Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

КОЛЛОКВИУМ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1 курс, 2 семестр

Ответы подготовили студенты группы ИУ9-22Б
Лавров Родион и Горин Владимир

Желаем вам успешной подготовки!

Москва 2025

Коллоквиум

1. Дайте определения и приведите примеры линейного (векторного) пространства, линейного подпространства, линейной оболочки. Дайте определения базиса, размерности векторного пространства. Какое векторное пространство называется бесконечномерным? Докажите утверждение о дополнении системы линейно независимых векторов до базиса. Дайте определение изоморфизма векторных пространств. Докажите, что два векторных пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда dim V = dim W.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{R}$ – произвольное поле. **Векторным** (или **линейное**) **пространством** над $\mathfrak{R}$ называется множество V элементов (именуемых векторами), удовлетворяющее следующим аксиомам

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x + 0 = x$
4. $x + (-x) = 0$
5. $1 * x = x$
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha, \beta \in R$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Примеры: Пример 1 (нульмерное пространство). Над любым полем $\mathfrak{K}$ существует нульмерное (одноэлементное) векторное пространство $V = \{0\}$ с законом умножения на скаляры $\lambda_0 = 0$.

Пример 2 (основное поле $\mathfrak{K}$ как одномерное координатное пространство). По определению $V = \mathfrak{K}$, основные операции в V совпадают с операциями в $\mathfrak{K}$. Если 1 — единица поля $\mathfrak{K}$, то можно считать, что $\mathfrak{K} = \langle 1 \rangle$ — линейная оболочка, натянутая на 1.

Более ясно: если поле $\mathfrak{K}$ — расширение своего подполя $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{K}$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathfrak{P}$. Например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ — векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пример 3 (n-мерное координатное пространство $\mathfrak{K}^n$; см. [ВА 1, гл. 2], где поле $\mathbb{R}$ можно заменить на произвольное поле $\mathfrak{K}$). При $n = 1$ получается предыдущий пример. Мы увидим вскоре (см. § 3), что всякое подпространство $U \subset \mathfrak{K}^n$ является пространством решений некоторой линейной однородной системы.

Пример 4 (пространство функций). В [ВА I, гл. 1, § 4, п. 1] было введено кольцо функций K^X, которое на самом деле является ещё векторным пространством над K (кольцо K нужно заменить на поле). Итак, X — произвольное множество, $\mathfrak{K}$ — поле, $\mathfrak{K}^X$ — множество отображений (функций) $f : X \to \mathfrak{K}$, наделённое поточечными операциями сложения и умножения на скаляры:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X;$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in F, \quad x \in X.$$

В анализе чаще всего рассматриваются вещественнозначные функции, определённые на всей прямой или на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Легко проверяется, что линейное пространство $\mathbb{R}^{(a,b)}$ содержит в качестве подпространств пространство $\mathbb{R}^{(a,b)}_{\text{cont}}$ всех непрерывных функций, пространство $\mathbb{R}^{(a,b)}_{\text{diff}}$ всех непрерывно дифференцируемых функций и т.д., поскольку все отмеченные свойства сохраняются при сложении функций и умножении их на скаляры.

Пример 5. Многочлены $f \in \mathfrak{K}[t]$ степени $\le n-1$ с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на скаляры образуют векторное пространство P_n. Следует отметить, что многочлены степени, равной фиксированному числу k, линейного пространства не составляют. Однако формы степени k от m переменных, рассматриваемые вместе с нулём, образуют векторное пространство.

Пример 6. Пусть $g(t)$ — фиксированная непрерывная на отрезке $[0,1]$ вещественная функция, отличная от нуля на некотором интервале $J \subset [0,1]$, а $V_n(g)$ — множество функций вида $f(t)g(t)$, где $f(t)$ — многочлен степени $\le n-1$. Тогда P_n^g — векторное пространство, содержащееся в $\mathbb{R}^J_{\text{cont}}$.

Пример 7. Пространство матриц.
Пример 4 (пространство функций). В [ВА I, гл. 1, § 4, п. 1] было введено кольцо функций K^X, которое на самом деле является ещё векторным пространством над K (кольцо K нужно за

Определение 2. Пусть V – векторное пространство над полем $\mathfrak{R}$, $U \subset V$ – его подмножество, являющееся аддитивной подгруппой в V и переходящее в себя при умножении на скаляры. Тогда ограничение на U операций, определённых в V, наделяет U строением векторного пространства. Оно называется **линейным подпространнством** в V

Определение 3. Линейная оболочка – это множество (пространство) всевозможных линейных комбинаций векторов.

Определение 4. Линейное пространство V, в котором существует n – линейно независимых векторов, но нет линейно независимых систем с большим числом векторов (большего ранга), называется $n-$**мерным**.

Определение 5. Пусть V – $n-$мерное векторное пространство над полем $\mathfrak{R}$. Любая система из n линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_n \in V$ называется **базисом** пространства V.

Теорема 1. Всякую систему из $s \le n$ линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_s$ пространства V можно дополнить до базиса. В частности, любой вектор $v \ne 0$ можно включить в базис.

Доказательство: Рассмотрим систему векторов $f_1, \ldots, f_s; e_1, \ldots e_n$ (1) Выбросим теперь из системы все те векторы, которые выражаются линейно через предыдущие. По условию $f_1, \ldots f_s$ л/н, поэтому ни один из них выброшен не будет, и оставшаяся система примет вид: $f_1, \ldots f_s; e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ (2). Любое нетривиально соотношение $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \ldots + \beta_t e_{i_t}$ содержало бы коэффициент $\beta_k \ne 0$ с максимальным номером k, и мы выразили бы вектор e_{i_k} через предыдущие векторы системы (2), что исключено по построению. С другой стороны, все векторы из V выражаются линейно через базис $(e_1, \ldots e_n)$, тем более через систему (1), а стало быть, и через систему (2). Таким образом л/н система (2) максимальная. Она будет базисом пространства V, а $e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ – искомым дополнением.

Определение 6. Векторные пространства V и W над полем K называются **изоморфными**, если существует биективное отображение $f : V \to W$, для которого $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ для всех $\alpha, \beta \in K$, $u, v \in V$

Теорема 2. Все векторные пространства одинаковой размерности n над K изоморфны. Более точно: все они изоморфны координатному пространству R^n
Доказательство: Пусть $(e_1, \ldots e_n)$ – базис $n-$мерного пространства V. Координаты $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, произвольного вектора $x = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n$ однозначно определены, поэтому соответствие $f : x \to (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$

между векторами из V и R^n биективно. Если $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$, то

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)e_n$$

Стало быть

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \ldots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) = \alpha(\alpha_1, \ldots \alpha_n) + \beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

что и является выражением свойств изоморфизма.

2) Дайте определения и приведите примеры линейных подпространств, суммы и пересечения подпространств, прямой суммы подпространств, внешней прямой суммы. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Грассмана.

Определение 7. Пересечение: $U_1 \cap U_2 = \{u \mid u \in U_1,\ u \in U_2\}$
Определение 8. Сумма: $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$

Определение 9. Если каждый вектор $u \in U$ может быть представлен одним и только одним способом в виде $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ ($u_i \in U_i$), то сумма $U_1 + \ldots + U_m$ называется **прямой** и обозначается $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$

Определение 10. Внешняя прямая сумма – прямая сумма двух векторных пространств над одним и тем же полем $\mathfrak{R}$, заранее никуда не вложенных в качестве подпространств.

Теорема Грассмана. Пусть U и W - конечномерные подпространства векторного пространства V. Тогда $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$

Доказательство: Пусть $dim(U) = k, \quad dim(V) = l, \quad dim(U \cap W) = m$. Так как $(U \cap W) \subset U, W$, то $m \leq k, m \leq l$. Выберем в $U \cap W$ базис $(e_1, \ldots, e_m)$ и, дополним его, с одной стороны до базиса $(e_1, \ldots e_m; a_1, \ldots, a_{k-m})$ подпространства U, а с другой стороны – до базиса $(e_1, \ldots e_m; b_1, \ldots, b_{l-m})$ подпространства W. Каждый вектор суммы $U + W$ имеет вид $u + w$, где $u \in U$, $w \in W$, а это значит, что

$$U + W = \langle e_1, \ldots e_m; a_1, \ldots, a_{k-m}; b_1, \ldots, b_{l-m} \rangle$$

Если мы докажем, что система $e_1, \ldots e_m; a_1, \ldots, a_{k-m}; b_1, \ldots, b_{l-m}$ л/з то стало быть
$dim(U + W) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m$
Предположим, что это не так, и пусть

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s e_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j = 0 \qquad (*)$$

нетривиальное линейное соотношение. Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s e_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i a_i = -\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j$$

где в левой части равенства стоит элемент из U , а в правой — элемент из W. Значит, перед нами вектор из $U \cap W$, и мы можем записать $-\sum_{j=0}^{l-m} \beta_j b_j = \sum_{s=1}^{m} \delta_s e_s$ или $\sum_{s=1}^{m} \delta_s e_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j = 0$
Но линейная зависимость базисной системы $\{e_1, \ldots, e_m; b_1, \ldots, b_{l-m}\}$ подпространства W должна быть тривиальной. В частности, $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-m} = 0$, и соотношение $(*)$, превратившееся теперь в линейную зависимость базисной системы $\{e1, \ldots, e_m; a_1, \ldots, a_{k-m}\}$ подпространства U, также должно быть тривиальным: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = \alpha_1 = \ldots = \alpha_i$ Мы пришли к желаемому противоречию.

3) Дайте определения и приведите примеры линейных подпространств, суммы и пересечения подпространств, прямой суммы подпространств. Сформулируйте и докажите критерии прямой суммы: представление нулевого вектора, теорема о нулевом пересечении, размерность прямой суммы.

Представление нулевого вектора. Сумма $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ будет прямой и в том случае, когда однозначность записи $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ имеет место лишь для нулевого вектора, т.е.

$$0 = u_1 + u_2 \ldots + u_m \implies u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_m = 0$$

Доказательство: В самом деле, если это более слабое условие выполнено, то из двух разложений

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = u = u_1' + u_2' + \ldots + u_m'$$

следовало бы $0 = (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') + \ldots + (u_m - u_m')$, где $u_i - u_i' \in V_i$. По предположению $u_i - u_i' = 0,\ 1 \le i \le m$, или $u_1 = u_1',\ u_2 = u_2',\ \ldots,\ u_m = u_m'$, т.е. выполнено свойство разложения в прямую сумму.

