Uegentige Integraler:

Sammenligningskriteriet:

La $f, g : [a : \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlig og positiv. Anta $f(x) \geq (x)$ for alle x:

1. Hvis $\int_a^\infty f(x)dx$ Konvergerer $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ Konvergerer
2. Hvis $\int_a^\infty g(x)dx$ Divergerer $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ Divergerer

Grensesammenligningskriteriet:

La $f, g : [a : \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlig og positiv.

1. $\int_a^\infty f(x)dx$ Konvergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty \Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)$ Konvergerer
2. $\int_a^\infty f(x)dx$ Divergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0 \Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)$ Divergerer

Viktige Integraler:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ Konvergerer for $p < 1$, divergerer for $p \geq 1$
$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$Konvergerer for $p > 1$,divergerer for $p \leq 1$

Taylorpolynom:

Taylors formel med restledd:

Anta f og den n+1 første deriverte er kont på $[a, b]$:
$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{n+1}(t)(b-t)^n dt$

Lagranges restleddformel

Anta f of dens n+1 første deriverte er kont på $[a, b]$
$R_n f(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Funksjonsfølger:

Punktvis og uniform konvergens:

Definisjon av punktvis konvergens:

La $\{f_n\}$ være en følge som er definert på en mengde A, og la f være en funksjon definert på samme mengde A. f_n Konvergerer punktvis mot f på A, Hvis: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle x i A

Definisjon av avstand mellom to funksjoner over A:

f og g er definert på samme mengde A. avstanden blir da: $d_A(f, g) = sup\{|f(x) - g(x) : x \in A|\}$

Definisjon av uniform kovergens:

En funksjonsfølge $\{f_n\}$, definert på A, konvergerer uniformt mot f(Også definert på A) hvis: $\lim_{n\to\infty} d_A(f, f_n) = 0$

Teorem: Ang konitnuitet av funksjonsfølger:

La f og $f_1, f_2, f_3 \ldots$ være funksjoner definert på en mengde A. Anta at $f_1, f_2, f_3, \ldots$ er kont. og at følgen f_n konvergerer uniformt mot f på A. Da er f kontinuerlig i A.

Dinis teorem:

Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kont. funksjoner som konvergerer punktvis mot en kont. funksjon f på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$. Da konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot f på $[a, b]$

Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Integrasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$ er en føge av funksjoner som konvergerer uniformt mot f på [a,b], da er $\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$ for $c \in [a, b]$ dette gjelder også for
$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(t)dt = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$

Derivasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$ er en funksjonsfølge på [a,b], og de deriverte f_n' konvergerer uniformt mot en funksjon h. Anta at $\{f_n(d)\}$ konvergerer for et tall $d \in [a, b]$. Da konvergerer$\{f_n\}$ mot en deriverbar funksjon f og $f' = h$
$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'$

Rekker

Egenskaper ved rekker:

La $\sum_{n=0}^\infty a_n$ og $\sum_{n=0}^\infty b_n$ være konvergente rekker:

1. $\sum_{n=0}^\infty (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^\infty a_n \pm \sum_{n=0}^\infty b_n$
2. $\sum_{n=0}^\infty ca_n = c\sum_{n=0}^\infty a_n$

Absolutt og betinget konvergens

Definisjon:

Vi sier at rekken $\sum a_n$ konvergerer absolutt dersom $\sum |a_n|$ konvergerer.

Lemma:

Dersom $\sum a_n$ er betinget konvergent, divergerer både $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$

Divergenstesten:

$\sum_{n=0}^\infty a_n$Konveregerer $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Integraltesten:

Anta $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}]$ er en pos., kont. og avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hviss integralet $\int_1^\infty f(x)dx$
konveregerer.

Sammenligningstesten:

La $\sum_{n=1}^\infty a_n$ og $\sum_{n=1}^\infty b_n$ være to positive rekker

1. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergerer og at det finnes et tall c slik at $b_n \leq c \cdot a_n$ for alle n. Da konveregerer $\sum_{n=1}^\infty b_n$.
2. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergerer og at det finnes et positivt tall d slik at $b_n \geq d \cdot a_n$ for alle n. Da divergerer $\sum_{n=1}^\infty b_n$

Grensesammenligningstesten:

La $\sum_{n=1}^\infty a_n$ og $\sum_{n=1}^\infty b_n$ være to positive rekker:

1. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergerer og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$. Da konvergerer også $\sum_{n=1}^\infty b_n$.

2. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$. Da
divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Forholdstesten:

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$ eksisterer(Den kan være ∞!). Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, Konveregerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, Divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Rottesten:

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ eksisterer(den kan være ∞!). Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken
3. Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon

Alternerende rekker test:

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke av typen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \quad b_n > 0$. Hvis;

1. $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ og
2. $\{b_n\}$ er en synkende følge

Så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Viktige rekker:

1. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer hviss $p > 1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, hvis $|x| < 1$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

Rekker av funksjoner:

Weierstrass' M-test:

La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Anta det finnes en konvergent rekke (av tall) $\sum M_n$ slik at $|v_n(a) \leq M_n|$ for alle n og alle $a \in A$. Da konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på A.

Potensrekker:

Definisjon:

En Potensrekke er en funksjonsrekke på formen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

Flervariabel kalkulus:

Kjerneregelen:

Anta $h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ og $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, er to deriverbare funksjoner. Anta så en funksjon $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ definert med: $f = x(h)$. Da er: $\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(\hat{x_0}) \frac{dx_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(\hat{x_0}) \frac{dx_2}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x_n}(\hat{x_0}) \frac{dx_n}{dt}(t_0)$

Differensialet:

La $f : X \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en funksjon, la $\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$ Differensialet til f i $\hat{a}$ er da en funksjon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definert med: $h(\hat{x}) = f(\hat{a}) + f_{x_1}(x_1 - a_1) + f_{x_2}(x_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(x_n - a_n)$

Kjente grenser:

Logaritmiske og eksponentsielle:

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$
3. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
4. $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{mk}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = \frac{1}{e^k}$
7. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x-1}{x}\right)^x = \ln(a),\ a > 0$
8. $\lim_{x\to 0}(1+a(e^{-x}-1))^{-\frac{1}{x}} = e^a$
9. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Trigonometriske:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x\to n^{\pm}} \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \mp\infty$ For alle $n \in \mathbb{N}$

Hvis grensen ikke er her; HUSK L'HÔPITAL!!!