直纹面与直母线的一些性质

Vespera Zephyr

2025 年 4 月 4 日

温馨提示：本文档的公式可以点击跳转，点击公式标号红方框即可实现公式跳转（试一试！），点击页眉的蓝色方框有可能实现跳转到作者知乎首页（与 pdf 阅读器有关，QQ 手机自带的 pdf 在线浏览可能不太支持），如果能点个关注就更好了，谢谢喵.

1 直纹面

定义 1.1: 直纹面与直母线

一曲面 S 称为直纹面，如果存在一族直线，使得这一族中的每一条直线全在 S 上，并且 S 上的每个点都在这一族的某一条直线上. 这样的一族直线称为 S 的一族直母线.

例 1.1: 直纹面的例子

二次柱面（9 种）和二次锥面（1 种）都是直纹面；单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面.

下面我们来证明单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面.

定理 1.1

单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面.

我们只证明单叶双曲面的一种情形，其余情况都是类似的，留作读者习题.

证明. 设单叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^T$ 在单叶双曲面 S 上的充分必要条件是

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

移项并分解因式，得到

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right), \tag{3}$$

写成行列式的形式，即

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} & 1+\frac{y_0}{b} \\ 1-\frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{c} \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

或者

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} & 1-\frac{y_0}{b} \\ 1+\frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{c} \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

注意到 $1+\frac{y_0}{b},1-\frac{y_0}{b}$ 不全为零，故方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)X+\left(1+\frac{y_0}{b}\right)Y=0, \\ \left(1+\frac{y_0}{b}\right)X+\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)Y=0 \end{cases} \tag{6}$$

是关于 X,Y 的齐次线性方程组，它的系数矩阵的行列式为零(4)，故有非零解，即存在不全为零的实数 μ_0,ν_0，使得

$$\begin{cases} \mu_0\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)+\nu_0\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=0, \\ \mu_0\left(1-\frac{y_0}{b}\right)+\nu_0\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=0. \end{cases} \tag{7}$$

这表明点 M_0 在直线

$$\begin{cases} \mu_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\frac{y}{b}\right)=0, \\ \mu_0\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0. \end{cases} \tag{8}$$

上. 也就是**单叶双曲面** S 上的任一点 M_0 在直线族

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0, \\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0, \end{cases} \qquad \text{其中}\mu,\nu\in\mathbb{R},\mu^2+\nu^2\neq 0 \tag{9}$$

上. 我们断言：这族直线(9)恰为单叶双曲面的一族直母线.

事实上，若 $(\mu_1,\nu_1),(\mu_2,\nu_2)$ 线性相关，则它们都表示(9)中的一条直线；若它们线性无关，则它们表示不同的直线. 即 μ,ν 的比例决定了(9). 现在我们再(9)中任取一条直线 l_1, 它对应于 (μ_1,ν_1)，且在 l_1 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^T$，则有

$$\begin{cases} \mu_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y_1}{b}\right)=0, \\ \mu_1\left(1-\frac{y_1}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}\right)=0. \end{cases} \tag{10}$$

因为 μ_1, ν_1 不全为零，则(10)说明齐次线性方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}\right)X+\left(1+\frac{y_1}{b}\right)Y=0, \\ \left(1-\frac{y_1}{b}\right)X+\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}\right)Y=0 \end{cases} \tag{11}$$

有非零解，从而(11)的系数矩阵的行列式为 0，也就是满足(4)，即 $M_1(x_1,y_1,z_1)^T$ 在单叶双曲面 S 上. 综上所述，S 是直纹面，且直线族(9)是它的一族直母线.

