Теоретические вопросы из билетов экзамена

1) Сформулировать свойство полноты вещественных чисел. (2 балла)

Если A и B — такие непустые подмножества $\mathbb{R}$, что для любых элементов $x \in A$ и $y \in B$ выполнено $x \leqslant y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in A$ и $y \in B$.

2) Дать определение точной верхней и нижней грани числового множества. (2 балла)

$a \in \mathbb{R}$ — **точная верхняя грань множества** $B \iff a$ — минимальный элемент множества всех верхних граней множества B. Обозначение: $a = sup(B)$.
$a \in \mathbb{R}$ — **точная нижняя грань множества** $B \iff a$ — максимальный элемент множества всех нижних граней множества B. Обозначение: $a = inf(B)$.

3) Сформулировать теорему о точной грани. (2 балла)

Ограниченное сверху (снизу) непустое подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

4) Сформулировать геометрическую интерпретацию вещественных чисел. (2 балла)

Нарисовать отрезок, показть всё

$$|d| = \begin{cases} d, \text{ при } d \geq 0 \\ -d \text{ при } d < 0 \end{cases}$$

5) Сформулировать теорему о вложенных отрезках. (2 балла)

Для всякой системы вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы

6) Дать определение мощности множества и счетного множества. Привести примеры. (3 балла)

Множества A и B **равномощны** ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \to B$
Мощность множества A – это семейство $|A|$ множеств равномощных множеству A.
Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют **счётным.**

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$$

7) Доказать, что множество рациональных чисел счетно. (4 балла)

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$, где $\frac{a}{b}$ несократимая дробь.
$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n = \{(n, m) \mid m \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$ Это объединение счётного семейства счётных множеств, а значит счётное множество.

8) Дать определение мощности континуум. Привести примеры. (2 балла)

Множество $[0, 1]$ бесконечно, но не равномощно счётному множеству.
Мощность этого отрезка называют **мощностью континуума**.

$$[0, 1] \sim (0, 1) \sim [a, b] \sim \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a < b)$$

9) Доказать, что множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ не есть счетное множество. (4 балла)

Пусть множество $[0, 1]$ счетное. Тогда существует биекция $\phi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Представим действительные числа отрезка $[0, 1]$ в двоичной системе счисления, считая $1 = 0.111\ldots$. Выпишем все числа $\phi(n)$:

$$\begin{array}{ccc}
\phi(1) & = & 0.\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}\ldots, \\
\phi(1) & = & 0.\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\phi(n) & = & 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn}\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Построим число $\beta = 0.\beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ из $[0, 1]$: положим $\beta_i = 1$, если $\alpha_{ii} = 0$, и $\beta_i = 0$, если $\alpha_{ii} = 1$. Ясно, что это число не совпадает ни с одним числом вида $\phi(n)$, а это противоречит допущению, что любое число из $[0, 1]$ есть $\phi(k)$ для некоторого k. Поэтому отрезок $[0, 1]$ не является счетным.

10) Как сравниваются мощности множеств? Сформулировать теорему Кантора— Бернштейна. (2 балла)

$$|A| < |B| \iff (A \nsim B) \land (\exists C \subset B : \ A \sim C)$$

Теорема Кантора—Бернштейна - Для любых множеств A и B имеет место в точности одно из следующих 3 утверждений: либо $|A| < |B|$, либо $|B| < |A|$, либо $|A| = |B|$.

11) Сформулировать теорему о сравнении мощности множества и мощности множества всех его подмножеств. Сформулировать следствие из нее. (2 балла)

Для любого множества A верно неравенство $|2^A| > |A|$.
В силу этого нет наибольшей мощности, так как для любого множества A существует множество большей мощности - его булеан.

12) Дать определения числовой последовательности и ее предела. (2 балла)

Если каждому номеру $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено единственное число $x_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана **числовая последовательность**.
Точку $b \in \mathbb{R}$ числовой прямой называют **пределом последовательности** $\{x_n\}$.

$$b = \lim\{x_n\} \iff \forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}:\ (n > N \implies |x_n - b| < \epsilon)$$

13) Доказать теорему о сходимости ограниченной монотонной последовательности. Привести пример ее применения. (4 балла)

Для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно её ограниченности.
Пусть $\{x_n\}$ неубывающая последовательность, а множество её значений ограничено сверху. Тогда множество последовательности имеет точную верхнюю грань $sup(\{x_n\}) = b \in \mathbb{R}$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}: \quad b - \epsilon < x_N \leqslant b$$

Так как последовательность неубывающая, то $\forall n > N \quad x_n \geqslant x_N$

$$b - \epsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant b$$

Тогда $|b - x_n| = b - x_n < \epsilon \quad \forall n > N$, поэтому получаем

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \implies |b - x_n| < \epsilon)$$

Если поледовательность $\{x_n\}$ невозрастающая, то ход доказательства аналогичен.

14) Дать определение частичного предела последовательности. В чем отличие этого понятия от понятия предела

последовательности? Сформулировать теорему Больцано—Вейерштрасса. (2 балла)

Частичным пределом последовательности называют предел какой-либо её подпоследовательности.
Различие понятий предела и частичного предела в том, что в случае предела вне его окрестности находится конечное число элементов последовательности и бесконечное внутри, а в случае частичного предела - бесконечное число внутри и, может быть, бесконечное вне.
Теорема Больцано–Вейерштрасса: Всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

15) Дать определения верхнего и нижнего пределов последовательности. Сформулировать теорему о их существовании для ограниченной последовательности. (2 балла)

Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называют **верхним (нижним) пределом последовательности** и обозначают: $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$.
Теорема о существовании верхнего и нижнего предела последовательности. У любой ограниченной последовательности существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.

16) Сформулировать критерий Коши сходимости последовательности. Привести пример его применения. (2 балла)

Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

17) Дать определение открытого покрытия подмножеств прямой и компакта на прямой. Сформулировать теорему о конечном покрытии. (2 балла)

Открытым покрытием множества $E \subseteq \mathbb{R}$ называют такое семейство $\{G_a\}_{a\in I}$ открытых подмножеств $G_a \subseteq \mathbb{R}$, что $E \subseteq \bigcup_{a\in I} G_a$.
Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называют **компактным** (компактом), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.
Теорема о конечном покрытии: Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ компактно т. и т. т., к. оно замкнуто и ограничено.

18) Дать определение предельной точки подмножества прямой. (2 балла)

Точку $x \in \mathbb{R}$ называют **предельной точкой множества** $E \subseteq \mathbb{R}$, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от x.

19) Доказать теорему о предельной точке. (4 балла)

Всякое ограниченное бесконечное подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет предельную точку в $\mathbb{R}$.

Пусть E – ограниченное бесконечное числовое множество. Тогда E лежит внутри некоторого отрезка I_0. Делим отрезок пополам: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset$ ..., выбирая каждый раз ту половину I_n отрезка I_{n-i}, которая содержит бесконечное число элементов E, т.е.
$E_n = E \cup I_n$ — бесконечное множество для любого $n = 1, 2$,...
По теореме о вложенных отрезков существует точка $x \in \cap_n I_n$. Длина отрезка I_n равна $|I_n| = |I_0|/2^n$ и стремится к 0 при $n \to \infty$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое n, что $|I_n| < \epsilon$, а значит, $I_n \subset U_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$, поскольку $x \in I_n$. Так как $E_n = E \cup I_n$ — бесконечное множество и $E_n \subset U_\epsilon(x)$, то окрестность $U_\epsilon(x)$ содержит точку множества E, отличную от x. Т.е. x — предельная точка множества E.

20) Дать определения внутренних и предельных точек множества, внутренности и замыкании числового множества. Сформулировать теоремы о внутренности открытых множеств и о замыкании замкнутых множеств. (3 балла)

Точку $x \in \mathbb{R}$ называют **предельной точкой множества** $E \subseteq \mathbb{R}$, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от x. **Замыканием множества** E называют объединение E с множеством предельных точек E и обозначают $[E]$.
Точку a множества $E \subseteq \mathbb{R}$ называют **внутренней**, если существует такая окрестность $U(a)$ этой точки, что $U(a) \subseteq E$. Множество всех внутренних точек множества E называют **внутренностью множества** E. $Int(E)$
Множество открыто т. и т. т., к. любая точка множества E есть внутренняя точка множества E, т.е. $Int(E) = E$.
Множество $E \subseteq R$ замкнуто т. и т. т., к. любая предельная точка множества E есть точка множества E, т.е. $[E] = E$.

21) Сформулировать определение по Коши конечного предела функции в точке. Привести примеры. (2 балла)

Точка a является предельной точкой множества D.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) \quad \forall x \in D: \quad (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon)$$

22) Доказать теорему о единственности предела функции в точке. (4 балла)

Теорема о единственности предела функции: Если функция $f(x)$ имеет конечный предел по базе B, то этот предел единственный.

От противного: пусть d_1, d_2 – два предела $d_1 \neq d_2$. Тогда $\forall \epsilon > 0 \quad \exists b_1(\epsilon)$ и $b_2(\epsilon)$ базы B, что

$$\forall x \in b_i(\epsilon) \quad |f(x) - d_i| < \epsilon \quad \text{ при } i = 1, 2.$$

Положим $\epsilon = |d_1 - d_2|/2$. По определению базы существует такой элемент $b_3 \in B$, что $b_3 \subset b_1(\epsilon) \cap b_2(\epsilon)$. Так как элемент базы непустое множество, существует $x \in b_3$. Для такого x, используя неравенство треугольника, получаем:

$$|d_1 - d_2| \leqslant |d_1 - f(x)| + |f(x) - d_2| < 2\epsilon = |d_1 - d_2|$$

Пришли к противоречию: $|d_1 - d_2| < |d_1 - d_2|$, которое доказывает теорему.

