РК2 "Предел и непрерывность"

Вопрос №1

Семейство $B = \{b_a\}$ подмножеств множества $A : b_a \subseteq A$, **называют базой в множестве** A, если:

1. $\forall b \in B \;\; b \neq \varnothing$
2. $\forall b_1 \in B \; \forall b_2 \in B \; \exists b \in B : \; b \subset b_1 \cap b_2$

Пусть A — область определения функции, B — база в множестве A. Число d называют **пределом функции** $f(x)$ **по базе** B, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B : \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < \epsilon$$

Вопрос №2

- База B_0 на множестве N состоит из множеств $N_s = \{s, s+1, s+2, ...\}$, $s \in N$. Предел по этой базе есть предел последовательности.
- База B_1 на множестве R состоит из множеств $U_\delta(\mathrm{a}), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow$ a.
- База B_2 на множестве R состоит из множеств $U_\delta(\mathrm{a}+) = (a, a+\delta), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow$ a+.
- База B_3 на множестве R состоит из множеств $U_\delta(\mathrm{a}-) = (a-\delta, a), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow$ a−.
- База B_4 на множестве R состоит из множеств $U_M(\infty) = \{x \in \mathrm{R} : |x| > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow \infty$.
- База B_5 на множестве R состоит из множеств $U_M(+\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow +\infty$.
- База B_6 на множестве R состоит из множеств $U_M(-\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x < M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \longrightarrow -\infty$.

Вопрос №3

Теорема о единственности предела функции. Если функция имеет конечный предел по базе B, то этот предел единственный.

Теорема о сохранении знака.

$$\lim_B f(x) = d \neq 0 \implies \exists b \in B : \forall x \in b \quad f(x) > d/2, \; d > 0; \quad f(x) < d/2, \; d < 0$$

Вопрос №4

Функцию $f : A \longrightarrow \mathrm{R}$ называют **ограниченной на множестве** $D \subseteq A$, если множество $f(D)$ ограничено, т.е. существует константа $C > 0$, такая, что $\forall x \in D \; |f(x)| \leq C$

Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел
$\lim\limits_{B} f(x) = d$ — число $\implies$ существует множество $b \in \mathrm{B}$, на котором $f(x)$ ограничено.

Вопрос №5

Теорема о предельном переходе в неравенстве

1. $\lim\limits_{B} f_i(x) = d_i,\ i = 1, 2,$
2. $\exists b \in B: \quad \forall x \in b \quad f_1(x) \leq f_2(x)$

   $\implies \ d_1 \leq d_2$

Вопрос №6

Теорема о пределе промежуточной функции

1. $\lim\limits_{B} f_i(x) = d,\ i = 1, 2,$
2. $\exists b \in B: \quad \forall x \in b \quad f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$

   $\implies \ \lim\limits_{B} g(x)$ сущ и равен d

Вопрос №7

Теорема о связи односторонних и двустороннего пределов. Пусть а — предельная точка множеств $A \cap (a, +\infty)$ и $A \cap (-\infty, a)$, $f: A \to \mathrm{R}$. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ сущ и равен } d \iff \lim_{x \to a-} f(x),\ \lim_{x \to a+} f(x) \text{ сущ и равен } d$$

Вопрос №8

Критерий Коши существования предела функции по базе.

$$\exists \lim_{B} f(x) \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B: \forall x, z \in b \quad |f(x) - f(z)| < \epsilon$$

Вопрос №9

Предел по Коши.
Точка а является предельной точкой множества D.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

Предел по Гейне Пусть $A \subset \mathrm{R}$, $f: A \to \mathrm{R}$, а — предельная точка A. Точку $d \in \mathrm{R}$ называют пределом функции $f(x)$ в точке а $\in \mathrm{R}$, если для любой, имеющей пределом точку а последовательности $\{x_n\}$ значений $x_n \in A$ аргумента функции, не совпадающих с а, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений $f(x_n)$ функции имеет пределом точку d.

