

## 5 Positions- und Orientierungsbestimmung auf der Basis von Positionsinformationen

Das klassische Lokalisationsproblem der analytischen Geometrie besteht darin, die Position und Orientierung eines kartesischen Objektkoordinatensystems in einem kartesischen Bezugs- oder Weltkoordinatensystem zu bestimmen. Diese Problematik wird immer wieder unter verschiedenen Gesichtspunkten auftreten, weshalb im folgenden Abschnitt verschiedene Verfahren zur Positions- und Orientierungsbestimmung hinsichtlich ihrer Eigenschaften diskutiert und verglichen werden. Dabei werden nur Verfahren betrachtet, die zur Lösung des Lokalisationsproblems Informationen verwenden, die sich mit Positionsmesssystemen bestimmen lassen. Diese Verfahren nutzen letztlich Messdaten von mehreren Positionskoordinaten, die in zwei verschiedenen Koordinatensystemen, deren Transformationsparameter gesucht werden, bekannt sind.

Die folgenden Betrachtungen gehen von einem Referenz- und Kalibrierkörperkoordinatensystem aus, wenngleich diese Ansätze für zwei beliebige kartesische Koordinatensysteme, deren Transformationsparameter zueinander gesucht werden, gelten. Sind Koordinaten in zwei Koordinatensystemen bekannt, so kann man über geeignete Relationen die Transformationsparameter zwischen den Koordinatensystemen berechnen.

### 5.1 Verfahren zur Ursprungsbestimmung

Nach Voraussetzung sind sowohl die kartesischen Koordinaten im Referenzkoordinatensystem als auch die kartesischen Koordinaten im Kalibrierkörperkoordinatensystem bekannt, weshalb sich um die Kalibrierkörperkoordinaten im zweidimensionalen Raum Kreise und im dreidimensionalen Raum Kugeln mit dem Radius der Euklidischen Distanz der Referenzkoordinaten zeichnen lassen. Die Schnittpunkte einer ausreichenden Anzahl von Kreis- oder Kugelgleichungen definieren die Ursprungskoordinaten des Referenzkoordinatensystems, beschrieben im Kalibrierkörperkoordinatensystem. Hierbei lassen sich quadratische und lineare Ansätze unterscheiden. Die Lösungen der quadratischen Ansätze sind mehrdeutig und bestimmen im allgemeinen zwei Lösungen, die über einen Plausibilitätstest ausgewählt werden müssen. In der Praxis lässt sich ein einfacher Plausibilitätstest anwenden, indem man den Euklidischen Abstand zwischen dem mit geringer Genauigkeit ("Zollstockgenauigkeit") ermittelten Koordinaten der Ursprungsparameter des Referenzkoordinatensystems im Kalibrierkörperkoordinatensystem beider Lösungen berechnet. Die Lösung, deren Distanzmaß minimal ist, stellt die gesuchte Lösung dar.

### 5.1.1 Quadratischer Ansatz

Die Koordinaten des Ursprung  $C \equiv \mathbf{s} = (x_C, y_C, z_C)^t$  im dreidimensionalen Raum (Referenzposition im Kalibrierkörperkoordinatensystem) lässt sich durch den Schnittpunkt dreier Kugelsphären um die angefahrenen Kalibrierpunkte  $P_1 \equiv \mathbf{p}_1$ ,  $P_2 \equiv \mathbf{p}_2$  und  $P_3 \equiv \mathbf{p}_3$  bestimmen [82]:

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_{\pm} = \mathbf{p}_1 + l_{12} \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|_E} + l_{13} \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1\|_E} \pm h \cdot \mathbf{n}, \quad (5-1.1)$$

$$\text{mit der Flächennormalen } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{d}_{12} \times \mathbf{d}_{13}}{\|\mathbf{d}_{12} \times \mathbf{d}_{13}\|_E} \text{ der Grundebene} \quad (5-1.2)$$

und den Hilfsgrößen

$$l_{12} = \frac{R_1 \cos(\zeta_2) \tan(\xi - \psi)}{\sin(\xi)}, \quad l_{13} = \frac{R_1 \cos(\zeta_1) \tan(\psi)}{\sin(\xi)}, \quad (5-1.3-4)$$

$$h = R_1 \sqrt{1 - \left( \frac{\cos(\zeta_1)}{\cos(\psi)} \right)^2}, \quad (5-1.5)$$

$$\xi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{2 d_{12} d_{13}} (d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2)\right) & \text{für } P_2 \text{ im I.+IV. Quadranten} \\ \arccos\left(\frac{1}{2 d_{12} d_{13}} (d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2)\right) + \pi & \text{für } P_2 \text{ im II.+III. Quadranten} \end{cases}, \quad (5-1.6)$$

$$\psi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\cos \zeta_2 - \cos \zeta_1 \cos \xi}{\cos \zeta_1 \sin \xi}\right) & \text{für } P_L \text{ im I.+IV. Quadranten} \\ \arctan\left(\frac{\cos \zeta_2 - \cos \zeta_1 \cos \xi}{\cos \zeta_1 \sin \xi}\right) + \pi & \text{für } P_L \text{ im II.+III. Quadranten} \end{cases}, \quad (5-1.7)$$

$$\zeta_1 = \arccos\left(\frac{1}{2 R_1 d_{12}} (R_1^2 + d_{12}^2 - R_2^2)\right) \text{ und } \zeta_2 = \arccos\left(\frac{1}{2 R_1 d_{13}} (R_1^2 + d_{13}^2 - R_3^2)\right). \quad (5-1.8-9)$$

Die Radien  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  der Kugeln sind die Euklidischen Distanzen der Referenzposition.