类似可证 S 的另一族直母线为

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0, \\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0, \end{cases} \quad 其中\mu,\nu\in\mathbb{R},\mu^2+\nu^2\neq 0. \tag{12}$$

□

我们总结出如下结论，需要记忆：

结论 1.1: 单叶双曲面的直母线方程

设单叶双曲面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，则它的两族直母线方程为

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0, \\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0, \end{cases} \quad 其中\mu,\nu\in\mathbb{R},\mu^2+\nu^2\neq 0 \tag{$\spadesuit$}$$

和

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0, \\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0, \end{cases} \quad 其中\mu,\nu\in\mathbb{R},\mu^2+\nu^2\neq 0. \tag{$\heartsuit$}$$

结论 1.2: 双曲抛物面的直母线方程

设双曲抛物面 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$，则它的两族直母线方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\lambda=0, \\ z+\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0, \end{cases} \quad 其中\lambda\in\mathbb{R} \tag{$\clubsuit$}$$

和

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+z=0, \\ 2\lambda+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0, \end{cases} \quad 其中\lambda\in\mathbb{R}. \tag{$\diamondsuit$}$$

下面我们来看几个例题.

例 1.2

求单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 的经过点 $(2,3,-4)^T$ 的直母线.

答案或提示.

$$\begin{cases} 2x+z=0, \\ y-3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{z}{4}+\frac{y}{3}-1=0, \\ \frac{y}{3}-\frac{x}{2}+\frac{z}{4}+1=0. \end{cases}$$

例 1.3

求与下列三条直线同时共面的直线所构成的曲面：

$$l_1:\begin{cases} x=1, \\ y=z; \end{cases} \qquad l_2:\begin{cases} x=-1, \\ y=-z; \end{cases} \qquad l_3:=\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}.$$

答案或提示. 设与 l_1,l_2,l_3 同时共面的直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}.$$

注意题目条件 l 与 $l_i(i=1,2,3)$ 共面，根据直线共面的充要条件，列出三个方程. 把它们看作关于 X,Y,Z 的方程. X,Y,Z 一定存在且不全为零，则线性方程组的系数矩阵的行列式等于 0，由此得到 x_0,y_0,z_0 满足的方程，它就是所求曲面的方程. 最后算得 $x^2+y^2-z^2=1$，它是单叶双曲面.

例 1.4

设有直线 l_1,l_2，它们的方程分别是

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}+3t, \\ y=-1+2t, \\ z=-t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3t, \\ y=2t, \\ z=0, \end{cases}$$

求所有由 l_1,l_2 上有相同参数值 t 的点的连线所构成的曲面的方程.

答案或提示. 任意给定 $t_0\in\mathbb{R}$,则连线经过两点 $M_1\left(\frac{3}{2}+3t_0,-1+2t_0,-t_0\right)^T$,$M_2\,(3t_0,2t_0,0)^T$，从而不难写出连线的方程

$$\frac{x-3t_0}{\frac{3}{2}}=\frac{y-2t_0}{-1}=\frac{z}{-t_0}.$$

消去参数 t_0，就得到 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=2z$，它是双曲抛物面.

2 直母线的性质

2.1 需要的结论

这里我们首先列举几个在后面证明中常用的结论：

结论 2.1: 两条直线相交的充分必要条件

设两条直线 l_1, l_2 分别过 $M_1(x_1, y_1, z_1)^T, M_2(x_2, y_2, z_2)^T$，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)^T, \boldsymbol{u}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)^T$. 则这两条直线相交的充分必要条件为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面，且 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 不共线，即判别式

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

结论 2.2: 两条直线异面的充分必要条件

设两条直线 l_1, l_2 分别过 $M_1(x_1, y_1, z_1)^T, M_2(x_2, y_2, z_2)^T$，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)^T, \boldsymbol{u}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)^T$. 则这两条直线相交的充分必要条件为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 不共面，且 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 不共线，即判别式

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

结论 2.3: 直线和平面相交的充要条件

设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v} = (X, Y, Z)^T$，平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$，则 l 与 $\boldsymbol{\pi}$ 相交的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\pi}$ 不平行，即

$$AX + BY + CZ \neq 0.$$

2.2 基础的性质

性质 2.1

单叶双曲面同族中的任意三条直母线都不平行于同一个平面.

