

## Subspace

Et subspace av  $\mathbb{R}^n$  er et subset  $V$  av  $\mathbb{R}^n$ , som oppfyller:

1. Nonemptiness:  $\vec{0} \in V$
2. Closure under additiion:  $\vec{u}, \vec{k} \in V \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{k} \in V$
3. Closure under multiplication:  $\vec{u} \in V \Leftrightarrow c\vec{u} \in V$

Alle subspaces er et span og alle span er et subspace

## Finne ut om et subset er et subspace

- Er subsettet et span? Kan det skrives som et span?
- Kan det bli skrevet som et columnspace til en matrise?
- Kan det bli skrevet som nullspacet til en matrise
- Er det hele  $\mathbb{R}^n$  eller  $\{\vec{0}\}$
- Kan det skrives som en type subspace?
  - Eigenspace
  - Ortogonal complement etc...
- Kan en bekrefte de tre kravene til et subspaces er oppfylt?

## Basis:

La  $V$  være et subspace av  $\mathbb{R}^n$ . En basis til  $V$  vil da være et sett av vektorer  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  slik at:

1.  $V = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$
2.  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  Er lineært uavhengig.

## Rank Theorem:

- $\text{Rank}(A) = \text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Row}(A))$
- $\text{Nullity}(A) = \text{Dim}(\text{Null}(A))$

Hvis  $A$  er en  $m \times n$  matrise, Da:

$$\text{Rank}(A) + \text{Nullity}(A) = n$$

## Invertibel matrise teorem:

La  $A$  være en kvadratisk matrise. Følgende utsagn er ekvivalent:

1.  $A$  er invertibel
2. Redusert trappeform til  $A$  er identitetsmatrisen
3.  $A\vec{x} = 0$  Har ingen løsninger annet en den trivielle
4.  $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$   $\text{Nullity}(A) = 0$
5. Kolonnene til  $A$  er lineært uavhengig
6. Kolonnene til  $A$  former en basis for  $\mathbb{R}^n$
7.  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$
8.  $\text{Rank}(A) = n$
9.  $A\vec{x} = b$  er konsistent for alle  $b$  i  $\mathbb{R}^n$
10.  $A\vec{x} = b$  har en unik løsning for alle  $b$  i  $\mathbb{R}^n$
11.  $\det(A) \neq 0$
12.  $\vec{0}$  er ikke en egenvektor til  $A$

## Determinant:

### Definisjon:

Determinanten er en funksjon:

$$\det : \{n \times n \text{ matrise}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Som oppfyller følgende attributter:

1. Å legge til en multipl av en rad til en annen rad, endrer ikke determinanten
2. Skalere en av radene til  $A$  med en skalar  $c$  multipliserer determinanten med  $c$
3. Bytte to rader av en matrise, multipliserer determinanten med  $-1$
4. Determinanten til identitetsmatrisen er 1

### Atributter til determinanten:

- Hvis  $A$  har en 0 kollone eller 0 rad så er determinanten 0
- Hvis  $A$  er triangulær, så er determinanten produktet av elementene langs diagonalen
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- Hvis en matrise  $A$  har to like rader, så er  $\det(A) = 0$
- Determinanten er volumet til parallelepipedet spent ut av kolonnene til en matrise

### Egenvektor og egenverdier:

La  $A$  være en  $n \times n$  matrise:

1. En egenvektor av  $A$  er en ikkenull vektor  $\vec{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  slik at  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
2. En egenverdi av  $A$  er en skalar  $\lambda$ , slik at likningen  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , har en ikke-triviell løsning.

Obs! Egenvektor er ved definisjon ikkenull, men egenverdier kan være 0

### Det karakteristiske polynomet:

#### Definisjon:

Karakteristiske polynomet til en matrise  $A$  er funksjonen:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

#### Theorem:

La  $A$  være en kvadratisk matrise, og la  $f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  være dens karakteristiske polynom. Da er  $\lambda$  en egenverdi til  $A$  hvis  $f(\lambda) = 0$

### Similære matriser:

#### Definisjon:

To kvadratiske matriser  $A$  og  $B$  er similære, hvis det finnes en invertibel matrise  $C$  slik at  $A = CBC^{-1}$

### Atributter til similære matriser:

- Refleksivitet:  $A$  er similær med seg selv
- Symmetri:  $A$  er similær med  $B \Leftrightarrow B$  er similær med  $A$

- Transitivitet: A er similær med B, og B er similær med C, da er A similær med C
- $A = CBC^{-1} \rightarrow A^n = CB^nC^{-1}$
- $A = CBC^{-1}$ :  $\vec{v}_1$  er en egenvektor til A  $\Rightarrow C^{-1}\vec{v}_1$  er en egenvektor til B
- $A = CBC^{-1}$ :  $\vec{v}_2$  er en egenvektor til B  $\Rightarrow C\vec{v}_2$  er en egenvektor til A

#### Diagonalisering:

#### Definisjon:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hvis den er similær til en diagonal matrise.

#### Theorem:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hviss A har n lineært uavhengige egenvektorer. I tilfellet,  $A = CDC^{-1}$  så gjelder:

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hvor  $v_1, v_2, \dots, v_n$  og  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  er egenvektorene/verdiene til A

#### Ortogonal komplement:

La  $V$  være et underrom i  $\mathbb{R}^n$ , da er det ortogonale komplementet til  $V$ , alle vektorer som står ortogonalt på  $V$   
 $V^\perp = \{\vec{x} | \vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \vec{y} \in V\}$

OBS! Må ikke forveksles med ortogonal basis!

#### Ortogonal basis:

En ortogonal basis, er en basis  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  for et subspace  $V$ , der  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ . Altså alle vektorene i basisen, er ortogonale.

#### Ortonormal basis:

I en ortonormal basis er alle vektorene av lengde 1.

#### Gram-Schmidt:

Brukes for å finne ortogonal basis til et underrom:

Gitt en basis  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  for et underrom  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er en ortogonal basis vektorene  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  hvor:

1.  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$
2.  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - Proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_2$
3.  $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - Proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - Proj_{\vec{u}_2} \vec{v}_3$
4.  $\vec{u}_m = \vec{v}_m - \sum_{i=1}^m Proj_{\vec{u}_i} \vec{v}_m$

#### Ortogonal diagonalisering:

En matrise A er ortogonal diagonaliserbar hviss:

- A er symmetrisk om diagonalen.
- $A = PDP^{-1}$ , hvor P er en ortogonal matrise.
  - En ortogonal matrise er en matrise, hvor kolonnene er ortogonale enhetsvektorer
  - $Q^T = Q^{-1} \Leftrightarrow Q^T Q = I$

#### Komplekse Matriser:

- En kompleks matrise A er Hermitsk hviss  $A = A^T$
- En kompleks matrise A er unitær hviss  $A \cdot A = I$ 
  - Kolonnene til A er en ortonormal basis til  $\mathbb{C}$