

Uegentige Integraler:

Sammenligningskriteriet:

La  $f, g : [a : \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  , kontinuerlig og positiv. Anta  $f(x) \geq (x)$  for alle x:

- 1. Hvis  $\int_a^\infty f(x)dx$  Konvergerer  $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$  Konvergerer
- 2. Hvis  $\int_a^\infty g(x)dx$  Divergerer  $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$  Divergerer

Grensesammenligningskriteriet:

La  $f, g : [a : \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  , kontinuerlig og positiv.

- 1.  $\int_a^\infty f(x)dx$  Konvergerer og  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)$  Konvergerer
- 2.  $\int_a^\infty f(x)dx$  Divergerer og  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0 \Rightarrow \int_a^\infty g(x)$  Divergerer

Viktige Integraler:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  Konvergerer for  $p < 1$ , divergerer for  $p \geq 1$   
 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  Konvergerer for  $p > 1$ , divergerer for  $p \leq 1$

Taylorpolynom:

Taylors formel med restledd:

Anta f og den n+1 første deriverte er kont på  $[a, b]$ :  
 $f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{n+1}(t)(b-t)^n dt$

Lagranges restleddformel

Anta f of dens n+1 første deriverte er kont på  $[a, b]$   
 $R_n f(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

Funksjonsfølger:

Punktvis og uniform konvergens:

Definisjon av punktvis konvergens:

La  $\{f_n\}$  være en følge som er definert på en mengde A, og la f være en funksjon definert på samme mengde A.  $f_n$  Konvergerer punktvis mot f på A, Hvis:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  for alle x i A

Definisjon av avstand mellom to funksjoner over A:

f og g er definert på samme mengde A. avstanden blir da:  
 $d_A(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}$

Definisjon av uniform kovergens:

En funksjonsfølge  $\{f_n\}$ , definert på A, konvergerer uniformt mot f (Også definert på A) hvis:  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(f, f_n) = 0$

Dinis teorem:

Anta at  $\{f_n\}$  er en voksende følge av kont. funksjoner som konvergerer punktvis mot en kont. funksjon f på et lukket, begrenset intervall  $[a, b]$ . Da konvergerer  $\{f_n\}$  uniformt mot f på  $[a, b]$

Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Integrasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$  er en føge av funksjoner som konvergerer uniformt mot f på  $[a, b]$ , da er  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$  for  $c \in [a, b]$  dette gjelder også for  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n(t)dt = \int_a^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt$

Derivasjon av funksjonsfølger

$\{f_n\}$  er en funksjonsfølge på  $[a, b]$ , og de deriverte  $f'_n$  konvergerer uniformt mot en funksjon h. Anta at  $\{f_n(d)\}$  konvergerer for et tall  $d \in [a, b]$ . Da konvergerer  $\{f_n\}$  mot en deriverbar funksjon f og  $f' = h$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'$

Rekker

Egenskaper ved rekker:

La  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  og  $\sum_{n=0}^\infty b_n$  være konvergente rekker:  
1.  $\sum_{n=0}^\infty (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^\infty a_n \pm \sum_{n=0}^\infty b_n$   
2.  $\sum_{n=0}^\infty ca_n = c \sum_{n=0}^\infty a_n$

Absolutt og betinget konvergens

Definisjon:

Vi sier at rekken  $\sum a_n$  konvergerer absolutt dersom  $\sum |a_n|$  konvergerer.

Lemma:

Dersom  $\sum a_n$  er betinget konvergent, divergerer både  $\sum a_n^+$  og  $\sum a_n^-$

Divergenstesten:

$\sum_{n=0}^\infty a_n$  Konvergerer  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Integraltesten:

Anta  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  er en pos., kont. og avtagende funksjon. Da konvergerer rekken  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  hviss integralet  $\int_1^\infty f(x)dx$  konvergerer.

Sammenligningstesten:

La  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  og  $\sum_{n=1}^\infty b_n$  være to positive rekker

- 1. Anta at  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  konvergerer og at det finnes et tall c slik at  $b_n \leq c \cdot a_n$  for alle n. Da konvergerer  $\sum_{n=1}^\infty b_n$ .
- 2. Anta at  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  divergerer og at det finnes et positivt tall d slik at  $b_n \geq d \cdot a_n$  for alle n. Da divergerer  $\sum_{n=1}^\infty b_n$

Grensesammenligningstesten:

La  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  og  $\sum_{n=1}^\infty b_n$  være to positive rekker:

- 1. Anta at  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  konvergerer og at  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$ . Da konvergerer også  $\sum_{n=1}^\infty b_n$ .
- 2. Anta at  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  divergerer og at  $\lim_{n \rightarrow \infty} > 0$ . Da divergerer også  $\sum_{n=1}^\infty b_n$

Forholdstesten:

La  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  være en rekke og anta at grensen  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$  eksisterer (Den kan være  $\infty!$ ). Da gjelder:

- 1. Dersom  $a < 1$ , Konvergerer rekken absolutt.
- 2. Dersom  $a > 1$ , Divergerer rekken.
- 3. Dersom  $a = 1$ , gir testen ingen konklusjon.

Rottesten:

La  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  være en rekke og anta at grensen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$  eksisterer (den kan være  $\infty!$ ). Da gjelder:

- 1. Dersom  $a < 1$ , konvergerer rekken absolutt.
- 2. Dersom  $a > 1$ , divergerer rekken
- 3. Dersom  $a = 1$ , gir testen ingen konklusjon

Alternierende rekker test:

Anta  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  er en rekke av typen  $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n$   $b_n > 0$ . Hvis;

- 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  og
- 2.  $\{b_n\}$  er en synkende følge

Så konvergerer  $\sum_{n=1}^\infty a_n$

Viktige rekker:

- 1. Rekken  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  konvergerer hviss  $p > 1$

Rekker av funksjoner:

Weierstrass' M-test:

La  $\sum_{n=0}^\infty v_n(x)$  være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Anta det finnes en konvergent rekke (av tall)  $\sum M_n$  slik at  $|v_n(a)| \leq M_n$  for alle n og alle  $a \in A$ . Da konvergerer rekken  $\sum_{n=0}^\infty v_n(x)$  uniformt og absolutt på A.

Potensrekker:

Definisjon:

En Potensrekke er en funksjonsrekke på formen:  $\sum_{n=0}^\infty a_n (x-a)^n$