证明. 我们取单叶双曲面的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 和一族直母线(♠), 其方向向量为

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} a(\mu^2-\nu^2) \\ 2b\mu\nu \\ -c(\mu^2+\nu^2) \end{pmatrix},$$

我们分别对 $(\mu_i,\nu_i)(i=1,2,3)$ 赋不同的值，得到直线 l_i 的方向向量 $\boldsymbol{w}_i$，容易验证 $\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{w}_3\neq 0 \Longrightarrow l_1,l_2,l_3$ 不平行于同一平面. 类似地，可讨论另一族直母线. □

性质 2.2

单叶双曲面同族的两条直母线异面，单叶双曲面异族的两条直母线共面.

证明. 我们取单叶双曲面的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，再取(♠)中的两条直线

$$\ell_1:\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,\end{cases}\qquad \ell_2:\begin{cases}\mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_2\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_2\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0.\end{cases}$$

容易算得它们的方向向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\left(a(\mu_1^2-\nu_1^2),2b\mu_1\nu_1,-c(\mu_1^2+\nu_1^2)\right)^T,\boldsymbol{u}_2=\left(a(\mu_2^2-\nu_2^2),2b\mu_2\nu_2,-c(\mu_2^2+\nu_2^2)\right)^T. \tag{13}$$

两条直线异面的充分必要条件（结论2.2），现在分别取直线 ℓ_1,ℓ_2 上一点 M_1,M_2，再计算判别式知其不为 0[1]，故这两条直线异面.

取(♠)中的两条直线

$$l_1:\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,\end{cases}$$

前面(13) 我们已经计算出其方向向量：$\boldsymbol{v}_1=\left(a(\mu_1^2-\nu_1^2),2b\mu_1\nu_1,-c(\mu_1^2+\nu_1^2)\right)^T$，再取(♡)中的一条直线

$$l_2:\begin{cases}\mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_2\left(1-\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_2\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,\end{cases}$$

它的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=\left(-a(\mu_2^2-\nu_2^2),2b\mu_2\nu_2,c(\mu_2^2+l\nu_2^2)\right)^T$. 现在分别取直线 l_1,l_2 上一点 L_1,L_2，再计算判别式知其为 0[2]，故这两条直线共面. □

[1]请自行完成，留作习题

[2]请自行完成，留作习题

性质 2.3

双曲抛物面同族的所有直母线都平行于同一个平面，并且同族的任意两条直母线异面.

证明. 取双曲抛物面的方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 和它的两族直母线方程(♣)和(♢)，容易看出对于第一族直线(♣)，它们的方向向量均为

$$\left(\frac{1}{b},-\frac{1}{a},-\frac{2\lambda}{ab}\right)^T,$$

故它们均平行于平面 $\pi_0:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$，进一步地，可以计算出它们都在平面

$$\pi_\lambda:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+2\lambda=0$$

上. 另一族同理（方向向量计算留作习题）.

另一方面，任取(♣)中两条直线 $\ell_{\lambda_1},\ell_{\lambda_2}(\lambda_1\neq\lambda_2)$，则它们在不同的平行平面 $\pi_{\lambda_1},\pi_{\lambda_2}$ 上，故它们不相交；由于 $\left(\dfrac{1}{b},-\dfrac{1}{a},-\dfrac{2\lambda_1}{ab}\right)^T\neq\left(\dfrac{1}{b},-\dfrac{1}{a},-\dfrac{2\lambda_2}{ab}\right)^T$，故 ℓ_{λ_1} 与 ℓ_{λ_2} 不平行，故它们异面. □

性质 2.4

双曲抛物面异族的任意两条直母线必相交.

证明. 取双曲抛物面的方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$，再取(♣)中的一条直线

$$\ell_1:\begin{cases}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)+2\lambda_1=0,\\ z+\lambda_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=0,\end{cases}$$

取(♢)中的一条直线

$$\ell_2:\begin{cases}\lambda_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)+z=0,\\ 2\lambda_2+\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=0,\end{cases}$$

容易算得它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1=(a,-b,-2\lambda_1)^T,\boldsymbol{u}_2=(a,-b,-2\lambda_2)^T$. 回忆两条直线相交的充分必要条件(2.1)具体地,直线 l_1 经过点 $M_1(-\lambda_1 a,-\lambda_1 b,0)^T$;直线 l_2 经过点 $M_2(-\lambda_2 a,-\lambda_2 b,0)^T$.

