Теоретические вопросы для подготовки к РК-3

1) Дать определение производной функции. Сформулировать ее механический и геометрический смысл.

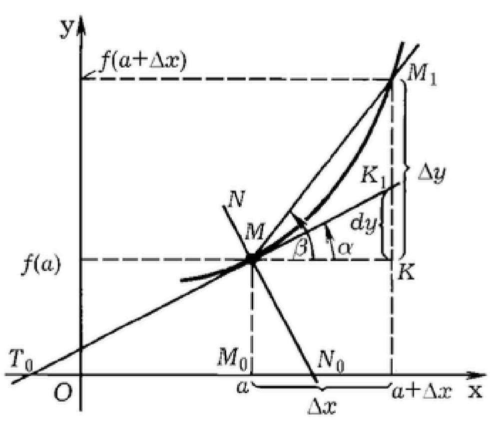
Пусть a - предельная точка множества E, $a \in E$. **Производной функции** $f : E \to \mathbb{R}$ в точке a называют предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (при условии, что этот предел существует), т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Механический смысл производной функции $s = f(t)$, описывающей движение точки в зависимости от времени t, состоит в том, что значение производной $f'(t_0)$ равно мгновенной скорости в момент времени t_0.
Геометрический смысл производной: производная $f'(a)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a; f(a))$.

2) Дать определения касательной и нормали к графику функции.

Если существует предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь вдоль кривой, стремится к точке M, то прямую, к которой стремится секущая, называют **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.
Прямую, проходящую через точку M перпендикулярно касательной, называют **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.



3) Дать определения односторонних и бесконечных производных. Сформулировать их геометрический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ не определена на $(a - \delta, a)$ для некоторого δ. Тогда при вычислении предела разностного отношения $\Delta y / \Delta x$ приходится ограничиться приближением x к нулю только справа. При существовании такого одностороннего предела его называют **односторонней производной** в точке a **справа** и обозначают $f'_+(a)$. Аналогично определяется **односторонняя производная** в точке a **слева** $f'_-(a)$. Если производная является односторонней в точке, то в этой точке график функции имеет **одностороннюю касательную**.
Один или оба односторонних предела разностного отношения $\Delta y / \Delta x$ в точке a могут быть бесконечными. Тогда говорят о **бесконечной односторонней производной** функции $y = f(x)$ слева или справа в точке a. Если функция имеет **бесконечную производную определённого знака**, то касательная в этой точке вертикальная. Если знаки различны, то эта точка является **точкой заострения**.

4) Дать определения точки заострения и угловой точки графика функции.

Если знаки бесконечных односторонних производных различны, то соответствующую точку графика функции называют **точкой заострения**
Если в некоторой точке $x = a$ того промежутка, в котором определена и непрерывна функция $y = f(x)$, существует не равные между собой односторонние пределы разностного отношения $\Delta y / \Delta x$, то в соответствующей точке графика функции будут существовать односторонние касательные, образующие некоторый угол. Точку $M(a, f(a))$ при этом называют **угловой точкой графика** функции.

5) Сформулировать определения дифференцируемости функции в точке и дифференциала.

Пусть $a \in E$ - предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$. Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют **дифференцируемой в точке** a, если приращение этой функции в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое - линейное относительно Δx, второе - o-малое от Δx:

$$\Delta f(a) = L\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где L - число, не зависящее от Δx, $a + \Delta x \in E$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ (любое o-малое от Δx можно представить в виде $\alpha(\Delta x)\Delta x$). При этом линейную относительно Δx часть приращения функции f называют **дифференциалом функции** f и обозначают через df или $df(a)$, $dy(a, \Delta x)$ и т.п.

6) Сформулировать необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Для дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную

7) Сформулировать теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

8) Сформулировать определения производных и дифференциалов высших порядков.

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$ -го порядка этой функции и обозначают $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ и т.п
Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка в предположении, что dx постоянно.

9) Сформулировать теорему о производной сложной функции.