23) Доказать теорему о сохранении знака. (4 балла)

Теорема о сохранении знака

$$\lim_B f(x) = d \neq 0 \implies \exists b \in B: \quad \forall x \in b \quad f(x) > d/2, d > 0; \quad f(x) < d/2, d < 0.$$

Для $\epsilon = |d|/2$ по определению предела

$$\exists b = b(\epsilon) \in B: \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < |d|/2, \quad \text{ т.е. } d - |d|/2 < f(x) < d + |d|/2$$

Имеем $f(x) > d - |d|/2 = d/2$ при $d > 0$, и $f(x) < d + |d|/2 = d/2$ при $d < 0$.

24) Доказать теорему о предельном переходе в неравенстве. (4 балла)

Теорема о предельном переходе в неравенстве

$$1) \lim_B f_i(x) = d_i, \ i = 1, 2,$$

$$2) \ \exists b \in B: \ \forall x \in b \ f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

$$\implies d_1 \leqslant d_2$$

От противного: пусть $d_1 > d_2$. Тогда для $\epsilon = (d_1 - d_2)/2$ по определению предела $\exists b_i = b_i(\epsilon) \in B: \quad \forall x \in b_i \quad |f_i(x) - d_i| < \epsilon, \ i = 1, 2$. По определению базы существует такой элемент $b_3 \in B$, что $b_3 \subset b_1(\epsilon) \cap b_2(\epsilon)$. Так как элемент базы непустое множество, существует $x \in b_3$. Для такого x получаем:

$$f_1(x) > d_1 - \epsilon = d_2 + \epsilon > f_2(x) \geqslant f_1(x)$$

Пришли к противоречию: $f_1(x) > f_1(x)$, которое доказывает теорему.

25) Доказать теорему о пределе промежуточной функции. (4 балла)

Теорема о пределе промежуточной функции

$$1) \lim_B f_i(x) = d, \quad i = 1, 2,$$

$$2) \exists b \in B: \ \forall x \in b \quad f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$$

$$\implies \lim_B g(x) \quad \text{сущ. и равен} \quad d$$

Для каждого $\epsilon > 0$ существует такие два элемента $b_1(\epsilon)$ и $b_2(\epsilon)$ базы B, что при $i = 1, 2$

$$\forall x \in b_i(\epsilon) \quad |f_i(x) - d| < \epsilon \quad \text{или} \quad d - \epsilon < f_i(x) < d + \epsilon$$

По определению базы существует такой элемент $b_3 \in B$, что $b_3 \subset b_1(\epsilon) \cap b_2(\epsilon) \cap b$. Тогда

$$\forall x \in b_3 \quad d - \epsilon < f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) < d + \epsilon$$

Т.е. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists b_3 \in B \quad \forall x \in b_3 \quad |g(x) - d| < \epsilon$.

26) Дать определение предела функции в точке по Гейне. (2 балла)

Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, a — предельная точка A. Точку $d \in \mathbb{R}$ называют пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любой, имеющей пределом точку a последовательности $\{x_n\}$ значений $x_n \in A$ аргумента функции, не совпадающих с a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений $f(x_n)$ функции имеет пределом точку d.

27) Доказать теорему об эквивалентности понятий предела по Коши и по Гейне. (4 балла)

$\Rightarrow$ пусть функция $f: A \to \mathbb{R}$ имеет в точке a предел d по Коши. Тогда для произвольного $\epsilon > 0$

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: \quad \forall x \in U_\delta(a) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon.$$

Рассмотрим стремящуюся к a последовательность $\{x_n\}$, элементы которой лежат в A и не совпадают с a. По определению предела последовательности

$$\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n \in U_\delta(a).$$

Следовательно, для произвольного $\epsilon > 0$ существует такой номер N, что $\forall n > N \; |f(x_n) - d| < \epsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел d.

$\Leftarrow$ *От противного:* пусть d – предел по Гейне, но не предел по Коши функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$. Используя правило построения отрицания высказываний с кванторами, последнее условие можно переписать в виде

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(a) \cap A: \qquad |f(x) - d| \geqslant \epsilon$$

Из него следует, что для $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, существует такой элемент $x_n \in U_{\delta_n}(a) \cap A$, что $|f(x_n) - d| \geqslant \epsilon$. Получили последовательность $\{x_n\}$ в $A \setminus \{a\}$. Эта последовательность сходится к a, так как $x_n \in U_{\delta_n}(a)$, а $\delta_n \to 0$. По определению предела по Гейне последовательность $\{f(x_n)\}$ должна сходиться к d, но это противоречит условию $|f(x_n) - d| \geqslant \epsilon$, что доказывает утверждение $\Leftarrow$.

28) Сформулировать критерий Коши существования предела функции в точке. (2 балла)

Критерий Коши существования предела функции по базе.

$$\exists \lim_B f(x) \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B : \forall x, z \in b \quad |f(x) - f(z)| < \epsilon$$

29) Доказать теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел. (4 балла)

Теорема **о локальной ограниченности функции, имеющей предел**

$$\lim_B f(x) = d - \text{число} \implies \text{существует множество } b \in B, \text{ на котором } f(x) \text{ ограничено}$$

Для $\epsilon = 1$ по определению предела $\exists b = b(\epsilon) \in B \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < 1$, т.е. $d - 1 < f(x) < d + 1$ и множество $f(b)$ ограничено.

30) Дать определения базы и предела функции по базе. Сформулировать наиболее употребительные базы. (3 балла)

Семейство $B = \{b_a\}$ подмножеств множества $A : b_a \subseteq A$, **называют базой в множестве** A, если:

1. $\forall b \in B \;\; b \neq \varnothing$
2. $\forall b_1 \in B \, \forall b_2 \in B \, \exists b \in B : \; b \subset b_1 \cap b_2$

   Пусть A — область определения функции, B — база в множестве A. Число d называют **пределом функции** $f(x)$ **по базе** B, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B : \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < \epsilon$$

- База B_0 на множестве $\mathbb{N}$ состоит из множеств $N_s = \{s, s+1, s+2, \dots\}$, $s \in N$. Предел по этой базе есть предел последовательности.
- База B_1 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_\delta(a), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a$.
- База B_2 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_\delta(a+) = (a, a+\delta), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a+$.
- База B_3 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_\delta(a-) = (a-\delta, a), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a-$.
- База B_4 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to \infty$.
- База B_5 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to +\infty$.
- База B_6 на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to -\infty$.

31) Доказать теорему о связи односторонних и двустороннего пределов. (4 балла)

Теорема о связи односторонних и двустороннего пределов: Пусть a — предельная точка множеств $A \cap (a, +\infty)$ и $A \cap (-\infty, a)$, $f : A \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ сущ и равен } d \iff \lim_{x\to a-} f(x),\ \lim_{x\to a+} f(x) \text{ сущ и равен } d$$

$\Rightarrow$ по определению двухстороннего предела

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall x \in U_\delta(a) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon$$

Но

$$U_\delta(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = U_\delta(a-) \cup U_\delta(a+)$$

Поэтому $\forall x \in U_\delta(a-) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon$ и $\lim_{x\to a-} f(x) = d$. Аналогично для правого предела.

$\Leftarrow$: так как a — предельная точка множества $A \cap (a, +\infty)$ (и $A \cap (-\infty, a)$), то a — предельная точка и множества A тоже. С другой стороны, по определению односторонних пределов

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad & \exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0 : \quad \forall x \in U_{\delta_1}(a-) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon \\ \text{и} \qquad & \exists \delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0 : \quad \forall x \in U_{\delta_2}(a+) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon \end{aligned}$$

Положим $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $U_\delta(a) \subseteq U_{\delta_1}(a-) \cup U_{\delta_2}(a+)$, а значит,

$$\forall x \in U_\delta(a) \cap A \quad |f(x) - d| < \epsilon \quad \text{и поэтому} \quad \lim_{x\to a} f(x) = d$$

32) Доказать теорему о пределе сложной функции. Привести примеры ее применения. (5 балла)

Теорема о пределе сложной функции:

1. $g : Z \to \mathbb{R}, \quad B_z$ – база в $Z, \quad \lim\limits_{B_z} g(z) = d,$
2. $f : X \to Z, \quad B_x$ – база в $X, \qquad \implies \exists \lim\limits_{B_x} g[f(x)] = d$ (d может быть $(\pm\infty)$)
3. $\forall b_z \in B_z \quad \exists b_x \in B_x : \quad f(b_x) \subseteq b_z$

Для случая, когда. d – число. Композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ определена, так как $f(X) \subseteq Z$. Из условия 1 следует, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b_z = b_z(\epsilon) \in B : \quad \forall z \in b_z \quad |g(z) - d| < \epsilon.$$

А из условия 3 – то, что

$$\exists b_x \in B_x : \quad \forall x \in b_x \quad f(x) \in b_z$$

Поэтому $\forall x \in b_x \quad |g[f(x)] - d| < \epsilon$, что означает: $\lim\limits_{B_x}[g(f(x))] = d$.

Случай бесконечного предела доказывается аналогично.

33) Дать определения бесконечно малых функций и бесконечно больших функций. (2 балла)

Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой (б.м.) по базе** $B \iff \exists \lim\limits_{B} \alpha(x) = 0$

Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно большой (б.б.) по базе** $B \iff \exists \lim\limits_{B} \alpha(x) = \infty$

34) Доказать теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. (4 балла)

Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой:

$$\lim_{B} f(x) = d \in \mathbb{R} \iff f(x) = d + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м. по базе } B$$

$\Rightarrow$: Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел d по базе B. Согласно определению предела имеем:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B : \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < \epsilon$$

Но это в силу определения б.м. означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - d$ есть б.м. по базе B.

$\Leftarrow$: Пусть теперь $f(x) = d + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. по базе B. Тогда, согласно определению б.м., имеем

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b = b(\epsilon) \in B: \quad \forall x \in b \quad |\alpha(x)| = |f(x) - d| < \epsilon,$$

а это означает, что существует предел по базе B функции $f(x)$ и он равен d.