容易验证 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2=0$，故 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面；显然 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 不共线，所以这两条直线相交. □

性质 2.5

双曲抛物面的正交直母线的交点轨迹为双曲线.

证明. 由性质2.3，双曲抛物面同族的任意两条直母线异面，故双曲抛物面的两条正交直母线必定异族. 由性质2.4的证明，我们取相同的双曲抛物面方程，并分别取其方向向量为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}a\\-b\\-2\lambda_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}a\\b\\-2\lambda_2\end{pmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=b^2-a^2+4\lambda_1\lambda_2=0\Longrightarrow\lambda_1\lambda_2=\frac{b^2-a^2}{4}.$$

那么由直母线方程(♣)和(◇)[3]得到

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=4\lambda_1\lambda_2=b^2-a^2,\\ \lambda_1\lambda_2\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)=z^2.\end{cases}$$

于是得到方程

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=b^2-a^2,\\ z=\dfrac{b^2-a^2}{2},\end{cases}$$

这是一条双曲线. □

2.3 进一步的结论

性质 2.6

给定单叶双曲面

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0,$$

求经过 S 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^T$，沿方向 $(X,Y,Z)^T$ 的直线是 S 的直母线的条件. 由此证明：经过 S 上每一点恰有两条直母线.

证明. 我们写出直线的参数方程

$$l:\begin{cases}x=x_0+Xt,\\ y=y_0+Yt,\\ z=z_0+Zt,\end{cases}\tag{14}$$

其中 t 是参数，代入方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，得到

$$\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0$$

[3] 思考一下怎么得到的

注意 t 的任意性，那么必有

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=0\\ \dfrac{Xx_0}{a^2}+\dfrac{Yy_0}{b^2}-\dfrac{Zz_0}{c^2}=0\end{cases}$$

从(14)式容易看出 $Z\neq 0$，故依齐次性，不妨设 $Z=c\neq 0$，两个式子联立，解出 X,Y 即可[4]，这恰好就是条件. 容易知道 X,Y 有两组，故有两条直母线. □

性质 2.7

单叶双曲面的每条直母线都与腰椭圆相交.

证明. 我们取单叶双曲面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，再取(♠)中一条直线

$$l:\begin{cases}\mu_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0,\end{cases}\qquad(\mu_0^2+\nu_0^2\neq 0)$$

它的方向向量为

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a(\mu_0^2-\nu_0^2)\\ 2b\mu_0\nu_0\\ -c(\mu_0^2+\nu_0^2)\end{pmatrix},$$

我们只要证明 l 与 xOy 平面相交即可. 注意 xOy 平面的方程 $z=0$，根据结论2.3，计算得到直线的方向向量与平面法向量的内积为 $-c(\mu_0^2+\nu_0^2)\neq 0$，故 l 与 xOy 平面相交即可，这就完成了证明. □

性质 2.8

设 l_1,l_2 是异面直线，它们都与 Oxy 平面相交，证明：与 l_1,l_2 都共面，并且与 Oxy 平面平行的直线所构成的曲面是马鞍面.

证明. 设 $l_i(i=1,2)$ 与 Oxy 平面的交点为 $M_i(i=1,2)$. 为简化计算，不妨设原点 O 是线段 M_1,M_2 的中点，令 $M_1(a,0,0)^T,M_2(-a,0,0)^T$. 设 l_i 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_i=(X_i,Y_i,Z_i)^T$，考虑直线 l 平行于平面 Oxy，并且与 l_1,l_2 共面，则 l 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=(X,Y,0)^T$. 在 l 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^T$，由 l 与 l_i 共面知

$$\overrightarrow{M_0M_i}\cdot\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{v}=0,\quad i=1,2. \tag{15}$$

