

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

**L^AT_EX-Dokumentenklasse und Vorlage
für Abschlussarbeiten an der TU
Dortmund**

Maximilian Nöthe
geboren in Castrop-Rauxel

2014

Lehrstuhl für Experimentelle Physik V
Fakultät Physik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter:	Prof. Dr. Erstgutachter
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Zweitgutachter
Abgabedatum:	31. September 2015

Kurzfassung

Hier steht eine Kurzfassung der Arbeit in deutscher Sprache inklusive der Zusammenfassung der Ergebnisse. Zusammen mit der englischen Zusammenfassung muss sie auf diese Seite passen.

Abstract

The abstract is a short summary of the thesis in English, together with the German summary it has to fit on this page.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Floquet-Theorie	2
2.1	Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie \bar{H}_n	3
3	Getriebener harmonischer Oszillator in der Quantenmechanik	5
3.1	Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung	5
3.2	Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$. .	7
3.3	Berechnung von Erwartungswerten	10
4	Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren in der Quantenmechanik	15
4.1	Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren .	15
4.2	Unitäre Koordinatentransformation	16
5	Zusammenfassung und Ausblick	17
A	Ein Anhangskapitel	18
	Literatur	19

1 Einleitung

Hier folgt eine kurze Einleitung in die Thematik der Bachelorarbeit. Die Einleitung muss kurz sein, damit die vorgegebene Gesamtlänge der Arbeit von 25 Seiten nicht überschritten wird. Die Beschränkung der Seitenzahl sollte man ernst nehmen, da Überschreitung zu Abzügen in der Note führen kann. Um der Längenbeschränkung zu genügen, darf auch nicht an der Schriftgröße, dem Zeilenabstand oder dem Satzspiegel (bedruckte Fläche der Seite) manipuliert werden.

2 Floquet-Theorie

Die Floquet-Theorie ist ein nützliches Werkzeug zur der Lösung von quantenmechanischen Systemen, welche durch einen zeitlich periodischen Hamilton-Operator

$$H(t) = H(t + T) , \quad (2.1)$$

mit der Periode T , beschrieben werden.

Das Floquet-Theorem besagt, dass bei einem solchen System, die Lösungen $\Psi_n(x, t)$ der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(x, t) = H(t) \Psi_n(x, t) \quad (2.2)$$

in Ortsdarstellung die Form

$$\Psi_n(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t} \Phi_n(x, t) \quad (2.3)$$

haben. Hierbei sind $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$ T -periodische Funktionen, die sogenannten Floquet-Moden, und ϵ_n die zugehörigen reellen Quasienergien, wobei diese Bezeichnungen gewählt wurden aufgrund der Parallele zu den Bloch-Moden und Quasiimpulsen des Bloch-Theorems [haengi]. Das Floquet-Theorem kann damit als "Bloch-Theorem in der Zeit" aufgefasst werden [sherly].

Durch Einsetzen dieses Ansatzes für die Wellenfunktionen (2.3) in die Schrödinger-Gleichung (2.2) erhalten wir

$$\epsilon_n \Phi_n(x, t) = \left(H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_n(x, t) = \mathcal{H}(t) \Phi_n(x, t) . \quad (2.4)$$

Die Lösung der Schrödinger Gleichung konnte somit auf die Lösung eines Eigenwertproblems für den neuen Operator $\mathcal{H}(t)$ zurückgeführt werden [sherly].

Die hermiteschen Operatoren $H(t)$ und $\mathcal{H}(t)$ operieren auf dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$. Dabei ist \mathcal{L}^2 der Raum der quadratintegriblen Funktionen und \mathcal{T} der Raum der auf $[0, T]$ integriblen Funktionen, da die Operatoren T -periodisch sind [haenggi]. Nach dem Spektralsatz bilden die Eigenfunktionen $\Phi_n(x, t)$ von $\mathcal{H}(t)$ eine Orthogonalbasis

von $\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{T}$, welche auf eine Orthonormalbasis normiert werden kann, wodurch wir das Skalarprodukt definieren können als:

$$\begin{aligned} \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_m(x, t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x, t) \Phi_m(x, t) dx dt = \delta_{n,m} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1 Zeitlich gemittelter Erwartungswert der Energie \bar{H}_n

Da $H(t)$ nicht zeitlich konstant ist, sind auch dessen Erwartungswerte, die Energien des Systems, zeitabhängig. Ein direkter Vorteil der Floquet-Theorie liegt darin, dass sich die durchschnittliche Energie

$$\bar{H}_n = \langle \langle \Psi_n(x, t) | H(t) | \Psi_n(x, t) \rangle \rangle \quad (2.6)$$

des n -ten Zustandes $\Psi_n(x, t)$ leicht über die Quasienergien ϵ_n berechnen lässt, ohne explizit Integrale zu lösen.

