Теоретические вопросы для подготовки к РК–1

1) Сформулировать теорему о разложении правильной рациональной дроби на простейшие и метод интегрирования рациональных функций.

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь представляется в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-c_1)} + \ldots + [\text{ аналогично для } c_2, \ldots c_r] +$$

$$+\frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{M_{1,s_1}x + N_{1,s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + [\text{ аналогично для } (p_2, q_2), \ldots, (p_t, q_t)]$$

где в знаменателях стоят сомножители разложения $A_{i,j}, M_{i,j}, N_{i,j}$ – некоторые числа, зависящие от $P_m(x)$ и $Q_n(x)$

Алгоритм интегрирования рациональных функций:

1. Выделить правильную дробь.
2. Найти вид разложения на простейшие дроби.
3. Найти коэффициенты разложения, используя методы неопределенных коэффициентов или подстановки.
4. Проинтегрировать каждое слагаемое полученного разложения.

2) Дать определение интеграла Римана и его геометрическую интерпретацию

Предел по базе $\lambda \to 0$ значений интегральных сумм для функции f, отвечающих разбиению с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, называют **интегралом Римана (определенным интегралом)** от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Геометрически определенный интеграл интерпретируется как площадь криволинейной трапеции $abBA$.

3) Сформулировать свойства интеграла Римана: линейность, аддитивность и интеграл от константы.

Линейность: Пусть функции f_1 и f_2 интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда при $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ функция $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Аддитивность теорема 1: Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом меньшем отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

Аддитивность теорема 2: Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$и $[c, b]$, то она интегрируема на двух других отрезках и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b и c.

Интеграл от константы

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

4) Сформулировать необходимое условие интегрируемости и критерий интегрируемости.

Необходимое условие интегрируемости: $f \in \Re[a, b] \implies f$ ограничена на отрезке $[a, b]$

Критерий интегрируемости:

$$f \in \Re[a, b] \iff \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0$$

где $\omega(f; \Delta_i)$ – колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

5) Сформулировать следствия из критерия интегрируемости: интегрируемость непрерывных функций и функций с конечным числом точек разрыва. Привести пример неинтегрируемой функции.

Следствие о интегрируемости непрерывных функций: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Следствие о интегрируемости функций с конечным числом точек разрыва: Ограниченная с конечным числом точек разрыва на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Пример неинтегрируемой функции (функция Дирехле):

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in R \setminus Q \end{cases}$$

рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$, не интегрируема на нем. Действительно, для любого разбиения P отрезка $[0, 1]$ в каждом частичном отрезке Δ_i, разбиения P есть рациональные точки, и иррациональные точки, поэтому $\omega(D; \Delta_i) = 1$, а значит, $\sum_{i=1}^{n} \omega(D, \Delta_i)\Delta x_i = 1$ и условие критерия интегрируемости не выполняется.

6) Сформулировать свойства определенного интеграла: монотонность, теорему о сохранении интегралом знака подынтегральной функции, теорему об оценке модуля и теорему об оценке определенного интеграла.

Теорема о монотонность интеграла. Если $a < b$, функции f_1 и f_2 интерируемы на отрезке $[a, b]$ и $f_1(x) \geq f_2(x)\ \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \geq \int_a^b f_2(x)dx$$

Теорема о сохранении интегралом знака подынтегральной функции:

1. Если $a < b$, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

2. Если, кроме того, существует точка $x' \in [a, b]$, в которой $f(x)$ непрерывна и $f(x') > 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Теорема об оценке модуля интеграла. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ее модуль $|f(x)|$ есть также интегрируемая функция на отрезке $[a, b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|$$

Теорема об оценке. Если $a < b$, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in (a, b)$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

7) Сформулировать две теоремы о среднем для определенного интеграла и формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема о среднем значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка c, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Обобщенная теорема о среднем значении. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ интегрируема и знакопостоянна, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка c, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Формула Ньютона - Лейбница. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

где $\Phi(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$ на этом отрезке.