35) Доказать теорему о связи бесконечно больших с бесконечно малыми. (4 балла)

Теорема о связи б.б. с б.м.

$$f(x) \quad \text{б.б по базе } B \iff \frac{1}{f(x)} \quad \text{б.м по базе } B$$

$\Rightarrow$: пусть функция $f(x)$ – б.б. по базе B. Выберем произвольное $\epsilon > 0$. Для $E = 1/\epsilon$, согласно определению, имеем

$$\exists b = b(\epsilon) \in B : \forall x \in b \quad |f(x)| > E$$

Поэтому $\forall x \in b \quad f(x) \neq 0$, так как $E > 0$, и $|1/f(x)| = 1/|f(x)| < \epsilon$. Поскольку ϵ – произвольное положительное, то это означает, что функция $1/f(x)$ есть б.м. по базе B
$\Leftarrow$: пусть функция $\frac{1}{f(x)}$ – б.м. по базе B. Выберем произвольное $E > 0$. Для $\epsilon = 1/E$, согласно определению, имеем

$$\exists b = b(\epsilon) \in B: \quad \forall x \in b \quad |\frac{1}{f(x)}| < \epsilon = \frac{1}{E}$$

и, следовательно, $|f(x)| > E$. Это означает, что функция $f(x)$ – б.б. по базе B.

36) Вывести первый замечательный предел и его следствия. (5 балла)

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Вывод разобьем на 4 этапа: 1) пусть x — центральный угол или длина дуги окружности единичного радиуса причем $0 < x < \pi/2$ (рис. 13). Сравнение площадей треугольника OAB, сектора AOB и треугольника OAD дает

$$0 < S_{\triangle OAB} < S_{\text{сек.}AOB} < S_{\triangle OAD}$$

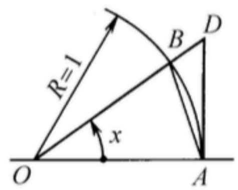


Рис. 13

Но при $OA = 1$ $S_{\triangle OAB} = (\sin x)/2$, $S_{\text{сек.}AOB} = x/2$, $S_{\triangle OAD} = (\operatorname{tg} x)/2$ и поэтому

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2) Из 1) и из нечетности функций получаем $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$ при $0 > x > -\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $0 < |\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ при $x \in \dot{U}_{\pi/2}(0)$.

3) Из 2) и из теоремы о пределе промежуточной функции: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. По теореме о замене переменной в пределе $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$. Отсюда и из арифметических свойств пределов следует, что

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) = 1.$$

4) Из 2) имеем $1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$. Но в $\dot{U}_{\pi/2}(0)$ функции $\frac{x}{\sin x}$ и $\cos x$ положительны, поэтому $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, а значит, $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Отсюда, из 3) и теоремы о пределе промежуточной функции получаем результат.

37) Вывести второй замечательный предел и его следствия. (6 балла)

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Вывод. Ранее мы показали, что

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отсюда по теореме об арифметических свойствах пределов получаем:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Чтобы перенести на случай функций указанные пределы последовательностей, применим теорему о пределе сложной функции. Для этого положим:

$$Z=\mathbb{N},\quad \mathcal{B}_z \text{ — база } n\to\infty,\quad X=(1,+\infty),\quad \mathcal{B}_x \text{ — база } x\to+\infty,\quad f\colon x\mapsto[x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Тогда условия 2 и 3 теоремы 5 выполняются, так как для любого $b_z=\{s,s+1,s+2,\ldots\}\in\mathcal{B}_z$, полагая $b_x=(s,+\infty)\in\mathcal{B}_x$, получаем $f(b_x)\subseteq b_z$.

Предел по базе $n\to\infty$ функций (последовательностей)

$$g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\quad g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

есть e. По теореме о пределе сложной функции предел по базе $x\to+\infty$ функций

$$(g_1\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]},\quad (g_2\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

также есть e. Но при $x > 1$ имеем

$$1 \leqslant [x] \leqslant x < [x] + 1, \tag{1}$$

а значит,

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

Все части этого неравенства больше единицы. Поэтому после их возведения в положительные степени, показателями которых служат соответствующие части неравенства (1), получим

$$(g_1 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = (g_2 \circ f)(x). \tag{2}$$

Так как при $x \to +\infty$ крайние члены в (2) стремятся к e, то по теореме о пределе промежуточной функции $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть теперь $x \to -\infty$. Используем замену $x = -u$. Тогда $u \to +\infty$. После тождественных преобразований получим

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^{u} = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right).$$

Используя теоремы о пределе сложной функции и об арифметических свойствах пределов, находим

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

В итоге при любом способе стремления x к бесконечности справедлив второй замечательный предел. ▷

Следствие: $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e.$

Вывод следует из теоремы о пределе сложной функции, поскольку замена переменной $z = 1/x$ сводит данный предел ко второму замечательному пределу.

38) Сформулировать определение непрерывности функции в точке. (2 балла)

Формулировка непрерывности функции в точке

1. $\Delta y \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
3. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: \quad \forall x \in E \ (|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$
4. $\forall V\big(f(a)\big) \quad \exists U(a) \quad f\big(U(a) \cap E\big) \subseteq V\big(f(a)\big)$

39) Сформулировать определение точки разрыва функции и типов разрыва (классификацию точек разрыва). (3 балла)

Точку $a \in \mathbb{R}$ называют **точкой разрыва функции** $f : E \to \mathbb{R}$, если

1. она предельная точка множеств $E \cap (-\infty, a)$ и $E \cap (a, +\infty)$
2. функция f не является непрерывной в этой точке

Точка разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f : E \to \mathbb{R}$ называется **точкой устранимого разрыва**, если существует непрерывная функция $\overline{f} : E \cup a \to \mathbb{R}$ такая, что $f\,|_{E\setminus\{a\}} = \overline{f}\,|_{E\setminus\{a\}}$

Точку разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f : E \to \mathbb{R}$ называют **точкой разрыва 1-го рода**, если пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют и конечны.

Точка разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f : E \to \mathbb{R}$ есть точка **разрыва 2-го рода**, если предел $f(a-0)$ или предел $f(a+0)$, или они оба не существуют или бесконечны.

Точку разрыва 2-го рода $a \in \mathbb{R}$ функции $f : E \to \mathbb{R}$ называют **точкой бесконечного разрыва**, если один из пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ бесконечен, а второй конечен или бесконечен.

40) Сформулировать теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. (2 балла)

Теорама о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

1. $a = \lim\limits_{B} g(x) \in \mathbb{R}$
2. f непрерывна в точке a $\qquad \implies \lim\limits_{B} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim\limits_{B} g(x)\Big)$
3. $\exists b \in B : f$ определена на $g(b)$

41) Сформулировать определения непрерывности функции в точке и на множестве. (2 балла)

Функция f непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, если выполняются два условия:

1. функция f непрерывна в каждой точке (a, b)
2. $f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b)$

Ограничение отображения $f : X \to Y$ **на подмножество** $A \subseteq X$ есть отображение $f\,|_A : A \to Y$, где $f\,|_A\,(x) = f(x)$ только при $x \in A$.

Теорема о связи непрерывности функции в точке и на отрезке. Функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff$ ограничение $f|_{[a,b]}$ непрерывно в каждой точке отрезка.

42) Доказать теорему о непрерывности сложной функции. (4 балла)

Теорема о непрерывности сложной функции. Если функция $g : X \to Z$ непрерывна в точке a, а функция $f : Z \to Y$ непрерывна в точке $d = g(a)$, то сложная функция $f \circ g$ непрерывна в точке a.

$$f \text{ непр. в т.} \quad d = g(a) \implies \forall V(f(d)) \quad \exists U(d) : \quad f\big(U(d) \cap Z\big) \subseteq V(f(d)),$$

$$g \quad \text{непр. в точке} \quad a \implies \exists W(a) : \quad g\big(W(a) \cap X\big) \subseteq U(d)$$

$$\implies (f \circ g)\big(W(a) \cap X\big) \subseteq f\big(U(d) \cap Z\big) \subseteq V(f(d))$$

43) Доказать теорему о непрерывности арифметических операций. Доказать непрерывность многочлена. (4 балла)

44) Дать определение элементарных функций и сформулировать теорему о их непрерывности. (2 балла)

Основными элементарными функциями называют

$$const, \;\; x^a, \;\; a^x, \;\; \log_a x, \;\; \sin x, \;\; \cos x, \;\; tgx, \;\; \arcsin x, \;\; \arccos x, \;\; arctgx$$

Элементарной называют функцию, полученную из основных элементарных путем применения конечного числа арифметических действий и операции композиции.

Теорема о их непрерывности: Любая элементарная функция непрерывна в области своего определения.

45) Сформулировать определение и свойства функций, непрерывных на отрезке. (3 балла)

Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, если выполняются два условия:

1. функция f непрерывна в каждой точке (a, b)
2. $f(a + 0) = f(a), \quad f(b - 0) = f(b)$

Теорема Больцано-Коши.
Функция f непрерывна на $[a, b], \; f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Теорема о промежуточном значении. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, A — некоторое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что

$f(c) = A$.

Теорема Вейерштрасса об ограниченности. Непрерывная на компакте функция ограничена на нём

Теорема Вейерштрасса о достижимости наибольшего и наименьшего значений. Если функция непрерывна на компакте, то на этом компакте есть точка, где функция принимает наибольшее значение на этом компакте, и есть точка, где функция принимает наименьшее значение.

46) Доказать теоремы о нуле непрерывной на отрезке функции и о промежуточном значении. (5 балла)

Теорема Больцано-Коши.
Функция f непрерывна на $[a, b],\ f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $d = (a+b)/2$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке. В этом случае теорема доказана и $c = d$. Пусть $f(d) \neq 0$. Тогда на концах одного из отрезков $[a, d]$, $[d, b]$ функция примет значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Тогда $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Разделим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль. Обозначим $[a_2, b_2]$ ту из половин отрезка $[a_1, b_1]$, для которой $f(a_2)f(b_2) < 0$. Продолжим этот процесс построения отрезков. При этом либо после конечного числа шагов наткнемся на такую точку деления отрезков пополам, в которой функция обращается в нуль, и доказательство теоремы будет завершено, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

удовлетворяющих условию $f(a_n)f(b_n) < 0$ для всех $n \in N$.
По теореме о вложенных отрезков существует точка c, принадлежащая всем этим отрезкам. Покажем, что именно эта точка удовлетворяет требованиям данной теоремы и является искомой точкой c из (a, b). Так как $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$0 \leqslant a_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0, \quad 0 \leqslant c - b_n \leqslant b_n - a_n \to 0$$

а значит, $a_n \to c$ и $b_n \to c$ при $n \to \infty$. С другой стороны, по условию теоремы функция f непрерывна в точке c, поэтому $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Отсюда и из определения предела по Гейне следует, что

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c), \quad \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c)$$

Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве получаем $f(c)f(c) < 0$. Но $f(c)^2 \geqslant 0$, поэтому $f(c) = 0$.

