Uegentige Integraler:

Sammenligningskriteriet:

La $f, g : [a : \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlig og positiv. Anta $f(x) \geq (x)$ for alle x:

1. Hvis $\int_a^\infty f(x)dx$ Konvergerer $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ Konvergerer
2. Hvis $\int_a^\infty g(x)dx$ Divergerer $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ Divergerer

Grensesammenligningskriteriet:

La $f, g : [a : \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlig og positiv.

1. $\int_a^\infty f(x)dx$ Konvergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)$ Konvergerer
2. $\int_a^\infty f(x)dx$ Divergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0 \Rightarrow \int_a^\infty g(x)$ Divergerer

Viktige Integraler:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ Konvergerer for $p < 1$, divergerer for $p \geq 1$
$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$Konvergerer for $p > 1$,divergerer for $p \leq 1$

Taylorpolynom:

Taylors formel med restledd:

Anta f og den n+1 første deriverte er kont på $[a, b]$:
$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{n+1}(t)(b-t)^n dt$

Lagranges restleddformel

Anta f of dens n+1 første deriverte er kont på $[a, b]$
$R_n f(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Funksjonsfølger:

Punktvis og uniform konvergens:

Definisjon av punktvis konvergens:

La $\{f_n\}$ være en følge som er definert på en mengde A, og la f være en funksjon definert på samme mengde A. f_n Konvergerer punktvis mot f på A, Hvis: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle x i A

Definisjon av avstand mellom to funksjoner over A:

f og g er definert på samme mengde A. avstanden blir da: $d_A(f, g) = sup\{|f(x) - g(x) : x \in A|\}$

Definisjon av uniform kovergens:

En funksjonsfølge $\{f_n\}$, definert på A, konvergerer uniformt mot f(Også definert på A) hvis: $\lim_{n\to\infty} d_A(f, f_n) = 0$

Dinis teorem:

Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kont. funksjoner som konvergerer punktvis mot en kont. funksjon f på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$. Da konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot f på $[a, b]$

Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Integrasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$ er en føge av funksjoner som konvergerer uniformt mot f på [a,b], da er $\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$ for $c \in [a, b]$ dette gjelder også for
$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(t)dt = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$

Derivasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$ er en funksjonsfølge på [a,b], og de deriverte f'_n konvergerer uniformt mot en funksjon h. Anta at $\{f_n(d)\}$ konvergerer for et tall $d \in [a, b]$. Da konvergerer$\{f_n\}$ mot en deriverbar funksjon f og $f' = h$
$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'$

Rekker

Egenskaper ved rekker:

La $\sum_{n=0}^\infty a_n$ og $\sum_{n=0}^\infty b_n$ være konvergente rekker:

1. $\sum_{n=0}^\infty (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^\infty a_n \pm \sum_{n=0}^\infty b_n$
2. $\sum_{n=0}^\infty ca_n = c \sum_{n=0}^\infty a_n$

Absolutt og betinget konvergens

Definisjon:

Vi sier at rekken $\sum a_n$ konvergerer absolutt dersom $\sum |a_n|$ konvergerer.

Lemma:

Dersom $\sum a_n$ er betinget konvergent, divergerer både $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$

Divergenstesten:

$\sum_{n=0}^\infty a_n$Konveregerer $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Integraltesten:

Anta $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}]$ er en pos., kont. og avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hviss integralet $\int_1^\infty f(x)dx$ konveregerer.

Sammenligningstesten:

La $\sum_{n=1}^\infty a_n$ og $\sum_{n=1}^\infty b_n$ være to positive rekker

1. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergerer og at det finnes et tall c slik at $b_n \leq c \cdot a_n$ for alle n. Da konveregerer $\sum_{n=1}^\infty b_n$.
2. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergerer og at det finnes et positivt tall d slik at $b_n \geq d \cdot a_n$ for alle n. Da divergerer $\sum_{n=1}^\infty b_n$

Grensesammenligningstesten:

La $\sum_{n=1}^\infty a_n$ og $\sum_{n=1}^\infty b_n$ være to positive rekker:

1. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergerer og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$. Da konvergerer også $\sum_{n=1}^\infty b_n$.
2. Anta at $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergerer og at $\lim_{n\to\infty} > 0$. Da divergerer også $\sum_{n=1}^\infty b_n$

Forholdstesten:

La $\sum_{n=0}^\infty a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$ eksisterer(Den kan være ∞!). Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, Konveregerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, Divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Rottesten:

La $\sum_{n=0}^\infty a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ eksisterer(den kan være ∞!). Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken
3. Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon

Alternerende rekker test:

Anta $\sum_{n=1}^\infty a_n$ er en rekke av typen $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n \quad b_n > 0$. Hvis;

1. $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ og
2. $\{b_n\}$ er en synkende følge

Så konvergerer $\sum_{n=1}^\infty a_n$

Viktige rekker:

1. Rekken $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ konvergerer hviss $p > 1$

Rekker av funksjoner:

Weierstrass' M-test:

La $\sum_{n=0}^\infty v_n(x)$ være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Anta det finnes en konvergent rekke (av tall) $\sum M_n$ slik at $|v_n(a) \leq M_n|$ for alle n og alle alle $a \in A$. Da konvergerer rekken $\sum_{n=0}^\infty v_n(x)$ uniformt og absolutt på A.