Теоретические вопросы для подготовки к РК–3 часть 1

1) Дайте определение внутренних, граничных, изолированных и предельных точек множеств, открытых, замкнутых и линейно связных множеств, окрестностей и областей в R^n

Точку a множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$ называют **внутренней точкой** этого **множества**, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, целиком содержащаяся в E: $U_\varepsilon(a) \subseteq E$.

Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют **граничной точкой** множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$, если любая ε-окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству E, так и точки, не принадлежащие этому множеству.

Точку $a \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ называют **изолированной** точкой множества E, если в некоторой ее окрестности нет других точек множества E, кроме a.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют **предельной точкой множества** $E \subseteq \mathbb{R}^n$, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от x.

Если каждая точка множества E является его внутренней точкой: $E \subseteq \operatorname{Int} E$, то само множество E называют **открытым множеством**.

Дополнение открытого множества называют **замкнутым множеством**.

Множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют **линейно связным**.

Окрестностью точки $a \in X$ называют любое открытое множество U в X, включающее в себя эту точку.

Открытое линейно связное множество называют **областью**.

2) Дайте определение открытых, ограниченных и замкнутых множеств, окрестностей и компактов в R^n. Сформулируйте критерий компактности множеств в R^n

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют **ограниченным множеством**, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки $O = (0, \ldots, 0)$ содержит множество E.

Множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ называют **компактом**, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 2. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом $\iff$ оно замкнутое и ограниченное.

3) Дайте определение топологического пространства. Сформулируйте условие Хаусдорфа. Приведите пример хаусдорфова пространства.

Пусть дано множество X. Система τ его подмножеств называется **топологией** на X, если выполнены следующие условия:

1. Объединение произвольного семейства открытых множеств открыто:
   Если $U_\alpha \in \tau$ для всех $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто:
   Если $U_i \in \tau$ для $i = 1, \ldots, n$, то $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.
3. Весь X и пустое множество открыты: $X \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$.
   Пара (X, τ) называется **топологическим пространством**.

Топологическое пространство X называется **хаусдорфовым**, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $V(y)$: $U(x) \cap V(y) = \varnothing$ (**условие Хаусдорфа**).

Пример: R^n

4) Определите структуру хаусдорфова топологического пространства в R^n

5) Дайте определение предела последовательности в R^n, сходящейся, расходящейся и фундаментальной последовательности. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

Пусть для последовательности $\{a_k\}$ существует такая точка $a \in \mathbb{R}^n$, что для любой её ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ можно указать такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любого $k > N$ верно соотношение $a_k \in U_\varepsilon(a)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall k > N \quad |a_k - a| < \varepsilon.$$

Тогда $\{a_k\}$ называют **сходящейся последовательностью в** $\mathbb{R}^n$, а точку a — **пределом последовательности** $\{a_k\}$ в $\mathbb{R}^n$. Если указанной точки a не существует, то последовательность $\{a_k\}$ называют **расходящейся последовательностью в** $\mathbb{R}^n$.

Последовательность $\{a_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ называют **фундаментальной**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $k > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|a_k - a_m| < \varepsilon$.

Критерий Коши. Последовательность сходится т. и т. т., к. она является фундаментальной.

6) Дайте определение функции многих переменных, ее графика и координатных функций векторной функции многих переменных. Сформулируйте определение предела функции многих переменных по базе, две основные базы и теорему об эквивалентности определений предела функции.

Отображение вида $f : A \to \mathbb{R}^m$, где $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, называют **функцией многих переменных** или **функцией нескольких переменных**.