Теорема о нулевом пересечении. Сумма $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ является прямой тогда и только тогда, когда

$$U_i \cap (U_1 + \ldots + \widehat{U_i} + \ldots + U_m) = 0 \tag{1}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство: $\Rightarrow$ Предположим, что наша сумма прямая. Рассмотрим произвольный вектор $x \in U_i \cap (U_1 + \ldots + \widehat{U_i} + \ldots + U_m)$ где индекс i фиксирован. Тогда $x = u_1 + \ldots + \widehat{u_i} + \ldots + u_m$, и для нулевого вектора мы получим два разложения:

$$0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0 = u_1 + \ldots + u_{i-1} + (-x) + u_{i+1} + \ldots + u_m$$

Так как сумма прямая, разложения совпадают $\implies -x = 0 \implies$ условие (1) выполнено.
$\Leftarrow$ Обратно, предполагая справедливым (1), докажем единственность разложения нулевого вектора (этого, как мы знаем, достаточно, чтобы сумма была прямой). В самом деле, будем исходить из какого-нибудь разложения $0 = a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_m$. Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots, m$ имеем

$$-a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_m \in U_i \cap (U_1 + \ldots + \widehat{U_i} + \ldots + U_m) = 0.$$

Стало быть, $a_i = 0$.

Теорема о размерность прямой суммы. Сумма $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ является прямой тогда и только тогда, когда

$$\dim U = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i. \tag{2}$$

Доказательство: Проводим его индукцией по m. При $m = 2$ справедливость утверждения отмечена выше, а в случае произвольного m воспользуемся теоремами Грассмана и нулевого вектора. Именно, если сумма прямая, то прямой будет и сумма $U_1 + \cdots + \widehat{U_i} + \cdots + U_m$, а тогда

$$\dim U = \dim U_i + \dim\left(U_1 + \cdots + \widehat{U_i} + \cdots + U_m\right) - \dim\left(U_i \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_i} + \cdots + U_m\right)\right) =$$

$$= \dim U_i + \left(\dim U_1 + \cdots + \dim \widehat{U_i} + \cdots + \dim U_m\right) - 0 = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i.$$

Обратно, если формула (2) верна, то объединение базисов подпространств U_i будет базисом в U, и, значит, сумма прямая.

4) Дайте определение факторпространства линейного пространства по подпространству, обоснуйте корректность введённых операций. Докажите утверждение о размерности факторпространства.

Определение 11. Факторпространства $V = V/L$ – пространство всех смежных классов пространства V по подпространству L.

Утверждение о размерности факторпространства: Пусть L — произвольное подпространство в V. Тогда: $\dim V/L = \dim V - \dim L$. Другими словами, $\dim V/L = \operatorname{codim}_V L$.
Доказательство: По теореме 9 найдётся такое подпространство $M \subset V$, что $V = L \oplus M$, причём $\dim M = \dim V - \dim L$. По теореме 10 это подпространство M изоморфно фактор-пространству V/L.

5) Дайте определения и приведите примеры линейных функций и сопряженного пространства. Как изменяются значения линейной функции на базисных векторах при переходе от одного базиса к другому? Дайте определение и докажите теорему о существовании двойственного базиса.

Определение 11. Отображение $f: V \to \mathfrak{R}$, обладающее свойством $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \quad x, y \in V$, называется **линейной функцией** на V.

Определение 12. Относительно введённых операций сложения и умножения на скаляры линейные функции составляют векторное пространство $V^* = \zeta(V, F)$, сопряжённое к V.

Изменение значений линейной функции на базисных векторах. Пусть
$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = V = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle, \quad e'_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{nj}e_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$
— формулы перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Если теперь

$$\lambda_1\beta_1 + \ldots + \lambda_n\beta_n = f(v) = \lambda'_1\beta'_1 + \ldots + \lambda'_n\beta'_n$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ — координаты вектора $v \in V$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$ соответственно, то, как легко видеть,

$$\beta'_j = f(e'_j) = f(a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{nj}e_n) = a_{1j}f(e_1) + a_{2j}f(e_2) + \ldots + a_{nj}f(e_n) =$$
$$= a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{nj}\beta_n$$

Теорема о существовании двойственного базиса. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathfrak{R}$. Тогда двойственное пространство V^* также имеет размерность n. Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V, а $e^1, \ldots, e^n$ – линейные функции, для которых

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = j \\ 0, & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}$$

то $(e^1, \ldots, e^n)$ – базис в V^*.
Доказательство: При заданном базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V имеется взаимно однозначное соответствие $\Phi: f \mapsto (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ между линейными функциями и системами из n скаляров. Эти системы мы отождествляем с векторами координатного пространства $\mathfrak{R}^n$ и замечаем, что если
$f \mapsto (\beta_1, \ldots, \beta_n), g \mapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, то
$f + g \mapsto (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n), \quad \lambda f \mapsto (\lambda\beta_1, \ldots, \lambda\beta_n)$. Таким образом, Φ — изоморфизм векторных пространств V^* и $\mathfrak{R}^n$, в частности $\dim V^* = \dim \mathfrak{R}^n = n$. Задав скаляры $\beta_j = 0$ для $j \neq i, \beta_i = 1$, и положив

$e^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n$, мы определим линейную функцию

$$e^i \in V^*: \quad e^i\left(\sum \lambda_j e_j\right) = \sum \lambda_j e^i(e_j) = \sum \lambda_j \beta_j = \lambda_i$$

Функции $e^1, \ldots, e^n$, очевидно, линейно независимы, поскольку независимы соответствующие им векторы-строки $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ в $\mathfrak{R}^n$.

6) Дайте определения сопряженного пространства и двойственного базиса. Сформулируйте и докажите теорему о существовании естественного изоморфизма между пространствами V и V^{**}

Определение 13. Базис $(e^1, \ldots, e^n)$ пространства V^*, указанный в формулировке теоремы 1, называется **двойственным** для данного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V.

Теорема о естественном изоморфизме. Существует канонический изоморфизм $\varepsilon : V \to V^{**}$, определённый формулами

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x(f) = f(x)$$

Здесь $x \in V$, $f \in V^*$, $\varepsilon_x \in V^{**}$.
Доказательство. Линейность ε проверяется непосредственно. Действительно,
$\varepsilon_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha\varepsilon_x(f) + \beta\varepsilon_y(f) = (\alpha\varepsilon_x + \beta\varepsilon_y)(f)$
для всякой линейной функции $f : V \to F$. Отсюда $\varepsilon_{\alpha x+\beta y} = \alpha\varepsilon_x + \beta\varepsilon_y$, т. е. $\varepsilon(\alpha x + \beta y) = \alpha\varepsilon(x) + \beta\varepsilon(y)$. Чтобы убедиться в биективности ε, выберем в V и V^* двойственные базисы $V = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$, $V^* = \langle e^1, \ldots, e^n\rangle$. Тогда

$$\varepsilon_{e_j}(e^i) = e^i(e_j) = \delta_{ij}$$

Апеллируя к доказательству теоремы 1, мы видим, что справедливо равенство $V^{**} = \langle \varepsilon_{e_1}, \varepsilon_{e_2}, \ldots, \varepsilon_{e_n}\rangle$, т. е. (ε_{e_j}) — базис в V^{**}, двойственный к (e^i). Сюръективность и инъективность ε теперь очевидны. Каноничность изоморфизма ε заключена в его определении.

7) Дайте определение и приведите примеры евклидовых пространств. Сформулируйте и докажите неравенство Коши — Буняковского, приведите примеры его частных случаев. Дайте определение углов и длин в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите неравенство треугольника, приведите примеры его частных случаев.

Определение 14. Евклидовым векторным пространством называется вещественное векторное пространство V с выделенной на нём симметричной билинейной формой $(x, y) \mapsto (x|y)$ такой, что соответствующая квадратичная форма $x \mapsto (x|x)$ (или просто $(x|x)$) положительно определена.

Примеры: Пример 1. Пусть $V = P_n$ — вещественное векторное пространство многочленов степени $\leq n-1$. Сопоставление любым двум векторам (многочленам) $f, g \in V$ числа

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

($[a, b]$ — фиксированный отрезок на $\mathbb{R}$) также задаёт скалярное произведение на V, как это легко усмотреть из свойств определённого интеграла. Было бы неудобно выражать то же самое скалярное произведение (2) в терминах "естественного" базиса $1, t, \ldots, t^{n-1}$. Следует заметить, что соотношением (2) задаётся скалярное произведение и на бесконечномерном пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций (на отрезке

$[a, b]$). Соответствующее бесконечномерное евклидово векторное пространство обозначается символом $C_2(a, b)$.

Пример 2. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из всевозможных наборов вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Неравенство Коши–Буняковского. Каковы бы ни были векторы x, y евклидова векторного пространства V, справедливо неравенство

$$|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| \tag{4}$$

Доказательство. Из положительной определённости скалярного произведения (свойство iii)) следует, что

$$\lambda^2(x|x) - 2\lambda(x|y) + (y|y) = (\lambda x - y|\lambda x - y) \geq 0 \tag{5}$$

где λ — произвольное вещественное число. При фиксированных векторах $x, y \in V$ мы рассматриваем левую часть (5) как квадратный трёхчлен $f(\lambda)$. Так как $f(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то для его дискриминанта $D(f) = (2(x|y))^2 - 4(x|x) \cdot (y|y)$ должно выполняться неравенство $D(f) \leq 0$, откуда

$$(x|y)^2 \leq (x|x) \cdot (y|y) \tag{6}$$

Взяв положительный квадратный корень из обеих частей неравенства (6) и воспользовавшись определением длины вектора, мы приходим к неравенству (4), в левой части которого стоит абсолютная величина скаляра $(x|y)$.

Частный случай: Если $|x|y| = \|x\|\|y\|$, то $D(f) = 0$, т.е. трёхчлен f имеет один вещественный корень λ_0. Согласно (5) имеем $(\lambda_0 x - y|\lambda_0 x - y) = 0$, откуда $y = \lambda_0 x$. Следовательно, лишь для коллинеарных (пропорциональных) векторов скалярное произведение по абсолютной величине равно произведению их длин.

Определение 15. Длиной (или нормой) $||v||$ **любого вектора** $v \in V$ называется неотрицательное вещественное число $||v|| = \sqrt{(v|v)}$

Определение 16. Неравенство Коши—Буняковского означает, что $-1 \leq \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$. Стало быть, отношение $(x|y)/(\|x\| \cdot \|y\|)$ является косинусом вполне определённого угла φ:

$$\cos \varphi = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Именно этот угол φ и считается, по определению, **углом между векторами** x и y.

Неравенство треугольника. Длины векторов x, y и $x + y$ связаны неравенством

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{10}$$

Доказательство. Действительно, используя неравенство (4), получаем

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x|y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

8) Дайте определение линейной независимости векторов, ортогональности векторов. Докажите линейную независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Как

вычисляется скалярное произведение в произвольном базисе? в ортонормированном базисе? Докажите теорему о дополнении ортонормированной системы векторов до ортонормированного базиса. Опишите процесс ортогонализации Грама — Шмидта и получение QR-разложения матрицы. !!!!

Определение 17. Векторы **x** и **y** называются *ортогональными* (обозначение $x \perp y$), когда угол между ними равен $\pi/2$, т.е. $(x|y) = 0$.

