Zuletzt wird die ausschließlich zeitabhängige Phase der Wellenfunktion  $\Psi_n(x, t)$ , in welche die einzige quantenzahlabhängige Größe  $E_n$  eingeht, durch die Exponentialfunktion  $K_n$  ohne Operator berücksichtigt.

Jetzt setzen wir diesen Ansatz (5.4) in die Schrödinger-Gleichung (2.3) ein. Das Ziel ist unseren Hamilton-Operator

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x = H_{\text{ung}}(N) - S(t)x \quad (5.8)$$

an den Operatoren im Ansatz vorbeizukommutieren, sodass  $H_{\text{ung}}(N)$  auf die  $|n\rangle$  angewendet wird. Währenddessen entstehen Restterme mit  $p$  und  $x$ , die auch auf  $|n\rangle$  wirken. Auf der anderen Seite der Gleichung müssen der  $p$ - und  $x$ -Operator, welche beim Zeitableiten dazu kommen, ebenfalls bis zum  $|n\rangle$  durchkommutiert werden. Dann erhalten wir die Differentialgleichungen zum Bestimmen von  $\theta_n(t)$ ,  $\alpha(t)$  und  $\varphi(t)$  durch Koeffizientenvergleich beider Seiten.

Für dieses Vorgehen brauchen wir die Vertauschungsrelationen von  $x/p$  mit  $O_x/O_p$ . Wenn beide Operatoren nur von  $x$  oder  $p$  abhängen, verschwindet der Kommutator, das heißt

$$[x^m, O_x] = [p^m, O_p] = 0 \iff x^m O_x = O_x x^m \quad \text{und} \quad p^m O_p = O_p p^m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (5.9)$$

gilt. Die gemischten Vertauschungsrelationen berechnen wir mit der Kommutatorrechenregel

$$[A, f(B)] = \frac{\partial}{\partial B} f(B) [A, B] \quad (\text{für } [B, [A, B]] = 0) \quad (5.10)$$

und dem bekannten Kommutator  $[x, p] = i\hbar$ . Wir bekommen:

$$[x, O_p] = \alpha(t) O_p \iff x O_p = O_p (x + \alpha(t)) \quad \text{bzw.} \quad x^m O_p = O_p (x + \alpha(t))^m \quad (5.11)$$

$$[p, O_x] = -\varphi(t) O_x \iff p O_x = O_x (p - \varphi(t)) \quad \text{bzw.} \quad p^m O_x = O_x (p - \varphi(t))^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Für die Anwendung des Hamilton-Operators  $H(x, p, t)$  auf den Zustand  $|\Psi(t)\rangle$  folgt

$$\begin{aligned} H|\Psi(t)\rangle &= K_n H O_p O_x |n\rangle = K_n O_p \left( H + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) \right) O_x |n\rangle \\ &= K_n O_p O_x \left( H + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\alpha(t)x + \alpha^2(t)) - \alpha(t)S(t) \right) |n\rangle \\ &= K_n O_p O_x \left( E_n - S(t)x + \frac{1}{2m}(-2\varphi(t)p + \varphi^2(t)) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\alpha(t)x + \alpha^2(t)) - \alpha(t)S(t) \right) |n\rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

und die Zeitableitung ist

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle &= K_n \left( \dot{\theta}(t) O_p O_x + O_p \dot{\alpha}(t) p O_x + O_p O_x \dot{\varphi}(t) x \right) |n\rangle \\ &= K_n O_p O_x \left( \dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)(p - \varphi(t)) + \dot{\varphi}(t)x \right) |n\rangle . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Da nun all Restterme auf beiden Seiten der Schrödinger-Gleichung auf die Besetzungszustände  $|n\rangle$  angewendet werden, machen wir einen Koeffizientenvergleich von (5.13) und (5.14) und setzen jeweils die Terme vor  $x$ ,  $p$  und die Terme ohne Operator gleich. Dies liefert die Differentialgleichungen zu Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Phasen im Ansatz:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\theta}_n(t) &= E_n + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \alpha^2(t) + \frac{1}{2m} \varphi^2(t) + \dot{\alpha}(t) \varphi(t) - S(t) \alpha(t) \\ 2) \quad \dot{\varphi}(t) &= m \omega_0^2 \alpha(t) - S(t) \quad , \quad 3) \quad \dot{\alpha}(t) = \frac{-1}{m} \varphi(t) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Einsetzen von Gleichung 2) in Gleichung 3) erzeugt die klassische Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators (2.18) für  $\alpha(t)$

$$m \ddot{\alpha}(t) + m \omega_0 \alpha(t) - S(t) = 0 , \quad (5.16)$$

weshalb  $\alpha(t) = \zeta(t)$  ist, wie nach Transformation (5.7) erwartet, weil  $x$  in der Lösung  $\Psi(x, t)$  genau um  $-\zeta(t)$  verschoben ist. Demnach ist  $\varphi(t) = -m\dot{\zeta}(t)$  durch 3) gegeben. Nun setzen wir die bekannten  $\alpha(t)$  und  $\varphi(t)$  in 1) ein und identifizieren die Lagrange-Funktion für  $\zeta(t)$  (2.17). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_n(t) &= E_n + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta^2(t) + \frac{1}{2m} \dot{\zeta}^2(t) - m \dot{\zeta}^2(t) - S(t) \zeta(t) = E_n - L(\dot{\zeta}, \zeta, t) \\ \Rightarrow \theta_n(t) &= E_n t - \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Somit ist  $K_n$  genau die rein zeitabhängige Phase von  $\Psi_n(x, t)$  (2.22) und  $|\Psi_n(t)\rangle$  (5.4) ist insgesamt

$$|\Psi_n(t)\rangle = K_n O_p O_x = \exp \left( \frac{i}{\hbar} \left( -E_n t + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t) \right) \right) \exp \left( \frac{-i}{\hbar} \zeta(t) p \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) x \right) |n\rangle . \quad (5.18)$$