Графиком функции многих переменных $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называют подмножество

$$\Gamma(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in A,\, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Поскольку элемент линейного пространства $\mathbb{R}^m$ при $m > 1$ является совокупностью m действительных чисел, то векторную функцию многих переменных $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можно рассматривать как совокупность m скалярных функций f_i, полагая, что

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in A.$$

Функции многих переменных $f_i, i = 1, \ldots, m$, называют **координатными функциями** векторной функции f.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — область определения функции, B — база в множестве A. Точку $d \in \mathbb{R}^m$ называют **пределом функции** $f : A \to \mathbb{R}^m$ **по базе** B, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists b = b(\varepsilon) \in B :\ \forall x \in b\, |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (об эквивалентности определений предела функции).

$$\lim_{\beta} f(x) = d \iff a) \lim_{\beta} \rho(f(x), d) = 0$$

$$\iff b) \forall U(d)(\text{окрест.}) \exists b \in \mathcal{B} : f(b) \subseteq U(d)$$

$$\iff c) \lim_{\beta} f_i(x) = d_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad d = (d_1, \ldots, d_m).$$

$x \to a$ — база $\{U_\delta(a) \cap A : \delta > 0\}$ выколотых δ-окрестностей точки a в множестве A, если a — предельная точка множества A,

$x \to \infty$ — база $\{A \setminus [U_r(O)] : r > 0\}$ окрестностей бесконечности в множестве A, если A — неограниченное множество ($[U_r(O)]$ — замыкание множества $U_r(O)$).

7) Сформулируйте свойства предела функции: теоремы о единственности предела, о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, и о пределе сложной функции.

Теорема 2 (свойства предела функции).
а) Функция $f : A \to \mathbb{R}^m$ может иметь не более одного предела по данной базе $\mathcal{B}$ в A.
б) $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = d \quad \Rightarrow \quad \exists b \in \mathcal{B} : f$ ограничена на b.

Теорема 3 (предел сложной функции или замена переменной в пределе).

1. $g : Y \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B}_Y$ — база в $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, $\exists \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y)$,
2. $f : X \to Y$, $\mathcal{B}_X$ — база в $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\qquad \Rightarrow \quad \exists \lim_{\mathcal{B}_X} g[f(x)] = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y)$.
3. $\forall b_Y \in \mathcal{B}_Y$, $\exists b_X \in \mathcal{B}_X : f(b_X) \subseteq b_Y$.

8) Дайте определение предела функции многих переменных в точке. Сформулируйте теорему о пределе ограничения функции на подмножество. Приведите пример использования этой теоремы для доказательства расходимости предела функции.

Теорема 4. Если $B \subset A$, a — предельная точка множества B, и $d = \lim_{x \to a} f(x)$ существует, то существует $\lim_{x \to a} f\big|_B(x)$, равный d.

Пример 1.
Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases} \tag{2}$$

и исследуем ее на существование предела в точке $a = (0; 0)$. Пусть

$$B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся тем, что в точках B_k функцию f можно рассматривать как функцию одного действительного переменного $f|_{B_k}(x) \equiv f(x, kx)$, которая при $x \neq 0$ принимает постоянное значение:

$$f|_{B_k}(x) = f(x, kx) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Поэтому при $(x; y) \to (0; 0)$ существует предел функции $f|_{B_k}$, равный этому постоянному значению. Так как это значение зависит от k, то по теореме 3 функция f не имеет предела в точке $(0; 0)$.

9) Дайте определение непрерывной функции многих переменных в точке и точек разрыва функции. Сформулируйте теоремы об эквивалентности определений непрерывности и о связи непрерывности векторной функции и ее координатных функций.

Функцию многих переменных $f : A \to \mathbb{R}^m$ называют **непрерывной в точке** $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ в двух случаях:

1. a — изолированная точка множества A, или
2. a — предельная точка множества A и

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Точками разрыва функции $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называют точки двух типов:

1. точки, в которых функция определена, но не является непрерывной,
2. предельные точки области A определения функции, не принадлежащие A.

Теорема 1 (об эквивалентности определений непрерывности). Функция $f : A \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке

$$a \in A \subseteq \mathbb{R}^n \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in A \cap U_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Теорема 2. Векторная функция $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ непрерывна в точке a $\iff \forall i = 1, \ldots, m$ функция $f_i(x)$ непрерывна в точке a.

10) Дайте определение непрерывной функции многих переменных в точке. Сформулируйте локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 3 (локальные свойства непрерывных функций).