Пусть функция $g : X \to Z$ и дифференцируема в точке $a \in X$, а функция $f : Z \to \mathbb{R}$ дифференцируема в соответствующей в точке $b = g(a) \in Z$. Тогда сложная функция $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a и

$$(f \circ g)(a) = f'_z(g(a))g'_x(a)$$

10) Сформулировать теорему о производной обратной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную производную $f'(a) \neq 0$, и для $f(x)$ существует обратная функция $x = g(y)$ непрерывная в соответствующей точке $y = b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

11) Сформулировать свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Формула для дифференциала функции $dy = f'(u)du$ одинакова для случая, когда u - аргумент этой функции, и для случая, когда u - функция какого-либо другого аргумента.

12) Сформулировать теорему о производной параметрически заданной функции.

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в промежутке T, причём $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in T$, и функция $x(t)$ строго монотонная в этом промежутке. Тогда производная функции, заданной параметрически, является функцией, параметрически заданной соотношениями

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad x = x(t), \quad t \in (a, b)$$

13) Сформулировать теорему Ферма и ее геометрический смысл.

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке локального экстремума c, то $f'(c) = 0$.
Геометрический смысл: Обращение в нуль производной $f'(c)$ означает, что касательная к кривой графика функции $f(x)$ в точке $M(c; f(c))$ параллельна оси Ox.

14) Сформулировать теорему Ролля и ее геометрический смысл.

Если функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируема в интервале (a, b)
3. на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$
   то между точками a и b найдётся, по крайней мере, одна точка c $(a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Геометрическое толкование: если ординаты непрерывной кривой на концах отрезка $[a, b]$ равны между собой и кривая в каждой внутренней точке этого отрезка имеет невертикальную касательную, то на кривой найдётся хотя бы одна точка, в которой касательная параллельная оси Ox.

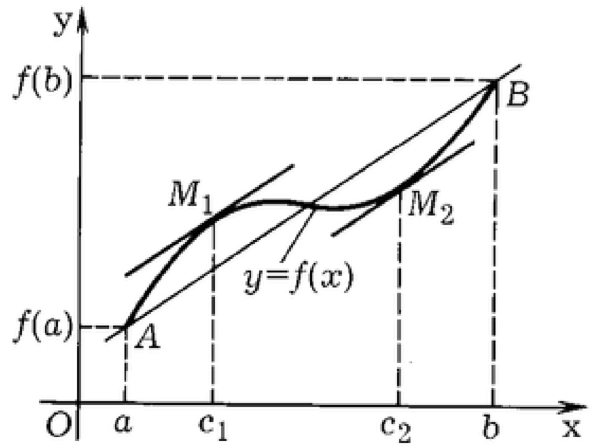
15) Сформулировать теорему Лагранжа и ее геометрический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируема в интервале (a, b)
   Тогда между точками a и b найдётся хотя бы одна такая c $(a < c < b)$, для которой справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

   Геометрический смысл: на непрерывной дуге AB, имеющей в каждой точке невертикальную касательную, всегда найдётся по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.



16) Сформулировать теорему Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируемы в интервале (a, b)
3. производная $g'(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b)
   Тогда между точками a и b найдётся хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, для которой

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

17, 18) Сформулировать теорему Бернулли — Лопиталя для предела отношения двух бесконечно малых/больших функций.

Пусть

1. функция $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a, a+\delta)$ для некоторого δ
2. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ (или $= \infty$) и $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ (соот. $= \infty$)
3. $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанного интервала
4. существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда существует и предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

19) Сформулировать теорему о сравнение на бесконечности роста показательной, степенной и логарифмической функций.

При $x \to +\infty$ показательная функции a^x при $a > 1$ является б.б. более высокого порядка (растёт быстрее), чем степенная x^s с любым положительным показателем s, которая, в свою очередь, является б.б. более высокого порядка, чем логарифмическая функция $log_a x$ при $a > 1$.

20) Сформулировать теорему о неинвариантности формы записи дифференциала второго порядка.

Пусть $y = f(z)$. Тогда

1. если z - аргумент функции y, то $d^2y = f''(z)dz^2$
2. если z - функции какого-либо другого аргумента, то $d^2y = f''_{zz}(z)dz^2 + f'_z(z)d^2z$

21) Сформулировать теорему Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Если функции $f(x)$ имеет в окрестности точки a производные до порядка $n-1$ и производную порядка n в точке a, то при $x \to a$

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

22) Сформулировать теорему Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если на отрезке с концами x, a функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то найдётся такое число Θ, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

23) Сформулировать теорему о разложении элементарных функций по формуле Тейлора — Маклорена.