47) Доказать теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке. (5 балла)

Теорема Вейерштрасса об ограниченности. Непрерывная на компакте функция ограничена на нём

Пусть $K \subseteq E \subseteq \mathbb{R},\ K$ — компакт, $f : E \to \mathbb{R}$ – непрерывная на K функция. По определению непрерывной функции на подмножестве ограничение $f|_K$ непрерывно в любой точке $a \in K$. С целью упрощения обозначений будем считать, что $f|_K = f$, т.е. $E = K$.
Если a — предельная точка K, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. По теореме о локальной ограниченности функции, имеющей предел, найдется окрестность $U(a)$ точки a, в которой функция f ограничена. Если a — изолированная точка K, то $\exists U(a)$, такая что $U(a) \cap K = \{a\}$, а значит, функция f ограничена в $U(a)$. Совокупность таких окрестностей для всех точек K образует его покрытие. По определению компакта можно выделить конечное подпокрытие $U(a_n),\ n = \overline{1, N}$. В каждой из окрестностей $U(a_n)$ множество значений функции $f(x)$ ограничено, т.е. $\exists C_n \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U(a_n) \quad |f(x)| \leqslant C_n$. Поэтому

$$\forall x \in K \quad |f(x)| \leqslant C = max\{C_1; C_2; \dots C_N\}$$

что, по определению, означает, что функция f ограничена на K.

48) Доказать теорему Вейерштрасса о достижимости наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке. (5 балла)

Теорема Вейерштрасса о достижимости наибольшего и наименьшего значений. Если функция непрерывна на компакте, то на этом компакте есть точка, где функция принимает наибольшее значение на этом компакте, и есть точка, где функция принимает наименьшее значение.

Пусть $K \subseteq R$ - компакт, f — непрерывная на K функция. Согласно теореме Вейерштрасса об ограниченности, множество значений функции $f(x)$ на K ограничено, а согласно теореме о точной грани оно имеет точную верхнюю грань $M = \sup_{x \in K} f(x)$, причем $M \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\forall x \in K \quad f(x) < M$, т.е. функция $f(x)$ не достигает на K своей точной верхней грани. Тогда вспомогательная функция $g(x) = 1/(M - f(x)), x \in K$ положительна во всех точках K и в силу теоремы о непрерывности арифметических операций непрерывна в каждой точке K. По теореме Вейерштрасса функция $g(x)$ также ограничена на K, т.е. $\forall x \in K\ g(x) \leqslant \gamma$, причем $\gamma > 0$. Но тогда $f(x) \leqslant M - 1/\gamma < M$, т.е. число $M - 1/\gamma$ является верхней гранью рассматриваемого множества значений функции f на K, а это противоречит определению точной верхней грани множества как наименьшей из верхних граней. Из этого противоречия следует, что на K найдется такая точка $x*$, для которой $f(x*) = M$, т.е. функция принимает в этой точке

конечное наибольшее значение.
Аналогичным путем можно доказать, что на K найдется такая точка $x*$, в которой функция $f(x)$ принимает конечное наименьшее значение.

49) Доказать теорему о точках разрыва монотонной функции. (5 балла)

Теорема о точках разрыва монотонной функции. Монотонная функция может иметь разрывы только 1-го рода.

Пусть c — точка разрыва неубывающей функции $f : E \to \mathbb{R}$. По определению точки разрыва c – предельная точка и левой $E \cap (-\infty; c)$, и правой $E \cap (c; +\infty)$ части области E определения f. В частности, $E \cap (c; +\infty)$ — непустое множество. Так как f — неубывающая функция, образ $f(E \cap (-\infty; c))$ ограничен сверху значением $f(c_1)$, где $c_1 \in E \cap (c; +\infty)$. По теореме о точной грани существует $b = \sup f(E \cap (-\infty; c))$. По определению точной верхней грани для любого $\epsilon > 0$ существует такое $b_1 \in f(E \cap (-\infty; c))$, что $b_1 \in (b - \epsilon, b]$. По определению образа множества существует точка $c_1 \in E \cap (-\infty; c)$ такая, что $f(c_1) = b_1$. Обозначим $\delta = c - c_1$. Используя монотонность f и определения b_1 и b, получаем $b_1 = f(c - \delta) \leqslant f(x) < b$ для любого $x \in E \cap (c - \delta, c)$, а значит, $0 \leqslant b - f(x) < b - b_1 < \epsilon$. По определению левого предела $b = f(c - 0)$.
Аналогично доказывается существование конечного предела $f(c + 0)$ и рассматривается случай невозрастающей функции. Таким образом, c – точка разрыва 1-го рода в случае и неубывающей, и невозрастающей функции f.

50) Дать определения монотонных и строго монотонных функций. (2 балла)

...

51) Доказать критерий непрерывности монотонной функции. (5 балла)

Теорема критерий непрерывности монотонной функции.
Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - монотонная функция. Функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff$ образ $f([a, b])$ отрезка сам является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

$\Rightarrow$: ввиду монотонности f все значения, которые функция принимает на отрезке $[a, b]$, лежат между значениями $f(a)$ и $f(b)$, которые она принимает в концах отрезка. Согласно теореме о промежуточном значении она обязана принимать и все значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, множество значений функции является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.
$\Leftarrow$:: из определения следует: функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff f(c) = f(c + 0)$,

при $c \in [a, b)$ и $f(c) = f(c-0)$ при $c \in (a, b]$.
Пусть f — неубывающая функция с областью определения $[a, b]$, . При $c \in (a, b]$ множество $f\big([a, c)\big)$ ограничен сверху значением $f(b)$. Рассуждая как при доказательстве предыдущей теоремы, доказываем существование конечного предела $f(c-0)$.
При $a \leqslant a_1 < c - \Delta x < c < a_2 \leq b$ имеем $f(a_1) \leqslant f(c - \Delta x) \leqslant f(c) \leqslant f(a_2)$. Переходя в этих неравенствах к пределу $\Delta x \to 0+$, получаем $f(a_1) \leqslant f(c - \Delta x) \leqslant f(c) \leqslant f(a_2)$.
Следовательно, при $f(c-0) < f(c)$ интервал $(f(c-0), f(c))$ не лежит в образе $f([a, b])$, а это противоречит условию. Поэтому $f(c-0) = f(c)$.
Аналогично доказывается равенство $f(c) = f(c+0)$ при $c \in [a, b)$ и разбирается случай невозрастающей функции.

52) Доказать теорему о существовании и непрерывности обратной функции. (5 балла)

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

1. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ — строго монотонна на множестве $E \subseteq R$, то f имеет обратную функцию $f^{-1} : Y \to E$, определенную на множестве $Y = f(E)$ значений функции f. Функция f^{-1} монотонна и имеет на Y тот же вид монотонности, какой имеет функция f на множестве E.
2. Если, кроме того, E есть промежуток, а функция f непрерывна на нем, то множество Y есть промежуток, и функция f^{-1} непрерывна на Y.

Док–во. 1) Отображение $f\colon E \to Y = f(E)$ сюръективно по определению. Пусть для определенности f возрастает на E. Тогда

$$\forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E \quad \Big(x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)\Big). \tag{4}$$

Таким образом, отображение f в различных точках принимает различные значения, т.е. оно инъективно. Следовательно, f биективно, а значит, определено обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to E$, задаваемое формулой $x = f^{-1}(y)$, если $y = f(x)$.

Сопостовляя определение f^{-1} с соотношением (4), получаем соотношение

$$\forall y_1 \in Y \quad \forall y_2 \in Y \quad \Big(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2\Big),$$

означающее, что функция f^{-1} возрастает на области своего определения.

2) Пусть $y_1, y_2 \in Y = f(E)$ и $y_1 \neq y_2$. Тогда $x_i = f^{-1}(y_i) \in E$, $i = 1, 2$, и $x_1 \neq x_2$. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Так как $x_1, x_2 \in E$, а E есть промежуток, то $[x_1, x_2] \subseteq E$. Поэтому функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$. По критерию непрерывности монотонной функции образ $f\Big([x_1, x_2]\Big)$ есть отрезок с концами $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Следовательно, отрезок $[y_1, y_2]$ (или $[y_2, y_1]$) полностью лежит в Y, а f^{-1} — монотонная на этом отрезке функция, образ которой является отрезок $[x_1, x_2]$, причем x_1, x_2 — образы концов отрезка $[y_1, y_2]$. По критерию непрерывности монотонной функции функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[y_1, y_2]$.

Поскольку y_1, y_2 — произвольные точки из Y, то Y — промежуток, а функция f^{-1} непрерывна в каждой точке y из Y. Действительно, так как промежутками являются только интервалы, полуинтервалы и отрезки (см. задачу 2 из §4), то либо y — внутренняя точка промежутка Y, либо Y есть полуинтервал или отрезок, а y — его концевая точка. В первом случае существуют точки y_1 и y_2 из Y слева и справа от y: $y_1 < y < y_2$. Тогда из непрерывности функции f^{-1} на отрезке $[y_1, y_2]$ (см. предыдущий абзац) следует непрерывность этой функции в точке y. Если y — концевая точка промежутка Y, то рассматривая какую–либо другую точку y_1 из Y, доказываем непрерывность функции f^{-1} на отрезке $[y_1, y]$ (или $[y, y_1]$), а значит, функция $f^{-1}\colon Y \to E$ непрерывна и в концевой точке $y \in Y$. $\triangleright$

53) Дать определение равномерной непрерывности. Привести примеры. (2 балла)

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна**, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

54) Доказать теорему о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. (5 балла)

Пусть $K \subseteq \mathbb{R}$ – компакт, $f : K \to \mathbb{R}$ – непрерывная на K функция. Выберем произвольное $\epsilon > 0$. В силу непрерывности f на K

$$\forall a \in K \quad \exists \delta(a) = \delta(\frac{\epsilon}{2}, a) > 0 : \quad \forall x \in U_{\delta(a)}(a) \cap K \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (3)$$

Рассмотрим открытое покрытие $\{V(a) = U_{\delta(a)/2}(a) : a \in K\}$ множества K. В силу компактности K из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{V(a_1), \ldots, V(a_n)\}$. Положим $\delta* = \frac{1}{2} min\{\delta(a_1); \ldots; \delta(a_n)\}$.
Теперь возьмем такие точки $a', a'' \in K$, что $|a' - a''| < \delta*$. Пусть i — такой номер, что $a' \in V(a_i)$. Тогда $|a' - a_i| < \delta(a_i)/2 < \delta(a_i)$ и $a' \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$. А в силу неравенства треугольника

$$|a'' - a_i| < |a' - a''| + |a' - a_i| < \delta^* + \frac{\delta(a_i)}{2} \leq \delta(a_i),$$

и поэтому $a'' \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$. На основании того же неравенства треугольника и (3) имеем

$$|f(a'') - f(a')| \leqslant |f(a'') - f(a_i)| + |f(a_i) - f(a')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Итак, для каждой пары точек $a', a'' \in K$ из условия $|a' - a''| < \delta*$ следует неравенство $|f(a'') - f(a')| < \epsilon$, причем число $\delta*$ зависит лишь от выбора ϵ и не зависит от положения этих точек, что по определению соответствует равномерной непрерывности f на K.

55) Дать определение понятий, используемых для сравнения функций. Сформулировать свойства O и o. Привести таблицу эквивалентных бесконечно малых. (3 балла)

Сравнение функций при одинаковом стремлении аргумента

1. $\alpha(x)\beta(x)$ **эквивалентны по базе** B ($\alpha \sim \beta$ по базе B) $\iff \lim\limits_B \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$
2. $\alpha(x)$ o**-малое от** $\beta(x)$ **по базе** B ($\alpha(x) = o(\beta(x))$ по базе B) $\iff \lim\limits_B \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$
3. $\alpha(x)$ O**-большое от** $\beta(x)$ **по базе** B ($\alpha(x) = o(\beta(x))$ по базе B) $\iff$ функция $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ограничена на некотором элементе $b \in B$
4. $\alpha(x), \beta(x)$ **одного порядка по базе** $B \iff \lim\limits_B \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$
5. $\alpha(x)$ **имеет порядок** k **относительно** $\beta(x)$ **по базе** $B \iff \lim\limits_B \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$
6. $\alpha(x), \beta(x)$ **несравнимы по базе** $B \iff \lim\limits_B \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не сущ. и ≠ ∞

Свойства o и O

1. $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$
2. $\beta = o(\alpha),\ \gamma = o(\beta) \implies \gamma$ есть $o(\alpha)$
3. $O(\alpha) \pm O(\alpha) = O(\alpha)$

Таблица эквивалентности

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad tgx \sim x$$

$$\arcsin x \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^b - 1 \sim bx, \quad \sin x \sim x$$

56) Сформулировать критерий эквивалентности функций и теорему о замене эквивалентных при вычислении пределов. (2 балла)

Критерий эквивалентности функций
$\alpha(x) \sim \beta(x)$ по базе $B \iff \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ по базе B

Теорема о замене эквивалентных при вычислении пределов.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \implies \begin{cases} (1)\ \lim\limits_{B}[f(x)\alpha(x)] = \lim\limits_{B}[f(x)\beta(x)] \\ (2)\ \lim\limits_{B} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{B} \frac{f(x)}{\beta(x)} \end{cases}$$

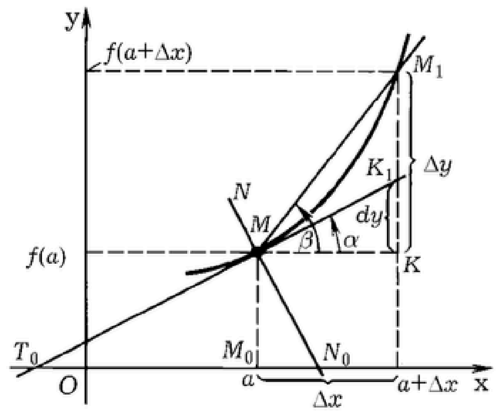
57) Дать определение производной функции. Сформулировать ее механический и геометрический смысл. (2 балла)

Пусть a - предельная точка множества E, $a \in E$. **Производной функции** $f : E \to \mathbb{R}$ в точке a называют предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (при условии, что этот предел существует), т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Механический смысл производной функции $s = f(t)$, описывающей движение точки в зависимости от времени t, состоит в том, что значение производной $f'(t_0)$ равно мгновенной скорости в момент времени t_0.
Геометрический смысл производной: производная $f'(a)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a; f(a))$.

58) Дать определения касательной и нормали к графику функции. Вывести их уравнения. (3 балла)



Если существует предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь вдоль кривой, стремится к точке M, то прямую, к которой стремится секущая, называют **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.
Прямую, проходящую через точку M перпендикулярно касательной, называют **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

59) Дать определения односторонних и бесконечных производных. Сформулировать их геометрический смысл. (2 балла)

Пусть функция $y = f(x)$ не определена на $(a - \delta, a)$ для некоторого δ. Тогда при вычислении предела разностного отношения $\Delta y/\Delta x$ приходится ограничиться приближением x к нулю только справа. При существовании такого одностороннего предела его называют **односторонней производной** в точке a **справа** и обозначают $f'_+(a)$. Аналогично определяется **односторонняя производная** в точке a **слева** $f'_-(a)$.
Если производная является односторонней в точке, то в этой точке график функции имеет **одностороннюю касательную**.
Один или оба односторонних предела разностного отношения $\Delta y/\Delta x$ в точке a могут быть бесконечными. Тогда говорят о **бесконечной односторонней производной** функции $y = f(x)$ слева или справа в точке a. Если функция имеет **бесконечную производную определённого знака**, то касательная в этой точке вертикальная. Если знаки различны, то эта точка является **точкой заострения**.

60) Дать определения точки заострения и угловой точки графика функции. (2 балла)

Если знаки бесконечных односторонних производных различны, то соответствующую точку графика функции называют **точкой заострения**
Если в некоторой точке $x = a$ того промежутка, в котором определена и непрерывна функция $y = f(x)$, существует не равные между собой односторонние пределы

разностного отношения $\Delta y/\Delta x$, то в соответствующей точке графика функции будут существовать односторонние касательные, образующие некоторый угол. Точку $M(a, f(a))$ при этом называют **угловой точкой графика** функции.

61) Вывести формулу для производной произведения и частного от деления двух функций. (4 балла)

Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\big(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\big) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\big(f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)\big) =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

62) Сформулировать определения дифференцируемости функции в точке и дифференциала. Сформулировать геометрический смысл дифференциала. (2 балла)

Пусть $a \in E$ - предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$. Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют **дифференцируемой в точке** a, если приращение этой функции в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое - линейное относительно Δx, второе - o-малое от Δx:

$$\Delta f(a) = L\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где L - число, не зависящее от Δx, $a + \Delta x \in E$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ (любое o-малое от Δx можно представить в виде $\alpha(\Delta x)\Delta x$). При этом линейную относительно Δx часть приращения функции f называют **дифференциалом функции** f и обозначают через df или $df(a)$, $dy(a, \Delta x)$ и т.п.

Геометрический смысл дифференциала функции (см. рис. 19): дифференциал функции f в точке a равен приращению в точке $M(a; f(a))$ ординаты точки на касательной к графику функции f соответствующему приращению Δx аргумента.

63) Доказать необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. (4 балла)

1. Для дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную
2. $df(a) = f'(a)dx$

Необходимость. Если функция дифференцируема в точке a, т.е. справедливо (1), то при $\Delta x \neq 0$ получим $\Delta f(a)/\Delta x = L + \alpha(\Delta x)$. Отсода следует, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = L$$

т.е. существует конечная производная $f'(a)$ и $L = f'(a)$.

Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке а конечную производую $f'(a)$, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

По теореме о связи функции, ее предела и б.м. можно написать $f(a)/\Delta x = f'(a) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — б.м. при $\Delta x \to 0$. Отсюда $\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, что в силу определения означает дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке a.

В ходе доказательства 1) установлено, что для дифференцируемой в точке а функции $y = f(x)$ выполнено равенство $L = f'(a)$. Поэтому $df(a) = f'(a)dx$.

64) Сформулировать определения непрерывности и дифференцируемости функции в точке. (2 балла)

...

65) Доказать теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. (4 балла)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, ее приращение представимо в виде $\Delta f(a) = L\Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда сразу следует $\Delta f(a) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что равносильно непрерывности функции $y = f(x)$ в точке a.

66) Сформулировать определения производных и дифференциалов высших порядков. (2 балла)

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка этой функции и обозначают $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ и т.п
Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка в предположении, что dx постоянно.

67) Доказать теорему о производной сложной функции. (4 балла)

Пусть функция $g : X \to Z$ и дифференцируема в точке $a \in X$, а функция $f : Z \to \mathbb{R}$ дифференцируема в соответствующей в точке $b = g(a) \in Z$. Тогда сложная функция $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a и

$$(f \circ g)(a) = f'_z(g(a))g'_x(a)$$

Пусть приращению Δx аргумена x в точке a соответствует приращение $\Delta z = g(a + \Delta x) - g(a)$ функции $z = g(x)$, а Δz, в свою очередь, вызывает приращение $\Delta y = f(b + \Delta z) - f(b)$ функции $y = f(z)$. Так как функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$ дифференцируемы в точках b и a соответственно, то их приращения можно записать в виде

$$\Delta y = (f'(b) + \alpha(\Delta z))\Delta z, \quad \Delta z = (g'(a) + \beta(\Delta x))\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta z)$ и $\beta(\Delta x)$ — б.м. при $\Delta z \to 0$ и $\Delta x \to 0$ соответственно. Отсюда

$$\Delta y = (f'(b) + \alpha(\Delta z))(g'(a) + \beta(\Delta x))\Delta x = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma\Delta x = \Delta F,$$

Здесь $\gamma = f'(b)\beta(\Delta x) + g'(a)\alpha(\Delta z) + \alpha(\Delta z)\beta(\Delta x)$, а $\Delta F = f(g(a + \Delta x)) - f(g(a))$ - приращение сложной функции $F(x) = f(g(x))$, вызванное прирашением Δx ее аргумента x. Так как $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то γ является б.м. при $\Delta x \to 0$, а
значит, функция F дифференцируема в точке a, и $F'(a) = f'(b)g'(a)$.

68) Доказать теорему о производной обратной функции. (4 балла)

Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную производную $f'(a) \neq 0$, и для $f(x)$ существует обратная функция $x = g(y)$ непрерывная в соответствующей точке $y = b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Дадим значению $y = b$ приращение Δy. Тогда функция $x = g(y)$ тоже получит соответствующее приращение Δx. При $\Delta y \neq 0$ в силу однозначности функции $y = f(x)$ будет отлично от нуля и Δx. Поэтому допустимо рассматривать отношения

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$ ввиду непрерывности функции $x = g(y)$. Но тогда знаменатель в правой части стремится к пределу $f'(a) \neq 0$, т.е. сушествует конечный предел правой части, равный $1/f'(a)$. Следовательно, существует конечный предел и левой части.

69) Доказать инвариантность формы записи дифференциала первого порядка. Сформулировать геометрическую интерпретацию этого утверждения. (4 балла)

Формула для дифференциала функции $dy = f'(u)du$ одинакова для случая, когда u - аргумент этой функции, и для случая, когда u - функция какого-либо другого аргумента.

Если u — аргумент функции f, то указанная формула следует из формулы связи производной и дифференциала.
Пусть u функция аргумента x: $u = g(x)$. Пусть эта функция дифференцируема в точке a, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $b = g(a)$. По теореме 2 сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a есть

$$dy = dF(a) = F'(a)dx = f'(b)g'(a)dx = f'(b)du,$$

где дважды использовалась указанная формула связи производной и дифференциала. Т.е. при $u = b$ в этом случае также получается указанная в теореме формула.

Геометрическая интерпретация этого следствия. Формула для дифференциала не меняется при переходе от координаты u к координате x. Т.е. дифференциал не зависит от выбора системы координат и характеризует собственно геометрические свойства функции, а не ее представление в координатах.

70) Доказать теорему о производной параметрически заданной функции. (4 балла)

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в промежутке T, причём $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in T$, и функция $x(t)$ строго монотонная в этом промежутке. Тогда производная функции, заданной параметрически, является функцией, параметрически заданной соотношениями

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad x = x(t), \quad t \in (a, b)$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует функция $t = t(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $X = x(T)$, обратная к функции $x(t)$. Согласно теореме о производной обратной функции эта функция дифференцируема в X. Поэтому сложная функция $y = f(x) = y(t(x)) = (y \circ t)(x)$ определена в промежутке X и удовлетворяет условиям теоремы о производной сложной функции. Используя эту теорему вместе с теоремой о производной обратной функции, получаем $y'_x = y'(t)t'(x) = y'(t)/x'(t) \quad \forall t \in T$.

71) Сформулировать теорему о неинвариантности формы записи дифференциала второго порядка. (2 балла)

Пусть $y = f(z)$. Тогда

1. если z - аргумент функции y, то $d^2y = f''(z)dz^2$
2. если z - функции какого-либо другого аргумента, то $d^2y = f''_{zz}(z)dz^2 + f'_z(z)d^2z$

Док-во.

1. По формуле связи производной и дифференциала имеем $dy = f'(z)dz$ и $d(f'(z)) = f''(z)dz$ по определению второй производной. Согласно определению второго дифференциала

   $$d^2y = d(dy) = d(f'(z)dz) = d(f'(z))dz = f''(z)dz^2$$

   где dz мы считаем постоянным.
2. Если $z = g(x)$, то из свойства инвариантности формы первого дифференциала имеем $dy = f'(z)dz$. Подчеркнем, что $dz = g'(x)dx$ и $z = g(x)$ нельзя считать в данном случае независимыми. Поэтому дифференциал от dy следует искать как дифференциал произведения:

   $$d^2y = d(dy) = d(f'(z)dz) = d(f'(z))dz + f'(z)d(dz) = f''(z)dz^2 + f'(z)d^2z.$$

72) Доказать теорему Ферма. Сформулировать ее геометрический смысл. (4 балла)

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке локального экстремума c, то $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл: Обращение в нуль производной $f'(c)$ означает, что касательная к кривой графика функции $f(x)$ в точке $M(c; f(c))$ параллельна оси Ox.

По определению в точке c локального минимума при малых Δx имеем
$\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geq 0$. По теореме о предельном переходе в неравенстве получаем

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0, \qquad f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

А значит, $f'(c) = 0$. Аналогично в точке локального максимума.

Геометрический смысл теоремы. Обращение в нуль производной $f'(c)$
означает, что касательная к кривой графика функции $f(x)$ в точке $M(c; f(c))$ параллельна оси Ox.

73) Доказать теорему Ролля. Сформулировать ее геометрический смысл. (4 балла)

Если функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируема в интервале (a, b)
3. на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$
   то между точками a и b найдётся, по крайней мере, одна точка c $(a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, она, согласно теореме Вейерштрасса, достигает на этом отрезке своих наибольшего M и наименьшего m значений. Рассмотрим два случая.

1. $M = m$. Функция $f(x)$ в интервале (a, b) сохраняет постоянное значение, и поэтому $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$, т.е. в качестве c можно взять любую точку из интервала (a, b).
2. $M > m$. Поскольку, согласно условию теоремы, $f(a) = f(b)$, одного из значений M или m функция достигает во внутренней точке c интервала (a, b). Тогда из теоремы Ферма следует, что в этой точке $f'(c) = 0$.

Геометрическое толкование: если ординаты непрерывной кривой на концах отрезка (a, b) равны между собой и кривая в каждой внутренней точке этого отрезка имеет невертикальную касательную, то на кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

74) Доказать теорему Лагранжа. Сформулировать ее геометрический смысл и вывести критерий постоянства функции. (5 балла)

Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируема в интервале (a, b)
   Тогда между точками a и b найдётся хотя бы одна такая c $(a < c < b)$, для которой справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Док-во. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$, как сумма непрерывных функций и в интервале (a, b) имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и, наконец, непосредственной подстановкой легко убедиться, что $F(a) = F(b) = 0$. Итак, в интервале (a, b) существует точка $x = c$, в которой производная

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Геометрический смысл: на непрерывной дуге AB, имеющей в каждой точке невертикальную касательную, всегда найдётся по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

Следствие (критерий постоянства функции). Пусть функция непрерывна на отрезке (a, b). Тогда функция постоянна на этом отрезке т. и т.т., к. во всех внутренних точках отрезка она имеет равную нулю производную.

Необходимость очевидна, так как постоянная функция имеет нулевую производную.
Для доказательства *достаточности* выберем в полуинтервале $(a, b]$ произвольную точку x_1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в интервале (a, b) имеет нулевую производную, то она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a, x_1] \subseteq [a, b]$. Поэтому

$$f(x_1) - f(a) = f'(c)(x_1 - a), \qquad c \in (a, x_1)$$

Но $f'(c) = 0 \; \forall c \in (a, x_1) \subseteq (a, b)$, и поэтому $f(x_1) = f(a)$, т.е. значение функции в произвольной точке на отрезке (a, b) совпадает с ее значением в фиксированной точке a. Следовательно, функция $f(x)$ постоянна на всем отрезке.

75) Доказать теорему Коши. (4 балла)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируемы в интервале (a, b)
3. производная $g'(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b)
   Тогда между точками a и b найдётся хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, для которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Док-во: $g(b) - g(a) \neq 0$, иначе по теореме Ролля $\exists d \in (a, b)\ g'(d) = 0$. Применяя теорему Ролля к функции

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

получаем утверждение теоремы.

76) Доказать теорему Бернулли— Лопиталя для предела отношения двух бесконечно малых функций. (5 балла)

Пусть

1. функция $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a, a + \delta)$ для некоторого δ
2. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанного интервала
4. существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   Тогда существует и предел отношения самих функций и

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Док-во только для $[0/0]$. Доопределим: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны на отрезке $[a, x]$, где $x \in (a, a + \delta)$, и применима теорема Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Здесь $c \in (a, x)$. Если $x \to a$, то и $c \to a$ и получаем утверждение теоремы.

77) Сформулировать теорему Бернулли— Лопиталя для предела отношения двух бесконечно больших функций. (3 балла)

Пусть

1. функция $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a, a+\delta)$ для некоторого δ
2. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$
3. $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанного интервала
4. существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда существует и предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

78) Доказать теорему о сравнение на бесконечности роста показательной, степенной и логарифмической функций. (4 балла)

При $x \to +\infty$ показательная функции a^x при $a > 1$ является б.б. более высокого порядка (растёт быстрее), чем степенная x^s с любым положительным показателем s, которая, в свою очередь, является б.б. более высокого порядка, чем логарифмическая функция $log_a x$ при $a > 1$.

Док–во: делаем замену $z = \frac{1}{x} \to +\infty$ и используем пример 1.