Dazu ersetzen wir $H(t)$ mit Hilfe von (2.4). Außerdem unterscheiden sich die Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ und die Wellenfunktionen $\Psi_n(x, t)$ nur durch eine komplexe Phase, daher sind deren Skalarprodukte identisch. Weiterhin benutzen wir (2.4), dass die Floquet-Moden Eigenfunktionen von $\mathcal{H}(t)$ sind:

$$\begin{aligned} \bar{H}_n &= \langle \langle \Phi_n(x, t) | \mathcal{H}(t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle \\ &= \epsilon_n \langle \langle \Phi_n(x, t) | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle \\ &= \epsilon_n + \langle \langle \Phi_n(x, t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nähere Betrachtung zeigt, dass

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} \quad (2.8)$$

gilt [haenggi]. Da für ϵ_n und $\mathcal{H}(t)$ mit (2.4) eine Eigenwertgleichung vorliegt, kann das Hellman-Feynman-Theorem angewendet werden [hellmann online quelle]. Dieses gibt eine Verbindung zwischen den Ableitungen der Eigenwerte und der Ableitung des Hamilton-Operators an. In unserem Fall erhalten wir dadurch

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} = \langle \langle \Phi_n(x, t) | \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \omega} | \Phi_n(x, t) \rangle \rangle . \quad (2.9)$$

Damit folgt [haenggi]:

$$\bar{H}_n = \epsilon_n - \omega \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \omega} . \quad (2.10)$$

b

3 Getriebener harmonischer Oszillator in der Quantenmechanik

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators der Masse m , welcher mit einer beliebigen aber periodischen äußeren Kraft $S(t) = S(t + T)$ getrieben wird, hat die Form

$$H(t) = H(t + T) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - S(t)x, \quad (3.1)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ und der Potentialkonstante k . Im Folgenden wird vorerst die Schrödingergleichung für eine beliebige Treibkraft $S(t)$ gelöst. Weiterhin werden die Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$ identifiziert, genauso wie die Quasienergien ϵ_n , welche für eine beliebige periodische Treibkraft und explizit für eine sinusförmige Treibkraft bestimmt werden.

Danach werden wir die Erwartungswerte $\langle x \rangle_n, \langle x^2 \rangle_n, \langle p \rangle_n, \langle p^2 \rangle_n$ und damit die Unschärfe berechnen, indem wir die bekannten Erwartungswerte des ungetriebenen Oszillators benutzen. Ebenso werden wir den zeitabhängigen und gemittelten Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_n$ und \bar{H}_n berechnen.

3.1 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Dieses System kann exakt gelöst werden, indem die Schrödinger-Gleichung durch einen Variablenwechsel und zwei unitäre Transformationen auf die bekannte Form des ungetriebenen Oszillators reduziert wird [haenggi].

1) Unitärer Variablenwechsel

Für den neuen Ortsoperator bzw. die Ortsvariable wird eine zeitabhängige Verschiebung angesetzt:

$$x \rightarrow y = x - \zeta(t); \quad (3.2)$$

Wie zu erwarten verändert sich der Impuls(operator) durch die Translation im Ort nicht, da $\zeta(t)$ bei der Ortsableitung wegfällt.

Mit der neuen Zeitableitung der Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y(t), t) = i\hbar \dot{\Psi} - \zeta \frac{\partial}{\partial y} \Psi(y(t), t) \quad (3.3)$$

wird die Schrödinger-Gleichung zu:

$$i\hbar\dot{\Psi}(y, t) = \left[i\hbar\dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(y + \zeta)^2 - (y + \zeta)S(t) \right] \Psi(y, t) . \quad (3.4)$$

2) Unitäre Transformation für $\Psi(y, t)$

Im Weiteren wählen wir die unitäre Transformation

$$\Psi(y, t) = e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} \Lambda(y, t) . \quad (3.5)$$