Теорема об эквивалентности двух определений

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = d \quad \text{по Коши} \iff \exists \lim_{x \to a} f(x) = d \quad \text{по Гейне}$$

Вопрос №10

Функцию $\alpha(\mathrm{x})$ называют **бесконечно малой (б.м.) по базе** $B \iff \exists \lim\limits_{B} \alpha(\mathrm{x}) = 0$

Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

$$\lim_{B} f(x) = d \in \mathrm{R} \iff f(x) = d + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м. по базе } B$$

Вопрос №11

Функцию $\alpha(\mathrm{x})$ называют **бесконечно малой (б.м.) по базе** $B \iff \exists \lim\limits_{B} \alpha(\mathrm{x}) = 0$

Функцию $\alpha(\mathrm{x})$ называют **бесконечно большой (б.б.) по базе** $B \iff \exists \lim\limits_{B} \alpha(\mathrm{x}) = \infty$

Теорема о связи б.б. и б.м.

$$f(x) \quad \text{б.б по базе } B \iff \frac{1}{f(x)} \quad \text{б.м по базе } B$$

Вопрос №12

Теорема арифметические свойства бесконечно малых. Пусть $\alpha(x)$ — б. м. по базе B. Тогда

1. $\beta(x)$ - б. м. по базе $B \implies \alpha(x) + \beta(x)$ - б. м. по базе B
2. $z(x)$ - огранич. на некотором $b \in B \implies z(x)\alpha(x)$ - б. м. по базе B
3. $\beta(x)$ - б. м. по базе $B \implies \beta(x)\alpha(x)$ - б. м. по базе B
4. $u(x) \to d$ по базе $B, d \neq 0 \implies \frac{\alpha(x)}{u(x)}$ - б. м. по базе B

Вопрос №13

Арифметические свойства пределов

$\lim\limits_{B} f(x) = a, \ \lim\limits_{B} g(x) = d, \ c \in \mathrm{R}$

1. $\lim\limits_{B}(f(x) + g(x)) = a + d$
2. $\lim\limits_{B} f(x)g(x) = ad$
3. $\lim\limits_{B} cg(x) = cd$
4. $\lim\limits_{B} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{d}, d \neq 0$

Вопрос №14

Теорема о пределе сложной функции или замена переменной в пределе

1. $g : Z \to \mathrm{R}$, $\quad B_z$ - база в Z, $\quad \lim\limits_{B_z} g(z) = d$
2. $f : X \to Z$, $\quad B_x$ - база в X $\quad \implies \exists \lim\limits_{B_x} g[f(x)] = d$ (d может быть $\pm\infty$)
3. $\forall b_z \in B_z \quad \exists b_x \in B_x : \quad f(b_x) \subset b_z$

Вопрос №15

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$$

Следствие: $\lim_{x\to 0}(1+z)^{1/z} = e$

Вопрос №16

Сравнение функций при одинаковом стремлении аргумента

1. $\alpha(x)\beta(x)$ **эквивалентны по базе** B ($\alpha \sim \beta$ по базе B) $\iff \lim\limits_{B}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$
2. $\alpha(x)$ o-**малое от** $\beta(x)$ **по базе** B ($\alpha(x) = o(\beta(x))$ по базе B) $\iff \lim\limits_{B}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$
3. $\alpha(x)$ O-**большое от** $\beta(x)$ **по базе** B ($\alpha(x) = o(\beta(x))$ по базе B) $\iff$ функция $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ограничена на некотором элементе $b \in B$
4. $\alpha(x), \beta(x)$ **одного порядка по базе** B $\iff \lim\limits_{B}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{c} \neq 0$
5. $\alpha(x)$ **имеет порядок** k **относительно** $\beta(x)$ **по базе** B $\iff \lim\limits_{B}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \mathrm{c} \neq 0$
6. $\alpha(x), \beta(x)$ **несравнимы по базе** B $\iff \lim\limits_{B}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не сущ. и $\neq \infty$

Таблица эквивалентности

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x$$
$$\arcsin x \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\ln a, \quad (1+x)^b - 1 \sim bx, \quad \sin x \sim x$$

Вопрос №17

Определение о малого

Символом о-малое обозначают любую бесконечно малую функцию $\mathrm{o}(f(\mathrm{x}))$ по сравнению с заданной функцией $f(\mathrm{x})$ при аргументе, стремящемся к некоторому конечному или бесконечному числу x_0

Определение О большого

Символом О-большое обозначают любую функцию $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$, ограниченную относительно функции $g(x)$ при аргументе, стремящемся к некоторому конечному или бесконечному числу x_0