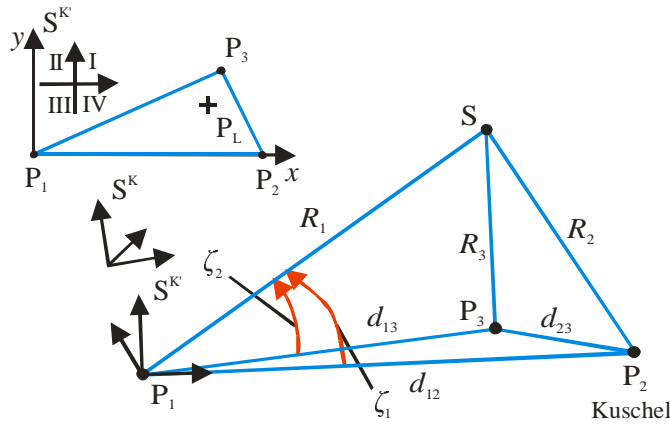


Abb. 5-1: Grundfläche und Ansicht der Pyramide

Es existieren zwei Lösungen für  $s$ . Die korrekte Lösung lässt sich durch Plausibilitätsbetrachtungen oder durch eine Abstandbestimmung zu dem mit "Zollstockgenauigkeit" bekannten Ursprungsparametern auswählen. Die Fallunterscheidungen in den Gleichungen (5-1) lassen sich unter grober Kenntnis der Ursprungsparameter vollziehen.

Hierbei ist die Lage des Punktes  $P_L$  und des Punktes  $P_3$  bestimmend (siehe Abb. 5-1). Der Punkt  $P_L$  ist der Fußpunkt des Lotes, welches vom Ursprung  $S$  des Referenzkoordinatensystems auf die durch die Kalibrierpunkte  $P_1, P_2, P_3$  definierte Ebene gefällt wird.

Die zur Berechnung der Referenzposition  $C \equiv (x_C, y_C)^t$  im Ebenenmodell benötigten Abstände  $d_{1,2}$  der beiden Kalibrierpunkte  $P_{1,2} \equiv (x_{1,2}, y_{1,2})^t$  zum Punkt  $C$  lassen sich nach dem Cosinussatz zu

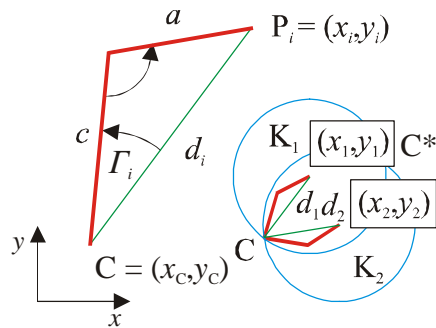


Abb. 5-2: Quadratischer Kreisgleichungsschnitt

berechnen (siehe Abb. 5-2) [116].

$$d_{1,2} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(\alpha_{1,2})} \quad (5-2)$$

berechnen (siehe Abb. 5-2) [116].

Die Kreisgleichungen für die beiden Kreise um  $P_{1/2}$  lauten:

$$d_{1,2}^2 = (x_{1,2} - x_C)^2 + (y_{1,2} - y_C)^2. \quad (5-3)$$

Aus diesen beiden Kreisgleichungen erhält man:

$$x_C = -\frac{r y_1 - x_1 - r s}{1 + r^2} \pm \sqrt{\frac{(d_1^2 - x_1^2 - y_1^2 + 2s y_1 - s^2)(1 + r^2) + (r y_1 - x_1 - r s)^2}{(1 + r^2)^2}},$$

$$y_C = -r x_C + s,$$

mit  $r = (x_2 - x_1)/(y_2 - y_1)$  und  $s = (d_1^2 - d_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)/(2(y_2 - y_1))$ . (5-4)

### 5.1.2 Linearer Ansatz

Zur Berechnung der Rereferenzposition  $(x_C, y_C, z_C)^t$  im dreidimensionalen Raum benötigt man die Abstände  $(d_1, \dots, d_I)^t$ ,  $I \geq 4$  zum Ursprung  $C$  des Referenzkoordinatensystems und die Kalibrierkörperkoordinaten  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ ,  $i \in \{1, \dots, I\}$ . Ausgehend von den  $I$  Kugelgleichungen

$$K_i : (x_i - x_C)^2 + (y_i - y_C)^2 + (z_i - z_C)^2 = d_i^2 \quad (5-5)$$

erhält man nach Ausquadrieren und der Subtraktion der Kugelgleichungen  $K_n - K_{n+1}$ ,  $n \in \{1, \dots, I-1\}$  in Matrizennotation das lineare Gleichungssystem:

$$2 \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i & y_{i+1} - y_i & z_{i+1} - z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = (d_i^2 - d_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 - x_i^2 + y_{i+1}^2 - y_i^2 + z_{i+1}^2 - z_i^2). \quad (5-6)$$

Die gesuchte Lösung der Ursprungskoordinaten lässt sich mit Hilfe der Pseudoinversen der SVD-Zerlegung oder über die Cramersche Regel analytisch berechnen, sofern  $I = 4$  und die 3x3-Matrix regulär ist.

Analog dazu erhält man für das Ebenenmodell das lineare Gleichungssystem:

$$2 \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i & y_{i+1} - y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \left( d_i^2 - d_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 - x_i^2 + y_{i+1}^2 - y_i^2 \right) . \quad (5-7)$$

Die gesuchte Lösung kann auch hier mit Hilfe der Pseudoinversen der SVD-Zerlegung oder über die Cramersche Regel berechnet werden, sofern  $I = 3$  und die 2x2-Matrix regulär ist.