1. Если функции $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, k$, непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то любая их линейная комбинация непрерывна в этой точке.
2. Если скалярные функции $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in A$, то их произведение fg, а при $g(a) \neq 0$ и частное f/g непрерывны в точке a.
3. Если функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$, то она ограничена в пересечении множества A с некоторой окрестностью точки a.
4. Если скалярная функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ (или $f(a) < 0$), то существует такая окрестность $U(a)$ точки a, что функция f положительна (соответственно отрицательна) в точках множества $U(a) \cap A$.
5. Если функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$, $f(A) \subseteq B$ и функция $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ непрерывна в точке $d = f(a)$, то сложная функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$, непрерывна в точке a.

11) Дайте определение функций, непрерывных на множествах в R^n. Сформулируйте теоремы о прообразах открытых множеств и о непрерывных отображениях компактов и линейно связных множеств.

Функцию $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, непрерывную во всех точках множества A, называют **непрерывной на этом множестве**.

Теорема 4. Функция $f : A \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $A \subseteq \mathbb{R}^n \iff$ прообраз любого открытого в $\mathbb{R}^m$ множества открыт в A.

Теорема 5. Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на A.

1. Если A — компакт в $\mathbb{R}^n$, то и $f(A)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$.
2. Если A — линейно связное множество, то и $f(A)$ — линейно связное множество.

12) Дайте определение функций, непрерывных на множествах в R^n. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на компактах и на линейно связных множествах.

Теорема 6 (свойства функций, непрерывных на множествах).

1. Если функция $f : K \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K.
2. Если функция $f : K \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на K.
3. Если функция $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то она достигает на K своих наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $x_*, x^* \in K$, что $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), x \in K$.
4. Если функция $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывна на линейно связном множестве $A \subseteq \mathbb{R}^n$, принимает в точках $a, b \in A$ значения $f(a) = c, f(b) = d$, то для любого числа μ, лежащего между c и d существует точка $x_\mu \in A$, для которой $f(x_\mu) = \mu$.

13) Дайте определение полного приращения, дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте теорему о покоординатной дифференцируемости векторной функции.

Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}^m$ определена на множестве $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)^T$ — такой вектор приращений независимых переменных, что точка $x + \Delta x$ тоже принадлежит A. В этом случае определено **полное приращение функции** f: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, соответствующее приращению Δx переменных в точке x.

Пусть x — предельная точка множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Функцию $f : A \to \mathbb{R}^m$ называют **дифференцируемой в точке** x, если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое — линейное относительно Δx, второе — o-малое при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta f(x) = L\Delta x + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{1}$$

где L — матрица типа $m \times n$, элементы которой не зависят от Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Линейную относительно Δx часть полного приращения функции f, дифференцируемой в точке x, называют **(полным) дифференциалом функции** f и обозначают через df.

Теорема 1. Векторная функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее координатные функции.

14) Дайте определение и геометрическую интерпретацию частной производной функции многих переменных. Сформулируйте первое необходимое условие дифференцируемости. На примере покажите, что это условие не являются достаточным.

Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. **Частной производной** по x_1 называют производную функции: $g(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ в точке a_1, обозначаемую $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}$.

