Часть 1. векторная алгебра и аналитическая геометрия

1) Сформулировать определения геометрического, свободного вектора, коллинеарных и компланарных векторов, линейных операций над векторами. Сформулировать и доказать свойства линейных операций.

Геометрический (направленный) вектор - любой отрезок, на котором выбрано одно из двух возможных направлений.
Однозначно определён своими концами, поэтому одно из направлений можно задать порядком концов (откуда и куда). Это позволяет определить геометрический вектор как упорядоченную пару точек.

Свободный вектор - все вектора с одинаковыми направлением и длинной, но произвольной начальной точкой (точкой приложения). (Стр. 16) Т.е. все вектора, равные некоторому вектору $\overline{a}$.

Два вектора **коллинеарны**, если они лежат на одной или параллельных прямых.
Три вектора **компланарны**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Свойства суммы

1. Сложение векторов коммутативно: $a + b = b + a$
   Доказательство: Если складываемы векторы неколлинеарны, то свойство непосредственно вытекает из правила параллелограмма, так как в этом правиле порядок векторов не играет роли. Если же векторы коллинеарны, то их сложение сводится к сложению или вычитанию их длин в зависимости от того, являются ли складываемые векторы *однонаправленными* или *противоположно направленными*.
2. Сложение векторов ассоциативно: $(a + b) + c = a + (b + c)$
   Доказательство: Доказать это свойство проще всего при помощи правила треугольника. Выберем в качестве начала вектора a точку A, и пусть $a = \vec{AB}$. Совместим начало вектора b с точкой B, и пусть $b = \vec{BC}$. Наконец, начало вектора c совместим с концом C вектора b, и пусть тогда $c = \vec{CD}$.
   Непосредственно из построения получаем:
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = a + (b + c)$$
$$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = (a + b) + c$$

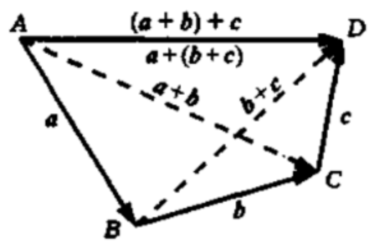


Рис. 2: Ассоциативность

3. Существует такой вектор 0, что для любого вектора a выполняется $a + 0 = a$
   Доказательство: Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что указанное условие удовлетворяет *нулевой вектор*, особенно удобно использовать для этого правило треугольника. ($\vec{0}$ имеет одинаковое направление и длину 0, значит на выходе тот-же вектор?)
4. Для любого вектора a существует такой вектор b, что $a + b = 0$.
   Доказательство: Действительно, таким является вектор $(-a)$, *противоположный* к вектору a, т.е. коллинеарный вектор с той же длиной, но *противоположным направлением*. По правилу треугольника.
5. Для любых векторов a и b существует такой вектор x, что $a + x = b$. При этом вектор x определён однозначно.
   Доказательство: Указанному условию удовлетворяет вектор $(-a) + b$, так как с учётом свойств 2-4
$$a + x = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$
   Если вектор x удовлетворяет равенство $a + x = b$, то, прибавив слева к обеим частям последнего равенства вектор $(-a)$, получим с учётом свойств 1, 2, что $x = (-a) + b$. Действительно,
$$(-a) + (a + x) = ((-a) + a) + x = 0 + x = x = (-a) + b$$
   Значит, вектор x определён однозначно.

Свойство 5 позволяет ввести операцию вычитания векторов.
Разностью $b - a$ двух векторов a и b называют такой вектор x, что $a + x = b$. *(Стр. 21)*
Операция линейная, является обратной сложению и определяется через него.

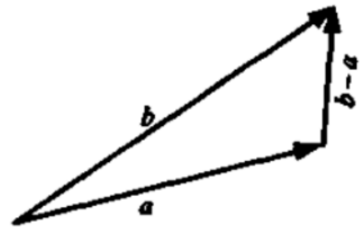


Рис. 3: Вычитание векторов

Произведением вектора a на число λ называют вектор λa, коллинеарный вектору a, с длиной $|\lambda||a|$, однонаправленный с a при $\lambda > 0$ и противоположно направленный при $\lambda < 0$ *(Стр. 21)*

6. Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$
   Доказательство: Действительно, обе части равенства представляют собой векторы, коллинеарные исходному вектору a. Поэтому равенство будет верным, если совпадут длины векторов и их направления. Равенство длин векторов очевидно. Если λ и μ имеют один и тот же знак, то векторы в обеих частях будут однонаправлены с вектором a. Если же λ и μ имеют противоположные знаки, то оба вектора в равенстве являются противоположно направленными по отношению к a. В любом случае в равенстве стоят векторы с одинаковыми направлением и длиной, т.е. *равные векторы*. *(Стр 22.)*
7. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно векторов: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
   Доказательство: При $\lambda = 0$ свойство очевидно. Если $\lambda \neq 0$, свойство вытекает из правила параллелограмма и свойств подобных параллелограммов.

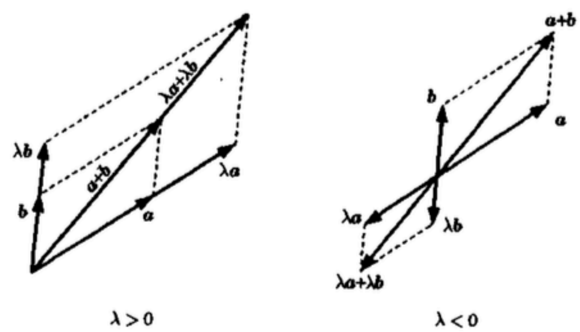


Рис. 4: Дистрибутивность относительно векторов

8. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно чисел: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.
   Доказательство: В указанном равенстве - три коллинеарных вектора. Поэтому доказательство сводится к подсчёту длин векторов, которым присвоены знаки, учитывающие направление.