## 5.2 Verfahren zur Orientierungsbestimmung

Die Orientierungsbestimmung kann auf Basis von 3D-Koordinaten oder gegenüber einer Ebene erfolgen.

### 5.2.1 Orientierung von Koordinatensystemen

Bei dem Orientierungsbestimmungsverfahren geht man analog zu den Ursprungsbestimmungsverfahren davon aus, dass sowohl die Referenz- und die Kalibrierkörperkoordinaten  $\mathbf{v}_i^R$  und  $\mathbf{v}_i^K$  der angefahrenen Raumpunkte als auch die Ursprungskoordinaten  $\mathbf{t}_R^K$  des Referenzkoordinatensystems im Kalibrierkörperkoordinatensystem bekannt sind. Infolgedessen ist die Transformation kartesischer Koordinaten bis auf die Drehung der Koordinatensysteme wohl bestimmt.

Mit drei im Kalibrierkörper-KS

$$\mathbf{M}^K = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^K & \mathbf{v}_2^K & \mathbf{v}_3^K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (5-8)$$

und Referenz-KS

$$\mathbf{M}^R = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^R & \mathbf{v}_2^R & \mathbf{v}_3^R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (5-9)$$

bekannten Punkten erhält man in nicht homogener Koordinatentransformation die Identitätsaussage

$$\mathbf{M}^R = \mathbf{Rot}_R^K (\mathbf{M}^K - \mathbf{Trans}_R^K), \quad (5-10.1)$$

$$\text{mit } \mathbf{Trans}_R^K = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_R^K & \mathbf{t}_R^K & \mathbf{t}_R^K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (5-11.2)$$

so dass sich die gesuchte Rotationsmatrix zu

$$\mathbf{Rot}_R^K = \mathbf{M}^R (\mathbf{M}^K - \mathbf{Trans}_R^K)^{-1} \quad (5-12)$$

berechnen lässt, sofern die  $3 \times 3$ -Matrix  $(\mathbf{M}^K - \mathbf{Trans}_R^K)$  regulär ist.

Analog zum dreidimensionalen Fall gilt für den zweidimensionalen die Relation

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}^R &\equiv \mathbf{r}^R - \mathbf{t}_K^R = \mathbf{D}_R^K(\phi) \mathbf{r}^K \text{ bzw.} \\ \begin{pmatrix} x^R - t_{Kx}^R \\ y^R - t_{Ky}^R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^K \\ y^K \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5-13)$$

so dass man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^R - t_{Kx}^R \\ y^R - t_{Ky}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^K & y^K \\ y^K & -x^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5-14)$$

erhält. Wählt man ein nicht im Ursprung liegendes Koordinatenpaar  $(x^K, y^K)^t$ , dessen transformierter Vektor  $(t_x^R, t_y^R)^t$  ungleich dem Translationsvektor  $(t_{Kx}^R, t_{Ky}^R)$  ist, so berechnet sich der Rotationswinkel  $\phi$  mit Hilfe der Cramerschen Regel über die Gleichung:

$$\phi = \arctan 2(\sin \phi, \cos \phi), \quad (5-15.1)$$

$$\text{mit } \sin \phi = -\frac{\begin{vmatrix} x^K & x^R - t_{Kx}^R \\ y^K & y^R - t_{Ky}^R \end{vmatrix}}{(x^K)^2 + (y^K)^2} \text{ und } \cos \phi = -\frac{\begin{vmatrix} x^R - t_{Kx}^R & y^K \\ y^R - t_{Ky}^R & -x^K \end{vmatrix}}{(x^K)^2 + (y^K)^2}. \quad (5-15.2)$$

### 5.2.2 Orientierung einer Ebene

Zur Bestimmung der Orientierung einer Ebene geht man von der Hesseschen Form der Ebenengleichung im Raum

$$A x^R + B y^R + C z^R - 1 = 0 \quad (5-16)$$

aus. Durch die Bestimmung von  $I \geq 3$  unterschiedlichen Punkten  $\mathbf{r}_i^R$ ,  $i \in \{1, \dots, I\}$  auf der Ebene erhält man das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_i^R & y_i^R & z_i^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = (1_i), \quad (5-17)$$

so dass man mit Hilfe der Pseudoinversen der SVD-Zerlegung den Normalenvektor der Fläche zu

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A^R &= (\cos(\alpha) \quad \cos(\beta) \quad \cos(\gamma))^t, \text{ mit} \\ \cos(\alpha) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ und} \\ \cos(\gamma) &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \quad (5-18)$$

berechnen kann. Die Orientierung der Ebenen lässt sich mit dem Ansatz

$$\mathbf{R}_y(\Theta_y) \mathbf{R}_x(\Theta_x) \mathbf{n}_A^R = (0 \quad 0 \quad 1)^t \quad (5-19)$$

zu

$$\Theta_x = \arctan 2(\cos(\beta), \cos(\gamma)) \text{ und } \Theta_y = -\arctan(\cos(\alpha)) \quad (5-20)$$

berechnen. Diese Winkel definieren zugleich die erforderliche Orientierungsänderung des Koordinatensystems  $S^R$ , die eine Ausrichtung der  $x/y$ -Ebene dieses Koordinatensystems auf die Ebene bewirkt. Analoge Beziehungen gelten für die  $x/z$ - und  $y/z$ -Ebenen.