Durch Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung (3.4) und Ausrechnen der Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} (i\hbar\dot{\Lambda}(y, t) - m\ddot{\zeta}\Lambda(y, t)) = \\ e^{\frac{i}{\hbar}m\dot{\zeta}y} \left[\left(-m\dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) + i\hbar\dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 \Lambda(y, t) - i\hbar\dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Lambda(y, t) \right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(y + \zeta)^2 + (y + \zeta)S(t) \right] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Indem auf beiden Seiten durch die Exponentialfunktion geteilt wird, bekommen wir eine Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$. Außerdem können durch geschicktes Umsortieren der Terme die Lagrange-Funktion $L(\zeta, \dot{\zeta}, t)$

$$L(\zeta, \dot{\zeta}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2 + S(t)\zeta \quad (3.7)$$

sowie die Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators **[husimi]**

$$m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2\zeta - S(t) = 0 \quad (3.8)$$

für die Verschiebung $\zeta(t)$ identifiziert werden. Die Differentialgleichung für $\Lambda(y, t)$ ist folglich

$$i\hbar\dot{\Lambda}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2 + (m\ddot{\zeta} + m\omega_0^2 y \zeta - S(t))y - L(\zeta, \dot{\zeta}, t) \right] \Lambda(y, t) . \quad (3.9)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, wählen wir $\zeta(t)$ nun so, dass es gerade die klassische Bewegungsgleichung erfüllt, der entsprechende Term in (3.9) also verschwindet. Nur noch die Lagrange-Funktion unterscheidet diese Differential-Gleichung von der des ungetriebenen Oszillators.

3) Unitäre Transformation für $\Lambda(y, t)$

Zuletzt wählen wir den Ansatz

$$\Lambda(y, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t L dt'} \chi(y, t) \quad (3.10)$$

für $\Lambda(y, t)$, um die Lagrange-Funktion in (3.9) zu eliminieren. Dadurch wird diese Differential-Gleichung für $\Lambda(y, t)$ bzw. die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung auf einen ungetriebenen Oszillator für $\chi(y, t)$ zurückgeführt:

$$i\hbar \dot{\chi}(y, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \right] \chi(y, t) . \quad (3.11)$$

Das bedeutet die $\chi_n(y, t)$ sind die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und die Gesamtlösung der Schrödinger-Gleichung des getriebenen Oszillators ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, t) &= \Psi_n(y = x - \zeta(t), t) \\ &= N_n O_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) e^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) - E_n t + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt')} , \quad n \in \mathbb{N}_0 . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dabei sind O_n die Hermit-Polynome, $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ die bekannten Eigenenergien der Zustände des ungetriebenen Oszillators und

$$N_n = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (3.13)$$

dessen Normierungsfaktoren. Die Lösungen des getriebenen Oszillators sind im Raum normiert und somit ebenfalls bezüglich des Skalarproduktes (2.5).

Die Lösung entspricht damit einem, um die klassische Lösung $\zeta(t)$ verschobenen, ungetriebenen Oszillator, mit einer zusätzlichen zeit- und ortsabhängigen komplexen Phase. Die treibende Kraft $S(t)$ geht in die klassische Lösung $\zeta(t)$ und direkt, über das Wirkungsintegral, in die komplexe Phase ein.

3.2 Identifizierung der Quasienergien ϵ_n und Floquet-Moden $\Phi_n(x, t)$

Nach dem Floquet-Theorem für periodische Hamilton-Operatoren (2.3) kann die Lösung des getriebenen Oszillators geschrieben werden als

$$\Psi_n(x, t) = e^{\frac{-i}{\hbar} \epsilon_n t} \Phi_n(x, t) , \quad (3.14)$$

mit $\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x, t + T)$. Nun können wir alle T -periodischen Terme als $\Phi_n(x, t)$ identifizieren, und alle Terme im Exponenten, die linear in t sind, als $-i\epsilon_n t/\hbar$ [haenggi].

Alle Funktionen von $(x - \zeta(t))$ haben die Periode T , da $\zeta(T)$ als Lösung der klassischen Bewegungsgleichung mit $S(t) = S(t+T)$ die Periode T hat. Das Ergebnis des Integrals über die Lagrange-Funktion kann nur T -periodisch oder linear in t sein, deshalb sind die Quasienergien gegeben durch die E_n und den linearen Teil des Integrals:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{1}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt . \quad (3.15)$$

Die Floquet-Moden sind demnach

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, t) &= N_n O_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} (x - \zeta(t)) \right) e^{\frac{-m\omega_0}{2\hbar} (x - \zeta(t))^2} \\ &\cdot e^{\frac{i}{\hbar} \left(m\dot{\zeta}(t)(x - \zeta(t)) + \int_0^t L(\dot{\zeta}, \zeta, t') dt - \frac{t}{T} \int_0^T L(\dot{\zeta}, \zeta, t) dt \right)} , \\ n &\in \mathbb{N}_0 . \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2.1 Quasienergien für eine sinusoidale Treibkraft