- Если λ и μ имеют положительные знаки, то все три вектора в равенстве имеют одно направление, совпадающее с направлением вектора a. При сложении этих векторов справа складываются их длины, а доказываемое равенство равносильно следующему: $(\lambda + \mu)|a| = \lambda|a| + \mu|a|$. Случай, когда λ и μ отрицательны, аналогичен.

- Пусть λ и μ имеют противоположные знаки. Для определённости будем считать, что $\lambda > 0, \mu < 0$ (второй случай аналогичен). Тогда при сложении векторов λa и μa вычитаются их длины, так как складываются векторы противоположного направления. Получаемый при этом вектор будет однонаправленным с a при $|\lambda| > |\mu|$ и противоположного направления при $|\lambda| < |\mu|$. Его длина, согласно определению произведения вектора на число, равна

$|\lambda + \mu||a|$. Учитывая направление этого вектора, заключаем, что он равен $(\lambda + \mu)a$, т.е. доказываемое равенство верно и при противоположных знаках коэффициентов λ и μ.

2) Дать определения линейной зависимости и независимости системы векторов, коллинеарности и компланарности векторов. Сформулировать и доказать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов. Доказать теорему о линейной зависимости 4-х векторов.

Векторы $a_1, \ldots, a_n$ **линейно зависимые**, если существуют такой набор коэффициентов, что их линейная комбинация равна 0. При этом, хотя бы один из коэффициентов ненулевой. Если такого набора не существует, то векторы **линейно независимые**.

линейная комбинация равна 0. При этом, хотя бы один из коэффициентов ненулевой

Вектора $\overline{a}, \overline{b}$ **коллинеарны**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\ldots$ **компланарны**, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Теорема 1.4: $\overline{a}, \overline{b} - л/з \iff$ они коллинеарны.

> $\Rightarrow \quad \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = \overline{0} \implies \overline{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\overline{a} \implies$ коллинеарны
> $\Leftarrow \quad \overline{a} \parallel \overline{b} \implies \overline{b} = \lambda\overline{a} \implies \lambda\overline{a} + (-1)\overline{b} = \overline{0} \implies$ л/з

Теорема 1.5: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - л/з \iff$ они компланарны.

> $\Rightarrow \quad \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0} \implies \overline{c} = -\frac{\lambda}{\gamma}\overline{a} - \frac{\mu}{\gamma}\overline{b} \implies$ компланарны по определению суммы векторов
> $\Leftarrow$ Если какие-либо 2 из этих трёх векторов коллинеарны или один из векторов равен 0, то всё верно. Если никакие два не коллинеарны, то отложим векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ от одной точки O. Их концами будут точки A, B и C соответственно. A' - точка пересечения прямой OA с прямой параллельной OB. Аналогично точку B'. Получаем $\overline{OA'} = \alpha\overline{OA}$; $\overline{OB'} = \beta\overline{OB} \implies \overline{OC} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} \implies$ л/з

Теорема 1.6: $\forall\, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \implies$ они л/з.

> Если какие-либо 2 коллинеарны или какие-либо 3 компланарны или 1 является нулевым, то система л/з. Если ни одно условие не выполняется: Концами векторов a, b , c, d будут некоторые точки A, B, C, D.

Через точку O проведем три плоскости, параллельные плоскостям OBC, OCA, OAB, и пусть A', B', C' — точки пересечения этих плоскостей с прямыми OA, OB, OC соответственно. Мы получаем параллелепипед $OA'C''B'C'B''DA''$, и векторы a, b, c лежат на ребрах параллелепипеда, выходящих из вершины O. Так как четырехугольник $OC''DC'$ является параллелограммом, то $\overline{OD} = \overline{OC''} + \overline{OC'}$. В свою очередь, отрезок OC'' является диагональю параллелограмма $OA'C''B'$, так что $\overline{OC''} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$. Значит, $\overline{OD} = \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} \implies \overline{OD} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{OC} \implies$ л/з.

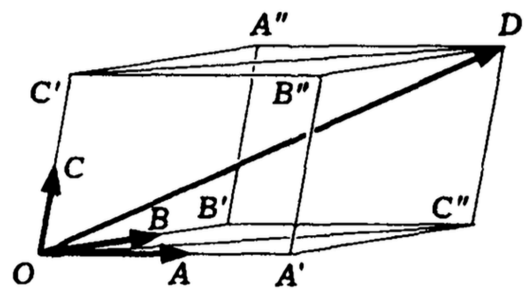


Рис. 1.13

3) Дать определение базиса. Доказать теорему о разложении вектора по базису. Сформулировать определение координат вектора и доказать утверждение о линейных операциях в координатах.

Базис - это

1. Базис в $V_1 - \forall \overline{a} \neq 0$
2. Базис в V_2 – это любая пара л/н векторов
3. Базис в V_3 – это любая тройка л/н векторов
   Разложение по базису – $\overline{x} = \lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2.$ λ_1 и λ_2 – **координаты вектора**.

Теорема 1.7 При сложении двух векторов их координаты в одном и том же базисе складываются. При умножении вектора на число координаты этого вектора умножаются на это число.

Фиксируем в V_3 базис e_1, e_2, e_3. Возьмем два произвольных вектора x и y и запишем их разложения в выбранном базисе:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

> Используя свойства линейных операций, вычисляем сумму этих векторов:
>
> $x + y = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3.$
>
> Мы получили разложение суммы векторов в фиксированном базисе. Отсюда заключаем, что координаты x_i и y_i исходных слагаемых, соответствующие одному вектору e_i в базисе $(i = 1, 2, 3)$, складываются. Аналогично с учетом свойств линейных операций имеем
>
> $$\lambda x = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + (\lambda x_3)e_3$$
>
> В итоге получаем разложение вектора λx в фиксированном базисе. Из этого разложения видим, что каждая из координат исходного вектора x умножена на число λ.

4) Дать определение декартовой системы координат. Какая система координат называется прямоугольной? Записать формулу для вычисления расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат и вывести формулу деления отрезка в заданном отношении.