## 5.3 Kombinierte Verfahren

Die kombinierten Verfahren der Transformationsparameterbestimmung zwischen zwei Koordinatensystemen lassen sich in iterative und analytische Methoden klassifizieren. Hierbei geht man davon aus, dass  $I$  Raumpunkte  $P_i$  bzw. deren Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i^{\varepsilon}$ , mit  $\varepsilon \in \{R, K\}$ ,  $i \in \{1, \dots, I\}$  und  $I \geq 3$  sowohl im Referenz- als auch Kalibrierkörperkoordinatensystem bekannt sind.

### 5.3.1 Iteratives Verfahren

Die Bestimmung der Transformationsparameter lässt sich sodann als Minimierungsproblem der Art

$$\text{Min}_{(\boldsymbol{\Theta}_R^K, \mathbf{t}_K^R)} \left\{ \sum_{i=1}^I \left\| \mathbf{T}_R^K \mathbf{r}_i^K - \mathbf{r}_i^R \right\|_E \right\} \mapsto (\boldsymbol{\Theta}_R^{Kt}, \mathbf{t}_K^{Rt})^t, \quad (5-21.1)$$

$$\text{mit } \mathbf{T}_R^K = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\boldsymbol{\Theta}_R^K) & \mathbf{t}_K^R \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{\Theta}_R^K = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)_R^{Kt} \quad (5-21.2)$$

deuten.

Für die Minimumssuche selbst finden iterative Verfahren Anwendung, weshalb der obige Ansatz iterativer Natur ist.

### 5.3.2 Analytische Verfahren

Es existieren analytische Verfahren sowohl für 3 als auch 4 Messpunkte. Das Vierpunkteverfahren ist vorzuziehen, wenn die Differenzvektoren der Kalibrierpunkte ein möglichst orthogonales Dreibein bei möglichst homogenen Vektorbeträgen aufspannen. In den anderen Fällen ist die Dreipunktemethode anzuwenden, bei der zwei Differenzvektoren möglichst orthogonal aufeinander stehen sollten.

#### 5.3.2.1 Vier-Punkte-Methode

Die analytische Berechnung der Transformationsparameter lässt sich über 4 Kalibrierpunkte  $P_i$ ,  $I = 4$  vollziehen. Ausgehend von der Koordinatentransformation

$$\mathbf{r}_i^R = \mathbf{D}_R^K \mathbf{r}_i^K + \mathbf{t}_K^R \quad (5-22)$$

erhält man für die 3 Differenzvektoren  $\mathbf{r}_1^{\varepsilon} = \overline{P_1 P_2}$ ,  $\mathbf{r}_2^{\varepsilon} = \overline{P_2 P_3}$  und  $\mathbf{r}_3^{\varepsilon} = \overline{P_3 P_4}$  im Kalibrierkörper- und Referenzkoordinatensystem über die Matrixgleichung

$$\mathbf{V}^R = \mathbf{D}_R^K \mathbf{V}^K, \quad (5-23.1)$$

$$\text{mit } \mathbf{V}^R = (\mathbf{r}_1^R \quad \mathbf{r}_2^R \quad \mathbf{r}_3^R) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ und } \mathbf{V}^K = (\mathbf{r}_1^K \quad \mathbf{r}_2^K \quad \mathbf{r}_3^K) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (5-23.2)$$

eine Relation zwischen diesen Vektoren, die sich zur analytischen Bestimmung der Drehmatrix heranziehen lässt. Damit lässt sich die Drehmatrix über

$$\mathbf{D}_R^K = \mathbf{V}^R (\mathbf{V}^K)^{-1}, \quad (5-24)$$

berechnen, sofern die Differenzvektoren linear unabhängig sind. Der gesuchte Translationsvektor lässt sich sodann mit (5-22) und (5-24) zu

$$\mathbf{t}_K^R = \mathbf{r}_i^R - \mathbf{V}^R (\mathbf{V}^K)^{-1} \mathbf{r}_i^K \quad (5-25)$$

berechnen. Diese Bestimmung der Transformationsparameter ist eindeutig.

Die Beziehungen für den ebenen Fall sind isomorph zu dem dreidimensionalen Fall. Die Vektoren und damit auch die Matrizen sind hierbei in ihrer Ordnung um eins zu reduzieren.

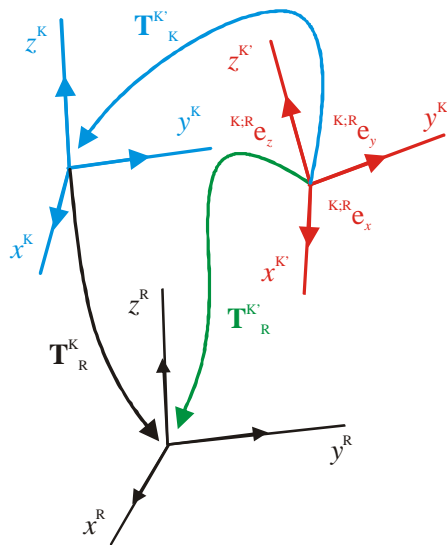
### 5.3.2.2 Drei-Punkte-Methode

An drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  lässt sich eindeutig ein kartesisches Koordinatensystem  $K'$  anbinden, indem man folgende Vereinbarungen festlegt:

$P_1$  sei Ursprung des Koordinatensystems  $K'$ ,

Die x-Achse des Koordinatensystems  $K'$  liege in Richtung der Verbindungsgeraden von  $P_1$  zu  $P_2$  und

die x/y-Ebene des Koordinatensystems  $K'$  gehe durch die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ .



Sind die Punkte, die das Koordinatensystem  $K'$  aufspannen, sowohl im Kalibrierkörper- als auch Referenz-KOS bekannt, so lassen sich die Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\varepsilon &\equiv \mathbf{e}_x^\varepsilon = \frac{\mathbf{p}_2^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon}{|\mathbf{p}_2^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon|} \\ \mathbf{a}^\varepsilon &\equiv \mathbf{e}_z^\varepsilon = \frac{(\mathbf{p}_2^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon) \times (\mathbf{p}_3^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon)}{|(\mathbf{p}_2^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon) \times (\mathbf{p}_3^\varepsilon - \mathbf{p}_1^\varepsilon)|} \\ \mathbf{o}^\varepsilon &\equiv \mathbf{e}_y^\varepsilon = \frac{\mathbf{e}_z^\varepsilon \times \mathbf{e}_x^\varepsilon}{|\mathbf{e}_z^\varepsilon \times \mathbf{e}_x^\varepsilon|} \end{aligned} \quad \text{mit } \varepsilon \in \{K, R\}, \quad (5-26)$$

Abb. 5-3: Poseberechnung mit der Dreipunktemethode

angeben, womit sich die homogene Koordinatentransformationen zu

$$\mathbf{T}_R^K = \mathbf{T}_R^{K'} (\mathbf{T}_K^{K'})^{-1}, \quad \text{mit } \mathbf{T}_R^{K'} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^R & \mathbf{e}_y^R & \mathbf{e}_z^R & \mathbf{p}_1^R \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (5-27)$$

$$(\mathbf{T}_K^{K'})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^K & \mathbf{e}_y^K & \mathbf{e}_z^K & -\mathbf{p}_1^K \cdot \mathbf{e}_x^K \\ & & & -\mathbf{p}_1^K \cdot \mathbf{e}_y^K \\ & & & -\mathbf{p}_1^K \cdot \mathbf{e}_z^K \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

ergeben.



## 5.4 Vergleich der Verfahren

Die Ursprungs- und die Orientierungsberechnungsverfahren sowie die kombinierten Verfahren bestimmen die Transformationsparameter zwischen zwei Koordinatensystemen. Die kombinierten Verfahren unterscheiden sich von der gemeinsamen Anwendung der Ursprungs- und Orientierungsberechnungsverfahren dadurch, dass die Reihenfolgen der Translations- und Rotationstransformationen der Koordinatentransformationen in vertauschten Reihenfolgen anzuwenden sind. Die unterschiedlichen Eigenschaften der Verfahren sind in Tab. 5-1 zusammengefasst.

Für die Fehlerfortpflanzungsanalyse wurde von einem Kalibrierkörper, einer Pose desselben in Relation zum Referenzkoordinatensystem und von unkorrelierten zufälligen und systematischen Fehlern der Kalibrierpositionen ausgegangen, die den Einsatzbedingungen in der Robotik entsprechen (Tab. 5-2 und 5-4). Die Ergebnisse dieser Analysen sind in Tab. 5-5 dargestellt.

Identifikationsverfahren	Dim.	Anzahl Kalib.-Punkte	ein-deutig
<b>Ursprungsparameter</b>			
Quadratischer Ansatz	3-D	3	
"	2-D	2	
Linearer Ansatz	3-D	4	⊗
"	2-D	3	⊗
<b>Orientierungsparameter</b>			
Koordinatensystem	3-D	3	⊗
Koordinatensystem	2-D	2	⊗
Ebene	3-D	$\geq 3$	⊗
<b>Kombinierte Verfahren</b>			
Iteratives Verfahren	3-D	$\geq 3$	
Analytisches Verfahren	3-D	$4 \vee 3$	⊗
Iteratives Verfahren	2-D	$\geq 2$	
Analytisches Verfahren	2-D	3	⊗

**Tab. 5-1:** Übersicht der Verfahren zur Transformationsparameterbestimmung zwischen Kalibrierkörper- und Referenzkoordinatensystem

<b>2D</b>	$\mathbf{r}_i^K / \text{m}$	$(0,4 ; 0)^t$	$(0 ; 0,4)^t$	$(0 ; 0)^t$	$(0,4 ; 0,4)^t$	$(0,2 ; 0,3)^t$
	$\mathbf{t}_K^R / \text{m}$	$(0,2 ; 10^{-3})^t$	$\Theta_R^K / ^\circ$	$(0 ; 0 ; 0,1)^t$		
<b>3D</b>	$\mathbf{r}_i^K / \text{m}$	$(0,4 ; 0 ; 0)^t$	$(0 ; 0,4 ; 0)^t$	$(0 ; 0 ; 0,4)^t$	$(0,4 ; 0,4 ; 0,4)^t$	$(0,2 ; 0,3 ; 0,4)^t$
	$\mathbf{t}_K^R / \text{m}$	$(0,2 ; 10^{-3} ; 10^{-3})^t$	$\Theta_R^K / ^\circ$	$(0,1 ; 0,1 ; 0,1)^t$		

**Tab. 5-2:** Kalibrierpositionen

$\mathbf{t}_K^S / \text{mm}$	$\Theta_S^K / ^\circ$	$\sigma_{x;y;z}^K$	$\sigma_{x;y;z}^R$	$\Delta x^K ; \Delta y^K ; \Delta z^K$	$\Delta x^R ; \Delta y^R ; \Delta z^R$
$(50 ; 120 ; 70)^t$	$(1,1 ; 1,2 ; 0,1)^t$	25 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$	100 $\mu\text{m}$