Hier wird ein Beispiel einer treibenden Kraft diskutiert [haenggi]:

$$S(t) = S(t + T) = A \sin(\omega t), \quad (3.17)$$

wobei $T = 2\pi/\omega$ ist. Setzen wir die allgemeine homogene Lösung gleich null, wird die Lösung $\zeta(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung (3.8) zu [mads]

$$\zeta(t) = \frac{A \sin(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (3.18)$$

Das Berechnen des Wirkungsintegrals und anschließendes Identifizieren des linearen Anteils liefert die Quasienergien für die gegebene Kraft:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{A}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (3.19)$$

Wie zu erkennen streben die Quasienergien, und somit die mittlere Energie des Systems (2.10), gegen Unendlich, wenn sich die Treibfrequenz ω nahe der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 befindet. Da wir einen getriebenen Oszillator ohne Dämpfung betrachten, war dieses Ergebnis zu erwarten [mads]. HIER KANN MAN NOCH AUSFUEHRLICH INSCHREIBEN MIT MADS

3.2.2 Quasienergien für eine beliebige periodische Treibkraft $S(t)$

Um die Quasienergien bei einer beliebigen periodisch treibenden Kraft auf elegante Weise zu bestimmen, und ohne ein Wirkungsintegral berechnen zu müssen, setzen wir eine komplexe Fourier-Reihe an:

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad c_j = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (3.20)$$

Die c_j haben die Einheit einer Kraft.

Für $\zeta(t)$ wählen wir jetzt ebenfalls einen Reihenansatz:

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{ij\omega t}. \quad (3.21)$$

Wir betrachten wieder nur die inhomogene klassische Bewegungsgleichung und bestimmen die d_j , indem wir einsetzen und einen Koeffizientenvergleich der d_j und c_j machen. Es zeigt sich, dass

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{m(-j^2\omega^2 + \omega_0^2)} e^{ij\omega t} \quad (3.22)$$

gilt, womit sich die Lagrange-Funktion (3.7) ergibt zu:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \zeta^2 + S(t) \zeta \\ &= \sum_j \sum_l \left[\frac{-\omega^2}{2m} \frac{j c_j}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \frac{l c_l}{-l^2\omega^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \frac{c_l}{-l^2\omega^2 + \omega_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \frac{c_j c_l}{-j^2\omega^2 + \omega_0^2} \right] e^{i(j+l)\omega t}, \quad j, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nun identifizieren wir alle Terme der Lagrange-Funktion, welche nach der Ausführung des Wirkungsintegrals linear in der Zeit t sind, ohne dieses explizit zu berechnen. Denn wir wissen, dass die Exponentialterme, welche sich beim Integrieren nach der Zeit reproduzieren, periodisch in der Zeit sind. Daher werden nur die konstanten Terme, welche entstehen wenn die Exponentialterme wegfallen, eine lineare Abhängigkeit aufweisen. Die Exponentialterme werden 1 wenn $j = -l$ ist. Infolgedessen wird die Doppelsumme, die bei der Quadrierung entstanden ist, wieder

zur Einzelsumme. Wir fassen den linearen Teil des Wirkungsintegrals zusammen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T L \, dt &= \sum_j \left[\frac{\omega^2}{2m} \frac{j^2 c_j c_{-j}}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} - \frac{\omega_0^2}{2m} \frac{c_j c_{-j}}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right] \\
 &= \sum_j \left[\frac{1}{2m} \frac{c_j c_{-j} (j^2 \omega^2 - \omega_0^2)}{(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{c_j c_{-j}}{-j^2 \omega^2 + \omega_0^2} \right] \\
 &= \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)} = \frac{c_0^2}{2m\omega_0^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^2}{m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Quasienergien ϵ_n sind hiernach:

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sum_j \frac{c_j c_{-j}}{2m(-j^2 \omega^2 + \omega_0^2)}. \tag{3.24}$$

Interessanterweise kommt es in obiger Formel nicht nur bei $\omega = \omega_0$ zu einer Singularität, wie bei der Beispielfunktion $S(t) = A \sin(\omega t)$, sondern bei allen $\omega = \omega_0/j$.