Декартова система координат - это пара (O, e), где O - некоторая точка пространства - начало координат, e - базис в V_3

Прямоугольная система координат - это декартова система координат с ортонормированным базисом $e = \{i, j, k\}$

Расстояние между двумя точками(длина отрезка):
$A(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ $\overline{AB} = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Деление отрезка в заданном отношении: $A(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ Найти такую точку $C \in \overline{AB}$, что $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{R};\ p, q > 0;$
$\overline{r}_c = \overline{r}_a + \overline{AC} = \overline{r}_a + \frac{p}{p+q}\overline{AB} = \overline{r}_a + \frac{p}{p+q}(\overline{r}_b - \overline{r}_a) = \frac{q}{p+q}\overline{r}_a + \frac{p}{p+q}\overline{r}_b$

$$\begin{cases} x_c = \frac{qx_1 + px_2}{p+q} \\ y_c = \frac{qy_1 + py_2}{p+q} \\ z_c = \frac{qz_1 + pz_2}{p+q} \end{cases}$$

5) Сформулировать определение матрицы перехода от базиса к базису. Вывести формулы преобразования координат вектора и координат точки при переходе к новой системе координат.

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису: $e = \{\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}\}$ - старый базис $e' = \{\overline{i'}; \overline{j'}; \overline{k'}\}$ - новый базис.

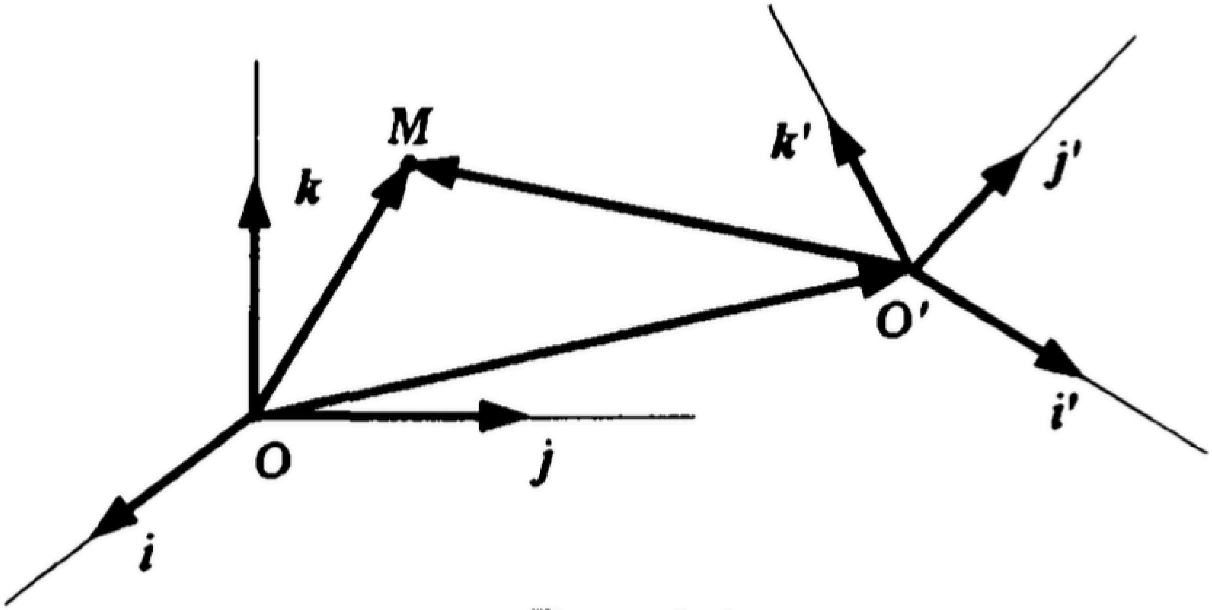


Рис. 3.1

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} = b_1 i + b_2 j + b_3 k + x' i' + y' j' + z' k' =$$

$$b_1 i + b_2 j + b_3 k + x'(a_{11} i + a_{21} j + a_{31} k) + y'(a_{12} i + a_{22} j + a_{32} k) + z'(a_{13} i + a_{23} j + a_{33} k) =$$

$$= (a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' + b_1) i + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z' + b_1) j + (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z' + b_1) k$$

$$\begin{cases} x = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' + b_1 \\ y = a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z' + b_2 \\ z = a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z' + b_3 \end{cases}$$

6) Дать определение скалярного произведения векторов. Описать связь скалярного произведения с понятием ортогональной проекции вектора. Сформулировать и доказать свойства скалярного произведения.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b} \in V_3$ называется число $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\phi$, где ϕ угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Связь с ортогональной проекцией: $np_b(a) = (a \cdot b)/|b|$

Геометрические свойства

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$
2. $\overline{a} \cdot \overline{b} < 0 \iff \angle\phi$ - острый; $\overline{a} \cdot \overline{b} > 0 \iff \angle\phi$ - тупой;

Алегебраические свойства

1. Коммутативность
2. Дистрибутивность $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3 \ (\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
3. Ассоциаливность $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3 \ \forall \lambda \ (\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$

> $(\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = np_{\overline{b}}(\lambda \overline{a}) \cdot |\overline{b}| = \lambda np_{\overline{b}}(\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$

4. $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}^2| \geq 0$

7) Записать формулу для вычисления скалярного произведения в координатах и вы вести эту формулу. Доказать следствие из этой формулы для ортонормированного базиса. Вывести формулу для длины вектора, направляющих косинусов вектора, угла между векторами в ортонормированном базисе. Геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе.