**Tab. 5-3:** Posevektor zwischen Kalibrierkörper- und Sensorkoordinatensystem bei der Orientierungsmessung einer Ebene

**Tab. 5-4:** Zufällige und systematische Fehler der Positionen

Bei einer Kombination der Ursprungs- mit den Orientierungsbestimmungsverfahren ist die Anzahl der benötigten Kalibrierpunkte gleich dem Maximum der Kalibrierpunktezahls beider Verfahren. Die quadratischen Verfahren kommen mit nur zwei bzw. drei Messpositionen im zwei- bzw. dreidimensionalen Fall aus und die linearen Ansätze benötigen zugunsten einer eindeutigen Lösung einen zusätzlichen Messpunkt. Bei den quadratischen Ansätzen existieren im zweidimensionalen Fall zwei und im dreidimensionalen Fall vier Lösungen, wobei die wahre Lösung unter Nutzung der Sollwerte der Kennzahlen durch Plausibilitätsbetrachtungen bestimmt werden kann. Die geringere Anzahl an Messungen kommt den Anforderungen der Praxis nach Schnelligkeit und Einfachheit entgegen, weshalb diese Verfahren in der Regel vorzuziehen sind. Die zufälligen Fehler liegen hierbei zwischen 140 µm und 190 µm bzw. 0,016° und 0,023° und die systematischen Fehler zwischen 150 µm und 450 µm bzw. 0,022° und 0,036°, wobei die quadratischen Verfahren deutlich geringere Unsicherheiten als die linearen Verfahren aufweisen.

Die kombinierten analytischen Verfahren sind eindeutig und erreichen zu den quadratischen Verfahren vergleichbare Ergebnisse, jedoch bei einer homogenen Fehleraufteilung. Sie erfordern ebenfalls eine weitere Messposition.

Identifikationsverfahren		$(\sigma_{tx} \sigma_{ty} \sigma_{tz})^t$ / $\mu\text{m}$	$(\sigma_{\theta x} \sigma_{\theta y} \sigma_{\theta z})^t$ / $^\circ$	$(\Delta t_x \Delta t_y \Delta t_z)^t$ / $\mu\text{m}$	$(\Delta \theta_x \Delta \theta_y \Delta \theta_z)$ / $^\circ$
Ursprungsparameter					
Quadratischer Ansatz	3-D	112,37	---	154,52	---
		137,08	---	302,01	---
		137,24	---	301,50	---
"	2-D	112,19	---	152,87	---
		137,24	---	301,01	---
		---	---	---	---
Linearer Ansatz	3-D	188,51	---	731,39	---
		179,98	---	678,65	---
		182,33	---	690,85	---
"	2-D	148,04	---	450,84	---
		126,57	---	400,89	---
		---	---	---	---
Orientierungsparameter					
Koordinatensystem	3-D	---	0,0215	---	0,0358
		---	0,0215	---	0,0358
		---	0,0215	---	0,0359
Koordinatensystem	2-D	---	---	---	---
		---	---	---	---
		---	0,0160	---	0,0215
Kombinierte Verfahren					
Iteratives Verfahren	3-D	39,42	0,0053	207,25	0,0293
		38,82	0,0054	217,75	0,0293
		37,43	0,0056	217,89	0,0299
Analytisches Verfahren	3-D	111,80	0,0160	300,35	0,0430
		111,80	0,0160	300,35	0,0430
		111,80	0,0160	300,35	0,0430
Iteratives Verfahren	2-D	34,21	---	149,91	---
		34,25	---	150,09	---
		---	0,0057	---	0,0286
Analytisches Verfahren	2-D	112,00	---	150,00	---
		112,00	---	150,00	---
		---	0,0226	---	0,0430

Tab. 5-5: Zufällige und systematische Fehler der Positions- und Orientierungsbestimmungsverfahren

Die kombinierten iterativen Verfahren können vorteilhaft angewendet werden, wenn eine größere Anzahl von fünf bis zehn Messpunkten zur Verfügung steht. Durch die Verwendung mehrerer Datensätze findet im Mittel ein Ausgleich statt, so dass das Verfahren gegenüber den analytischen Ansätzen weniger empfindlich hinsichtlich Messausreißern und zufälligen Fehlern ausfällt. Die Unsicherheiten liegen im Bereich von  $34\text{ }\mu\text{m}$  bis  $40\text{ }\mu\text{m}$  bzw.  $0,0053^\circ$  bis  $0,0057^\circ$ . Die systematischen Fehler fallen gegenüber den quadratischen Verfahren hinsichtlich der Positionsunsicherheiten geringfügig günstiger und hinsichtlich der Orientierungsunsicherheiten geringfügig schlechter aus, was sich quasi ausgleicht.

$r^K; \Delta\varphi_{Kz}$	$\sigma_{x,y}^S$	$\sigma_z^S$	$\Delta x^S; \Delta y^S$	$\Delta z^S$
50 mm ; $360^\circ/3$	1,0 mm	100 $\mu\text{m}$	1,0 mm	100 $\mu\text{m}$

**Tab. 5-6:** Zufällige und systematische Fehler der Positionen bei der Orientierungsbestimmung einer Ebene

	$\theta_x$	$\theta_y$
$\sigma$	0,0972	0,0972
$\Delta$	0,1856	0,2139

**Tab. 5-7:** Zufällige und systematische Fehler bei der Orientierungsbestimmung einer Ebene

	$\Delta\theta_x$	$\Delta\theta_y$	$\sigma_{\theta_x}$	$\sigma_{\theta_y}$
$x_1^R$	0,01%	7,49%	0,00%	2,72%
$y_1^R$	0,01%	6,84%	0,00%	2,27%
$z_1^R$	0,06%	35,68%	0,00%	61,69%
$x_2^R$	7,47%	3,75%	2,03%	0,68%
$y_2^R$	6,83%	3,43%	1,70%	0,57%
$z_2^R$	35,62%	17,88%	46,19%	15,49%
$x_3^R$	7,49%	3,73%	2,04%	0,68%
$y_3^R$	6,84%	3,41%	1,70%	0,56%
$z_3^R$	35,68%	17,80%	46,34%	15,35%