3.2.3 Beispiele für $S(t)$ dreieck rechteck delta

3.3 Berechnung von Erwartungswerten

In diesem Abschnitt werden die Erwartungswerte des periodisch getriebenen Oszillators für den Impuls, den Ort und die Energie berechnet. Die Treibkraft $S(t) = S(t+T)$ ist nicht weiter festgelegt und geht stets über die klassische Lösung $\zeta(t)$ (3.8) in die Erwartungswerte ein.

Um die Erwartungswerte des getriebenen Oszillators zu erhalten, werden wir dessen Berechnung auf die Berechnung der bekannten Erwartungswerte des ungetriebenen Oszillators zurückführen. Dafür nutzen wir aus, dass die Wellenfunktionen und die Floquet-Moden nach (3.12) und (??) einem um $\zeta(t)$ verschobenen ungetriebenen Oszillator mit einer zusätzlichen komplexen Phase entsprechen. Da eine komplexe Phase beim Bilden des Betrages wegfällt, gilt

$$\Psi_n^*(x, t) \Psi_n(x, t) = |\Psi_n(x, t)|^2 = |\Phi_n(x, t)|^2 = |\Psi_{n,ung}(x - \zeta(t), t)|^2 = |\Psi_{n,ung}(y, t)|^2, \tag{3.25}$$

wobei $\Psi_{n,ung}(y, t)$ die Zustände des ungetriebenen Oszillators bezeichnen.

Bei dem Integral von $-\infty$ bis ∞ ist eine konstante Verschiebung der Variable irrelevant. Außerdem sind die $\Psi_{n,ung}(y, t)$ auf dem Raum normiert, daher sind

auch die $\Psi_n(x, t)$ auf $x \in (-\infty, \infty)$ normiert, wie bereits am Ende von Kapitel 3.1 erw"ahnt.

Eine Visualisierung von Erwartungswerten folgt in Kapitel 4, weil es sich bei den Erwartungswerten der zwei gekoppelten Oszillatoren genau um die Summe aus den Erwartungswerten von zwei gesonderten Oszillatoren handelt, wie sich dort zeigen wird.

3.3.1 Erwartungswerte f"ur den Ort

INTERPRETATION ; SCHWINGT KLASSISCH USW Zuerst betrachten wir den Erwartungswert $\langle x \rangle_n$ des Ortsoperators x f"ur den n -ten Zustand $\Psi_n(x, t)$ des getriebenen Oszillators, welcher per Definition gegeben ist durch

$$\langle x \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t) x \Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x dx . \quad (3.26)$$

Mit der Substitution $y = x - \zeta(t)$ und unter Verwendung von (3.25) und der Normierung der ungetriebenen Oszillator-Funktionen gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,ung}(x - \zeta(t), t)|^2 x dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,ung}(y, t)|^2 (y + \zeta(t)) dy \\ &= \langle y \rangle_{n,ung} + \zeta(t) = \zeta(t) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Da die Erwartungswerte $\langle y \rangle_{n,ung}$ f"ur den Ort des ungetriebenen Oszillators verschwinden, ist der Erwartungswert jedes Zust"andes des getriebenen Oszillators genau $\zeta(t)$.

Das bedeutet, der Erwartungswert $\langle x \rangle_n$ f"ur den Ort eines beliebigen Zustandes des quantenmechanischen getriebenen Oszillators entspricht genau der L"osung $\zeta(t)$ der Bewegungsgleichung des klassischen getriebenen Oszillators. Der Erwartungswert des ungetriebenen Oszillators, welcher im Ursprung liegt, ist somit um $\zeta(t)$ verschoben. Dies entspricht dem Ergebnis, wie es auch bei einer konstanten Verschiebung der Ortsvariable/-operator x erhalten wird, z.B. beim Oszillator im zus"atzlichen konstanten elektrischem Feld, nur dass die Verschiebung hier die zeitabh"angige klassische L"osung ist.

Da $\langle x \rangle_n = \zeta(t)$ logischerweise die klassische Bewegungsgleichung

$$m \langle \ddot{x} \rangle_n + m \omega_0^2 \langle x \rangle_n - S(t) = 0 \quad (3.28)$$

erf"ullt, ist erg"anzend das Ehrenfest-Theorem best"atigt.

Für den Erwartungswert von x^2 ergibt sich komplett analog

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{n,ung}(y, t)|^2 (y + \zeta(t))^2 dy \\ &= \langle y^2 \rangle_{n,ung} + 2 \langle y \rangle_{n,ung} \zeta(t) + \zeta^2(t) = l^2(2n+1) + \zeta^2(t) ,\end{aligned}\quad (3.29)$$

zusammen mit der charakteristischen Länge des ungetriebenen Oszillators

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} . \quad (3.30)$$

Der Erwartungswert ist nun um $\zeta^2(t)$ verschoben.