Свойства о и О

1. $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$
2. $\beta = o(\alpha),\ \gamma = o(\beta) \implies \gamma$ есть $o(\alpha)$
3. $O(\alpha) \pm O(\alpha) = O(\alpha)$

Свойство симметричности $\alpha(x) \sim \beta(x)$ по базе $B, \alpha(x) \neq 0$ на нектором $b \in B \implies \beta(x) \sim \alpha(x)$ по базе B

Критерий эквивалентности функций $\alpha(x) \sim \beta(x)$ по базе $B \iff \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ по базе B

Вопрос №18

Теорема о замене эквивалентных при вычислении пределов.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \implies \begin{cases} (1)\ \lim\limits_B [f(x)\alpha(x)] = \lim\limits_B [f(x)\beta(x)] \\ (2)\ \lim\limits_B \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_B \frac{f(x)}{\beta(x)} \end{cases}$$

Вопрос №19

Типы неопределённостей в переделе

1. $\lim\limits_B \frac{f(x)}{g(x)}$ - неопред. $[\frac{0}{0}] \iff \lim\limits_B f(x) = 0,\ \lim\limits_B g(x) = 0$
2. $\lim\limits_B \frac{f(x)}{g(x)}$ - неопред. $[\frac{\infty}{\infty}] \iff \lim\limits_B f(x) = \infty,\ \lim\limits_B g(x) = \infty$
3. $\lim\limits_B [f(x)g(x)]$ - неопред. $[0 \cdot \infty] \iff \lim\limits_B f(x) = 0,\ \lim\limits_B g(x) = \infty$
4. $\lim\limits_B [f(x) - g(x)]$ - неопред. $[\infty - \infty] \iff \lim\limits_B f(x) = 0,\ \lim\limits_B g(x) = \infty$
5. $\lim\limits_B f(x)^{g(x)}$ - неопред. $[0^0] \iff \lim\limits_B f(x) = 0,\ \lim\limits_B g(x) = 0$
6. $\lim\limits_B f(x)^{g(x)}$ - неопред. $[\infty^0] \iff \lim\limits_B f(x) = \infty,\ \lim\limits_B g(x) = 0$
7. $\lim\limits_B f(x)^{g(x)}$ - неопред. $[1^\infty] \iff \lim\limits_B f(x) = 1,\ \lim\limits_B g(x) = \infty$

Способы раскрытия неопределённостей

1. $[\frac{\infty}{\infty}] \to [\frac{0}{0}] \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/f(x)}{1/g(x)}$
2. $[0 \cdot \infty] \to [\frac{0}{0}] \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$
3. $[\infty - \infty] \to [\frac{0}{0}] \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$
4. $[1^\infty], [0^0], [\infty^0] \to [0 \cdot \infty] \quad f(x)^{g(x)} \to \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$

Вопрос №20

Формулировка непрерывности функции в точке

1. $\Delta y \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
3. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall x \in E\ (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$
4. $\forall V(f(a)) \quad \exists U(a) \quad f(U(a) \cap E) \subseteq V(f(a))$

Теорма об эквивалентности опеределений непрерывности функции в точке.

1. Если a - предельная точка E, то условия с (1) по (4) эквивалентны.
2. Если a - изолированная точка E, то для любой функции f условия (3) и (4) выполняются, а условия (1) и (2) не выполняются.

Вопрос №21

Теорма о непрерывности арифметических операций Если функции f и g непрерывны в точке a, то непрерывны в этой точке их сумма, разность, произведение, а при $g(x) \neq 0$ и частное f/g.

Вопрос №22

Теорема о непрерывности сложной функции. Если функция $g : X \to Z$ непрерывна в точке a, а функция $f : Z \to Y$ непрерывна в точке $d = g(a)$, то сложная функция $f \circ g$ непрерывна в точке a.

Вопрос №23

Теорама о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

1. $a = \lim\limits_{B} g(x) \in \mathrm{R}$
2. f непрерывна в точке a $\quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{B} f(g(x)) = f(\lim\limits_{B} g(x))$
3. $\exists b \in B : f$ определена на $g(b)$

Вопрос №24

Основными элементарными функциями называют

$$const, \;\; x^a, \;\; a^x, \;\; \log_a x, \;\; \sin x, \;\; \cos x, \;\; \mathrm{tg}\, x, \;\; \arcsin x, \;\; \arccos x, \;\; \mathrm{arctg}\, x$$

Элементарной называют функцию, полученную из основных элементарных путем применения конечного числа арифметических действий и операции композиции.