Скалярное произведение в координатах в ортонормированном базисе: Пусть векторы a и b из V_3 заданы своими координатами в ортонормарованном базисе i, j, k: $a = \{x_a; y_a; z_a\}$, $a = \{x_b; y_b; z_b\}$ Это означает, что имеются разложения:

$$a = x_a i + y_a j + z_a k \quad b = x_b i + y_b j + z_b k$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (x_a i + y_a j + z_a k)(x_b i + y_b j + z_b k) =$$

$$= x_a x_b ii + x_a y_b ij + x_a z_b ik + y_a x_b ji + y_a y_b jj + y_a z_b jk + z_a x_b ki + z_a y_b kj + z_a z_b kk =$$

$$= x_a x_b i^2 + y_a y_b j^2 + z_a z_b k^2 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Длина вектора: $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Угол между векторами: $\cos\phi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 + z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Направляющие косинусов в ортонормированном базисе:
$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

8) Что такое ориентация плоскости? Дать определение ориентированной площади параллелограмма, сформулировать и доказать её основные свойства.

Ориентация плоскости - выбор в V_2 положительно ориентированного базиса.

9) Что такое ориентация пространства? Правые и левые тройки векторов. Дать определение объёма ориентированного

параллелепипеда, сформулировать и доказать его основные свойства.

Ориентация пространства - выбор в V_3 положительно ориентированного базиса.

Тройка a**,** b**,** c **некомпланарных векторов** называется **правой**, если направление вектора a совмещается с направлением вектора b при помощи кратчайшего поворота вектора a в плоскости этих векторов, который со стороны вектора c совершается против хода часовой стрелки.

Объёмом ориентированного параллелепипеда,построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число:

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{cases} +V, \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - \text{левая тройка} \\ -V, \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - \text{правая тройка} \\ 0, \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} - \text{компланарны} \end{cases}$$

Свойства ориентированного объёма:

- Кососимметричность $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$
  $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -V(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a} = -V(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = -V(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -V(\overline{c}, \overline{a}, \overline{b})$
- Линейность $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3 \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \ V(\overline{a}, \lambda \overline{b}_1 + \mu \overline{b}_2, \overline{c}) = \lambda V(\overline{a}, \overline{b}_1, \overline{c}) + \mu V(\overline{a}, \overline{b}_2, \overline{c})$

10) Дать определения векторного и смешанного произведений векторов. Доказать теорему о связи трёх произведений векторов. Сформулировать и доказать основные свойства векторного и смешанного произведения векторов.

Векторным произведением векторов a и b называют такой вектор c, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. Вектор c ортогонален векторам a и b
2. Длина вектора c равна $|c| = |a| \cdot |b| \sin \phi$, где ϕ угол между a и b
3. Упорядоченная тройка векторов a, b, c является правой

Смешанное произведение трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число $(a \times b) \cdot c$ равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

Правило $BAC - CAB$: $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

Свойства векторного произведения:

- Геометрические свойства

1. $\overline{a} \parallel \overline{b} \iff \overline{a} \times \overline{b} = 0$

> $$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & a \parallel b \implies \sin\phi = 0 \implies a \times b = 0 \\ \Leftarrow \quad & a \times b = 0 \implies \sin\phi = 0 \implies a \parallel b \end{aligned}$$

2. Если $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, то $|\overline{a} \times \overline{b}| = S$, где S - площадь параллелограмма, построенного на этих векторах как на смежных сторонах.
3. Пусть π — плоскость, перпендикулярная вектору b. Тогда $\overline{a} \times \overline{b} = (np_\pi a) \times b$.

> $$a' = np_\pi a \quad |a' \times b| = |a'||b|\sin(90^\circ) = |a'||b| = |a|\cos(90-\phi)|b| = |a||b|\sin(\phi) = |a \times b|$$

- Алгебраические свойства

1. Антикоммутативность: $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3 \quad a \times b = -(b \times a)$

> Модули векторов $a \times b$ и $b \times a$ равны, а также они оба ортогональны векторам a и b. Однако по построению они противоположно направленные. Значит, они противоположны

2. Ассоциативность: $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$
3. Дистрибутивность: $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$

11) Вывести формулы для вычисления векторного произведения и смешанного произведения векторов в правом ортонормированном базисе.

$$a \times b = (x_a i + y_a j + z_a k) \times (x_b i + y_b j + z_b k) =$$

$$= x_a x_b i \times i + x_a y_b i \times j + x_a z_b i \times k +$$

$$= y_a x_b j \times i + y_a y_b j \times j + y_a z_b j \times k +$$

$$= z_a x_b k \times i + z_a y_b k \times j + z_a z_b k \times k =$$

$$= (y_a z_b - y_b z_a)i + (z_a x_b - z_b x_a)j + (x_a y_b - x_b y_a)k$$

$$a(b \times c) = a\left(\begin{bmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{bmatrix} k \right) =$$

$$= x_a \begin{bmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{bmatrix} - y_a \begin{bmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{bmatrix} + z_a \begin{bmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix}$$

12) Доказать теорему об уравнении 1-го порядка как уравнении прямой на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках на осях, параметрическое и каноническое уравнения, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

$Ax + By + C = 0$ - уравнение первого порядка $A^2 + B^2 \neq 0$
Любую прямую в плоскости можно задать уравнением первого порядка.

> $\Rightarrow \quad l$ - прямая на плоскости.
> $M \in l;\ \overline{M_0M} \perp \overline{n} \implies \overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0 \implies A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \implies$
> $\implies Ax + By + (-ax_0 - by_0) = 0 \implies Ax + By + C = 0$
> $\Leftarrow \quad l : Ax + By + C = 0;\ M_0(x_0, y_0) \in l;\ \forall M \in l \implies \begin{cases} ax + by + C = 0 \\ ax_0 + by_0 + C = 0 \end{cases} \implies$
> $\implies a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \implies \overline{M_0M} \perp \overline{n}$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:
$tg\phi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = k \implies y = kx + (y_0 - kx_0)$

Уравнение прямой в отрезках: Определим прямую L ее точками $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ пересечения с осями координат, предполагая, что эти две точки не совпадают с началом системы координат, т.е. что a≠0 и b≠0. Записывая уравнение прямой L по двум ее точкам A и B, получаем

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \implies -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Параметрическое уравнение прямой:
L - прямая; $M_0(x_0, y_0)$; $\overline{s} = \{l; m\}$ $\overline{s}$ - направляющий вектор; $\overline{M_0M} = t\overline{s}$;
$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0) \implies$

$$\implies \begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой:
$M_0(x_0, y_0)$ - начальная точка, $\overline{s} = \{l; m\}$ - направляющий вектор. Из параметрического уравнения прямой выразим t:

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

Зададим прямую L на плоскости двумя различными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на ней. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} \parallel L$ и ее каноническое уравнение как уравнение прямой,проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, с направляющим вектором $s = \overline{M_1M_2}$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

13) Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых на плоскости. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой и формулу для угла между двумя прямыми.