Insgesamt können alle Erwartungswerte $\langle x^m \rangle_n$ auf diese Art mit den bekannten ungetriebenen Erwartungswerten berechnet werden. Ab $\langle x^3 \rangle_n$ kommt es wegen $(y + \zeta(t))^3$ aber im Allgemeinen nicht nur zu Verschiebungen bzw. zusätzlichen $\zeta(t)$ -Termen, verglichen zu den ungetriebenen Erwartungswerten, mit dem selben Exponenten, weshalb wir den Erwartungswert $\langle x^m \rangle_n$ nicht einfacher schreiben können als den linearen Erwartungswert des Klammerausdruckes mit dem binomischen Lehrsatz **[binom]** zu vereinfachen:

$$\langle x^m \rangle_n = \langle (y + \zeta(t))^m \rangle_{n,ung} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \zeta^j(t) \langle y^{m-j} \rangle_{n,ung} . \quad (3.31)$$

3.3.2 Erwartungswerte für den Impuls

Um den Erwartungswert $\langle p \rangle_n$ des Impulsoperators für den Zustand $\Psi_n(x, t)$ des angetriebenen Oszillators zu ermitteln, nutzen wir gleichermaßen die Beziehung (3.25) und unterdessen ein geschicktes Anwenden der Produktregel, um das Problem erneut auf den ungetriebenen Oszillator zu beschränken.

Wieder wählen wir den Variablenwechsel zur neuen Variable $y = x - \zeta(t)$, weil Impulsoperator $p = p_x$ in der neuen Koordinate identisch ist, wie schon am Anfang von kapitel 3.1 angedeutet, was sich leicht mit der Kettenregel zeigen lässt:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \cdot 1 \quad \text{d.h.} \quad p_x \equiv p_y . \quad (3.32)$$

Weiterhin können wir den y -unabhängigen Teil der komplexen Phasen in den Wellenfunktionen (3.12) sofort am Operator vorbeiziehen und zu 1 zusammenfassen,

daher schreiben wir $\langle p \rangle_n$ als

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x, t) p \Psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(y + \zeta(t), t) p_y \Psi_n(y + \zeta(t), t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y} p_y N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y} dy . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nun spalten wir die Anwendung des Impulsoperators auf den rechten Teil durch Anwenden der Produktregel auf in die Anwendung auf die ungetriebene Oszillatorfunktion (in der neuen Koordinate y) und die Anwendung auf die verbleibende komplexe Phase:

$$\begin{aligned} p_y N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y} &= \\ \left(p_y N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} \right) e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y} + N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} \left(p_y e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t) y} \right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} m \dot{\zeta}(t)} \left[p_y N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} + N_n O_n(y) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} y^2} m \dot{\zeta}(t) \right] . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Hiernach haben wir effektiv erreicht, dass wir den Impulsoperator an der y -abh"angigen Phase vorbei ziehen konnten. Damit ist es m"oglich die verbliebenen Phasen in (3.33) ebenso zu 1 zu vereinfachen. Es verbleiben nun nur noch im ersten Teil der eckigen Klammer die Anwendung des Impulsoperators auf die Wellenfunktionen des ungetriebenen Oszillators und im zweiten Teil die Multiplikation dieser mit einem ortsunabh"angigen Term. Zusammen mit dem "ubrigen linken Teil aus (3.34), welcher nach dem Wegfallen der komplexen Phase jetzt auch der ungetriebenen Wellenfunktion entspricht, ergeben sich dadurch die Erwartungswerte f"ur p_y und den Term $m \dot{\zeta}(t)$, welcher nur zeitabh"angig ist.

Schlie"sslich k"onnen wir den Erwartungswert f"ur den Impuls in Abh"angigkeit der bekannten Erwartungswerte des Standart-Oszillators hinschreiben:

$$\langle p \rangle_n = \langle p_y \rangle_{n, ung} + m \dot{\zeta}(t) = m \dot{\zeta}(t) \quad (3.35)$$

Wieder erf"ullt der Erwartungswert die Bewegungsgleichung des klassischen Oszillators:

$$\langle \ddot{p} \rangle_n + \omega_0^2 \langle p \rangle_n - \dot{S}(t) = 0 . \quad (3.36)$$

