Exercice 1. Il s'agissait de prouver la formule:

$$\boxed{\exists x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)}$$

Pour ne pas surcharger l'arbre on remplacera parfois $\exists x(P(x)\vee Q(x))$ par H.

On rappelle la règle de $\vee_e$ (Γ est un ensemble d'hypothèse)

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma \cup \{A\} \vdash C \qquad \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Appliquée ici avec $A = P(a)$ $B = Q(a)$
$C = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{H,P(a)\}\vdash P(a)}\,\text{Ax}}{\{H,P(a)\}\vdash \exists x P(x)}\,\exists_i
}{\{H,\underbrace{P(a)}_{A}\}\vdash \exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\ C}\,\vee_i
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{H,Q(a)\}\vdash Q(a)}\,\text{Ax}}{\{H,Q(a)\}\vdash \exists x Q(x)}\,\exists_i
}{\{H,\underbrace{Q(a)}_{B}\}\vdash \exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\ C}\,\vee_i
\qquad
\dfrac{}{\{H,\overbrace{P(a)}^{A}\vee \overbrace{Q(a)}^{B}\}\vdash P(a)\vee Q(a)}\,\text{Ax}
}{\{H,\underbrace{P(a)\vee Q(a)}_{A(a)}\}\vdash \underbrace{\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)}_{B}\ C}\,\vee_e
\qquad
\dfrac{}{\{H\}\vdash \overbrace{\exists x(P(x)\vee Q(x))}^{\exists x\, A(x)}}\,\text{Ax}
}{\dfrac{\{H\}\vdash \exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\ B}{\vdash \exists x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x)\vee\exists x Q(x)}\,\Rightarrow_i}\,\exists_e
$$

On rappelle la règle de $\exists e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\, A(x) \qquad \Gamma \cup \{A(a)\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,\exists e$$

où a n'est libre ni dans Γ
ni dans B

Appliquée ici avec $A(x) = P(x) \vee Q(x)$
$A(a) = P(a) \vee Q(a)$
$B = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

Vous pouvez essayer de montrer l'autre implication.

Exercice 2. Il s'agit de prouver la formule:

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)}$$

Pour ne pas surcharger l'arbre on remplacera parfois $\neg\forall x P(x)$ par H_1 et $\neg\exists x\neg P(x)$ par H_2.

On rappelle les règles d'introduction et d'élimination de $\bot$ (Γ est ici un ensemble d'hypothèse)

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\,\bot_i$$

Appliquée 2 fois ici 1) $A = \exists x \neg P(x)$

2) $A = \forall x P(x)$

et la règle d'élimination de $\bot$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_e$$

pour toute formule A. Appliquée 2 fois ici 1) $A = P(a)$

2) $A = \exists x \neg P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{H_1, H_2\} \vdash \neg\forall x P(x)}\,\text{Ax}\;\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{H_1, H_2, \neg P(a)\} \vdash \neg\exists x\neg P(x)}\,\text{Ax}\;\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{H_1, H_2, \neg P(a)\} \vdash \neg P(a)}\,\text{Ax}}{\{H_1, H_2, \neg P(a)\} \vdash \exists x\neg P(x)}\,\exists_i\;A}{\{H_1, H_2, \neg P(a)\} \vdash \bot}\,\bot_i}{\{H_1, H_2, \neg P(a)\} \vdash P(a)}\,\bot_e\;A \qquad \dfrac{}{\{H_1, H_2, P(a)\} \vdash P(a)}\,\text{Ax}}{\{H_1, H_2\} \vdash P(a)}\,\text{t.e.}}{\{H_1, H_2\} \vdash \forall x P(x)}\,\forall_i\;A}{\dfrac{\{H_1, H_2\} \vdash \bot}{\{H_1, H_2\} \vdash \exists x\neg P(x)}\,\bot_e\;A}\,\bot_i \qquad \dfrac{}{\{H_1, \exists x\neg P(x)\} \vdash \exists x\neg P(x)}\,\text{Ax}}{\dfrac{\{\neg\forall x P(x)\} \vdash \exists\neg P(x)}{\vdash \neg\forall x P(x) \Rightarrow \exists x\neg P(x)}\,\Rightarrow_i}\,\text{t.e}$$

Ici aussi, essayer de montrer l'autre implication.

On rappelle que la règle du tiers exclu:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \qquad \dfrac{}{\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B}}{\Gamma \vdash B}\,\text{t.e.}$$

où Γ est un ensemble d'hypothèse, a été montrée en logique classique en cours. On peut donc l'employer sans recopier l'arbre qui la prouve.