Теорема 4. Любые ненулевые взаимно ортогональные векторы $e_1, \ldots, e_m \in V$ линейно независимы. Если при этом $\dim V = n$ и $m = n$, то векторы e_i образуют ортогональный базис в V.
Доказательство. Второе утверждение вытекает (по определению размерности) из первого, которое мы сейчас и докажем. Предположим, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m = 0$ — нетривиальное соотношение между векторами $e_1, \ldots, e_m$. Пусть, скажем, $\alpha_k \neq 0$. Умножив скалярно на e_k обе части нашего линейного соотношения, получим

$$0 = (0|e_k) = (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m|e_k) = \alpha_1(e_1|e_k) + \ldots + \alpha_k(e_k|e_k) + \ldots + \alpha_m(e_m|e_k) = \alpha_k(e_k|e_k)$$

поскольку по условию $(e_i|e_k) = 0$ при $i \neq k$. С другой стороны, $(e_k|e_k) \neq 0$, и мы приходим к заключению, что $\alpha_k = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 6 (процесс ортогонализации). Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — система из m линейно независимых векторов евклидова векторного пространства V. Тогда существует ортонормированная система векторов $e'_1, \ldots, e'_m$ такая, что линейные оболочки $L_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ и $L'_i = \langle e'_1, \ldots, e'_i \rangle$ совпадают при $i = 1, 2, \ldots, m$; $m \leq n$.

Доказательство. Возьмём в качестве e'_1 вектор λe_1, где $\lambda = ||e_1||^{-1}$. Так как $L_1 = \langle e'_1 \rangle = L'_1$, то это даёт утверждение теоремы при $i = 1$. Пусть уже построена нужная система $e'_1, \ldots, e'_k$;
$1 \leq k < m \, (L_i = L'_i;\ i = 1, \ldots, k)$. Покажем, как найти вектор e'_{k+1}. Вектор e_{k+1} не может содержаться в $L'_k = L_k$ (иначе e_{k+1} выражался бы линейно через $e_1, \ldots, e_k$), поэтому $L_{k+1} = \langle e_1, \ldots, e_k, v \rangle$, где

$$v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e'_i$$

с произвольными скалярами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Постараемся подобрать λ_i так, чтобы вектор v был ортогонален к L'_k. Для этого необходимо и достаточно выполнения условий

$$0 = (v|e'_j) = (e_{k+1}|e'_j) - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e'_i | e'_j \right) = (e_{k+1}|e'_j) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e'_i|e'_j) = (e_{k+1}|e'_j) - \lambda_j,\ j = 1, \ldots, k$$

Таким образом, при $\lambda_j = (e_{k+1}|e'_j)$ получаем вектор $v \neq 0$, ортогональный к L'_k. Полагая $e'_{k+1} = \mu v$ с $\mu = ||v||^{-1}$, мы придём к ортонормированной системе $e'_1, \ldots, e'_{k+1}$, причём $L_{k+1} = L'_{k+1}$. В результате получим искомую систему $e'_1, \ldots, e'_m$.

Теоремы 5. Всякая ортонормированная система векторов евклидова векторного пространства V дополняема до ортонормированного базиса в V.
Доказательство. Согласно теореме 3 из §2 гл. 1, имеющуюся по условию ортонормированную систему $e_1, \ldots, e_m$ можно дополнить до базиса $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$. К этому базису применим процесс ортогонализации, описанный в теореме 6, не затрагивая при этом первые m векторов.

Пример QR-разложения

Рассмотрим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Через a_1, a_2, a_3 обозначим векторы-столбцы заданной матрицы A. Получаем следующий набор векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Далее, применяем алгоритм ортогонализации Грама — Шмидта и нормируем полученные вектора, получаем следующий набор:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{26}}{26} \\ \frac{3\sqrt{26}}{26} \\ \frac{4\sqrt{26}}{26} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{37\sqrt{3614}}{3614} \\ \frac{33\sqrt{3614}}{3614} \\ \frac{34\sqrt{3614}}{3614} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{139}}{139} \\ -\frac{7\sqrt{139}}{139} \\ \frac{3\sqrt{139}}{139} \end{pmatrix}$$

Из полученных векторов e_1, e_2, e_3 составляем по столбцам матрицу Q из разложения:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{26}}{26} & \frac{37\sqrt{3614}}{3614} & \frac{9\sqrt{139}}{139} \\ \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{33\sqrt{3614}}{3614} & -\frac{7\sqrt{139}}{139} \\ \frac{4\sqrt{26}}{26} & \frac{34\sqrt{3614}}{3614} & \frac{3\sqrt{139}}{139} \end{pmatrix}$$

Полученная матрица является ортогональной, это означает, что $Q^{-1} = Q^T$.

Найдем матрицу R из выражения $R = Q^{-1}A = Q^T A$:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{26} & 3\sqrt{\frac{2}{13}} + \frac{9}{\sqrt{26}} & 11\sqrt{\frac{2}{13}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3614}{26}} & \frac{56}{\sqrt{3614}} \\ 0 & 0 & \frac{31}{\sqrt{139}} \end{pmatrix}$$

Получили разложение $A = QR$.

9) Дайте определения ортонормированного базиса и ортогональной матрицы. Сформулируйте и докажите утверждение об ортогональных матрицах как матрицах перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Сформулируйте и докажите групповые свойства ортогональных матриц. !!!!

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{15}$$

$$A^t \cdot A = E \tag{16}$$

Определение 18. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$, удовлетворяющая одному из эквивалентных условий (15), (15'), (16), (16'), называется *ортогональной*. Множество всех ортогональных матриц порядка n обозначается символом $O(n)$.

Непосредственно проверяется (и мы к этому ещё вернёмся), что $O(n)$ — группа. Она называется ортогональной группой. Если теперь A — произвольная ортогональная матрица, то система векторов $(e'_1, \ldots, e'_n)$, полученная из ортонормированного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ по формулам (14), будет также ортонормированным базисом.

Доказательство:

1. Матрица перехода между ортонормированными базисами ортогональна

Пусть даны два ортонормированных базиса в R^n (или в унитарном пространстве C^n):

- Старый базис: $e_1, e_2, \ldots, e_n$
- Новый базис: $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$

Матрица перехода A определяется так:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как оба базиса ортонормированы, скалярные произведения удовлетворяют условиям:

$$(e'_i, e'_j) = \delta_{ij}, \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} = 1 при i=j, 0 при i!=j.

Выразим скалярное произведение новых базисных векторов через матрицу A:

$$(e'_i, e'_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l \right) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}.$$

Так как базис e' ортонормирован, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Это означает, что $A^T A = E$, то есть матрица A ортогональна.

2. Всякая ортогональная матрица является матрицей перехода между ортонормированными базисами

Обратно, пусть A — произвольная ортогональная матрица ($A^T A = E$). Построим новый базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по правилу:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Проверим, что этот базис ортонормирован:

$$(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

так как $A^T A = E$.

Таким образом, любая ортогональная матрица задаёт переход от одного ортонормированного базиса к другому.

Формулировка групповых свойств

Множество $O(n)$ всех ортогональных матриц удовлетворяет следующим аксиомам группы:

1. **Замкнутость относительно умножения**:
   Если $A, B \in O(n)$, то $AB \in O(n)$.
2. **Ассоциативность**:
   Для любых $A, B, C \in O(n)$ выполняется $(AB)C = A(BC)$.
3. **Наличие нейтрального элемента** (единичной матрицы):
   Существует $I \in O(n)$ такая, что $AI = IA = A$ для любой $A \in O(n)$.
4. **Наличие обратного элемента**:
   Для любой $A \in O(n)$ существует $A^{-1} \in O(n)$ такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Доказательства групповых свойств

(1) Замкнутость относительно умножения

Пусть $A, B \in O(n)$, то есть $A^T A = I$ и $B^T B = I$.

Покажем, что AB тоже ортогональна:

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T(A^T A)B = B^T IB = B^T B = I.$$

Следовательно, $AB \in O(n)$.

(2) Ассоциативность

Ассоциативность следует из общего свойства матричного умножения:

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) Наличие нейтрального элемента

Единичная матрица I ортогональна, так как $I^T I = I$.

Для любой $A \in O(n)$ выполняется:

$$AI = IA = A.$$

(4) Наличие обратного элемента

Для $A \in O(n)$ обратная матрица A^{-1} существует и равна A^T, так как:

$$A^T A = AA^T = I.$$

Кроме того, A^T тоже ортогональна:

$$(A^T)^T A^T = AA^T = I.$$

Значит, $A^{-1} = A^T \in O(n)$.

10) Дайте определения ортогонального дополнения к подпространству и прямой суммы подпространств. Докажите теорему о том, что $V = U \oplus U^\perp$ и $U^{\perp\perp} = U$.

Определение 19. Множество всех векторов $x \in V$, ортогональных подпространству $U \subset V$, образует подпространство $U^\perp$ (ввиду линейности условия $x \perp U$), которое называется **ортогональным дополнением** подпространства U.

Теорема 7. Пусть L — подпространство конечномерного евклидова векторного пространства V, $L^\perp$ — его ортогональное дополнение. Тогда

$$V = L \oplus L^\perp, \quad (L^\perp)^\perp = L \tag{11}$$

Доказательство. Возьмём в L какой-нибудь ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_m)$. Пусть $w \in V$. Рассмотрим вектор

$$v = w - \sum_{i=1}^{m}(w|e_i)e_i$$

Так как $(v|e_j) = (w|e_j) - \sum_{i=1}^{m}(w|e_i)(e_i|e_j) = (w|e_j) - (w|e_j) \cdot 1 = 0; j = 1, 2, \ldots, m$, то вектор v ортогонален подпространству L. Это значит, что $w = u + v$, где $u = \sum_{i=1}^{m}(w|e_i)e_i \in L$ и $v \in L^\perp$. Итак, $V = L + L^\perp$. Пусть $x \in L \cap L^\perp$. Так как $x \in L$, то $(x|L^\perp) = 0$. Но, в частности, $L^\perp \ni x$, так что $(x|x) = 0$, откуда получаем $x = 0$. Следовательно, $V = L \oplus L^\perp$ — прямая сумма. Из разложения $w = u + v$ ($u \in L, v \in L^\perp$) имеем $(w|u) = (u + v|u) = (u|u) + (v|u) = ||u||^2$, аналогично, $(w|v) = ||v||^2$. Если теперь $w \in (L^\perp)^\perp$, то $(w|v) = 0$ и $||v||^2 = 0$, откуда $w = u \in L$. Стало быть, $(L^\perp)^\perp \subseteq L$. Так как, далее, $(L^\perp)^\perp$ — подпространство, ортогональное к $L^\perp$, а $(L|L^\perp) = 0$, то $L \subseteq (L^\perp)^\perp$. Следовательно, $(L^\perp)^\perp = L$.

11) Дайте определения сопряженного пространства, евклидова пространства, изоморфизма линейных пространств. Сформулируйте и докажите теоремы об изоморфизме евклидовых пространств одинаковой размерности и об изоморфизме линейных пространств V и V^* в случае евклидовых пространств.

Теорема 8. Любые евклидовы векторные пространства V, V' одинаковой конечной размерности изоморфны. Это значит, что существует изоморфное отображение $f : V \to V'$ векторных пространств (см. определение в п. 3 из § 2 гл. 1), сохраняющее скалярное произведение, т.е.

$$(x|y) = (f(x)|f(y))'$$

(12)

$((*|*)'$ — скалярное произведение на V').

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V и какой-то ортонормированный базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$ в V'. Соответствие

$$f : x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto x' = x_1e'_1 + \ldots + x_ne'_n,$$

очевидно, биективно. Как и в случае теоремы 5 из п. 3 § 2 гл. 1, непосредственно проверяется, что f — изоморфизм векторных пространств. Так как в V и в V' скалярные произведения $(x|y)$, $(x'|y')'$ вычисляются по одной и той же формуле (1) (в силу выбора базисов), то условие (12) изоморфизма евклидовых векторных пространств также выполнено. □

Теорема 9. Отображение $\Phi : \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}|*) = \Phi_\mathbf{v}$ есть естественный изоморфизм векторных пространств V и V^* . При этом изоморфизме ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ евклидова векторного пространства V отождествляется с дуальным к нему базисом $f_1, \ldots, f_n$ пространства V^*.

Доказательство. Так как скалярное произведение $(\mathbf{v}|\mathbf{x})$ линейно по $\mathbf{v}$, то отображение Φ линейно:

$$\Phi_{(\alpha u + \beta v)} = (\alpha u + \beta v|*) = \alpha(u|*) + \beta(v|*) = \alpha\Phi_u + \beta\Phi_v.$$

Далее, Ker $\Phi = 0$, поскольку $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\Phi \implies (\mathbf{v}|\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ и, в частности, $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0 \mapsto \mathbf{v} = 0$. Как всякий элемент пространства V^*, линейная форма $(\mathbf{v}|*)$ линейно выражается через двойственные к $(\mathbf{e}_i)$ базисные векторы $e^1, \ldots, e^n \in V^*$. В частности,

$$\Phi_{\mathbf{e}_i} = (\mathbf{e}_i|*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — ортонормированный базис, то

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e^k(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

откуда

$$(\mathbf{e}_i|*) = e^i \tag{13}$$

Это даёт нам сюръективность, а следовательно, и биективность Φ. Вместе с тем соотношением (13) устанавливается справедливость заключительного утверждения теоремы.

12) Дайте определение и приведите примеры билинейных функций. Что называется матрицей билинейной функции в некотором базисе?Сформулируйте и докажите утверждение о связи матриц билинейной функции в разных базисах. Что называется рангом билинейной функции? Докажите, что ранг билинейной функции не зависит от выбора базиса.

Определение 20. В соответствии с общим определением, **билинейная форма** f на векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ характеризуется свойствами:

$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w), \quad f(w, \alpha u + \beta v) = \alpha f(w, u) + \beta f(w, v) \tag{2}$$

для всех $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Определение 21. Матрица $F = (f_{ij})$, где $f_{ij} = f(e_i, e_j)$, называется **матрицей билинейной формы** f на V в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Теорема 1. Матрицы F и F' билинейной формы f на V в базисах (e_i) и (e'_i) связаны соотношением

$$F' = A^t \cdot F \cdot A, \tag{5}$$

где A — матрица перехода от (e_i) к (e'_i).
Доказательство. Аксиоматическое определение билинейной формы f свойствами (2) свободно от выбора какого-либо базиса в V. Чтобы матричная запись f имела реальную ценность, нужно соответствие $f \mapsto F$ дополнить правилом изменения матрицы F при переходе к новому базису. Пусть наряду с $(e_1, \ldots, e_n)$ в V задан еще один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$ вместе с матрицей перехода $A = (a_{ij})$:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, n$$

Если $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$, то координатные столбцы X и X' связаны соотношением $X = AX'$. Пусть теперь $F = (f_{ij})$ — матрица билинейной формы f в базисе (e_i), а $F' = (f'_{ij})$ — матрица той же формы f в базисе (e'_i), т.е. $f_{ij} = f(e_i, e_j)$ и $f'_{ij} = f(e'_i, e'_j)$. Так как ${}^t(AX') =^t X' \cdot^t A$ и так как значение $f(x, y)$ не зависит от выбора базиса, то

$${}^tX'F'Y' = f(x, y) =^t XFY =^t (AX')F(AY') =^t X' \cdot^t A \cdot F \cdot A \cdot Y'$$

Сравнивая левую и правую части, приходим к заключению.

Определение 22. Матрицы F и $F' = {}^tAFA$ с $\det A \neq 0$ называются *конгруэнтными*. *Рангом* билинейной формы f называется ранг соответствующей ей в каком-нибудь базисе (e_i) матрицы F.

Следствие. *Ранг* $\mathrm{rank} f$ *билинейной формы* f *является её инвариантом, не зависящим от выбора базиса.*
Доказательство. Обозначим через L_f множество тех $x \in V$, для которых $f(x, y) = 0$ при всех $y \in V$. Короче: $f(x, V) = 0$. Очевидная проверка показывает, что L_f — подпространство в V. Его называют *левым радикалом* или *ядром* формы f. Ясно, что $\dim L_f$ — величина, зависящая только от f. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V. Условие $x \in L_f$ равносильно тому, что

$$f(x, e_1) = 0, \quad \ldots, \quad f(x, e_n) = 0$$

Эта система уравнений определяется линейными функциями $x \mapsto f_j(x) = f(x, e_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Координатами функций f_j являются скаляры $f_j(e_i)$, т.е. коэффициенты $f(e_i, e_j) = f_{ij}$, i-й строки матрицы F. Стало быть, ранг системы линейных форм $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ совпадает с рангом матрицы $F = (f_{ij})$, и если он равен r, то по теореме 7 из [BA I, гл. 2, § 3] имеет место равенство $\dim L_f = n - r$. Другими словами, $r = \dim V - \dim L_f$ — величина, не зависящая от выбора базиса.

13) Дайте определение и приведите примеры симметрических и кососимметрических билинейных функций, симметрических и кососимметрических матриц. Сформулируйте и докажите теорему о представлении пространства всех билинейных функций в виде прямой суммы подпространств симметрических и кососимметрических билинейных функций.

Определение 23. билинейная форма $f : V \times V \to \mathbb{R}$ называется **симметричной**, когда $f(x, y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in V$, и **кососимметричной**, когда $f(x, y) = -f(y, x)$.

Определение 24. матрица $A = (a_{ij})$ называется **симметричной**, когда $A^t = A$ для всех, и **кососимметричной**, когда $A^t = -A$.

Теорема 2. Если $\mathrm{char}\mathfrak{K} \neq 2$, то пространство $L_2(V, \mathfrak{K})$ всех билинейных форм является прямой суммой

$$L_2(V, \mathfrak{K}) = L_2^+(V, \mathfrak{K}) \oplus L_2^-(V, \mathfrak{K})$$

подпространств $L_2^+(V, \mathfrak{K})$, $L_2^-(V, \mathfrak{K})$ симметричных и кососимметричных билинейных форм.
Доказательство. Если $f \in L_2^+(V, \mathfrak{K}) \cap L_2^-(V, \mathfrak{K})$, то

$$f(x, y) = f(y, x) = -f(x, y) \implies 2f(x, y) = 0 \implies f(x, y) = 0$$

(поскольку по условию $\mathrm{char}\mathfrak{K} \neq 2$), откуда $f = 0$. Следовательно, сумма $L_2^+ + L_2^-$ прямая. С другой стороны, соотношение $f(x, y) = \frac{1}{2}\{f(x, y) + f(y, x)\} + \frac{1}{2}\{f(x, y) - f(y, x)\}$
или соответствующее матричное соотношение $F = \frac{1}{2}(F +^t F) + \frac{1}{2}(F -^t F)$ показывает, что всякая билинейная форма f представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм.

14) Дайте определения квадратичной формы и билинейной функции, полярной к квадратичной форме. Докажите, что любая квадратичная форма однозначно определяется по своей полярной форме. Дайте определение матрицы квадратичной формы в заданном базисе. Что называется каноническим видом квадратичной формы? Сформулируйте и докажите теорему о существовании канонического базиса квадратичной формы.

Определение 25. Квадратичной формой на конечномерном векторном пространстве V над $\mathfrak{K}$ называется функция $q : V \to \mathfrak{K}$, обладающая двумя свойствами:

1. $q(-\mathbf{v}) = q(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$;
2. отображение $f : V \times V \to \mathfrak{K}$, определённое формулой

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\} \tag{6}$$

   является билинейной формой на V (очевидно, симметричной). Её ранг называется также рангом q: $\operatorname{rank} q = \operatorname{rank} f$.

Определение 26. Говорят, что симметричная билинейная форма f, определённая формулой (1), получается из q поляризацией или что f — билинейная форма, *полярная* к квадратичной форме q.

Теорема 3. Каждая квадратичная форма q однозначно восстанавливается по своей полярной форме f; другими словами, $q = q_f$.

Доказательство. Положим в (6) $y = -x$: $-f(x, x) = \frac{1}{2}\{q(0) - q(x) - q(-x)\}$,отсюда $q(x) = f(x, x) + \frac{1}{2}q(0)$. Так как f — билинейная форма, то $f(0, 0) = 0$. Поэтому при $x = 0$ имеем $q(0) = \frac{1}{2}q(0)$, т.е. $q(0) = 0$. Значит, $q(x) = f(x, x)$.

Определение 27 Матрицей квадратичной формы $q = q_f$ относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V называется матрица F билинейной формы f, полярной к q. Стало быть, $F = (f_{ij})$, где

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\{q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 28. Говорят, что квадратичная форма q имеет в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V канонический (или диагональный) вид, если для каждого вектора $x = \sum x_i e_i \in V$ значение $q(x)$ вычисляется по формуле: $q(x) = \sum_i f_{ii} x_i^2$

Теорема 4. Для всякой симметричной билинейной формы f на V существует канонический базис.
Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому можно использовать индукцию по n. Если $f(x, y) = 0$ для всех $x, y \in V$ (т.е. $f = 0$), то теорема очевидна: любой базис годится. Если же $f \neq 0$, то отлична от нуля и соответствующая квадратичная форма (равенства (6), (8) или теорема 3). Пусть e_1 — такой вектор, что $f(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. Тогда линейная функция $f_1 : x \mapsto f(x, e_1)$ отлична от нуля ($f_1(e_1) \neq 0$). По теореме 4 из § 3 линейное подпространство

$$L = \mathrm{Ker} f_1 = \{x \in V \mid f_1(x) = 0\}$$

имеет размерность $n - 1$, т.е. является гиперплоскостью. По предположению индукции L обладает базисом $(e_2, \dots, e_n)$, в котором матрица формы f, ограниченной на L, диагональна, т.е.

$$f(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, n.$$

Так как по построению $f(e_i, e_1) = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$, то мы получаем свойства $f(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, характеризующие канонический базис (e_k), если только система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима. Предположив противное, мы в любом соотношении $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ имели бы коэффициент $\alpha_1 \neq 0$, поскольку $(e_2, \dots, e_n)$ — базис в L. Но в таком случае $e_1 = \sum_{i>1} \beta_i e_i$ и

$$0 \neq f_1(e_1) = f_1\left(\sum_{i>1} \beta_i e_i\right) = \sum_{i>1} \beta_i f_1(e_i) = 0$$

— противоречие, доказывающее теорему.

Следствие 1. Пусть на векторном пространстве V размерности n над полем $\mathfrak{K}$ задана квадратичная форма q ранга $r \leq n$. Тогда в V существует базис (e_i), в котором q принимает канонический вид:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 \tag{10}$$

15) Дайте определения квадратичной формы и билинейной функции, полярной к квадратичной форме, приведите примеры. Опишите алгоритм Лагранжа. Сформулируйте теорему о формуле Якоби.

Алгоритм Лагранжа. Обозначим за B матрицу квадратичной формы. Пусть, например, $b_{11} \neq 0$. Тогда рассматриваем все слагаемые, содержащие x_1:

$$\sigma_1 = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{1n}x_1x_n + r(x_2, \ldots, x_n)$$

и выделяем полный квадрат в σ_1:

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 - \gamma + r(x_2, \ldots, x_n).$$

Обозначаем $y_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n$. Тогда квадратичная форма примет вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}}(y_1)^2 - \gamma + +r(x_2, \ldots, x_n),$$

причем γ не содержит слагаемых с x_1. В этом выражении тоже выделяем полный квадрат и повторяем процедуру до тех пор, пока не придем к каноническому виду. При этом переменные x_i последовательно исключаются из квадратичной формы. Если $b_{11} = 0$, но $b_{kk} \neq 0$ для некоторого k, можно рассмотреть слагаемые, содержащие x_k. При этом переменные квадратичной формы последовательно исключаются из рассмотрения. Если на очередном шаге получается квадратичная форма, которая не содержит полных квадратов, но содержит слагаемое x_jx_k для некоторых j, k, можно сделать замену

$$x_j = x_j' + x_k', \quad x_k = x_j' - x_k',$$

после чего квадратичная форма будет содержать квадраты некоторых переменных.

Метод Якоби. Пусть q — квадратичная форма на V с матрицей F, все главные миноры (13) которой отличны от нуля. Тогда существует базис $(e_1', \ldots, e_n')$ пространства V, в котором $q(x)$ принимает канонический вид:

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2 \tag{14}$$

16) Дайте определение квадратичной формы. Сформулируйте и докажите утверждения о нормальных видах квадратичной формы над полем комплексных и действительных чисел. Что называется индексами инерции? Сформулируйте и докажите закон инерции. Дайте определения невырожденной квадратичной формы, положительно (отрицательно) определённой квадратичной формы. Сформулируйте критерий Сильвестра.

Определение 29. Ранг вещественной квадратичной формы называется также её *индексом инерции*, число s — **положительным индексом инерции**, число $r - s$ — **отрицательным индексом инерции**. Под **сигнатурой** формы понимают либо пару $(s, r - s)$, либо разность $2s - r$ между числом положительных и числом отрицательных квадратов.

Закон инерции. *Пусть q — квадратичная форма на n-мерном векторном пространстве V над R. Тогда целые числа r и $s, s \leq r \leq n$, входящие в нормальный вид (11), зависят только от q.*

Доказательство. Инвариантность r нам известна, так что нужно лишь убедиться в инвариантности (независимости от выбора канонического базиса) числа s. Предположим, что в каком-то другом базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$ форма q имеет нормальный вид

$$q(x) = (x'_1)^2 + \ldots + (x'_t)^2 - (x_{t+1})^2 - \ldots - (x'_r)^2 \tag{11'}$$

с t положительными членами ($x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$). При $t \neq s$ без ограничения общности считаем $t < s$. Рассмотрим в V подпространства

$$L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle_R, \quad L' = \langle e_{t+1}, \ldots, e'_n \rangle_R.$$

Так как $\dim(L + L') \leq \dim V \leq n$, то по теореме 6 из § 2 имеем

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq s + (n - t) - n = s - t > 0.$$

Стало быть, существует ненулевой вектор $a \in (L \cap L')$:

$$0 \neq a = a_1 e_1 + \ldots + a_s e_s = a'_{t+1} e_{t+1} + \ldots + a'_n e'_n$$

Согласно (11) $q(a) = a_1^2 + \ldots + a_s^2 > 0$. В то же время согласно (11') $q(a) = -(a'_{t+1})^2 - \ldots - (a'_r)^2 \leq 0$ (возможно, что $r < n, a'_{t+1} = \ldots = a'_r = 0$). Полученное противоречие устраняется только в случае $s = t$.

Определение 30. Невырожденная квадратичная форма $q : V \to \mathbb{R}$ называется *положительно* (соответственно *отрицательно*) *определённой* или просто *положительной* (отрицательной), когда $q(x) > 0$ ($q(x) < 0$) для любого вектора $x \neq 0$. Форма q называется *положительно полуопределённой* (или *неотрицательной*), если $q(x) \geq 0$ для всех $x \in V$. Наконец, форма q *неопределённая*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 8 (критерий Сильвестра). Квадратичная форма q на n-мерном вещественном векторном пространстве V в том и только том случае является положительно определённой, когда все главные миноры Δ_1, ..., Δ_n её матрицы $F = (f_{ij})$ положительны.

17) Дайте определение линейного отображения и приведите примеры. Что называется ядром $Kerf$ и образом Imf линейного отображения $f : V \to W$? Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих пространствах. Докажите, что f инъективно тогда и только тогда, когда $Kerf = \{0\}$. Докажите формулу $dim(Kerf) + dim(Imf) = dim(V)$.

Определение 31. Пусть V, W — векторные пространства размерается n, m над одним и тем же полем $\mathfrak{K}$. Отображение $f : V \to W$ называется **линейным**, если
$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

Определение 32. С любым линейным отображением $f : V \to W$ ассоциируются два подпространства — его **ядро** $\mathrm{Ker}\ f = \{v \in V | f(v) = 0\}$ и **образ** $\mathrm{Im}\ f = \{w \in W | w = f(v) \text{ для некоторого } v \in V\}$.

Теорема 66. Заметим, что инъективность f равносильна равенству $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$. Действительно, в случае $f(x) = f(y)$, $x \neq y$, имеем $0 \neq x - y \in \mathrm{Ker}\ f$. Обратно: если $0 \neq x \in \mathrm{Ker}\ f$, то $f(x) = 0 = f(0)$.

Теорема 67. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $f : V \to W$ — линейное отображение. Тогда $\mathrm{Ker}\ f$ и $\mathrm{Im}\ f$ конечномерны и

$$\dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim V.$$

Доказательство (ср. с доказательством аналогичной теоремы в [ВА I, гл. 2, § 3]). Так как $\mathrm{Ker}\, f \subset V$, то $\dim \mathrm{Ker}\, f \leq \dim V < \infty$. Выберем базис $(e_1, \dots, e_k)$ в $\mathrm{Ker}\, f$ и дополним его в соответствии с теоремой 3 из §2 гл. 1 до базиса $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ пространства V. Любой вектор из $\mathrm{Im}\, f$ имеет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

т.е. векторы $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ порождают $\mathrm{Im}\, f$. Остаётся показать их линейную независимость. Предположим, что $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Тогда $f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0$, значит $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}\, f$, т.е. $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$. По линейной независимости базиса $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Следовательно, $\dim \mathrm{Im}\, f = n - k$.

18) Дайте определение линейного отображения $f : V \to W$, ядра и образа линейного отображения. Докажите, что если $U = \langle \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n} \rangle \subset V$, то $f(U) = \langle f(\boldsymbol{e_1}), \dots, f(\boldsymbol{e_n}) \rangle \subset W$. Дайте определение матрицы линейного отображения относительно заданных базисов и ранга линейного отображения. Докажите, что ранг линейного отображения совпадает с рангом его матрицы при любом выборе базисов в пространствах V и W. Сформулируйте и докажите утверждение о связи линейной комбинации и композиции линейных отображений с их матрицами в фиксированных базисах.

Теорема 2. *Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение. Если $U = \langle e_1, \cdots, e_s \rangle \subset V$, то $f(U) = \langle f(e_1), \cdots, f(e_s) \rangle \subset W$. В частности,*

$$\dim f(U) \leq \dim U.$$

Доказательство. По условию любой вектор $u \in U$ записывается в виде $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s$, поэтому $f(u) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_s f(e_s)$, а это и означает, что $f(U) = \langle f(e_1), \cdots, f(e_s) \rangle$. В том случае, когда система $\langle e_1, \cdots, e_s \rangle$ была базисной для U, система $(f(e_1), \cdots, f(e_s))$, вообще говоря, не обязана быть базисной для $f(U)$, поэтому $\dim f(U) \leq s = \dim U$. Вполне может случиться, что $U \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ и $f(U) = \{0\}$.

Определение 33. Любой вектор из образа $\mathrm{Im}\, f \subset W$ является линейной комбинацией векторов:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m, \\ f(v_2) &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m, \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m. \end{aligned}$$

Матрица

$$M_f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

называется **матрицей линейного отображения** $f : V \to W$ относительно базисов $(v_1, \dots, v_n)$, $(w_1, \dots, w_m)$ (или в базисах (v_j), (w_i)).

Определение 34. Размерность подпространства $\mathrm{Im}\, f$ называется также **рангом** ($\mathrm{rank}\, f$) **линейного отображения** f.

Теорема. Ранг линейного отображения $f : V \to W$ и отвечающей ему матрицы M_f (при любом выборе базисов в V и W) совпадают.

Доказательство. Координаты вектора $f(\mathbf{v}_j)$ составляют j-й столбец матрицы M_f. Поэтому $\operatorname{rank}\{f(\mathbf{v}_1),\ldots,f(\mathbf{v}_n)\} = \operatorname{rank} M_f$, а так как всегда $\operatorname{rank}\{f(\mathbf{v}_1),\ldots,f(\mathbf{v}_n)\} = \dim\langle f(\mathbf{v}_1),\ldots,f(\mathbf{v}_n)\rangle_{\mathfrak{K}} = \dim \operatorname{Im} f$, то $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} M_f$.

Утверждение (Линейная комбинация линейных отображений):
Пусть $\varphi, \psi : V \to W$ - линейные отображения с матрицами A и B в фиксированных базисах. Тогда для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) матрица отображения $\alpha\varphi + \beta\psi$ равна $\alpha A + \beta B$.
Доказательство: Пусть $\{v_j\}$ - базис V, $\{w_i\}$ - базис W По определению:

$$\varphi(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i, \quad \psi(v_j) = \sum_i b_{ij} w_i$$

Тогда:

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(v_j) = \alpha \sum_i a_{ij} w_i + \beta \sum_i b_{ij} w_i = \sum_i (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) w_i$$

Следовательно, матрица имеет элементы $\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$

Утверждение. (Композиция линейных отображений)
Пусть $\varphi : V \to U$ и $\psi : U \to W$ с матрицами A (размер $m \times n$) и B (размер $k \times m$). Тогда матрица $\psi \circ \varphi$ равна BA (размер $k \times n$).
Доказательство: Пусть $\{v_j\}$, $\{u_i\}$, $\{w_l\}$ - базисы V, U, W По определению:

$$\varphi(v_j) = \sum_i a_{ij} u_i, \quad \psi(u_i) = \sum_l b_{li} w_l$$

. Тогда композиция:

$$\psi(\varphi(v_j)) = \psi\left(\sum_i a_{ij} u_i\right) = \sum_i a_{ij} \psi(u_i) = \sum_l \left(\sum_i b_{li} a_{ij}\right) w_l$$

Коэффициент $\sum_i b_{li} a_{ij}$ - элемент матрицы BA

19) Дайте определение линейного оператора. Что называется матрицей линейного оператора? Сформулируйте и докажите утверждение об изменении матрицы линейного оператора при переходе к новому базису и дайте определение подобных матриц. Дайте определения следа, ранга и определителя линейного оператора. Докажите их корректность.

Определение 35. Линейный оператор на векторном пространстве V – это линейное отображение $\mathcal{A}$: $V \to V$.

Определение 36 Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathfrak{K}$, $\mathcal{A} : V \to V$ — линейный оператор. Выбрав в V базис $(e_1, \ldots, e_n)$, мы можем задать $\mathcal{A}$ его **матрицей** $A = (a_{ki})$, так что $\mathcal{A}e_i = \sum_k a_{ki} e_k$.

Теорема 3. Матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$ получается из матрицы A того же оператора $\mathcal{A}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ по формуле $A' = B^{-1}AB$, где B — матрица перехода от (e_i) к (e'_i).

Доказательство. Пусть, как обычно, $\sum_i x_i e_i = x = \sum_i x'_i e'_i$ — запись произвольного вектора $x \in V$ в исходном и новом (штрихованном) базисе; $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $X' = [x'_1, \ldots, x'_n]$ — соответствующие столбцы координат. Далее, пусть $Y = AX'$, $Y' = A'X'$, где A, A' — матрицы линейных операторов в базисах e и e' соответственно. Так как

$$X = BX', Y = BY'$$

, то

$$ABX' = AX = Y = BY' = BA'X'.$$

Ввиду произвола в выборе столбца X' (вектора $x \in V$) имеем $AB = BA'$, откуда $A' = B^{-1}AB$.

Определение 37. Говорят, что матрица A' **подобна** матрице A и пишут $A' \sim A$, если существует невырожденная матрица B, связывающая A и A' соотношением

$$A' = B^{-1}AB.$$

Предполагается, что все матрицы квадратные одинакового порядка, с коэффициентами из одного и того же поля $\mathfrak{K}$.

Определение 38. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на V. Его **определителем** называется определитель $\det A$ матрицы A, соответствующей A в каком-нибудь базисе пространства V. Так как $\det(B^{-1}AB) = \det A$, то $\det A$ — инвариант оператора A. Обратимым матрицам отвечают обратимые операторы, поэтому $\det A \neq 0$ — необходимое и достаточное условие обратимости оператора A. В случае $\det A = 0$ мы имеем дело с вырожденным линейным оператором A.

Определение 39. Назовём теперь *следом* линейного оператора A выражение

$$\text{tr } A = \text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица, отвечающая A (tr — сокращение от английского trace). Как известно и как легко проверяется, $\text{tr } AB = \text{tr } BA$ для любых матриц A, B одинакового порядка. Применяя это соотношение к матрицам $B^{-1}A$ и B, где B невырождена, получим

$$\text{tr } (B^{-1}AB) = \text{tr } (B \cdot B^{-1}A) = \text{tr } A.$$

Значит, определение следа оператора корректно, т.е. не зависит от выбора базиса в V. Аналогом является соотношение $\text{tr } \mathcal{AB} = \text{tr } \mathcal{BA}$.

20) Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Что называется алгеброй над полем, подалгеброй, размерностью алгебры? Как определяется алгебра линейных операторов? Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Сформулируйте и докажите утверждение о размерности алгебры линейных операторов.

Определение 40. Кольцо K, являющееся одновременно векторным пространством над полем $\mathfrak{K}$ таким, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{K}$, $a, b \in K$, называется **алгеброй** над $\mathfrak{K}$. Размерность K как векторного пространства называется **размерностью алгебры** K над $\mathfrak{K}$. Всякое векторное подпространство $L \subseteq K$, замкнутое относительно операции умножения в K $(L \cdot L \subseteq L)$, называется **подалгеброй** алгебры K.

Теорема: Если $\dim V = n < \infty$, то алгебра $\mathcal{L}(V)$ изоморфна алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$.
Доказательство: Фиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V. Построим отображение $\Phi : \mathcal{L}(V) \to M_n(\mathbb{F})$, сопоставляющее оператору φ его матрицу A_φ в этом базисе Проверим свойства:

- *Линейность:* $\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A_\varphi + \beta A_\psi = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi)$
- *Сохраняет умножение:* $\Phi(\varphi \circ \psi) = A_\varphi A_\psi = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$
- *Биективность:* Каждой матрице соответствует единственный оператор.

Утверждение: $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, где $n = \dim V$.
Доказательство: При изоморфизме $\mathcal{L}(V) \cong M_n(\mathbb{F})$ размерности совпадают. Базис $M_n(\mathbb{F})$ образуют матричные единицы E_{ij} (1 на позиции (i, j)). Число матриц E_{ij} равно n^2, а значит dim $M_n(\mathbb{F})$ = dim $\mathcal{L}(V)$ = n^2
.
(*Примечание*: это не единичная матрица в привычном понимании, а матрица, в которой элемент a_{ij} равен единице, а остальные нулю.)

21) Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Что называется алгеброй, порождённой линейным оператором? Дайте определение минимального многочлена линейного оператора. Сформулируйте и докажите свойства минимального многочлена. Дайте определение нильпотентного оператора и индекса нильпотентности, приведите примеры.

Определение 41. Если $\mathcal{A}$ – линейный оператор, то порождённая им подалгебра $\mathcal{R}[\mathcal{A}]$ есть наименьшая подалгебра, содержащая $\mathcal{A}$.

Определение 42. Говорят, что многочлен $f(t)$ аннулирует линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный (т.е. со старшим коэффициентом 1) многочлен минимальной степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется **минимальным многочленом оператора** $\mathcal{A}$.

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m + \mu_1 t^{m-1} + \ldots + \mu_{m-1} t + \mu_m$$

Теорема 1. Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ существует минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(t)$. Его степень совпадает с размерностью алгебры $R[\mathcal{A}]$. Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда свободный член μ_m многочлена (6) отличен от нуля.

Доказательство заключительной части теоремы столь же просто, как и проведённое выше доказательство первой части. Именно, если $\mu_m = 0$, то

$$\mathcal{O} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-1} + \mu_1 \mathcal{A}^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1}\mathcal{E}).$$

Значит, у $\mathcal{A}$ есть делитель нуля $\mathcal{A}^{m-1} + \mu_1 \mathcal{A}^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1}\mathcal{E} \neq \mathcal{O}$ (минимальность $\mu_{\mathcal{A}}(t)$), а делитель нуля в кольце не может быть обратимым. Если, напротив, $\mu_m \neq 0$, то соотношение

$$\mathcal{A}(-\mu_m^{-1}\mathcal{A}^{m-1} - \mu_m^{-1}\mu_1\mathcal{A}^{m-2} - \ldots - \mu_m^{-1}\mu_{m-1}\mathcal{E}) = \mathcal{E},$$

вытекающее из $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, в явном виде задаёт оператор, обратный к $\mathcal{A}$.

Теорема 2. Любой аннулирующий многочлен $f(t)$ оператора $\mathcal{A}$ делится без остатка на минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.
Доказательство. По предположению линейный оператор $f(\mathcal{A})$ (см. (4)) равен нулевому оператору $\mathcal{O}$. Если $f(t) = q(t)\mu_{\mathcal{A}}(t) + r(t)$ — результат деления $f(t)$ на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ с остатком $r(t)$, то

$$\mathcal{O} = f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{O} + r(\mathcal{A}),$$

откуда $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Но $\deg r(t) < \deg \mu_{\mathcal{A}}(t)$, так что в соответствии с определением минимального многочлена имеем $r(t) = 0$.

Определение 43. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется **нильпотентным**, если $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ для некоторого $m > 0$; наименьшее такое натуральное число m называется **индексом нильпотентности**.

22) Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Что называется характеристическим многочленом линейного оператора?

Докажите, что определение характеристического многочлена корректно, то есть не зависит от выбора базиса. Сформулируйте и докажите утверждение о связи собственных значений линейного оператора и корнях его характеристического многочлена.

Определение 44. Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно $\mathcal{A}$, называется **собственным вектором** оператора $\mathcal{A}$. Если x — собственный вектор: $\mathcal{A}x = \lambda x$, то скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ называется **собственным значением** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(tE - \mathcal{A}) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \ldots + \chi_{n-1}t + \chi_n \tag{10}$$

Определение 45. Многочлен (10) называется *характеристическим многочленом* матрицы $\mathcal{A}$. Уравнение $\chi_{\mathcal{A}}(t) = 0$ называется также *характеристическим*.

Теорема. Полагаем $\chi_A(t) := \chi_A(t)$. Определяющее равенство (10) показывает, что скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\chi_A(\lambda) = 0$, т.е. λ — корень характеристического многочлена. Если многочлен $\chi_A(t)$ не имеет корней в $\mathbb{R}$, то у оператора A нет собственных векторов. Всякий линейный оператор, действующий на комплексном векторном пространстве, обладает собственными векторами.

23) Дайте определения и приведите примеры линейных операторов и инвариантных подпространств. Сформулируйте и докажите теоремы об инвариантных подпространствах линейного оператора над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел.

Определение 46. Подпространство $U \subset V$ *инвариантно* относительно линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$, если $\mathcal{A}U \subset U$.

Например, $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — инвариантные подпространства, хотя, возможно, и тривиальные, т.е. совпадающие с $\{0\}$ или с V.

Теорема 7. Всякий комплексный (соответственно вещественный) линейный оператор A имеет одномерное (соответственно одномерное или двумерное) инвариантное подпространство.
Доказательство. Так как характеристический многочлен $\chi_A(t)$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень, то известный метод нахождения собственных векторов заведомо даст одномерное инвариантное подпространство исходного пространства V. В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ рассмотрим минимальный многочлен $\mu_A(t)$ оператора A (см. определение 2 из § 2). Его коэффициенты лежат в $\mathbb{R}$. Если $\mu_A(t)$ имеет вещественный корень α, то

$$\mu_A(t) = (t - \alpha)g(t), \quad g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Так как $g(A) \neq 0$ в силу минимальности $\mu_A(t)$, то $g(A)u \neq 0$ для некоторого вектора $u \in V$. Но

$$(A - \alpha\epsilon) = (A - \alpha\epsilon)g(A)u = \mu_A(A)u = 0,$$

откуда $Av = \alpha v$, т.е. v — собственный вектор.
Предположим теперь, что A не имеет собственных векторов. Тогда по доказанному у $\mu_A(t)$ нет вещественных корней. Но по теореме о многочленах с вещественными коэффициентами мы имеем право записать

$$\mu_A(t) = (t^2 - \alpha t - \beta)h(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Снова $v = h(A)u \neq 0$ для некоторого $u \in V$ и

$$A^2 v - \alpha A v - \beta v = \mu_A(A)u = 0.$$

Получается, что $A^2 v = \alpha A v + \beta v$, а так как $Av \neq \lambda v$ (одномерного инвариантного подпространства нет), то $L = \langle v, Av \rangle$ — двумерное инвариантное подпространство.

24) Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора, собственного подпространства. Дайте определение геометрической и алгебраической кратности собственного значения, сформулируйте и докажите неравенство между ними.

Определение 47. Очевидная импликация

$$\mathcal{A}x = \lambda x,\ \mathcal{A}y = \lambda y \implies \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

даёт основание называть V^λ собственным подпространством оператора $\mathcal{A}$, ассоциированным с λ. Его размерность $\dim V^\lambda$ называется **геометрической кратностью** собственного значения λ.

Определение 48. Кратность λ как корня характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ называется **алгебраической кратностью** собственного значения λ оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 4. Геометрическая кратность собственного значения λ не превосходит его алгебраической кратности.
Доказательство. По определению геометрическая кратность есть размерность m пространства V^λ решений уравнения $\mathcal{A}x = \lambda x$. Очевидно, что V^λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, и если $\mathcal{A}'$ — ограничение $\mathcal{A}$ на V^λ, то $\det(t\mathcal{E}' - \mathcal{A}') = (t-\lambda)^m$, причём $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda)^m q(t)$, где $q(t)$ — некоторый многочлен из $\mathbb{R}[t]$. Пусть λ — корень кратности $k \geq 0$ многочлена $q(t)$. В таком случае алгебраической кратностью λ будет $m + k$.

25) Дайте определение инвариантного подпространства и определение оператора, индуцированного на факторпространстве по инвариантному подпространству. Сформулируйте и докажите теорему о виде матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств.

Теорема 2. Пространство V является прямой суммой двух подпространств U, W, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$, тогда и только тогда, когда матрица A этого оператора в каком-либо базисе принимает клеточно-диагональный вид $(5')$.

Доказательство. Наличие собственного инвариантного подпространства $\{0\} \subset U \subset V$ даёт возможность упростить матрицу A оператора $\mathcal{A}$ путём выбора надлежащего базиса в V. Именно, если дополнить базис $(e_1, \ldots, e_m)$ в U до базиса $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ в V, то из условия $\mathcal{A}e_i \in U, 1 \leq i \leq m$, следует, что в этом базисе матрицей оператора $\mathcal{A}$ будет

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix},$$

где A_1 - $m \times m$-матрица, A_2 - $(n-m) \times (n-m)$-матрица и A_0 - $m \times (n-m)$-матрица. На A_1 можно смотреть как на матрицу линейного оператора $\mathcal{A}_U$ — оператора $\mathcal{A}$, ограниченного на U (удобно положить $A_1 = A_U$).

Представим на минуту, что A_0 — нулевая матрица. Тогда, очевидно, $W = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$ тоже будет инвариантным подпространством в V, а A_2 — матрицей оператора $\mathcal{A}_W$. В этом случае говорят о прямой сумме операторов

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_U + \mathcal{A}_W,$$

соответствующей разложению $V = U \oplus W$ в прямую сумму инвариантных подпространств. Матрица прямой суммы операторов имеет клеточно-диагональный вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_U & 0 \\ 0 & A_W \end{vmatrix} = A_U + A_W.$$

откуда и вытекает сказанное в теореме.

26) Дайте определения собственного вектора, собственного значения и спектра линейного оператора. Какой спектр называется простым? Докажите, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Дайте определение диагонализируемого линейного оператора. Докажите, что оператор с простым спектром диагонализируем.

Определение 49. Множество всех собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}$ называют **спектром** этого оператора и обозначают символом $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

Теорема я хз какая их слишком много Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — какие-то различные собственные значения, $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_m}$ — соответствующие собственные подпространства. Выберем в каждом V^{λ_i} по одному собственному вектору e_i. Нужно доказать их линейную независимость. Для $m = 1$ утверждение верно. Рассуждая по индукции относительно m и предполагая существование нетривиальной линейной зависимости

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = 0,$$

где, скажем, $\alpha_1 \neq 0$, мы применим к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, то

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \cdots + \alpha_m \lambda_m e_m = 0.$$

Умножая первое соотношение на λ_m и вычитая из него второе, приходим к линейной зависимости первых $m - 1$ векторов:

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)e_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})e_{m-1} = 0.$$

По предположению индукции $\alpha_i(\lambda_m - \lambda_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. Но

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_i, \quad i < m \implies \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Определение 50. Линейный оператор $\mathcal{A}$ на n-мерном пространстве V называется **диагонализируемым**, если существует базис (e_i), относительно которого матрица оператора принимает диагональный вид

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Теорема 5. Линейный оператор $\mathcal{A}$ с простым спектром диагонализируем. (Примечание: спектр простой, если все его точки простые, иными словами - все точки спектра имеют геометрическую кратность 1.

Доказательство. Формулировка теоремы предполагает, что многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет в основном поле $\mathfrak{K}$ ($n = \dim V$) различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которым отвечают собственные векторы e_i, $i = 1, \ldots, n$. По лемме 1 эти векторы линейно независимы. Значит, $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, и так как $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, то $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

27) Дайте определение диагонализируемого линейного оператора. Сформулируйте и докажите критерий диагонализируемости.

Теорема Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathfrak{K}$. Для диагонализируемости $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

1. все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ лежат в $\mathfrak{K}$;
2. геометрическая кратность каждого собственного значения λ совпадает с его алгебраической кратностью.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1, 2. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные корни многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, а $k_1, \ldots, k_m$ — их кратности, то

$$\dim V^{\lambda_i} = k_i, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n \tag{11}$$

По лемме 1 любая совокупность не равных одновременно нулю векторов $v_i \in V^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независима, так что

$$V^{\lambda_i} \cap (V^{\lambda_1} + \ldots + \widehat{V^{\lambda_i}} + \ldots + V^{\lambda_m}) = 0 \tag{12}$$

Значит (см. теорему 7 из § 2 гл. 1), сумма $V^{\lambda_1} + \ldots + V^{\lambda_m}$ прямая, а с учётом равенств (11) получаем

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_m} \tag{13}$$

Взяв за базис в V объединение базисов в V^{λ_i}, мы придём к собственному базису, т.е. к базису, состоящему из n линейно независимых собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Его существование эквивалентно диагонализируемости $\mathcal{A}$.

Обратно: пусть оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем. Снова обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ его различные собственные значения и положим $l_i = \dim V^{\lambda_i}$, $1 \le i \le m$. Условие (12) по-прежнему выполнено, а так как V имеет собственный базис, состоящий из элементов подпространств V^{λ_i}, то $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_m}$ порождают V. Из этого мы заключаем, что имеет место равенство (13). Относительно базиса, получающегося объединением базисов в V^{λ_i}, матрицей оператора $\mathcal{A}$ будет

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1; \ldots; \lambda_m, \ldots, \lambda_m).$$

Из равенства

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)^{l_1} \ldots (t - \lambda_m)^{l_m}$$

вытекает, что все корни многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ принадлежат $\mathfrak{K}$, т.е. выполнено условие 1, и что целое число l_i совпадает с алгебраической кратностью k_i корня λ_i (см. (11)) для $i = 1, \ldots, m$.

28) Дайте определение сопряжённого оператора и сформулируйте его основные свойства. Сформулируйте и докажите теорему о матрице сопряжённого оператора в двойственном базисе. Докажите теорему о том, что всякий комплексный линейный оператор обладает инвариантной гиперплоскостью.

Определение 51. Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ на V^*, заданный соотношением

$$(\mathcal{A}^* f, x) := (f, \mathcal{A}x), \tag{14}$$

называют оператором, сопряжённым к $\mathcal{A} \in L(V)$. Символ $\mathcal{A}^* f$ представляет собой линейную функцию на V, и соответствие $\mathcal{A}^* : f \mapsto \mathcal{A}^* f$ при переменном f определяет линейное отображение $V^* \to V^*$.

Итак, мы имеем отображение $L(V) \to L(V^*)$, а именно $* : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$. Непосредственно из определения мы выводим следующие его свойства:

$$\mathcal{O}_V^* = \mathcal{O}_{V^*}, \quad \mathcal{E}_V^* = \mathcal{E}_{V^*}, \quad (\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A}^*,$$
$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*. \tag{15}$$

Теорема 8. Если в базисе (e_i) пространства V линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = (a_{ij})$, то в дуальном базисе (e^i) пространства V^* сопряжённый к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}^*$ имеет транспонированную матрицу ${}^tA$: матрица $\mathcal{A}^*$ равна $(a_{ij}^*) =^t A$.

Доказательство. Для задания оператора $\mathcal{A}^*$ в матричном виде выберем в V и V^* дуальные базисы (e_i), (e^i). Если $\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj}e_k$, то

$$(e^i, \mathcal{A}e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj}(e^i, e_k) = \sum_{k=1}^n a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij}.$$

Полагая далее

$$\mathcal{A}^* e^i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^* e^k,$$

получаем $(\mathcal{A}^* e^i, e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki}^*(e^k, e_j) = a_{ji}^*$. С другой стороны, согласно определению (14) имеем $(\mathcal{A}^* e^i, e_j) = (e^i, \mathcal{A}e_j) = a_{ij}$. Следовательно, $a_{ji}^* = a_{ij}$, что и доказывает утверждение теоремы.

Теорема 9. Всякий комплексный линейный оператор $\mathcal{A}$ на V обладает инвариантной гиперплоскостью.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Как мы знаем, $\dim \mathrm{Ker} f = n-1$ для любой линейной функции $f \neq 0$ на V. Возьмём теперь в качестве f собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}^*$ на V^*. Он существует по теореме 7, и если λ — отвечающее ему собственное значение, то, как следует из определяющего равенства (14):

$$x \in \mathrm{Ker} f \implies 0 = \lambda(f, x) = (\lambda f, x) = (\mathcal{A}^* f, x) = (f, \mathcal{A}x) \implies \mathcal{A}x \in \mathrm{Ker} f.$$

Это и означает, что $\mathrm{Ker} f$ — искомая гиперплоскость. □

29) Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Сформулируйте и докажите теорему о приведении матрицы линейного оператора к треугольному виду.

Теорема 1. Матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ всегда можно привести (в смысле подобия) к верхнетреугольному виду.

Доказательство. Проще всего в этом убедиться рассуждением по индукции. По теореме 9 из § 3 пространство V содержит инвариантную относительно $\mathcal{A}$ гиперплоскость U: $\mathcal{A}U \subset U$. По предположению индукции в U можно выбрать такой базис $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, что $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i + v_i$, где $v_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle$.

Имеем $V = \langle U, e_n \rangle$, где e_n — произвольный вектор, не содержащийся в U. Пусть $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n + u$, где $u \in U$. Таким образом, в базисе $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ действие оператора $\mathcal{A}$ выражается матрицей верхнетреугольного вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

30) Дайте определения линейного оператора и приведите примеры. Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона — Кэли. Докажите, что характеристический многочлен линейного оператора делится без остатка на его минимальный многочлен.