Wie an (3.34) zu sehen, ist es dar"uber hinaus einfach den Erwartungswert $\langle p^m \rangle_n$ f"ur einen beliebigen Exponenten $m \in \mathbb{N}$ zu evaluieren. Wir k"onnen auf gleichem Wege die Produktregel anwenden, und erhalten wieder den ungetriebenen Erwartungswert $\langle p_y^m \rangle$ aber diesmal zus"atzlich die m -Fache Anwendung des Operators auf die komplexe Phase, was wir sofort verallgemeinert aufschreiben k"onnen, da sich die

komplexe Phase beim Ableiten nur reproduziert, weil immer der ortsunabh"angige Term $m\dot{\zeta}(t)$ "uber bleibt. Es folgt:

$$\langle p^m \rangle_n = \langle p_y^m \rangle_{n,ung} + (m\dot{\zeta}(t))^m. \quad (3.37)$$

Speziell f"ur $m = 2$ gilt

$$\langle p^2 \rangle_n = \langle p_y^2 \rangle_{n,ung} + (m\dot{\zeta}(t))^2 = m^2\omega_0^2 l^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t). \quad (3.38)$$

3.3.3 Heisenberg'sche Unsch"arferelation

Mit den zuvor errechneten Erwartungswerten $\langle x \rangle_n, \langle x^2 \rangle_n, \langle p \rangle_n, \langle p^2 \rangle_n$ wird hier die Unsch"arfe des periodisch getriebenen Oszillators aufgestellt. Diese ist

$$\begin{aligned} \Delta x_n \Delta p_n &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2} \sqrt{\langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2} \\ &= \sqrt{l^2(2n+1) + \dot{\zeta}^2(t) - \dot{\zeta}^2(t)} \sqrt{m^2\omega_0^2 l^2(2n+1) + m^2\dot{\zeta}^2(t) - m^2\dot{\zeta}^2(t)} \\ &= \frac{\hbar}{2}(2n+1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Unsch"arfe ist also gleich der des ungetriebenen Oszillators, welche nur f"ur den Grundzustand $n = 0$ minimal ist. Dieses Ergebnis macht Sinn in Anbetracht der Tatsache, dass die (zeitabh"angige) Verschiebung der Wellenfunktionen im Raum $\zeta(t)$ (3.12) die Unsch"arfe nicht "andern sollte. Die Wellenfunktionen haben allerdings noch den weiteren Unterschied der orts- und zeitabh"angigen komplexen Phase, verglichen mit den Wellenfunktionen des Standard-Oszillators. Diese spielt zwar keine Rolle bei den Erwartungswerten f"ur den Ort, bei den Impulserwartungswerten aber schon. Dennoch war zu erwarten, dass sich auch beim Impuls eine Standardabweichung Δp_n wie beim ungetriebenen Oszillator ergibt, so wie bei Δx_n , da $\langle p \rangle_n$ im Wesentlichen die zeitliche Ableitung von $\langle x \rangle_n$ ist. Demnach folgte die gleiche Unsch"arfe.

MEHR SCHREIEN ???????

3.3.4 Erwartungswert f"ur die Energie

b

4 Zwei gekoppelte getriebene harmonische Oszillatoren in der Quantenmechanik

In diesem Teil der Arbeit wird mit Hilfe der aus (3.1) bekannten Lösung des einzelnen getriebenen Oszillators, die Wellenfunktionen für ein System hergeleitet, dass aus zwei gekoppelten Oszillatoren x_1 und x_2 der gleichen Masse m besteht, von denen einer mit der periodischen Kraft $S(t) = S(t+T)$ angetrieben wird. Die Potentialkonstanten k der beiden Oszillatoren sind ebenfalls identisch, die Kopplungskonstante κ zwischen den Oszillatoren ist allerdings anders. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann direkt aus der klassischen Mechanik übernommen werden:

$$H(t) = H(t+T) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - S(t)x_1. \quad (4.1)$$

Es werden auch die Erwartungswerte für den Ort $\langle x_{1,2} \rangle_{n,l}$ und den Impuls $\langle p_{1,2} \rangle_{n,l}$, genauso wie der Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_{n,l}$ und dessen zeitliches Mittel $\bar{H}_{n,l}$ berechnet, indem auf die bekannten Erwartungswerte des einzelnen getriebenen Oszillators zur"uckgef"uhrt wird.