**Tab. 5-8:** Relative Fehleranteile bei der Orientierungsbestimmung einer Ebene

Unsicherheiten des  $z$ -Abstandes bestimmt werden. Insofern lässt sich das Verfahren als relativ robust gegenüber Unsicherheiten in den  $x$ - und  $y$ -Richtungen bezeichnen. Diese Unempfindlichkeit beruht letztlich auf dem Verhältnis der Steigungen

$$\left| \frac{\partial \gamma}{\partial z^K} / \frac{\partial \gamma}{\partial r^K} \right| = |\tan(\gamma)| \approx |\gamma| \text{ für } \gamma \rightarrow 0, \quad (5-28)$$

worin  $\gamma$  den Winkel des Richtungskosinus (5-18) darstellt, welches bei Winkeln in der Größenordnung von  $1^\circ \equiv 0,0175\text{ rad}$  entsprechend klein ausfällt.

Für die Analyse des Fehlerfortpflanzungsverhaltens bei der Orientierungsbestimmung einer Ebene wird davon ausgegangen, dass man 3 Messpunkte auf der  $x/y$ -Ebene mit einem Radius  $r^K$  durch äquidistante Drehung mit  $\Delta\varphi_{Kz}$  um die  $z$ -Achse entsprechend der Tab. 5-6 in der Pose nach Tab. 5-3 erzeugt.

Weiterhin sei angenommen, dass die Messpunkte mit den Unsicherheiten der Tab. 5-6 bestimmt werden können, wobei in  $x$ - und  $y$ -Richtung von relativ großen und in  $z$ -Richtung von relativ kleinen unkorrelierten zufälligen und systematischen Fehlern ausgegangen wird, was den späteren Einsatzbedingungen des Verfahrens entspricht (Poseunsicherheiten bei der Montage des Sensors auf der Sensorhalterung einschließlich Positionierungsunsicherheiten bei der Messung).

Die Ergebnisse in Tab. 5-7 zeigen, dass, obwohl die Unsicherheiten in den  $x$ - und  $y$ -Richtungen relativ groß sind, die Orientierung der Ebene mit zufälligen Fehlern von ca.  $0,098^\circ$  und systematischen Fehlern von ca.  $0,21^\circ$  bestimmt werden kann.

Die relativen Fehleranteile der Messpositionen an den Unsicherheiten in Tab. 5-8 illustrieren, dass die Orientierungsfehler mit ca. 35% bis 62% von den

## 5.5 Best-Fit-Lagekorrektur

Das Problem der Lagekorrektur in einer flexiblen Montageanlage wird durch ein zu bewegendes  $n$ -tes Objekt, welches zu  $M_B - 1$  Objekten

$$m \in D_m \setminus n, \quad D_m \equiv \{1, \dots, M_B\} \quad (5-29)$$

im Sinne eines Best-Fit-Ausgleichs ausgerichtet wird, beschrieben. Dabei sollen die Objekt-posebeziehungen je nach Anforderungen gewichtet in den Ansatz eingehen, um für die Montage wichtige mechanische Schnittstellen bevorzugen zu können.

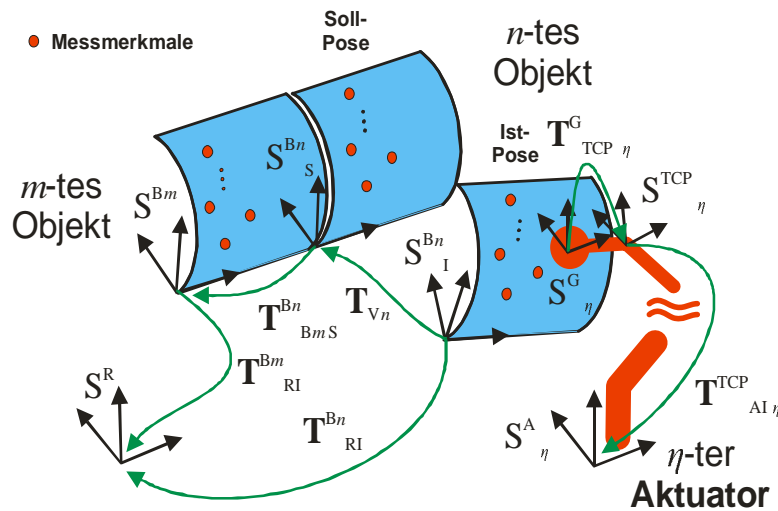


Abb. 5-4: Lagekorrektur von Objekten

Über den geschlossenen Umlauf in Abb. 5-4 erhält man für das  $m$ -te ruhende und  $n$ -te bewegte Bauteil die Beziehung:

$$\forall m \in D_m \setminus n \quad \mathbf{T}_{BmS}^{Bn} \mathbf{T}_{Vn} = (\mathbf{T}_{RI}^{Bm})^{-1} \mathbf{T}_{RI}^{Bn} . \quad (5-30)$$