## 5.2 Erwartungswerte

Mit dem bekannten Wellenfunktion-Ket  $|\Psi(t)\rangle$ , sowie den Vertauschungsrelationen in (5.11-5.12) werden wir in diesem Teil die zeitabhängigen Erwartungswerte des Ortes  $\langle x^m \rangle_n$  und des Impulses  $\langle x^m \rangle_n$  des einzelnen getriebenen Oszillators in der Besetzungszahldarstellung bestimmen.

Es wird verwendet, dass die Erwartungswerte der Zustände  $\Psi_{n,\text{ung}}(y, t)$  des ungetriebenen Oszillators, gleich den Erwartungswerten der Besetzungszustände  $|n\rangle$  sind, da sich  $|n\rangle$  und  $|\Psi_{n,\text{ung}}(t)\rangle$  nur um eine komplexe Phase unterscheiden, welche bei den Erwartungswerten wegfällt. Ausserdem kann beim Erwartungswert eines Operators  $U$  für die Zustände  $|\Psi(t)\rangle$  die

komplexe Phase  $K_n$  in  $|\Psi(t)\rangle$  (5.18) sofort am Operator vorbeigezogen werden und mit  $K_n^{-1}$  zu 1 vereinfacht werden, weil  $K_n$ , im Gegensatz zu  $O_x$  und  $O_p$ , kein Operator ist:

$$\langle U \rangle_n = \langle \Psi_n(t) | U | \psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} U O_p O_x | n \rangle . \quad (5.19)$$

Es liegt nun eine (Rück)transformation von  $U$  bezüglich  $O_p$  und dann  $O_x$  vor. Für  $U = x^m/p^m$  können wir das Ergebnis der Transformation direkt den Relationen (5.11-5.12) entnehmen, indem wir damit  $U_{x/p}$  jeweils mit  $p^m/x^m$  vertauschen und dann  $U_{x/p}^{-1} U_{x/p}$  zu 1 zusammenfassen. Weil danach entweder nur  $O_p$  und  $p^m$  oder  $O_x$  und  $x^m$  verbleiben, und diese Operatoren kommutieren, kann man diesen letzten Operator ebenso mit seinem Inversen zu 1 zusammenfassen.

### Erwartungswerte des Ortes

Mit den vorangegangenen Überlegungen lassen sich die Erwartungswerte des Ortsoperators  $x$  berechnen:

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_n &= \langle \Psi_n(t) | x^m | \Psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} x^m O_p O_x | n \rangle = \langle n | (x + \alpha(t))^m | n \rangle \\ &= \langle (x^m + \alpha(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \langle (y + \zeta(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dieses Ergebnis ist identisch zum entsprechenden Ergebnis (3.7) aus Kapitel 3.

### Erwartungswerte des Impulses

Für die Impuls-Erwartungswerte ergibt komplett analog zu den Ort-Erwartungswerten

$$\begin{aligned} \langle p^m \rangle_n &= \langle \Psi_n(t) | p^m | \Psi_n(t) \rangle = \langle n | O_x^{-1} O_p^{-1} p^m O_p O_x | n \rangle = \langle n | (p - \varphi(t))^m | n \rangle \\ &= \langle (p_y^m - \varphi(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} = \langle (p_y + m\dot{\zeta}(t))^m \rangle_{n,\text{ung}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Auch für den Impuls bekommen wir die gleichen Erwartungswerte wie bei der ersten Berechnung in Gleichung (3.14) aus Kapitel 3.

Schließlich erhalten wir für den Ort und den Impuls des einzelnen getriebenen Oszillators und folglich auch für die Energie in der Besetzungszahldarstellung die Erwartungswerte, wie wir sie schon in Kapitel 3 in Ortsdarstellung erhalten haben.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

## A Ein Anhangskapitel

## Literatur

- [1] A. G. Fainshtein, N. L. Manakov und L. P. Rapoport. „Some general properties of quasi-energetic spectra of quantum systems in classical monochromatic fields“. In: *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* 11.14 (1978), S. 2561.
- [2] P. Hänggi. *Quantum Transport and Dissipation*. Wiley-VCH, 1998. Kap. 5.
- [3] K. Husimi. „Miscellanea in Elementary Quantum Mechanics,II“. In: *Progress of Theoretical Physics* 9.4 (1953), S. 381–402.
- [4] M. Jørgensen. „Driven Problems in Quantum and Classical Mechanics with Floquet Theory“. Bachelorarbeit. University of Copenhagen, 2015.
- [5] R. M. McDermott und I. H. Redmount. „Coupled Classical and Quantum Oscillators“. In: *eprint arXiv:quant-ph/0403184* (März 2004). Zugriff am: 03.08.18.
- [6] J. Shirley. „Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time“. In: *Phys. Rev.* 138.4B (1965), S. 979–987.





## Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel „Floquet-Theorie, Erwartungswerte und zweite Quantisierung von periodisch getriebenen quantenmechanischen Oszillatoren“ selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

## Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift