Теоретические вопросы для подготовки к РК–2

1) Дать определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Сформулировать признаки сравнения для таких интегралов.

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Тогда для любого значения $b \in [a, +\infty)$ существует функция

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (a \leq b < +\infty)$$

Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называют **несобственным интегралом от функции** $f(x)$ **по бесконечному промежутку** $[a, +\infty)$ (или несобственным интегралом первого рода) и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, причём $\exists c > a \quad \forall x \in [c, +\infty)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а если расходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

2) Дать определение несобственного интеграла от неограниченной функции на конечном отрезке интегрирования. Сформулировать признаки сравнения для таких интегралов.

Пусть функция $f(x)$ определена в полуинтервале $[a, b)$, неограничена при $x \to b-$(это значит, что функция не является ограниченной ни в какой окрестности точки b, где точка в может быть как конечной, так и бесконечной), но интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$. Тогда для любого $\eta \in [a, b)$ существует функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx \qquad (a \leq \eta < b)$$

которая непрерывна на $[a, b)$. Предел функции $\Phi(\eta)$ при $n \to b-$ называют **несобственным интегралом от неограниченной функции** $f(x)$ **по промежутку** $[a, b)$ (или несобственным интегралом второго рода) и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Пусть $f, g \in R[a, b] \quad \forall b \in [a, +\infty)$, функция $f(x)$ неотрицательна, а $g(x)$ положительна при $x \geq c$ для некоторого $c \geq a$. Если существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0$$

то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3) Сформулировать свойства несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке: формулу Ньютона — Лейбница, правила интегрирования по частям и подстановкой.

Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, +\infty)$, а $F(x)$ - одна из ее первообразных на этом полуинтервале, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

Интегрирование по частям. Если $f, g \in C^1[a, +\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} (fg)(x)$, то несобственные интегралы от функций fg' и $f'g$ по промежутку $[a, +\infty)$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. В случае их сходимости верно равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = (fg)(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

Интегрирование подстановкой. Если функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$, а функция $\phi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна на полуинтервале $[\alpha, \beta)$ (возможно $\beta = +\infty$), причем $\phi(\alpha) = a$, и $\phi(t) \to +\infty$ при $t \to \beta-$, то справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

4) Дать определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла. Сформулировать теорему об абсолютной сходимости.

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, **сходится абсолютно**. Если расходится первый интеграл и сходится второй интеграл, то говорят, что он **сходится условно**.

Теорема об абсолютной сходимости. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

5) Дать определение сходимости числового ряда. Сформулировать необходимый признак сходимости и признаки сравнения сходимости числового ряда.

Сумма нескольких последовательных членов ряда $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ называется частичной суммой. Частичные суммы S_n образуют последовательность, называемую последовательностью частичных сумм. Предел последовательности частичных сумм, если он существует, называют суммой ряда.

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

Если указанный предел частичных сумм ряда существует, то говорят, что **ряд сходится**. В противном случае говорят, что ряд расходится.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1-й признак сравнения. Пусть знакоположительные ряды $A = a_n$ и $B = b_n$ удовлетворяют условию $a_n \le b_n$, $n = 1, .., \infty$. Если ряд B сходится, то и ряд A сходится. Если ряд A расходится, то и ряд B расходится.

2-й признак сравнения. Пусть для знакоположительных рядов $A = a_n$ и $B = b_n$ существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Тогда ряд A сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд B.

3-й признак сравнения. Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды $A = a_n$ и $B = b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

6) Сформулировать признаки Коши, Даламбера и Коши–Маклорена сходимости числового ряда.

Признак Коши. Если существует предел

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q$$

где $a_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то: при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится, а при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится

Признак Даламбера. Если существует предел

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

где $a_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то: при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится, а при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится

Признак Коши–Маклорена. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, +\infty)$, неотрицательна и монотонно убывает на этом промежутке. Тогда несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

7) Сформулировать критерий Коши сходимости числового ряда. Дать определения абсолютной и условной сходимости числового ряда.

критерий Коши. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in N: \quad \forall n, m \in N \quad n > m > N(\epsilon)$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \epsilon$$

Ряд $\sum a_n$, для которого $\sum |a_n|$ сходится, называют **абсолютно сходящимся**. Если ряд $\sum a_n$ сходится, но $\sum |a_n|$ расходится, то его называют **сходящимся условно**.

8) Сформулировать теорему Лейбница о сходимости знакочередующегося числового ряда. Сформулировать утверждение об оценке остатка такого ряда.

Признак Лейбница. Пусть для знакочередующегося ряда $\sum(-1)^n a_n$, $a_n > 0$, при $n = 1, .., \infty$, выполняются условия:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1, .., \infty$
   Тогда ряд сходится

Утверждение. Анализируя доказательство, можно получить неравенство

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

Значит, сумма остатка знакочередующегося ряда не превосходит первого отброшенного члена.

9) Сформулировать признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда.

Признак Абеля. Пусть:

1. ряд $\sum a_n$ сходится;
2. последовательность b_n является монотонной и ограниченной.
   Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле. Пусть:

1. последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена;
2. последовательность b_n является монотонной и бесконечно малой.
   Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

10) Сформулировать теоремы о сочетательном и о переместительном свойстве абсолютно сходящегося числового ряда.

Теорема о сочетательном свойстве. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то любой ряд $\sum b_n$, полученный группировкой исходного, сходится к той же сумме

Теорема о переместительном свойстве. Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится абсолютно и к той же сумме.

11) Сформулировать теорему Римана о перестановке условно сходящегося числового ряда и теорему Коши о произведении двух абсолютно сходящихся числовых рядов.

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то в результате его перестановки можно получить как расходящийся ряд, так и ряд, сходящийся к любому наперед заданному числу.

Теорема Коши. Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда: ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ с суммой S и ряд $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ с суммой t. Тогда ряд, членами которого являются все произведения любого члена первого ряда на любой член второго, также сходится абсолютно и сумма его равна произведению st.