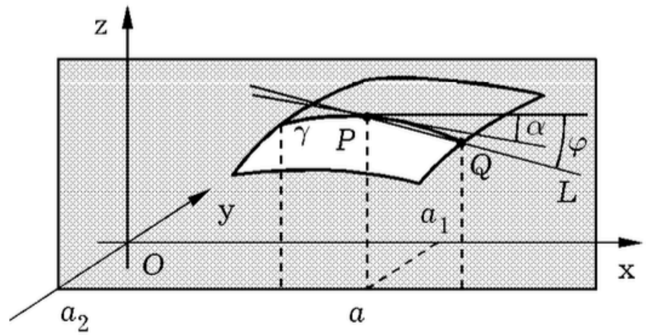

Рис. 2

Геометрическая интерпретация частных производных. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Графиком этой функции в пространстве является поверхность, которая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ описывается уравнением $z = f(x, y)$ (см. рис. 2). Рассмотрим плоскость $y = a_2$ и систему координат $O'xz$ на ней. Линия пересечения γ этой плоскости с графиком $z = f(x, y)$ представляет собой в этой системе координат график функции $z = g(x) = f(x, a_2)$. Из курса теории функций одного действительного переменного известно, что существует касательная к линии γ в точке $(a_1, g(a_1))$ тогда и только тогда, когда существует производная функция $g(x)$ в точке a_1, причем значение производной $g'(a_1)$ равно тангенсу угла α, который эта касательная образует с положительным направлением оси Ox. Но $g'(a_1) = f'_x(a_1, a_2)$. Поэтому если существует частная производная $f'_x(a_1, a_2)$, то в точке $P(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ существует касательная к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = a_2$, причем значение частной производной $f'_x(a1, a2)$ равно тангенсу угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси Ox.

Теорема 2 (1-ое необходимое условие дифференцируемости).
Если скалярная функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема во внутренней точке $x \in A$ своей области определения, то у этой функции в точке x существуют все частные производные и дифференциал функции равен $df(x) = f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + \ldots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n$

15) Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте второе необходимое условие дифференцируемости. На примере покажите, что это условие не являются достаточным.

Теорема 1 (2-ое необходимое условие дифференцируемости).
Если функция многих переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Пример. Функция двух переменных $f(x, y) = |x| + |y|$ непрерывна в точке $(0, 0)$, но в этой точке не существуют ее частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$. Поэтому данная функция не может быть дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

16) Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости и определение непрерывно дифференцируемой функции многих переменных.

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости).
Если скалярная функция $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки $a \in A$ определена и имеет частные производные по всем переменным, причем все производные непрерывны в самой точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

Определение непрерывно дифференцируемой функции.
Функцию, имеющую в каждой точке области $A \subseteq \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные по всем переменным, называют **непрерывно дифференцируемой в области** A.

17) Дайте определение частной производной и матрицы Якоби функции многих переменных. Сформулируйте свойство линейности и правило Лейбница для дифференциала и матрицы Якоби функции многих переменных.

Матрица Якоби. Для векторной функции $f : A \to \mathbb{R}^m$ во внутренней точке $a \in A$:

$$f'(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 (линейность операции дифференцирования). Для функций $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, дифференцируемых во внутренней точке $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, и произвольного действительного числа c верны равенства:

1. $(cf)'(x) = cf'(x)$;
2. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $d(cf)(x) = cdf(x)$;
4. $d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x)$.

Теорема 2 (правило Лейбница). Для скалярных функций $f, g : A \to \mathbb{R}$, дифференцируемых во внутренней точке $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, верны равенства:

1. $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$;
2. $d(fg)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (при $g(x) \neq 0$);
4. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$ (при $g(x) \neq 0$).

18) Дайте определение матрицы Якоби векторной функции. Сформулируйте теорему о дифференцировании сложной функции и цепное правило.

Теорема 3 (дифференцируемость сложной функции).
Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, функция $f : X \to Y$ дифференцируема во внутренней точке $a \in X$, а функция $g : Y \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема во внутренней точке $b = f(a) \in Y$, то сложная функция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке a и выполнено равенство:

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Композиция функций и промежуточные переменные. Композицию $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ двух функций f и g часто задают в виде $z = g(y)$, $y = f(x)$, вводя дополнительный набор переменных $y \in \mathbb{R}^m$. Переменные в наборе $y \in \mathbb{R}^m$ называют **промежуточными переменными**, подчеркивая роль, которую они играют при задании сложной функции. Указанная роль проявляется и при вычислении частных производных сложной функции. Используя координатные функции $z_i(y)$, $y_s(x)$ и матрицы Якоби

$$g' = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right), \quad f' = \left(\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right)$$

векторных функций g и f, равенство (1) матриц Якоби можно записать в координатной форме

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n.$$

19) Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных. Сформулируйте свойство инвариантности дифференциала функции многих переменных и геометрическую интерпретацию этого свойства.