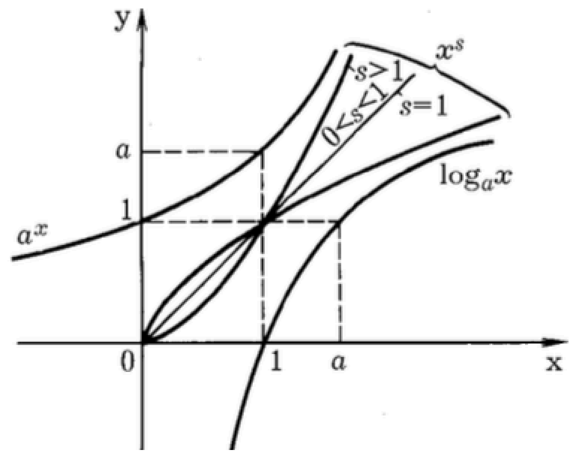


Рис. 38

79) Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. (5 балла)

Если функции $f(x)$ имеет в окрестности точки a производные до порядка $n-1$ и производную порядка n в точке a, то при $x \to a$

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

Док-во. Фиксируем точку a. Будем обозначать через $P_{n,g}(x)$ многочлен Тейлора порядка n функции $g(x)$ в точке a. Тогда из определения многочлена Тейлора имеем: $P_{n,g}(a) = g(a)$ и

$$P'_{n,g}(x) = 0 + g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}2(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1} = P_{n-1,g'}(x)$$

Последовательно $(n-1)$ раз применяя правило Бернулли - Лопиталя и приведенные равенства для функций $g = f, f', f'', \ldots, f^{(n-2)}$, получаем:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f}(x)}{(x-a)^n} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_{n-1,f'}(x)}{x(x-a)^{n-1}} = [\frac{0}{0}] = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_{1,f^{(n-1)}}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

т.к. в силу определения производной последний предол равна $f^{(n)}(a)$. Из доказанного предела и определения о малого получаем утверждение теоремы.

80) Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме и в форме Лагранжа. (6 балла)

Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме. Если на отрезке с концами x, а функция у непрерывна вместе с первыми и своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то при любой функции g, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную в его внутренних точках, найдется такая точка c, лежащая между a и x, что остаточный член формулы Тейлора порядка n в точке a есть

$$R_n(x) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (1)$$

Зафиксируем произвольное $x > a$, для которого выполняются условия теоремы. Тогда для любой точки $z \in [a, x]$ существует многочлен $P_{n,f}$, Тейлора порядка n функции f с центром в точке z. Составим вспомогательную функцию

$$F(z) = f(x) - P_{n,f}(x) = f(x) - f(z) - f'(z)(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f_{(n)}(z)}{n!}(n-z)^n$$

причем будем считать, что z меняется на отрезке $[a, x]$. На этом отрезке функция F непрерывна как алгебраическая сумма непрерывных функций и на концах отрезка принимает значения $F(a) = R_n(x)$ и $F(x) = 0$. Кроме того, в интервале (a, x) существует производная

$$F'(z) = -f'(z) - (f''(z)(x-z) - f'(z)) - \left(\frac{f'''(z)}{2}(x-z)^2 - f''(z)(x-z)\right) - \ldots -$$

$$-\left(\frac{f^{(n-1)(z)}}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Функции $F(z)$ и $g(z)$ на отрезке $[a, x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, поэтому

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

где c — точка, лежащая между точками a и x. Поскольку $F(x) = 0$, $F(a) = R_n(x)$ и $F'(c) = -f^{(n+1)}(c)(x-c)^n/n!$, из (2) получим формулу (1). Случай $x < a$ рассматривается аналогично.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если на отрезке с концами x, a функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то найдётся такое число Θ, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

Док–во следует из общей формы, если положить $g(z) = (x-z)^{n+1}$.

81) Сформулировать теорему о разложении элементарных функций по формуле Тейлора— Маклорена. (3 балла)

Формула Маклорена - формула Тейлора при $a = 0$. Вычисляя производную до порядка n основных элементарных функций в точке 0, получим для них формулы Маклорена.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^s = 1 + sx + s(s-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

82) Вывести формулу Маклорена и получить оценку остаточного члена для функции y = sin x. (4 балла)

Для функции $f(x) = \sin x$ имеем $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и т.д. Таким образом, в точке $x = 0$ $f(0) = 0$, все производные четного порядка также равны нулю, а все производные нечетного порядка $k = 2i - 1$ $(i \in \mathbb{N})$ равны $f^{(2i-1)}(0) = (-1)^{i-1}$. Поэтому формула Маклорена порядка $n = 2m$ для этой функции имеет указанный в теореме вид.

Остаточные члены $R_n(x)$ приведенных в теореме 5 формул Маклорена можно оценить, используя форму Лагранжа остаточного члена. Например, для функции $y = \sin x$ имеем $y^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cos x$, поэтому форма Лагранжа имеет вид

$$R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos(\Theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}, \qquad 0 < \Theta < 1$$

Так как $|\cos(\Theta x)| \le 1$, то

$$|R_{2m}(x)| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Важно то, что полученная оценка не зависит от значения Θ которое нам не известно.

83) Сформулировать определение асимптоты графика функции. (2 балла)

Асимптотой неограниченной кривой называется прямая, к которой приближаются точки кривой, удаляясь от начала координат.

При фиксированной системе координат xOy на плоскости различают три вида уравнений прямых: $x = a$, $y = b$, $y = kx + b$. Поэтому существуют три вида асимптот графиков функций: **вертикальные**, **горизонтальные** и **наклонные**, причем последние два вида могут быть как односторонними, правыми при $x \to +\infty$ или левыми при $x \to -\infty$, так и двусторонними при $x \to \infty$, т.е. и правыми, и левыми одновременно.

84) Доказать необходимые и достаточные условия существования вертикальных и наклонных асимптот. (4 балла)

Прямая $\{x = a\}$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff f(a+0) = \pm\infty$ или $f(a-0) = \pm\infty$.
Док-во следует из определений.

Прямая $\{y = kx + b\}$ является правой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$. В случае левой наклонной асимптоты формулировка аналогична, только в обоих пределах $x \to -\infty$.

Док-во. Из определения следует: $y = kx + b$ - уравнение правой наклонной асимптоты $\iff \alpha(x) = f(x) - kx - b$ — б.м. при $x \to +\infty$.
Отсюда следуют утверждение "$\Rightarrow$" теоремы.
Обратно, из второго предела и теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой следует, что $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ — б.м., а значит, $\{y = kx + b\}$ — асимптота.

85) Доказать достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Сформулировать геометрический смысл этого условия. (4 балла)

1. Если для дифференцируемой в интервале (a, b) функции $f(x)$ имеем $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.
2. Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.

Док-во аналогично предыдущему:

1. по теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b)\ (x_1 < x_2) \quad \exists c \in (x_1, x_2): \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

а значит, f - возрастающая функция на интервале (a, b).

2. Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в качестве x_1, x_2 в предыдущем рассуждении можно взять произвольные точки из отрезка $[a; b]$.
   Аналогично для убывающей функции.

Геометрический смысл: если в интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в конечном числе точек может быть горизонтальна или вертикальна, а для всех остальных точек $x \in (a, b)$ образует острый угол с осью Ox. Если же функция f (x) убывает в интервале (a, b), то касательная к кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$ образует тупой угол с осью Ox (в конечном числе точек касательная может быть горизонтальна или вертикальна).

86) Дать определение точки локального экстремума и строгого локального экстремума функции. (2 балла)

Точку $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называют **точкой локального минимума** функции $f : E \to \mathbb{R}$, а значение функции в ней **локальным минимумом**, если

1. точка x_0 является предельной для левой $E \cap (-\infty; x_0)$ и правой $E \cap (x_0; +\infty)$ частей области определения функции.
2. существует выколотая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая что в любой точке $x \in U(x_0) \cap E$ имеем $f(x_0) \leqslant f(x)$.
   Аналогично (изменяя только тип неравенства) определяются **точки локального максимума** $(f(x_0) \geqslant f(x))$, строгого локального минимума $(f(x_0) < f(x))$ и строгого локального максимума $(f(x_0) > f(x))$.

87) Доказать необходимое и первое достаточное условия экстремума дифференцируемой функции. (5 балла)

Необходимое условие экстремума. Если x_0 - точка локального экстремума функции, то x_0 - критическая точка I порядка этой функции.
Док–во следует из теоремы Ферма.

Первое достаточное условия экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках соответствующей выколотой окрестности. Если при переходе аргумента x слева направо через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, причём если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка локального минимума, если же с плюса на минус, то x_0 - точка локального максимума.
Если и слева, и справа от точки x_0 в некоторой выколотой окрестности этой точки

производная $f'(x)$ имеет один знак, то точка x_0 не является точкой локального экстремума функции $f(x)$.
Док-во следует из достаточного условия строгой монотонности функции на отрезках $[x_1; x_0]$ и $(x_1; x_2)$, где точки x_1 и x_2 выбраны так, что данные отрезки лежат в указанной в условии окрестности.

88) Доказать второе достаточное условие экстремума функции. (4 балла)

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0, f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ существует, конечна и не равна нулю. Тогда при $f''(x_0) < 0$ x_0 - точка локального максимума, а при $f''(x_0) > 0$ x_0 - точка локального минимума.

Док-во для случая $f''(x_0) < 0$. Из теоремы о сохранении знака следует:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \implies \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \text{ в некот. вык. окр. т. } x_0$$

Т.е. знак меняется с $+$ на $-$. По теореме 6 (первое дост. усл.) получаем наше утверждение. Случай $f''(x_0) > 0$ рассматривается аналогично.

89) Дать определение выпуклых и вогнутых функций. Сформулировать геометрическую интерпретацию этого определения. (2 балла)

Функцию $f(x)$, определённую на интервале (a, b), называют **выпуклой вниз** (вверх) в интервале, если любая дуга её графика лежит не выше (не ниже) стягивающей эту дугу хорды.
Функцию строго (или нестрого) выпуклую вверх называют также строго (нестрого) вогнутой вниз, а функцию выпуклую вниз **вогнутой вверх**.

90) Сформулировать различные условия выпуклости функции и их геометрический смысл. Доказать достаточное условие строгой выпуклости графика дважды дифференцируемой функции.(5 балла)

Условие 1. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b)(x_1 \neq x_2) \quad \forall q \in (0,1) \quad f(qx_1 + (1-q)x_2) \leq qf(x_1) + (1-q)f(x_2) \qquad (1)$$

Чтобы получить условие для выпуклых вверх, строго выпуклых вниз и строго выпуклых вверх функций достаточно в (1) неравенство < заменить соответственно на $\geq$, < и >.