8) Сформулировать теорему о замене переменной и теорему об интегрировании по частям определенного интеграла.

Теорема о замене переменной. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\phi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ и $\phi(t) \in [a, b]$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Теорема об интегрировании по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

9) Сформулировать теоремы о непрерывности и о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

определена и непрерывна на $[a, b]$

Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция (1) дифференцируема в этой точке, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.

10) Сформулировать косвенные приемы интегрирования: интегрирование периодических функций; интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Интегрирование периодических функций:

$$\int_\lambda^{\lambda+T} f(x)dx$$

Данный интеграл не зависит от λ

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке:

1. $f(x)$ – чётная функция

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

2. $f(x)$ – нечётная функция

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

11) Сформулировать формулы для вычисления с помощью определенного интеграла площади плоской фигуры для случаев, когда граница задана в декартовых координатах, параметрически или в полярных координатах.

Теорема 1. Пусть плоская фигура ограничена отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(x) < f_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда площадь такой фигуры равна

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Следствие. Пусть плоская фигуры ограничена кривой, заданой параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и, может быть, вертикальными прямыми и осью Ox. Функция $y(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, а $x(t)$ дифференцируема и имеет непрерывную на $[\alpha, \beta]$ производную. Кроме того, двигаясь по кривой в направлении роста t фигура остается справа. Тогда площадь этой фигуры равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

Теорема 2. Пусть в полярных координатах (ρ, ϕ) плоская фигура Φ ограничена кривой $\rho = \rho(\phi)$ и двумя лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$, ($\alpha < \beta$). Функция $\rho(\Phi)$ непрерывна на отрезке $\rho(\Phi)$. Тогда площадь фигуры Φ равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)d\phi$$

12) Сформулировать формулы для вычисления с помощью определенного интеграла объемов тел по площадям параллельных сечений и тел вращения вокруг осей OX и OY в декартовой системе координат.

Теорема 1. Пусть тело заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, а все сечения этого тела плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox, известны, причем зависимость $S(x)$ площади сечения от абсциссы $x \in [a, b]$ является заданной функцией, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Тогда объем этого тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Теорема 2 . Пусть фигура Φ - криволинейная трапеция непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда
а) объем тела, образованного вращением фигуры Φ вокруг оси Ox, равен

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

б) При $a \geq 0$ и вращении фигуры Φ вокруг оси Oy получаем тело с объемом

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Объём при вращении вокруг полярной оси:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3 \sin(\phi)d\phi$$

13) Дать определения длины дуги кривой и спрямляемых кривых. Сформулировать достаточное условие спрямляемости кривых и формулу для вычисления с помощью определенного интеграла длины дуги кривой в многомерном пространстве.

Если M_1 и M_2 – точки кривой γ, то **дугой** M_1M_2 **кривой** γ называют кривую, состоящую из точек кривой γ , лежащих между M_1 и M_2.

Длиной $L(\gamma)$ **кривой** γ называется точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую γ. Кривая называется **спрямляемой**, если ее длина существует и конечна.

Достаточное условие спрямляемости кривой. Гладкая кривая спрямляема. Длина $L(\gamma)$ гладкой кривой γ с параметризацией $\overline{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, $t \in [a, b]$, $a < b$, вычисляется по формуле

$$L(\gamma) = \int_a^b |\overline{r}(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{a} (x_i'(t))^2 dt}$$

14) Сформулировать формулы для вычисления с помощью определенного интеграла длины дуги плоской кривой, заданой параметрически, в декартовой или полярной системах координат.

1. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то плоская кривая, заданная параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, имеет длину

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt}$$

2. Длина графика непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, функции $f(x)$ равна

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2 dx}$$

3. Если функция $\rho(\Phi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то длина кривой, заданной в полярной системе координат (ϕ, ρ) уравнением $\rho = \rho(\phi)$, равна

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\phi))^2 + (\rho'(\phi))^2 d\phi}$$

15) Сформулировать формулы для вычисления с помощью определенного интеграла площади поверхности вращения в

декартовой системе координат и для параметрического задания функции.