Инвариантность формы первого дифференциала. Во внутренних точках области определения функции формула для дифференциала $dz = g'(y)dy$ одинакова для случая, когда y — вектор аргументов функции g, и для случая, когда y — векторная функция каких-либо других аргументов.

Геометрическая интерпретация инвариантности дифференциала.
Формула для дифференциала не меняется при переходе от координат y к координатам x. Т.е. дифференциал не зависит от выбора системы координат и характеризует собственно геометрические свойства функции, а не ее представление в координатах.

20) Дайте определение частных производных высших порядков и матрицы Гессе функции многих переменных. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных. Приведите пример функции, смешанные производные которой неравны.

Частные производные k-го порядка ($k > 1$) функции многих переменных определяют как частные производные первого порядка от некоторой частной производной $(k-1)$-го порядка этой функции.

Матрица Гессе. Для скалярной функции $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ с существующими вторыми частными производными в точке x определяют квадратную матрицу порядка n:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

которую называют **матрицей Гессе** функции f в точке x.

Теорема 1 (о равенстве смешанных производных). Пусть скалярная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные $f'_{x_i}, f'_{x_j} (i \neq j), f''_{x_i x_j}$ и $f''_{x_j x_i}$, причем смешанные производные $f''_{x_i x_j}$ и $f''_{x_j x_i}$ непрерывны в точке a по части переменных x_i и x_j. Тогда

$$f''_{x_i x_j}(a) = f''_{x_j x_i}(a).$$

21) Дайте определение дифференциалов высших порядков. Сформулируйте теорему Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и формулу конечных приращений.

Дифференциалы высших порядков. Повторяя последовательно процесс вычисления дифференциалов, приходим к **дифференциалу** функции k-го порядка, который является дифференциалом первого порядка от дифференциала $(k-1)$-го порядка функции f:

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)).$$

Теорема Тейлора. Пусть U — окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^{m+1}(U)$, а отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n)$, содержится в U. Тогда существует такое число $\theta \in (0, 1)$, что для функции $f(x)$ имеет место **формула Тейлора**:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(a + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

при $dx = \Delta x$.

Формула конечных приращений. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа порядка $m = 0$ имеет вид

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

и известна как формула конечных приращений.

22) Дайте определение дифференциалов высших порядков и линейного приближения функции. Сформулируйте теорему Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано.

Линейное приближение функции. Для функции f в окрестности точки a справедливо разложение:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + df(a) + o(|\Delta x|) = f(a) + f'(a) dx + o(|\Delta x|).$$

Отбрасывая остаточный член, получаем **линейное (первое) приближение** функции f в точке a:

$$l_f(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Формула Тейлора с остаточным членом порядка $o(|\Delta x|^m)$ имеет вид:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x)}{k!} + o(|\Delta x|^m), \quad dx = \Delta x.$$

23) Дайте определение и геометрическую интерпретацию производной по направлению. Сформулируйте теорему о производной по направлению дифференцируемой функции и формулу связи производной по направлению и градиента.

Пусть скалярная функция f определена в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ и задан вектор $\vec{v} \neq \vec{0}$. Обозначим через $\vec{v}_0$ единичный вектор: $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. **Производной функции** $f : A \to \mathbb{R}$ в точке $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ **по направлению вектора** $\vec{v}$ называют число:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{v}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a + s\vec{v}_0) - f(a)}{s},$$

если этот предел существует.

Геометрическая интерпритация: Для функции $f(x, y)$ производная в точке (a, b) по направлению $\vec{v}$ равна тангенсу угла наклона касательной к сечению графика плоскостью, параллельной $\vec{v}$ и оси Oz (см. Рис. 6).

Теорема 1. Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то для любого ненулевого вектора $\vec{\nu}$ существует производная по направлению:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{\nu}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \nu_i,$$

где $(\nu_1, \dots, \nu_n) = \frac{\vec{\nu}}{|\vec{\nu}|} = \vec{\nu}_0$.

24) Дайте определение градиента функции многих переменных. Сформулируйте его пять свойств.