Вопрос №25

Функция f не прерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция f не прерывна на отрезке $[a, b]$, если выполняются два условия:

1. функция f непрерывна в каждой точке (a, b)
2. $f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b)$

Ограничение отображения $f : X \to Y$ **на подмножество** $A \subseteq X$ есть отображение $f\mid_A : A \to Y$, где $f\mid_A(x) = f(x)$ только при $x \in A$.

Теорема о связи непрерывности функции в точке и на отрезке. Функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff$ ограничение $f|_{[a,b]}$ непрерывно в каждой точке отрезка.

Вопрос №26

Функцию $f : E \to \mathrm{R}$ называют **непрерывной на подмножестве** $A \subseteq E$, если ее ограничение $f|_A$ непрерывно в каждой точке A. Через $C(A)$ обозначают множество всех функций непрерывных на множестве $A \subseteq \mathrm{R}$.

Критерий непрерывности функции на множестве. Функция $f : E \to \mathrm{R}$ непрерывна на $E \iff$ относительно f прообраз любого открытого множества из R открыт в E.

Вопрос №27

Теорема Больцано-Коши
Функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Теорема о промежуточном значении. Пусть функция $f(\mathrm{x})$ непрерывна на отрезке $[\mathrm{a}, b]$, A — некоторое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда найдется такая точка $\mathrm{c} \in (\mathrm{a}, b)$, что $f(\mathrm{c}) = \mathrm{A}$.

Вопрос №28

Теорема Вейерштрасса об ограниченности.
Непрерывная на компакте функция ограничена на нём

Теорема Вейерштрасса о достижимости наибольшего и наименьшего значений.
Если функция непрерывна на компакте, то на этом компакте есть точка, где функция принимает наибольшее значение на этом компакте, и есть точка, где функция принимает наименьшее значение.

Вопрос №29

Функция $f : E \to \mathrm{R}$ **равномерно непрерывна**, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём

Вопрос №30

Точку $a \in \mathrm{R}$ называют **точкой разрыва функции** $f : E \to \mathrm{R}$, если

1. она предельная точка множеств $E \cap (-\infty, a)$ и $E \cap (a, +\infty)$
2. функция f не является непрерывной в этой точке

Точка разрыва $a \in \mathrm{R}$ функции $f : E \to \mathrm{R}$ называется **точкой устранимого разрыва**, если существует непрерывная функция $\overline{f} : E \cup a \to \mathrm{R}$ такая, что $f\,|_{E\setminus\{a\}} = \overline{f}\,|_{E\setminus\{a\}}$

Точку разрыва $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$ функции $f : \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ называют **точкой разрыва 1-го рода**, если пределы $f(\mathrm{a} - 0)$ и $f(a + 0)$ существуют и конечны.

Точка разрыва $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$ функции $f : \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ есть точка **разрыва 2-го рода**, если предел $f(\mathrm{a} - 0)$ или предел $f(a + 0)$, или они оба не существуют или бесконечны.

Точку разрыва 2-го рода $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$ функции $f : \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ называют **точкой бесконечного разрыва**, если один из пределов $f(a-0), f(a+0)$ бесконечен, а второй конечен или бесконечен.

Вопрос №31

Теорема о точках разрыва монотонной функции.
Монотонная функция может иметь разрывы только 1-го рода.

Теорема критерий непрерывности монотонной функции.
Пусть $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ - монотонная функция. Функция f непрерывна на отрезке $[\mathrm{a}, b] \iff$ образ $f([\mathrm{a}, b])$ отрезка сам является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Вопрос №32

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

1. Если функция $f : E \to \mathrm{R}$ — строго монотонна на множестве $E \subseteq R$, то f имеет обратную функцию $f^{-1} : Y \to E$, определенную на множестве $Y = f(E)$ значений функции f. Функция f^{-1} монотонна и имеет на Y тот же вид монотонности, какой имеет функция f на множестве E.
2. Если, кроме того, E есть промежуток, а функция f непрерывна на нем, то множество Y есть промежуток, и функция f^{-1} непрерывна на Y.