Площади поверхности вращения вокруг оси Ox:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Площади поверхности вращения вокруг оси Ox параметрически заданной функции:

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Площади поверхности вращения вокруг полярной оси:

$$S = 2\pi \int_a^b r\sin\phi\sqrt{r^2 + (r')^2}d\phi$$

16) Сформулировать определение кривизны кривой, геометрический смысл кривизны и формулы для вычисления кривизны графика функции и кривизны кривой, заданной параметрически.

Кривизной кривой γ в точке M_0 называют неотрицательное число k , равное пределу средней кривизны $\frac{\theta}{L(M_0M)}$ дуги M_0M при стремлении точки M к точке M_0, при этом точка M остается на кривой γ.

Теорема 1. Кривизна кривой в R^3 , заданной дважды непрерывно дифференцируемой векторной функцией $r(t)$, в регулярной точке $r(t_0)$ ($|r'(t_0)| \neq 0$) вычисляется по формуле

$$k = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^3}$$

Теорема 2 (кривизна графика функции). Если функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x, то кривизна графика этой функции в точке $(x, f(x))$ равна

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$$

17) Дать определение радиуса кривизны, круга кривизны и центра кривизны плоской кривой. Сформулировать геометрический смысл круга кривизны и идею вывода формулы для вычисления координат центра кривизны.

Пусть k – кривизна плоской кривой γ в точке $M_0 \in \gamma$. Величину $R = 1/k$, обратную кривизне, называют **радиусом кривизны кривой γ в точке M_0.** Если $k = 0$, то радиус R кривизны кривой полагают равным $+\infty$.
Точку C_0 нормали, расположенной на расстоянии радиуса кривизны от точки M_0 в сторону вогнутости кривой называют **центром кривизны кривой в точке** M_0, а круг (окружность) с центром в C_0, радиус которого равен радиусу кривизны, называют **кругом (окружностью) кривизны кривой в точке** M_0.

Геометрический смысл окружности кривизны. Окружность кривизны плоской гладкой кривой $\gamma \in C^2$ в точке M — это единственная окружность, которая касается кривой в точке M с порядком 2, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|^2} = 0$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - функции, графики которых в окрестности точки хо совпадают с кривой и окружностью соответственно, x_0 — абсцисса точки M.

Координаты центра кривизны. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, и $f''(x_0) \neq 0$, то координаты ξ, n центра кривизны графика этой функции в точке $(x_0, y_0 = f(x_0))$ равны

$$\xi = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \qquad n = y_0 + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}$$

18) Дать определение эволюта и эвольвенты. Сформулировать механический способ построения по заданной кривой одной из ее эвольвент.

Множество центров кривизны кривой называют ее **эволютой**. По отношению к своей эволюте кривую называют **эвольвентой** (иногда инволютой или разверткой).

Механический способ построения по заданной кривой одной из ее эвольвент. Если нерастяжимую нить, натянутую на жесткий контур, соответствующий заданной кривой Ω с дугой C_1C_2 (см. рис. 9), сматывать с этого контура, оставляя ее натянутой, то конец нити опишет дугу M_1M_2 эвольвенты Γ заданной кривой.

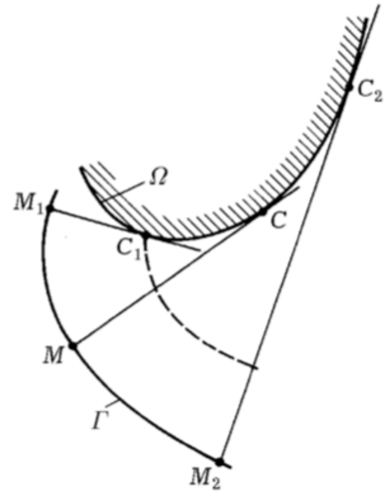

Рис. 9