Способы исследования взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1. Условие параллельности: $L_1 \parallel L_2 \iff \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
2. Совпадение прямых: $L_1 = L_2 \implies \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
3. Угол между прямыми: $\cos\phi = |\cos\phi| = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

Расстояние от точки до прямой: $M_0(x_0; y_0);\ M(x; y) \in L;\ \overline{n} \perp L.$
$\rho(M_0; L) = |np_{\overline{n}}\overline{M_0M}| = \frac{|\overline{M_0M}\cdot\overline{n}|}{|\overline{n}|} = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Угол между прямыми: $\angle(L_1, L_2) = \angle(\tau_1, \tau_2) = \arccos\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{|\overline{\tau_1}|\cdot|\overline{\tau_2}|}$

14) Дать определение пучка прямых на плоскости (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка прямых и записать уравнение несобственного пучка прямых.

Собственный пучок прямых на плоскости - семейство всех прямых, параллельных или совпадающих с данной прямой.
Несобственный пучок прямых на плоскости - семейство непараллельных прямых, проходящих через фиксированную точку на плоскости.

Утверждение об уравнении пучка прямых: для того чтобы прямая входила в пучок прямых, определяемый парой непараллельных прямых

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы ее общее уравнение можно было записать в виде

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

> $\Rightarrow \quad L \in \Phi;\ L:\ Ax + By + C = 0;\ \overline{n}(A, B);\ \overline{n}_1(A_1, B_1);\ \overline{n}_2(A_2, B_2)\ \overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2$ (иначе было бы $L_1 = L_2$) $\implies \overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ - базис в V_2

> $\implies \overline{n}=\alpha\overline{n}_1+\beta\overline{n}_2 \implies A=\alpha A_1+\beta A_2;\ B=\alpha B_1+\beta B_2;\ M_0(x_0;y_0)$ - базисная точка пучка Φ.
> $C=-Ax_0-By_0=-(\alpha A_1+\beta A_2)x_0-(\alpha B_1+\beta B_2)y_0=\alpha(-A_1x_0-B_1y_0)+\beta(-A_2x_0-B_2y_0)=$ $\alpha C_1+\beta C_2 \implies (\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0$
> $\Leftarrow \quad L:\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0,\ M_0(x_0;y_0)$ - базисная точка пучка $\Phi \implies a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$ и
> $a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \implies \alpha(a_1x_0+b_1y_0+c_1)+\beta(a_2x_0+b_2y_0+c_2)=0 \implies M_0\in L \implies L\in\Phi$

15) Доказать теорему об уравнении 1-го порядка как уравнении плоскости в пространстве. Записать уравнение плоскости в отрезках на осях, параметрическое уравнение, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

Любая плоскость в пространстве является поверхностью первого порядка и любая поверхность первого порядка в пространстве есть плоскость.

> Пусть π - плоскость; $M_0\in\pi$; $n\perp\pi$. Тогда множество всех точек в пространстве разбивается на три подмножества. Первое состоит из точек,принадлежащих плоскости, а два других — из точек, расположенных по одну и по другую стороны плоскости. Какому из этих множеств принадлежит произвольная точка M пространства, зависит от знака скалярного произведения $n\overline{M_0M}$. Если $M\in\pi$, то $n\perp\overline{M_0M} \implies n\overline{M_0M}=0$. Обозначим координаты точек $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ и вектора $n(A;B;C)$. Так как $\overline{M_0M}=\{x—x_0;y—y_0;z—z_0\}$, то, записывая скалярное произведение в координатной форме векторов n и $\overline{M_0M}$, получаем условие принадлежности точки M рассматриваемой плоскости в виде
>
> $$A(x—x_0)+B(y—y_0)+C(z—z_0)=0$$
>
> $$Ax+By+Cz+D=0$$

Параметрическое уравнение плоскости: Фиксированной плоскости π в пространстве соответствует множество параллельных ей векторов, т.е. пространство V_2. Выберем в этом пространстве базис $e_1\{e_{1x};e_{1y};e_{1z}\}$, $e_2\{e_{2x};e_{2y};e_{2z}\}$, ($e_1\nparallel e_2$; $e_1,e_2\parallel\pi$), и точку $M_0\{x_0;y_0;z_0\}\in\pi$. Если точка $M\{x;y;z\}\in\pi$, то это эквивалентно тому, что $\overline{M_0M}\parallel\pi$, т.е. $\overline{M_0M}\in V_2$. Это означает, что существует разложение вектора $\overline{M_0M}$ в базисе e_1, e_2, т.е. существуют такие числа, t_1 и t_2, для которых $\overline{M_0M}=t_1e_1+t_2e_2$.

$$\begin{cases} x=x_0+t_1e_{1x}+t_2e_{2x} \\ y=y_0+t_1e_{1y}+t_2e_{2y} \\ z=z_0+t_1e_{1z}+t_2e_{2z} \end{cases}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: Пусть $M_1,M_2,M_3\in\pi \implies \overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3},\overline{M_1M}-\textit{компланарны} \implies [\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3},\overline{M_1M}]=0 \implies$

$$\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости в отрезках на осях: Рассмотрим частный случай плоскости, проходящей через 3 точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ причём $a,b,c \neq 0$. Эти точки, не лежат на одной прямой, а значит задают плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки ненулевой длины ($\overline{OM_1} = a, \overline{OM_2} = b, \overline{OM_3} = c$): Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка, принадлежащая плоскости. Найдём векторы $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M_2}$:
$\overline{M_1M_2} = \{-a, b, 0\}, \overline{M_1M_3} = \{-a; 0; c\}, \overline{M_1M_2} = \{x-a; y; z\}$.

$$\begin{bmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{bmatrix} = 0$$

Получим уравнение

$$bc(x-a) + acy + abz = 0$$

Разделим полученное уравнение на abc

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

16) Описать способы исследования взаимного расположения двух плоскостей в пространстве. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости (для случаев задания плоскости общим и параметрическим уравнением).

