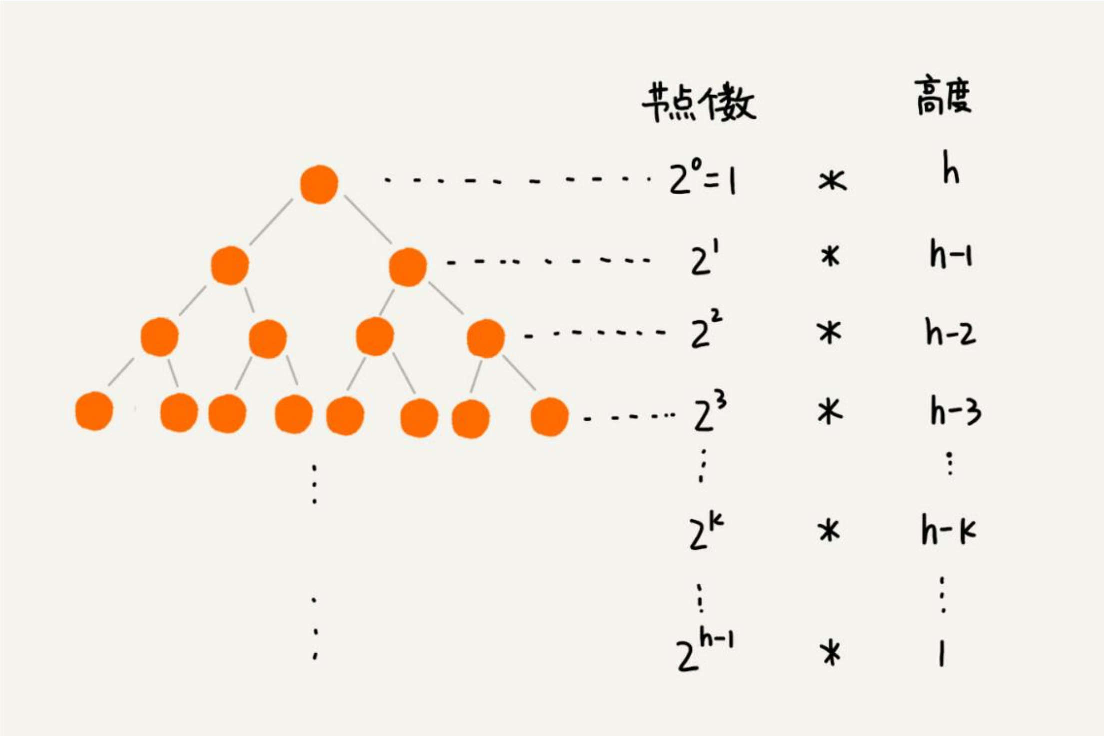
建堆操作的时间复杂度

每个节点堆化的时间复杂度是 $O(\log n)$，那 $\frac{n}{2}+1$ 个节点堆化的总时间复杂度是不是就是 $O(n\log n)$ 呢？这个答案虽然也没错，但是这个值还是不够精确。实际上，堆排序的建堆过程的时间复杂度是 $O(n)$。我带你推导一下。

因为叶子节点不需要堆化，所以需要堆化的节点从倒数第二层开始。每个节点堆化的过程中，需要比较和交换的节点个数，跟这个节点的高度 k 成正比。

我把每一层的节点个数和对应的高度画了出来，你可以看看。我们只需要将每个节点的高度求和，得出的就是建堆的时间复杂度。



我们将每个非叶子节点的高度求和，就是下面这个公式：

$$S_1 = 1*h + 2^1*(h-1) + 2^2*(h-2) + \cdots + 2^k*(h-k) + \cdots + 2^{h-1}*1$$

这个公式的求解稍微有点技巧，不过我们高中应该都学过：把公式左右都乘以 2，就得到另一个公式 $S2$。我们将 $S2$ 错位对齐，并且用 $S2$ 减去 $S1$，可以得到 S。

$$S_1 = 1*h + 2^1*(h-1) + 2^2*(h-2) + \cdots + 2^k*(h-k) + \cdots + 2^{h-1}*1$$

$$S_2 = 2^1*h + 2^2*(h-1) + \cdots + 2^k*(h-k+1) + \cdots + 2^{h-1}*2 + 2^h*1$$

$$S = S_2 - S_1 = -h + \underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + \cdots + 2^{h-1}}_{\text{等比数列}} + 2^h$$

S 的中间部分是一个等比数列，所以最后可以用等比数列的求和公式来计算，最终的结果就是下面图中画的这个样子。

$$S = -h + (2^h - 2) + 2^h = 2^{h+1} - h - 2$$

因为 $h=\log_{2}n$，代入公式 S，就能得到 $S=O(n)$，所以，建堆的时间复杂度就是 $O(n)$。