Exercice 1. Montrer que la relation d'ordre défini dans le cours à partir des axiomes de Peano est une relation d'ordre total. Indication: on montrera par récurrence la propriété suivante $P(n) : \forall m \in \mathbb{N},\ n \leq m$ ou $m \leq n$

Exercice 2. Pour s'entraîner à rédiger des récurrences simples, montrer que:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
3. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, si f est strictement croissante alors pour tout n, $f(n) \geq n$.

Exercice 3. On appelle récurrence double le théorème suivant:
Pour toute proposition à une variable libre portant sur les entiers $P(n)$,
$[P(0)$ et $P(1)$ et $(\forall k \in \mathbb{N}\ (P(k)$ et $P(k+1) \Rightarrow P(k+2))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

1. Montrer ce théorème à partir du principe de récurrence.
2. On définit la suite de Fibonacci (F_n) par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Montrer que pour tout entier $n > 0$, $F_n < (7/4)^n$.

Exercice 4.

1. Donner l'ensemble des entiers n tels que $2^n \geq (n+1)^2$.
2. Chercher l'erreur dans cette démonstration par récurrence. On note $P(n)$ la proposition suivante: n points deux à deux distincts du plan sont alignés.

   Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.

   Initialisation: Pour $n = 2$, $P(2)$ est vraie car deux points du plan sont alignés

   Hérédité: Soit $n \geq 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ l'est aussi: Soit $M_1, \cdots, M_n, M_{n+1}$, $n+1$ points deux à deux distincts du plan.
   Alors par hypothèse de récurrence $P(n)$, $M_2, \cdots M_n, M_{n+1}$ sont alignés sur la droite $D = (M_2M_n)$. Toujours par hypothèse de récurrence les points $M_1, M_2, \cdots, M_n$ sont aussi alignés et appartiennent donc à D. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion, pour tout $n \geq 2$, n points distincts du plan sont alignés (!).

Exercice 5. Notons H_n la suite définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que pour tout $m \geq 1$, il existe deux entiers a et b avec b impair tels que $H_{2m} = \frac{H_m}{2} + \frac{a}{b}$.
Montrer par récurrence forte que pour $n \geq 2$, il existe p_n impair, et q_n pair non nul tel que $H_n = \frac{p_n}{q_n}$.
En déduire que H_n n'est jamais un entier.

Exercice 6. On considère C l'ensemble des chaînes de caractères (ou mots finis) de l'alphabet latin.

1. Montrer que la relation "préfixe strict de" est une relation d'ordre bien fondée sur C. Ex: aab est un préfixe stricte de $aabc$.

2. On considère l'ordre usuel sur l'alphabet latin. On défini sur C l'ordre lexicographique de la manière suivante. Soit $c_1 = a_1 a_2 \cdots a_p$ et $c_2 = b_1 b_2 \cdots b_q$. On dit que $c_1 \leq c_2$ si:

   $p \leq q$ et pour tout $i \leq p$, $a_i = b_i$
   ou
   $\exists i \leq \min(p,q); a_i < b_i$ et $\forall j < i, a_i = b_i$.

   Ex: $aab < aabc$; $aabcd < aacad$; $aabd < abc$.
   Montrer que l'ordre lexicographique est un ordre total sur C mais qu'il n'est pas bien fondé.

Exercice 7.

Soit X un ensemble muni d'une relation d'ordre "$\leq$". Soit A un sous-ensemble de X, on dit qu'un élément $a \in A$ est un élément minimal de A s'il n'existe pas $y \in A$ tel que $y < x$.

1. Montrer que si l'ordre est total alors si A possède un élément minimal il est unique et égal au plus petit élément de A.

2. Soit la relation d'ordre "divise " sur $\mathbb{N}$. Quels sont les éléments minimaux de $\mathbb{N}$? de $3\mathbb{N}$?

3. Montrer que l'ordre sur X est bien fondé ssi tout partie non vide de X admet un au moins élément minimal.

4. Montrer le théorème suivant (Récurrence bien fondée): Soit X un ensemble muni d'un ordre bien fondé et A une partie non vide de X. Si $(\forall x \in X, (\forall y < x \; y \in A \Rightarrow x \in A))$ alors $A = X$