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

1. $\alpha \parallel \beta \iff \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
2. $\alpha = \beta \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
3. $\alpha \perp \beta \iff \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \implies A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Угол между плоскостями:
$\phi = \angle(\alpha; \beta) = \angle(\overline{n}_1; \overline{n}_2)$
$\cos\phi = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Расстояние от точки до плоскости:
$\pi;\ M_0;\ n \perp \pi;\ M_1$ - начало n $(M_1 \in \pi) \implies$

$$\rho(M_0; \pi) = |np_n \overline{M_1M_0}| = \frac{|n\overline{M_1M_0}|}{|n|}$$

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$; $M_1(x_1; y_1; z_1)$, тогда $M_1M_0 = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\} \implies$

$$\implies \rho(M_0;\pi) = \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

17) Дать определение пучка плоскостей в пространстве (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка плоскостей и записать уравнение несобственного пучка плоскостей.

Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости или совпадающих с ней.
Несобственным Пучком плоскостей в пространстве называют семейство всех плоскостей, содержащих фиксированную прямую. Пучок однозначно определяется любой парой своих различных плоскостей. Любые две непараллельные плоскости однозначно определяют некоторый пучок плоскостей.

Для того чтобы плоскость принадлежала пучку плоскостей, определяемому парой непараллельных плоскостей

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы ее общее уравнение можно было записать в виде

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$

> $\Rightarrow$ Пусть плоскость $\pi \in$ "пучку". $n_1 \nparallel n_2 \implies n = \alpha n_1 + \beta n_2 \implies \ldots \implies$
> $\implies \pi_3 : (\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0$
> $\Leftarrow$ Как для пучка прямых

18) Дать определение связки плоскостей в пространстве (собственной и несобственной). Доказать теорему об уравнении собственной связки плоскостей и записать уравнение несобственной связки плоскостей.

Связкой плоскостей называют семейство всех плоскостей в пространстве с одной общей точкой. Связка плоскостей однозначно определяется любой тройкой своих плоскостей, не принадлежащих одному пучку плоскостей.

Для того чтобы плоскость входила в связку плоскостей, определяемую тройкой плоскостей $\pi_i : A_ix+B_iy++C_iz+D_i=0,\ i=1,2,3$, общего положения, необходимо и достаточно, чтобы ее общее уравнение можно было записать в виде

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,$$

где $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2. Различие состоит лишь в том, что в случае пучка плоскостей нормальные векторы двух непараллельных плоскостей образуют базис в V_2, а нормальные векторы трех плоскостей общего положения образуют базис в V_3.

19) Записать общие, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

$$\overline{s}(l;m;n),\quad M_0(x_0;y_0;z_0)\in L,\quad \forall M(x;y;z)\ M\in L \implies \overline{M_0M}||\overline{s} \implies \overline{M_0M}=\overline{s}t \implies \begin{cases} x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве.

$$\frac{(x-x_0)}{l}=\frac{(y-y_0)}{m}=\frac{(z-z_0)}{n}$$

20) Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Вывести формулы для расстояния от точки до прямой и для расстояния между скрещивающимися прямыми в пространстве.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве:

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\ \ (1)\quad \frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1}\ \ (2)\quad \begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{bmatrix}=0\ \ (3)$$

1. $L_1=L_2 \iff$ выполнено 1 и 2
2. $L_1 \parallel L_2 \iff$ выполнено 1 и нарушено 2
3. $L_1\cap L_2 \iff$ выполнено 3 и нарушено 1
4. L_1 и L_2 скрещиваются $\iff$ нарушено 3

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве:

1. $L \in \pi \iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$
2. $L \parallel \pi \iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$
3. $L \cap \pi \iff Al + Bm + Cn \neq 0$

Расстояние от точки M_0 до прямой L:

$$M_0 \in \pi;\ \ \overline{\tau} = (A, B, C) \implies \pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$|\overline{M_0M_1}| = \rho(L, M_0);$$

$$\rho(L, M_0) = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \overline{\tau}|}{|\overline{\tau}|} \ \ \Big(\frac{S}{основание} = высота\Big)$$

Расстояние между параллельными прямыми: расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|s_1 s_2 \overline{M_1M_2}|}{|s_1 \times s_2|} \ \ \Big(\frac{V}{S_{осн.}} = высота\Big)$$

Угол между прямыми:(скалярное произведение)

$$\cos\phi = \frac{|s_1 s_2|}{|s_1||s_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью:
$\angle\phi = \angle(s, n) \implies$

$$\sin\phi = |\cos\phi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

21) Дать определение эллипса. Вывести его каноническое уравнение. Описать основные параметры эллипса: полуоси, центр и оси симметрии, эксцентриситет.

Эллипс - множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть заданная постоянная величина.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\epsilon x,\ \text{где}\ \epsilon=c/a$$

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2ax\epsilon+\epsilon^2x^2$$

$$(a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

22) Дать определение гиперболы. Вывести её каноническое уравнение. Описать основные параметры гиперболы: полуоси, центр и оси симметрии, асимптоты, эксцентриситет.

Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют **гиперболой**.

$$||F_1M|-|F_2M||=2a$$

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$-\epsilon x-a=\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\epsilon x+a|$$

$$(\epsilon^2-1)x^2-y^2=c^2-a^2,\ \text{где}\ \epsilon=c/a$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{где}\ b^2=c^2-a^2$$

23) Дать определение параболы. Вывести её каноническое уравнение

Геометрическое место точек, равно удаленных от фиксированной точки и от фиксированной прямой, называют **параболой**.

p - расстояние от фокуса до директрисы, тогда $F(p/2;0)$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=|x+\frac{p}{2}|$$

$$y^2=2px$$

24) Доказать директориальные свойства эллипса и гиперболы. Вывести полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Директориальные свойства эллипса: Отношение фокального радиуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная, равная ϵ.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a+\epsilon x, \text{ где } \epsilon = c/a \implies \begin{cases} |F_1M| = a-\epsilon x \\ |F_2M| = a+\epsilon x \end{cases} \implies \frac{|F_1M|}{a/\epsilon - x} = \epsilon$$

Директориальные свойства гиперболы: Отношение фокального радиуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная, равная ϵ.
$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = |\epsilon x + a| \implies |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm(\epsilon x + a);$
$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm(\epsilon x - a) \implies \frac{|F_2M|}{|a/\epsilon + x|}; \frac{|F_1M|}{|a/\epsilon - x|}$

25) Вывести уравнения касательных к эллипсу, гиперболе, параболе.

Уравнения касательной к эллипсу:

$$y'(x) = -xb^2/ya^2$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Уравнения касательной к гиперболе:

$$y'(x) = xb^2/ya^2$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Уравнения касательной к параболе:

$$x'(y) = y/p$$

$$x - x_0 = x'(y_0)(y - y_0)$$

$$x - x_0 = y_0/p(y - y_0)$$

$$px - px_0 = yy_0 - y_0^2$$

$$px - yy_0 + px_0^2 = 0 \quad (y_0^2 = 2px_0 \text{ т.к. } M(x_0; y_0) \in \textit{параболе})$$

26) Сформулировать и доказать оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

Оптические свойства эллипса:

$n = \{\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\}$ $n_1 = |\overline{F_1M}|\overline{F_1M}$ $n_2 = |\overline{F_2M}|\overline{F_2M} \implies n_1 \parallel \overline{F_1M};$ $n_2 \parallel \overline{F_2M} \implies n_1 + n_2$ - диагональ построенного на них ромба (биссектриса)

$$|\overline{F_1M}|\overline{F_1M} + |\overline{F_2M}|\overline{F_2M} =$$

$$= (a + \epsilon x_0)\{x_0 - c; y_0\} + (a - \epsilon x_0)\{x_0 + c; y_0\} =$$

$$= \{(a + \epsilon x_0)(x_0 - c) + (a - \epsilon x_0)(x_0 + c); 2ay_0\} =$$

$$= \{2ax_0 - 2c\epsilon x_0; 2ay_0\} = 2a\{(1 - \frac{c^2}{a^2})x_0; y_0\} =$$

$$= 2a\{\frac{b^2}{a^2}x_0; y_0\} = 2ab^2\{\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\}$$

Оптические свойства гиперболы:

$s = \{\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2}\}$ $n_1 = |\overline{F_1M}|\overline{F_1M}$ $n_2 = |\overline{F_2M}|\overline{F_2M} \implies n_1 \parallel \overline{F_1M};$ $n_2 \parallel \overline{F_2M} \implies n_1 + n_2$ - диагональ построенного на них ромба (биссектриса)

$$|\overline{F_1M}|\overline{F_1M} + |\overline{F_2M}|\overline{F_2M} =$$

$$= (\epsilon x_0 + a)\{x_0 - c; y_0\} + (\epsilon x_0 - a)\{x_0 + c; y_0\} =$$

$$= \{(\epsilon x_0 + a)(x_0 - c) + (\epsilon x_0 - a)(x_0 + c); 2\epsilon x_0 y_0\} =$$

$$= \{2\epsilon x_0^2 - 2ca; 2\epsilon x_0 y_0\} = 2\epsilon\{x_0^2 - a^2; x_0 y_0\} =$$

$$= 2\epsilon\{\frac{y_0 a^2}{b^2}; x_0 y_0\} = 2\epsilon y_0 a^2\{\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2}\}$$

Оптические свойства параболы:

$n = \{p; -y_0\};$ $MF + |MF|i$ - биссектриса между лучами; i - орт задающий направление оси Ox

$$MF + |MF|i = \{(p/2) - x_0; -y_0\} + \{x_0 + p/2\}\{1; 0\} = \{p; -y_0\} \implies$$

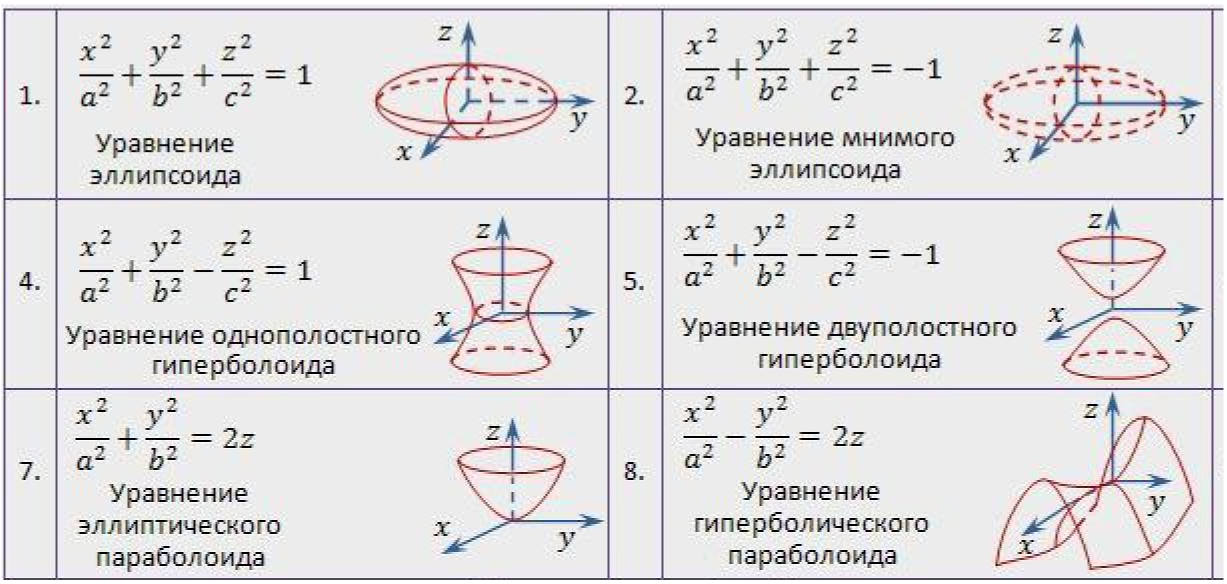
$$\implies n \parallel (MF + |MF|i)$$

27) Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (доказательство провести для эллипса или гиперболы).