Формула Маклорена - формула Тейлора при $a = 0$. Вычисляя производную до порядка n основных элементарных функций в точке 0, получим для них формулы Маклорена.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^s = 1 + sx + s(s-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

24) Сформулировать определение асимптоты графика функции.

Асимптотой неограниченной кривой называется прямая, к которой приближаются точки кривой, удаляясь от начала координат.

25) Сформулировать необходимые и достаточные условия существования вертикальных и наклонных асимптот.

Прямая $\{x = a\}$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff f(a+0) = \pm\infty$ или $f(a-0) = \pm\infty$.

Прямая $\{y = kx + b\}$ является правой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$. В случае левой наклонной асимптоты формулировка аналогична, только в обоих пределах $x \to -\infty$.

26) Сформулировать достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции.

1. Если для дифференцируемой в интервале (a, b) функции $f(x)$ имеем $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.
2. Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.

27) Дать определение точки локального экстремума и строгого локального экстремума функции.

Точку $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называют **точкой локального минимума** функции $f : E \to \mathbb{R}$, а значение функции в ней **локальным минимумом**, если

1. точка x_0 является предельной для левой $E \cap (-\infty; x_0)$ и правой $E \cap (x_0; +\infty)$ частей области определения функции.

2. существует выколотая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая что в любой точке $x \in U(x_0) \cap E$ имеем $f(x_0) \leqslant f(x)$.
   Аналогично (изменяя только тип неравенства) определяются **точки локального максимума** $(f(x_0) \geqslant f(x))$, строгого локального минимума $(f(x_0) < f(x))$ и строгого локального максимума $(f(x_0) > f(x))$.

28) Сформулировать необходимое условия экстремума дифференцируемой функции.

Если x_0 - точка локального экстремума функции, то x_0 - критическая точка I порядка этой функции.

29) Сформулировать первое достаточное условия экстремума дифференцируемой функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках соответствующей выколотой окрестности. Если при переходе аргумента x слева направо через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, причём если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка локального минимума, если же с плюса на минус, то x_0 - точка локального максимума. Если и слева, и справа от точки x_0 в некоторой выколотой окрестности этой точки производная $f'(x)$ имеет один знак, то точка x_0 не является точкой локального экстремума функции $f(x)$.

30) Сформулировать второе достаточное условие экстремума функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0, f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ существует, конечна и не равна нулю. Тогда при $f''(x_0) < 0$ x_0 - точка локального максимума, а при $f''(x_0) > 0$ x_0 - точка локального минимума.

31) Дать определение выпуклых и вогнутых функций. Сформулировать геометрическую интерпретацию этого определения.

Функцию $f(x)$, определённую на интервале (a, b), называют **выпуклой вниз** (вверх) в интервале, если любая дуга её графика лежит не выше (не ниже) стягивающей эту дугу хорды.
Функцию строго (или нестрого) выпуклую вверх называют также строго (нестрого) вогнутой вниз, а функцию выпуклую вниз **вогнутой вверх**.

32) Сформулировать достаточное условие строгой выпуклости графика дважды дифференцируемой функции.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную.

1. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a, b) \iff \forall x \in (a, b)\ f''(x) \geqslant 0$.
2. Если же $f''(x) > 0$ на (a, b), то функция строго выпукла вниз на этом интервале

33) Дать определение и сформулировать необходимое условие точки перегиба графика функции.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, в точке $(x_0; f(x_0))$ у графика функции существует касательная, а при переходе аргумента x через точку x_0 меняется направление строгой выпуклости функции $f(x)$. Тогда x_0 называют **точкой перегиба** этой **функции**, а точку $(x_0; f(x_0))$ — **точкой перегиба графика функции** $f(x)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки перегиба x_0 и у неё существует конечная вторая производная в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

34) Сформулировать достаточное условия существования точки перегиба функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет первую и вторую производную в выколотой окрестности $U(x_0)$ в этой точки и существует конечная или бесконечная производная $f''(x_0)$. Тогда

1. если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через значение x_0, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$;
2. если знак $f''(x)$ не меняется при переходе через x_0, то x_0 не является точкой перегиба функции $f(x)$

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную до порядка $n-1$ $(n > 2)$ и производную порядка n в точке x_0 причём $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда при нечётном n x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, а при чётном n не является.