Теорема 2 (теорема Гамильтона—Кэли). Линейный оператор $\mathcal{A}$ и соответствующая ему матрица A (в любом базисе) аннулируются своим характеристическим многочленом $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, т.е.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

Доказательство. Так как это утверждение не зависит от выбора базиса (см. п. 3 § 2), то естественно воспользоваться теоремой 1; с самого начала считая матрицу A в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ имеющей треугольный вид (1). Рассмотрим цепочку $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0,$$

где $V_k = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{n-k} \rangle$. Так как $(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})e_{n-k} \in V_{k+1}$, то

$$(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})V_k \subset V_{k+1}$$

и, следовательно,

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V = \prod_{i=1}^{n}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})V =$$

$$= (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \cdots (\mathcal{A} - \lambda_n\mathcal{E})V_0 \subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \cdots (\mathcal{A} - \lambda_{n-1}\mathcal{E})V_1 \subset$$
$$\subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \cdots (\mathcal{A} - \lambda_{n-2}\mathcal{E})V_2 \subset \cdots \subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})V_{n-1} = 0.$$

Но

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V = 0 \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}. \square$$

Следствие. Минимальный многочлен для линейного оператора является делителем характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, делящимся на все линейные множители $t - \lambda$, где $\lambda \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

Доказательство. По определению $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, а по теореме 2 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Делимость $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ вытекает теперь из теоремы 2 из § 2.

Если λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{A}v = \lambda v \Rightarrow 0 = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)v \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Rightarrow (t - \lambda) \mid \mu_{\mathcal{A}}(t)$$

(мы повторили вывод импликации (7) из § 3).

31) Дайте определения жордановой клетки, жордановой матрицы и жорданова базиса. Сформулируйте основную теорему о жордановой нормальной форме и выведите из неё следствие о связи диагонализируемости линейного оператора и кратности корней его минимального многочлена.

Определение 52.
а) Назовём (верхней) **клеткой Жордана** размера $m \times m$ (или порядка m), соответствующей собственному

значению λ, матрицу

$$J_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

б) **Жордановой матрицей** называется матрица, состоящая из диагональных блоков $J_{m_i}(\lambda_i)$ и нулей вне этих блоков:

$$J = \begin{vmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) & \end{vmatrix}.$$

в) **Жордановым базисом** для линейного оператора $A : V \to V$ называется такой базис пространства V, в котором матрица оператора A является жордановой, или, как говорят, имеет жорданову нормальную форму (ЖНФ) $J(A)$.

Основная теорема. Каждая квадратная матрица A порядка n над алгебраически замкнутым полем $\mathfrak{K}$ (в частности, над $\mathbb{C}$) приводится к жордановой нормальной форме. Именно, существует невырожденная матрица C, для которой $C^{-1}AC = J(A) = J$ — матрица вида (2). С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.

Следствие. Квадратная матрица A над $\mathbb{C}$ диагонализируема тогда и только тогда, когда её минимальный многочлен $\mu_A(t)$ не имеет кратных корней.

32) Дайте определения корневого вектора и корневого подпространства. Сформулируйте и докажите их простейшие свойства. Сформулируйте и докажите утверждение о разложении линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.

Определение 53. Множество векторов

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k v = 0 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$$

называется **корневым подпространством**, соответствующим собственному значению $\lambda \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}$. Векторы v называются *корневыми.*

(Примечание: свойства и доказательства взяты из лекций МГУ - удачи разобраться...)
Свойства корневых подпространств (при $\dim V < \infty$):

1. $V^\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$
2. $\dim V^\lambda(\mathcal{A}) =$ алгебраическая кратность λ
3. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = B$ — нильпотентный оператор, т.е. $\exists m : B^m = 0$
4. $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ невырожден при $\mu \neq \lambda$

Доказательство.

1) Положим $V_k^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$. Тогда:

$$V_\lambda = V_1^\lambda \subset V_2^\lambda \subset \cdots \subset V_h^\lambda = V^\lambda$$

Заметим, что $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})(V_k^\lambda) \subset V_{k-1}^\lambda \subset V_k^\lambda$. Таким образом, V_k^λ инвариантно относительно $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$, откуда следует, что V_k^λ инвариантно и относительно $\mathcal{A}$. В частности, $V_h^\lambda = V^\lambda$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

3) Выберем в V^λ базис, согласованный с цепочкой подпространств V_k^λ $(k=1,\dots,h)$:

- $(e_1,\dots,e_{m_1})$ — базис V_1^λ
- $(e_1,\dots,e_{m_1},\dots,e_{m_2})$ — базис V_2^λ
- ...
- $(e_1,\dots,e_{m_1},\dots,e_{m_k})$ — базис V^λ

Для любого $k=1,\dots,h$: $B(V_k^\lambda) \subseteq V_{k-1}^\lambda$ (считаем $V_0^\lambda = \{0\}$). Отсюда следует, что для любого $j=1,\dots,m$:

$$Be_j \in \langle e_1,\dots,e_{j-1}\rangle \Rightarrow B^m = 0,$$

где $m = \dim V^\lambda$ (на самом деле даже $B^h = 0$).

В этом базисе матрица оператора B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = B + \lambda E$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

А матрица оператора $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$:

$$A - \mu E = \begin{pmatrix} \lambda-\mu & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-\mu \end{pmatrix}$$

Эта матрица невырождена при $\mu \neq \lambda$, значит, и оператор $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ невырожден при $\mu \neq \lambda$.

2) Дополним базис $(e_1,\dots,e_m)$ до базиса $(e_1,\dots,e_n)$ пространства V. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочный вид:

$$A = \begin{pmatrix} A|_{V^\lambda} & C \\ 0 & A|_{V/V^\lambda} \end{pmatrix}$$

где

$$A|_{V^\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

— матрица $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ (размера $m \times m$), а $A|_{V/V^\lambda}$ — матрица оператора $\mathcal{A}|_{V/V^\lambda}$.

Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$\chi_\mathcal{A}(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} tE - A|_{V^\lambda} & -C \\ 0 & tE - A|_{V/V^\lambda} \end{vmatrix} = \chi_{A|_{V^\lambda}}(t)\chi_{A|_{V/V^\lambda}}(t) = (t-\lambda)^m \chi_{A|_{V/V^\lambda}}(t)$$

При этом λ не является корнем $\chi_{A|_{V/V^\lambda}}(t)$. Докажем от противного: если бы существовал собственный вектор $v + V^\lambda \in V/V^\lambda$ с собственным значением λ, то $v \notin V^\lambda$ и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(v + V^\lambda) = V^\lambda$. Тогда $v' = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v \in V^\lambda$, т.е. v' — корневой вектор. Но тогда и v — корневой вектор, что приводит к противоречию.

Следовательно, алгебраическая кратность λ равна $m = \dim V^\lambda$. $\square$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейный оператор с характеристическим многочленом

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{p}(t - \lambda_i)^{n_i}; \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j.$$

Тогда $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_p)$ *— прямая сумма корневых подпространств* $V(\lambda_i)$*, каждое из которых инвариантно относительно* $\mathcal{A}$ и *имеет размерность* $\dim V(\lambda_i) = n_i$*. Оператор* $\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E}$*, нильпотентный на* $V(\lambda_i)$*, действует невырожденным образом на подпространстве*

$$V_i = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_{i-1}) \oplus V(\lambda_{i+1}) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_p).$$

Наконец, λ_i *— единственное собственное значение оператора* $\mathcal{A}|_{V(\lambda_i)}$.

Доказательство. Ни один из простых множителей $t - \lambda_k$ не может быть делителем одновременно всех многочленов

$$\chi_i(t) = \prod_{j \neq i}(t - \lambda_j)^{n_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

и поэтому $\text{НОД}(\chi_1(t), \ldots, \chi_p(t)) = 1$. Найдутся, стало быть, многочлены $f_1(t), \ldots, f_p(t) \in \mathbb{C}[t]$, для которых

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(t) f_i(t) = 1. \tag{4}$$

Подпространства

$$W_i = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = \{\chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) v \mid v \in V\}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

инвариантны относительно $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} W_i = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) \mathcal{A} V \subset \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = W_i.$$

Кроме того,

$$(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{n_i} W_i = \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = 0$$

(поскольку по теореме 2 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$), так что

$$W_i \subset V(\lambda_i). \tag{5}$$

Соотношение (4), переписанное в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{p} \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}),$$

даёт нам разложение

$$V = \sum_{i=1}^{p} W_i$$

и тем более (ввиду включения (5))

$$V = \sum_{i=1}^{p} V(\lambda_i).$$

Предположим, что $v \in V(\lambda_i) \cap V_i$, где $V_i = \sum_{j \neq i} V(\lambda_j)$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{n_i} v = 0$, а так как $v = \sum_{j \neq i} v_j$ и $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^{n_i} v_j = 0$, то и $\left\{\prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^{n_j}\right\} v = 0$. Но из взаимной простоты многочленов $(t - \lambda_i)^n, c(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$ следует существование $a(t), b(t)$, для которых

$$a(t)(t - \lambda_i)^n + b(t)c(t) = 1.$$

Получаем

$$v = a(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{n_i} v + b(\mathcal{A}) \left\{\prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^{n_j}\right\} v = 0,$$

т.е. пространства $V(\lambda_i)$ и V_i не пересекаются. Значит, мы имеем разложение

$$V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_p) \tag{6}$$

в прямую сумму $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств.

Из включения (5) и из разложения (6) непосредственно вытекает, что $W_i = V(\lambda_i)$. Таким образом, для $V(\lambda_i)$ получено эффективное выражение

$$V(\lambda_i) = \chi_i(A) f_i(A) V,$$

где $\chi_i(t), f_i(t)$ — многочлены из тождества (4). В частности,

$$(A - \lambda_i \epsilon)^n V(\lambda_i) = 0.$$

Минимальным многочленом для A на $V(\lambda_i)$ будет некоторый делитель многочлена $(t - \lambda_i)^{n_i}$. Отсюда следует, во-первых, что λ_i — единственное собственное значение оператора $A|_{V(\lambda_i)}$. Далее, в базисе, являющемся объединением базисов пространств $V(\lambda_i)$, оператор A имеет матрицу

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & A_p \end{vmatrix},$$

где A_i — матрица порядка $n_i' = \dim V(\lambda_i)$ с единственным собственным значением λ_i и характеристическим многочленом

$$\chi_{A_i}(t) = (t - \lambda_i)^{n_i'}, \quad n_i' \leq n_i.$$

Так как $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{A_i}(t)$, то $n = n_1' + \cdots + n_p'$ и $n_i' = n_i$.

Осталось доказать невырожденность ограничения $(A - \lambda_i \epsilon)|_{V_i}$. Но это понятно: в противном случае $\{\mathrm{Ker}(A - \lambda_i \epsilon)\} \cap V_i \neq 0$ и $Av - \lambda_i v = 0$ для некоторого $0 \neq v \in V_i$. Однако на V_i характеристическим многочленом для A является $\chi_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{n_j}$, и λ_i собственным значением быть не может.