....

28) Записать канонические уравнения эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов. Исследовать эти поверхности методом сечений.

Каноническое уравнение эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Канонические уравнение однополостного гиперболоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Канонические уравнение двуполостного гиперболоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Каноническое уравнение эллиптического параболоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
Каноническое уравнение гиперболического параболоида: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$



1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида

29) Дать определение поверхностей вращения, цилиндрических, конических поверхностей. Вывести уравнения поверхностей 2-го порядка, получающихся при вращении эллипса, гиперболы и параболы вокруг одной из осей симметрии.

Поверхность Ω называют **поверхностью вращения**, если она образована окружностями с центрами на некоторой прямой L (оси вращения), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных L.

$$\phi(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

Цилиндрическая поверхность – поверхность, получающейся при движении прямой в пространстве, которая остается параллельной своему исходному положению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Коническая поверхность – это поверхность вращения, образующая которой проходит через ось вращения.

Вращение эллипса

Поверхность, которая получается при вращении *эллипса* вокруг одной из его *осей симметрии*, называют ***эллипсоидом вращения*** (рис. 12.3)

Уравнение эллипсоида вращения выведем, расположив *начало прямоугольной системы координат* в *центре эллипса* и совместив *ось аппликат* Oz с осью вращения, а *координатную плоскость* Oxz — с плоскостью эллипса (рис. 12.4). Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Если в этом уравнении заменить x на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ (см. **12.1**), то получится уравнение

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

соответствующей *поверхности вращения*. Итак, эллипсоид вращения с осью вращения Oz описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \qquad (12.2)$$

Применив к эллипсоиду вращения *преобразование сжатия* к координатной плоскости Oxz, получим ***эллипсоид*** общего вида. Если k — *коэффициент сжатия*, то уравнение эллипсоида будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

или, после переобозначения параметров,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (12.3)$$

Вращение гиперболы

При вращении *гиперболы* вокруг одной из ее *осей симметрии* получается поверхность, называемая ***гиперболоидом вращения.*** Выбор оси вращения влияет на тип гиперболоида. Если осью вращения является *действительная ось симметрии гиперболы*, то поверхность вращения будет состоять из двух частей (полостей). Это ***двуполостный гиперболоид вращения*** (рис. 12.6). При вращении гиперболы вокруг ее *мнимой оси симметрии* поверхность будет состоять из одной полости (рис. 12.7). Такую поверхность называют ***однополостным гиперболоидом вращения***.

Для вывода уравнений гиперболоидов вращения расположим *прямоугольную систему координат* так, чтобы ось вращения, являющаяся осью симметрии гиперболы, совпадала с *осью аппликат* Oz, а сама гипербола располагалась в *координатной плоскости* Oxz с *центром* в *начале системы координат*.

Для случая двуполостного гиперболоида вращения уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1.$$

Заменив в нем x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **12.1**), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1. \tag{12.4}$$

В случае однополостного гиперболоида вращения гипербола будет описываться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Опять меняем x на радикал $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \quad — \tag{12.5}$$

уравнение однополостного гиперболоида вращения.

Гиперболоиды вращения *преобразованием сжатия* к координатной плоскости Oxz превращаются в *двуполостный* и *однополостный гиперболоиды* общего вида. При *коэффициенте сжатия* k их уравнениями будут соответственно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Вращение параболы

При вращении *параболы* вокруг ее *оси* получаем *параболоид вращения* (рис. 12.10). Чтобы найти его уравнение, выберем *прямоугольную систему координат*, направив *ось* Oz по оси вращения и совместив *координатную плоскость* Oxz с плоскостью параболы. Пусть при этом парабола описывается уравнением $x^2=2pz$, $p>0$. Тогда для получения уравнения *поверхности вращения* нужно заменить в этом уравнении x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **12.1**):

$$2pz=x^2+y^2.$$

Преобразование сжатия параболоида вращения к координатной плоскости Oxz с *коэффициентом* k дает поверхность

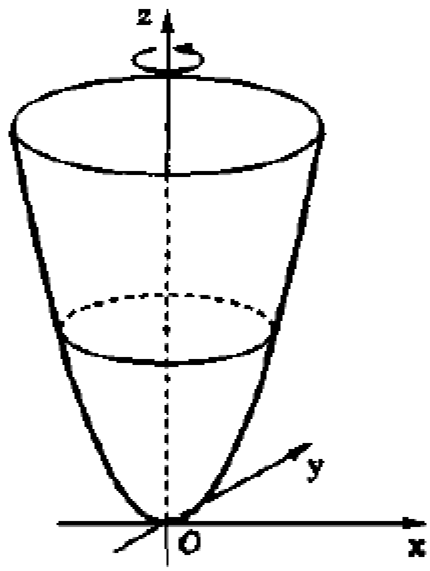


Рис. 12.10

более общего вида — ***эллиптический параболоид***, уравнением которого будет

$$2pz = x^2 + k^2 y^2.$$

После переобозначения параметров получаем ***каноническое уравнение эллиптического параболоида***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \qquad (12.8)$$

Видим, что эллиптический параболоид является *поверхностью второго порядка*. При $a = b$ он превращается в параболоид вращения.