Условие 2. Теорема 2. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда

$$a < x_1 < x_3 < x_2 < b \implies \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \qquad (2)$$

В случае строгой выпуклости неравенство строгое.
Геометрическая интерпретация условия (2): угловой коэффициент хорды AM на рис. 43 не больше углового коэффициента хорды BM.

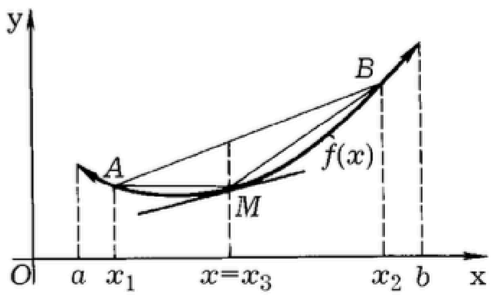


Рис. 43

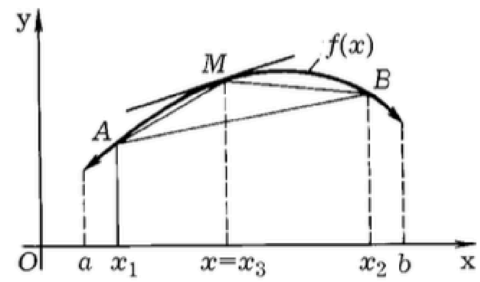


Рис. 44

Достаточное условие строгой выпуклости графика дважды дифференцируемой функции. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную.

1. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a, b) \iff \forall x \in (a, b)\ f''(x) \geqslant 0$.
2. Если же $f''(x) > 0$ на (a, b), то функция строго выпукла вниз на этом интервале
   Геометрическая интерпретация условия: наклон секущей расположен между наклонами касательных на концах отрезка.

Условие 4. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную. Тогда

1. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a, b) \iff \forall x \in (a, b)\ f''(x) \geq 0$.
2. Если же $f''(x) > 0$ на (a, b), то функция строго выпукла вниз на этом интервале.

91) Дать определение точки перегиба графика функции. Сформулировать теорему о поведении графика функции в окрестности точки перегиба. (2 балла)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, в точке $(x_0; f(x_0))$ у графика функции существует касательная, а при переходе аргумента x через точку x_0 меняется направление строгой выпуклости функции $f(x)$. Тогда x_0 называют **точкой перегиба** этой **функции**, а точку $(x_0; f(x_0))$ — **точкой перегиба графика функции** $f(x)$.

В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки перегиба x_0 и у неё существует конечная вторая производная в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

92) Доказать необходимое и достаточное условия существования точки перегиба графика функции. (5 балла)

Необходимое условие точки перегиба графика функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки перегиба x_0 и у неё существует конечная вторая производная в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Док-во. По теореме 3 (часть 2) из §26 производная $f'(x)$ функции $f(x)$ убывает слева от точки перегиба x_0 и возрастает справа или, наоборот, возрастает слева и убывает справа. Поэтому функция $f'(x)$, будучи дифференцируемой, а значит, непрерывной в точке x_0, имеет в этой точке локальный экстремум. Из необходимого условия экстремума заключаем, что $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условия существования точки перегиба функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет первую и вторую производную в выколотой окрестности $U(x_0)$ в этой точки и существует конечная или бесконечная производная $f''(x_0)$. Тогда

1. если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через значение x_0, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$;
2. если знак $f''(x)$ не меняется при переходе через x_0, то x_0 не является точкой перегиба функции $f(x)$
   Док-во. Так как существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$, то в точке $(x_0; f(x_0))$ у графика функции существует касательная. Кроме того, по условию теоремы $f''(x)$ не меняет знак в некотором интервале слева от x_0 и в некотором интервале справа от x_0.

1. Если знаки в этих интервалах разные, то в силу теоремы 4 из §26 направление строгой выпуклости функции $f(x)$ в них разное, а значит, x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.
2. Если знак один и тот же, то направление строгой выпуклости одинаковое, и хо не является точкой перегиба.

93) Доказать третье достаточное условие экстремума функции. (4 балла)

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n-1$ и производную порядка n в точке x_0, причем все ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно в этой точке равны нулю: $f\prime(x_0) = f\prime\prime(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда,

1. если n четное, то в точке x0 функция имеет экстремум, причем при $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0— точка локального максимума, а при $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 — точка локального минимума.
2. Если n нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума данной функции.

формула Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Знак правой части в окрестности точки x_0 определяется первым слагаемым, так как второе есть o-малое от него. При n четном сомножитель $(x - x_0)^n$ положителен и знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком значения $f^{(n)}(x_0)$, а именно: при $f^{(n)}(x_0) < 0$ $f(x) < f(x_0)$ и, по определению, x_0 — точка локального максимума; при $f^{(n)}(x_0) > 0$ $f(x) > f(x_0)$ и, по определению, x_0 — точка локального минимума. Для нечетного n сомножитель $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе аргумента x через значение x_0, а сомножитель $f^{(n)}(x_0)$ нет. Следовательно, разность $f(x) - f(x_0)$ также меняет знак, и поэтому точка хо не является точкой экстремума функции $f(x)$.

94) Кривая в пространстве как годограф векторной функции. Предел и непрерывность векторной функции. Доказать теорему о покоординатной сходимости векторной функции. (3 балла)

Будем отождествлять каждую точку M пространства $\mathbb{R}^m$ с ее радиус-вектором $\vec{OM}$. Отображение $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ отрезка $[a,b]$ в m–мерное пространство $\mathbb{R}^m$ называют **вектор-функцией** (или **векторной функцией**) скалярного аргумента t. Если

$$\vec{r}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)\ , \qquad t \in [a,b]\ , \tag{1}$$

то отображение $\vec{r}$ определяется действительными функциями $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ одного действительного переменного t с общей областью определения $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, которые называются **координатными функциями вектор-функции** $\vec{r}(t)$.

Точку $M \in \mathbb{R}^m$ (вектор $\vec{p} = \vec{OM}$) называют **пределом** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если длина вектора $\vec{r}(t) - \vec{p}$ стремится к нулю при $t \to t_0$, т.е. $\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{p}| = 0$. Обозначают $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{p}$ или "$\vec{r}(t) \to \vec{p}$ при $t \to t_0$".

Теорема 1 (**предел вектор-функции**). Вектор-функция (1) имеет своим пределом при $t \to t_0$ вектор $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to t_0} x_i(t) = p_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Док–во: $$\big|\vec{r}(t) - \vec{p}\big| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \big(x_i(t) - p_i\big)^2} \to 0 \quad \iff \quad x_i(t) \to p_i \quad i = 1, \ldots, m,$$

так как из неравенства треугольника для длин векторов следует, что

$$\forall j = 1, \ldots, m \qquad \big|x_j(t) - p_j\big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \big(x_i(t) - p_i\big)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \big|x_i(t) - p_i\big|. \qquad \triangleright$$

Вектор-функцию $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ называют **непрерывной в точке** $t_0 \in [a,b]$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

95) Касательная к кривой и производная векторной функции. Достаточное условие существования касательной с доказательством и геометрический смысл производной векторной функции. Правила дифференцирования векторных функций. Доказать свойство производной векторной функции постоянной длины.(4 балла)

Касательной к кривой Γ в ее точке M_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через M0 и через отличную от нее точку M_1 этой кривой, при стремлении M_1 к M_0.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$$

то его называют производной векторной функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0 и обозначают $\overline{r}'(t_0)$

Достаточное условие существования касательной. В регулярной точке кривой касательная существует. Ненулевая производная векторной функции какой–либо параметризации кривой $\varGamma$ есть направляющий вектор касательной к кривой $\varGamma$ в соответствующей точке.

Пусть $\overline{r} = \overline{r}(t), \quad t \in [a, b]$,— такое векторное уравнение кривой, что $\overline{r}'(t_0) \neq 0$. Тогда $\Delta\overline{r} = \overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)$ — направляющий вектор секущей, проходящей через точки с радиус-векторами $\overline{r}(t_0)$) и $\overline{r}(t)$. При $t \to t_0$ этот вектор стремится к нулю. Вектор $\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)}{t - t_0}$, $\Delta t = t - t_0$ также есть $t - t_0$ направляющий вектор данной секущей, и при $t \to t_0$ он стремится к $\overline{r}'(t_0) \neq \overline{0}$ значит, касательная к кривой $\varGamma$ в точке $\overline{r}(t_0)$ существует, и $\overline{r}'(t_0)$ — ее направляющий вектор.

Геометрический смысл производной векторной функции: ненулевая производная векторной функции есть направляющий вектор касательной к годографу векторной функции в соответствующей точке

Правила дифференцирования векторных функций. Если существуют производные $\overline{r}_1'$, $\overline{r}_2'$ и f' векторных функций $\overline{r}_1(t)$, $\overline{r}_2(t)$ и скалярной функции $f(t)$, то

$$1)\ (\overline{r}_1 + \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' + \overline{r}_2', \qquad 2)\ (f\overline{r}_1)' = f'\overline{r}_1 + f\overline{r}_1$$

$$3)\ (\overline{r}(f(t)))' = f'(t)\overline{r}_1'(f(t)), \qquad 4)(\overline{r}_1, \overline{r}_2)' = (\overline{r}_1', \overline{r}_2) + (\overline{r}_1, \overline{r}_2')$$

$$5)\ \text{при}\, m = 3: \qquad (\overline{r}_1 \times \overline{r}_1)' = \overline{r}_1' \times \overline{r}_2 + \overline{r}_1 \times \overline{r}_2'$$

Свойство производной векторной функции постоянной длины. Если $|\overline{r}(t)| = const$, то векторы $\overline{r}'(t)$ и $\overline{r}(t)$ ортогональны.
Док-во: $0 = (|\overline{r}(t)|^2)' = (\overline{r}(t), \overline{r}(t))' = (\overline{r}'(t), \overline{r}(t)) + (\overline{r}(t), \overline{r}'(t)) = 2(\overline{r}'(t), \overline{r}(t))$