# Теоретические вопросы для подготовки к РК–3 часть 2

### 1) Дать определение локального экстремума функции многих переменных, стационарных и критических точек. Сформулировать необходимое условие экстремума и схему исследования функций на экстремум.

Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что функция $f$ имеет в точке $a$ **локальный максимум (минимум)**, если существует такая проколотая окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a$, что для любой точки $x \in U_\varepsilon(a)$ выполнено неравенство $f(x) \le f(a)$ $(f(x) \ge f(a))$. Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием **экстремум функции**.
Точки, в которых градиент функции равен нулю или не определен, называют **критическими точками функции**. **Стационарными точками функции** называют точки, в которых grad $f(x) = 0$. Укажем эквивалентные условия:

$$grad f(x) = 0 \Longleftrightarrow df(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow f_{x_i}(x) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

**Теорема 1 (необходимое условие экстремума функции).**
Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум и частную производную $f'_{x_i}(a)$, $(1 \le i \le n)$. Тогда эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

**Схема исследования функции на экстремум:**

1. Ищем стационарные точки по необходимому условию экстремума функции ($df = 0$)
2. Проверяем, являются ли данные точки точками экстремума, используя достаточное условие экстремума функции (находим $d^2f$ и исследуем квадратичную форму)

### 2) Сформулировать достаточные условия экстремума функции многих переменных в общем случае и в двумерном случае.

**Достаточные условия экстремума (общий случай).**
Пусть $U$ — окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(U)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

1. КФ $d^2f(a)$ положительно определена $\Rightarrow$ $a$ — точка строгого локального минимума функции $f$;
2. КФ $d^2f(a)$ отрицательно определена $\Rightarrow$ $a$ — точка строгого локального максимума функции $f$;
3. КФ $d^2f(a)$ знакопеременная $\Rightarrow$ в точке $a$ функция $f$ не имеет экстремума.

**Достаточные условия экстремума (двумерный случай).**
Пусть $U$ — окрестность точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(U)$ и $df((a, b)) = 0$. Тогда:

1. $A > 0$, $AC - B^2 > 0 \Rightarrow (a, b)$ — точка строгого локального минимума функции $f$;
2. $A < 0$, $AC - B^2 > 0 \Rightarrow (a, b)$ — точка строгого локального максимума функции $f$;
3. $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ в точке $(a, b)$ функция $f$ не имеет экстремума.

### 3) Дать определение условного локального экстремума и функции Лагранжа. Сформулировать необходимые условия в общем случае и схему исследования функций на условный экстремум.

Пусть функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определены в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что функция $f$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ достигает **условного локального максимума (минимума)** при условии $\varphi(x) = 0$, если $\varphi(a) = 0$ и

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in U_\delta(a) \quad (\varphi(x) = 0 \implies f(x) \le f(a) \quad (f(x) \ge f(a))).$$

Понятия условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием **условный экстремум функции**. Если в определении неравенства строгие, то говорят о **строгом условном экстремуме функции**.

Введем функцию $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, которую называют **функцией Лагранжа**, где $\lambda$ — множитель Лагранжа.

**Теорема 2 (необходимое условие условного экстремума).**
Пусть функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, причем rang $\varphi'(a) = m$, в точке $a$ функция $f(x)$ имеет условный локальный экстремум при условии $\varphi(x) = 0$. Тогда

$$\exists \lambda_a \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} \frac{\partial L(a,\lambda_a)}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial L(a,\lambda_a)}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial L(a,\lambda_a)}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial L(a,\lambda_a)}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

**Схема исследования функций на условный экстремум:**

1. Составляем функцию Лагранжа
2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, применяя к ней необходимое условие экстремума функции (приравниваем частные производные к нулю)
3. Чтобы найти точки экстремума, применяем к стационарным точкам достаточное условие экстремума (находим $d^2L$ и исследуем квадратичную форму)

## 4) Дать определение условного локального экстремума и функции Лагранжа. Сформулировать необходимые условия в двумерном случае и их геометрическую интерпретацию.

**Теорема 1 (необходимое условие условного экстремума при $n = 2, m = 1$).**
Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функции двух переменных, определенные и непрерывно дифференцируемые в окрестности точки $P(a, b)$, функция $f(x, y)$ имеет в точке $P$ условный экстремум при условии $\varphi(x, y) = 0$, причем grad $\varphi(a, b) \ne 0$. Тогда существует такое число $\lambda$, которое вместе с координатами $a$ и $b$ точки $P$ удовлетворяет системе уравнений

$$f'_x(a, b) + \lambda\varphi'_x(a, b) = 0, \qquad f'_y(a, b) + \lambda\varphi'_y(a, b) = 0, \qquad \varphi(a, b) = 0. \tag{5}$$

**Геометрическая интерпретация условного экстремума.**
Так как градиент ортогонален линии уровня, получаем следующую геометрическую интерпретацию необходимых условий условного экстремума: линия уровня целевой функции касается кривой, заданной уравнением связи.

## 5) Сформулировать достаточные условия условного экстремума в общем случае.

**Теорема 3 (достаточные условия условного экстремума).**
Пусть функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, rang $\varphi'(a) = m$ и координаты точки $a$ вместе с некоторым вектором $\lambda_a$ удовлетворяют системе уравнений (8). Тогда:

1. КФ $d^2L(a)_H$ положительно определена $\Rightarrow a$ — точка строгого условного локального минимума функции $f$;
2. КФ $d^2L(a)_H$ отрицательно определена $\Rightarrow a$ — точка строгого условного локального максимума функции $f$;
3. КФ $d^2L(a)_H$ знакопеременная $\Rightarrow$ в точке $a$ функция $f$ не имеет условного экстремума.

$$H = \{\Delta x : d\varphi(a) = 0\} \qquad d^2L_H(a) = d^2L(a)_{|d\varphi(x)=0}$$

## 6) Сформулировать теорему об обратной функции.

**Теорема 1 (об обратной функции).**
Пусть функция $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в окрестности $V$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

1. $G \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$;
2. $\det G'(a) \neq 0$.
   Тогда $\exists U$ (окрестность точки $b = G(a)$), $\exists G^{-1} : U \to V$ :
   а) $\forall y \in U \quad G(G^{-1}(y)) = y \quad \text{и} \quad \forall x \in G^{-1}(U) \quad G^{-1}(G(x)) = x$;
   б) $G^{-1} \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad \text{и}$

$$(G^{-1})'(y) = (G'(x))^{-1}\Big|_{x=G^{-1}(y)}.$$