Zur Lösung des Systems wird eine unitäre Koordinatentransformation eingeführt, welche den Hamilton-Operator $H(x_1, x_2, p_1, p_2, t)$ zu zwei in den neuen Koordinaten unabhängigen Hamilton-Operatoren $H_+(x_+, p_+, t)$ und $H_-(x_-, p_-, t)$ mit effektiven Potentialkonstanten k_+, k_- entkoppelt, welche je einen einzelnen (getriebenen) Oszillator beschreiben. Dann ergeben sich die Wellenfunktionen leicht aus denen des einzelnen Oszillators.

4.1 Die Schrödinger-Gleichung mit unabhängigen Hamilton-Operatoren

Liegt ein Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_i H_i(x_i, p_i, t), \quad H_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i \quad (4.2)$$

vor, führt der Ansatz

$$\Psi = \prod_i \Psi(x_i, p_i, t), \quad \Psi_i \in \mathcal{H}_i \quad (4.3)$$

auf unabhängige Schrödinger-Gleichungen für die einzelnen Wellenfunktionen $\Psi_i(x_i, p_i, t)$, sodass **[online quelle]**

$$\delta_{i,j} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i = H_j \Psi_i \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Um dies schnell zu zeigen, schauen wir uns den Fall von zwei unabhängigen Operatoren an:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \iff \Psi_2 H_1 \Psi_1 + \Psi_1 H_2 \Psi_2 = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 \Psi_2 + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 \right). \quad (4.5)$$

Da die Operatoren nur auf Funktionen wirken, die auf dem selben Raum definiert sind, kann man sie an der jeweils anderen Funktion vorbei ziehen. Wenn wir weiterhin durch den Ansatz $\Psi_1 \Psi_2$ teilen, wird die Gleichung zu:

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 + \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = i\hbar \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1}{\Psi_1} + \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_2}{\Psi_2} \right). \quad (4.6)$$

Weil die linke und rechte Seite für alle unabhängigen x_1, p_1, x_2, p_2 gleich sein müssen, folgen die einzelnen Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 :

$$\frac{1}{\Psi_1} H_1 \Psi_1 = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1}{\Psi_1}, \quad \frac{1}{\Psi_2} H_2 \Psi_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_2}{\Psi_2}. \quad (4.7)$$

4.2 Unitäre Koordinatentransformation

b

5 Zusammenfassung und Ausblick

A Ein Anhangskapitel

Hier könnte ein Anhang stehen, falls Sie z.B. Code, Konstruktionszeichnungen oder Ähnliches mit in die Arbeit bringen wollen. Im Normalfall stehen jedoch alle Ihre Resultate im Hauptteil der Bachelorarbeit und ein Anhang ist überflüssig.

Literatur

- [1] A. Einstein. „A Generalization of the relativistic theory of Gravitation“. In: *Annals of Mathematics* 46.4 (1945), S. 578–584.
- [2] Marc Ensenbach und Mark Trettin. *Das LATEX2-Sündenregister*. 2011. URL: <ftp://ftp.mpi-sb.mpg.de/pub/tex/mirror/ftp.dante.de/pub/tex/info/l2tabu/german/l2tabu.pdf>.
- [3] *Git Bash - Download*. 2014. URL: <http://msysgit.github.io/>.
- [4] *Gnu-Make Homepage*. 2014. URL: <http://www.gnu.org/software/make/>.
- [5] Markus Kohm und Jens-Uwe Morawski. *KOMA -Script. ein wandelbares LaTeX-Paket*. 2013. URL: <http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/doc/scrguide.pdf>.
- [6] Friedhelm Kuypers. *Klassische Mechanik*. 9. Auflage. Wiley-VCH, 2010.
- [7] Philipp Lehman et al. *The Biblalex Package. Programmable Bibliographies and Citations*. 2014. URL: <ftp://ftp.fu-berlin.de/tex/CTAN/macros/latex/contrib/biblalex/doc/biblalex.pdf>.
- [8] *Pep et al. Toolbox – LATEX-Folien*. 2014. URL: <http://toolbox.pep-dortmund.org/files/archive/2014/latex.pdf>.
- [9] D. Satas, Hrsg. *Handbook of pressure sensitive adhesive technology*. 2nd. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.
- [10] *Texmaker. The universal LaTeX editor, Downloads*. 2014. URL: <http://www.xmlmath.net/texmaker/download.html>.
- [11] Joseph Wright. *siunitx - A comprehensive (SI) units package*. 2013. URL: <http://mirror.selfnet.de/tex-archive/macros/latex/contrib/siunitx/siunitx.pdf>.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel „L^AT_EX-Dokumentenklasse und Vorlage für Abschlussarbeiten an der TU Dortmund“ selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

Ort, Datum

Unterschrift