In der Endphase der Montage müssen sämtliche Gleichungen erfüllt werden, so dass man das überbestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{T}_{HS} (\mathbf{T}_{In}^S)^{-1} = \mathbf{T}_{HI} \mathbf{T}_{RI}^{Bn} , \quad \text{mit den Hypermatrizen} \quad (5-31)$$

$$\mathbf{T}_{HS} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{B1S}^{Bn} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{Bn-1S}^{Bn} \\ \mathbf{T}_{Bn+1S}^{Bn} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{BM_B S}^{Bn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{HI} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_{RI}^{B1})^{-1} \\ \vdots \\ (\mathbf{T}_{RI}^{Bn-1})^{-1} \\ (\mathbf{T}_{RI}^{Bn+1})^{-1} \\ \vdots \\ (\mathbf{T}_{RI}^{BM_B})^{-1} \end{pmatrix}$$

erfüllen muss. Mit der Pseudoinversen von  $\mathbf{T}_{HS}$  lässt sich ein Ausgleich im quadratischen Mittel vollziehen, womit die Best-Fit-Transformation der Bauteilbewegung durch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{V_n} &= \left( \left( \mathbf{T}_{HS}^t \mathbf{T}_{HS} \right)^{-1} \mathbf{T}_{HS}^t \right) \mathbf{T}_{HI} \mathbf{T}_{RI}^{B_n} \\
 \mathbf{T}_{In}^S &= \left( \mathbf{T}_{HI} \mathbf{T}_{RI}^{B_n} \right)^{-1} \left( \left( \mathbf{T}_{HS}^t \mathbf{T}_{HS} \right)^{-1} \mathbf{T}_{HS}^t \right)^{-1} \\
 &= \left( \mathbf{T}_{HI} \mathbf{T}_{RI}^{B_n} \right)^{-1} \left( \mathbf{T}_{HS}^t \right)^{-1} \mathbf{T}_{HS}^t \mathbf{T}_{HS} \\
 &= \left( \mathbf{T}_{HI} \mathbf{T}_{RI}^{B_n} \right)^{-1} \mathbf{T}_{HS}
 \end{aligned} \tag{5-32}$$

beschrieben wird.

Diese analytische Lösung dient zur Startwertberechnung für das gewichtete Minimierungsproblem:

$$\text{Min}_{\mathbf{p}_{V_n}} \left\{ \sum_{m \in D_m \setminus n} g_m \Delta \mathbf{p}^t \Delta \mathbf{p} \right\}, \text{ mit } \mathbf{T}(\Delta \mathbf{p}) = \mathbf{T}_{RI}^{B_m} \mathbf{T}_{B_m S}^{B_n} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p}_{In}^S) \left( \mathbf{T}_{RI}^{B_n} \right)^{-1} \text{ und } g_m \in [0,1]. \tag{5-33}$$

Hierbei wird die Minimierung der homogenen Matrix auf den Parameterraum ihrer Pose reduziert. Für die Startwertberechnung mittels (5-32) ist es empfehlenswert, die Pseudoinverse über die numerisch stabile SVD-Zerlegung (Singular Value Decomposition) zu berechnen. Dies gilt grundsätzlich für die Berechnung der Pseudoinversen.

Die für die Best-Fit-Montage des  $n$ -ten Objekts benötigten Ist- und Soll-Posewerte der Objektrelationen in (5-31) werden aus den Messwerten des Referenzsystems  $S^R$  und den konstruktiven Daten der Objekte ermittelt. Stehen hierfür  $I > 4$  dreidimensionale Vektoren  $\mathbf{v}_i$  zur Verfügung, so kann die Poseidentifikation der Ist-Werte als Minimierungsproblem

$$\text{Min}_{(\mathbf{p}_{RI}^B)} \left\{ \sum_{i=1}^I g_m \left\| \left( \mathbf{T}(\mathbf{p}_{RI}^B) \left( \mathbf{v}_{mi}^{B_t} 1 \right)^t - \left( \mathbf{v}_{mi}^{R_t} 1 \right)^t \right) \right\| \right\}, \quad g_m \in [0,1] \tag{5-34}$$

gedeutet werden. Für das zur Lösung einzusetzende Iterationsverfahren lässt sich der Startwert mit dem Drei- oder Vier-Punkte-Verfahren in Kap. 5.3.2.2 oder 5.3.2.1 berechnen, sofern aus dem Datensatz zwei bzw. drei linear unabhängige Vektoren gebildet werden können. Beim Minimierungsansatz ist von Vorteil, dass man auf relativ einfache Weise sowohl verschiedene fertigungstechnisch relevante geometrische Interfacemerkmale als auch Gewichtungsfaktoren für diese in den Best-Fit-Ausgleich aufnehmen kann. Dies können z. B. Spaltmaße zwischen zu montierenden Objekten oder auch Winkelbeziehungen der Flächennormalenvektoren von Objektsektoren sein.



## Inhaltsverzeichnis

<b>5</b>	<b>Positions- und Orientierungsbestimmung auf der Basis von Positionsinformationen .....</b>	<b>1</b>
5.1	Verfahren zur Ursprungsbestimmung.....	1
5.1.1	Quadratischer Ansatz .....	2
5.1.2	Linearer Ansatz.....	3
5.2	Verfahren zur Orientierungsbestimmung.....	5
5.2.1	Orientierung von Koordinatensystemen .....	5
5.2.2	Orientierung einer Ebene .....	6
5.3	Kombinierte Verfahren .....	7
5.3.1	Iteratives Verfahren .....	7
5.3.2	Analytische Verfahren .....	7
5.3.2.1	Vier-Punkte-Methode.....	7
5.3.2.2	Drei-Punkte-Methode.....	8
5.4	Vergleich der Verfahren .....	9
5.5	Best-Fit-Lagekorrektur .....	12