展开后整理得到

$$\begin{cases}X\left(-Z_1y_0+Y_1z_0\right)+Y\left(Z_1x_0-X_1z_0-Z_1a\right)=0,\\ X\left(-z_2y_0+Y_2z_0\right)+Y\left(Z_2x_0-X_2z_0+Z_2a\right)=0.\end{cases} \tag{16}$$

[4]最终结果很丑陋，所以不写出了，不信你试一下

由于 X,Y 不全为零，故该齐次线性方程组的系数矩阵的行列式为 0，展开得到

$$(X_1Y_2-X_2Y_1)z_0^2+(Y_1Z_2-Y_2Z_1)x_0z_0+(X_2Z_1-X_1Z_2)y_0z_0-2az_1z_2y_0+a(Y_2Z_1+Y_1Z_2)z_0=0. \quad (17)$$

注意 l_1,l_2 异面，由结论2.2知判别式

$$\Delta:=\begin{vmatrix}2a & X_1 & X_2\\ 0 & Y_1 & Y_2\\ 0 & Z_1 & Z_2\end{vmatrix}=2a(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\neq 0,$$

即(17)代表的是二次曲面方程，剩下的工作就是进行坐标变换将(17)式化为二次标准型，最终将其化为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的形式. 由于计算量较大这里略去，具体的坐标变换方法请参考丘维声《高等代数》（清华大学出版社，339-341 页）. □

性质 2.9

设三条直线 l_1，l_2，l_3 两两异面，并且平行于同一平面，证明：与 l_1，l_2，l_3 都相交的直线所构成的曲面是马鞍面.

证明. 我们以 l_1 为 x 轴，过 l_1 与 l_2 平行的平面为 Oxy 平面，l_1,l_2 的公垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系. 故 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(a,1,0)^T$，并且经过点 $M_2(0,0,d)^T$. 设 l_3 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_3=(b,1,0)^T$，并记 l_3 与 Ozx 平面的交点为 $M_3(c,0,h)^T$，再设直线 l,l_1 交于 $A_1(\lambda,0,0)^T$，与 l_2 交于 $A_2(u_1,u_2,d)^T$，与 l_3 交于 $A_3(v_1,v_2,h)^T$，则 l 的方向向量为

$$\boldsymbol{v}=(u_1-\lambda,u_2,d)^T=(v_1-\lambda,v_2,h)^T \quad (18)$$

故 $(u_1-\lambda,u_2,d)=k(v_1-\lambda,v_2,h)$，解得

$$k=\frac{h}{d}. \quad (19)$$

我们写出 l_1,l_2,l_3 的方程：

$$l_1:\quad y=z=0, \quad (20)$$
$$l_2:\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{1}=\frac{z-d}{0}, \quad (21)$$
$$l_3:\quad \frac{x-c}{b}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-h}{0}, \quad (22)$$

将上面三式分别代入 A_1,A_2,A_3 的坐标，得到

$$\begin{cases}u_1=au_2,\\ v_1-c=b(v_2-1).\end{cases} \quad (23)$$

结合(18)和(19)解得

$$\begin{cases} u_1 = a \cdot \dfrac{h(c-b)+(d-h)(b-1)\lambda}{(a-b)d}, \\ u_2 = \dfrac{h(c-b)+(d-h)(b-1)\lambda}{(a-b)d}. \end{cases} \tag{24}$$

从而我们写出 l 的方程

$$\frac{x-\lambda}{a \cdot \dfrac{h(c-b)+(d-h)(b-1)\lambda}{(a-b)d} - \lambda} = \frac{y}{\dfrac{h(c-b)+(d-h)(b-1)\lambda}{(a-b)d}} = \frac{z}{d}.$$

若简记 $P = \dfrac{h(c-b)+(d-h)(b-1)\lambda}{(a-b)d}$, 消去(24)中的 λ，即解得 $\lambda = \dfrac{d(x-ay)}{d-z}$ 代入(24)中，整理得到

$$(x-ay)\left(P(1-d)x+(aP-1)yz+dy\right)=0.$$

再采用如上题相同的方法，先判断该方程表示二次曲面，再将其化为二次标准型，从而判断该曲面是马鞍面. □