Определение градиента. Пусть скалярная функция многих переменных f в точке $a \in \mathbb{R}^n$ имеет все частные производные первого порядка. Вектор $\operatorname{grad} f(a) = \left(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)\right)$, составленный из частных производных первого порядка функции f в точке a, называют **градиентом функции** f в точке a.

Теорема 2 (свойства градиента).
Если скалярная функция f определена в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в точке a, то:

1. $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{v}} = (\operatorname{grad} f(a), \vec{v}_0)$;
2. $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{v}} = \text{пр}_{\vec{v}} \operatorname{grad} f(a)$ — проекция вектора $\operatorname{grad} f(a)$ на направление вектора $\vec{v}$;
3. вектор $\operatorname{grad} f(a)$ — направление наибольшего роста функции f в точке a;
4. $\frac{\partial f(a)}{\partial (\operatorname{grad} f(a))} = |\operatorname{grad} f(a)|$ — наибольшая скорость роста функции в точке a.

25) Дайте определение касательной плоскости и нормали к поверхности. Сформулируйте теорему о их существовании и уравнениях. Дайте геометрическую интерпретацию дифференциала функции двух переменных.

Рассмотрим поверхность S в пространстве и точку $M \in S$. Если существует плоскость π, проходящая через M и содержащая все касательные в точке M к гладким кривым на S, проходящим через M, то π называют **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M (рис. 7).
Прямую L, перпендикулярную π в точке M, называют **нормалью к поверхности** S в точке M.

Теорема 3 (достаточное условие существования касательной плоскости). Пусть поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ в системе координат $Oxyz$, функция F дифференцируема в точке $M = (a, b, c)$, и $\operatorname{grad} F(a, b, c) \neq \vec{0}$. Тогда:

1. **Уравнение касательной плоскости:**

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0. \tag{1}$$

2. **Уравнение нормали:**

$$\frac{x - a}{F'_x(a, b, c)} = \frac{y - b}{F'_y(a, b, c)} = \frac{z - c}{F'_z(a, b, c)}. \tag{2}$$

26) Сформулируйте теорему о неявной функции в общем случае. Дайте ее геометрическую интерпретацию для случая одного уравнения с двумя неизвестными.

Теорема 2 (о неявной функции).
Пусть в окрестности V точки (a, b), где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, задана скалярная функция $f(x, y)$ от $n + 1$ переменных ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая условиям:
а) $f(a, b) = 0$;
б) $f \in C^1(V)$;

в) $f'_y(a,b) \neq 0$.
Тогда точка (a,b) имеет окрестность вида

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U_{\delta_x}(a), |y-b| < \delta_y\},$$

в которой уравнение $f(x,y)=0$ разрешимо относительно y, т.е.

$$\exists h \in C^1(U_{\delta_x}(a)) : \forall (x,y) \in P \, (f(x,y)=0 \iff y = h(x)).$$

При этом

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x,h(x))}{f'_y(x,h(x))}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пример. Уравнение $y^2 - x^3 = 0$ (рис. 5) в окрестности точки $(0,0)$ не разрешимо относительно переменной y, так как:

- При $x > 0$ существуют два значения y (положительное и отрицательное);
- При $x < 0$ решений нет.

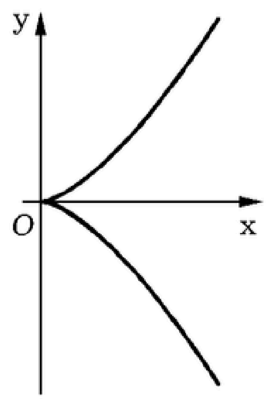

Рис. 5

Теорема 1 неприменима, так как нарушено условие $f'_y(0,0) \neq 0$. В других точках $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $y^{2/3} - x = 0$ (или $y^2 - x^3 = 0$), условия теоремы выполнены. В области $x > 0$ уравнение задает неявные функции:

- $y = x^{3/2}$ для точек выше оси абсцисс;
- $y = -x^{3/2}$ для точек ниже оси абсцисс.