

Subspace

Et subspace av \mathbb{R}^n er et subset V av \mathbb{R}^n , som oppfyller:

1. Nonemptiness: $\vec{0} \in V$
2. Closure under additiion: $\vec{u}, \vec{k} \in V \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{k} \in V$
3. Closure under multiplication: $\vec{u} \in V \Leftrightarrow c\vec{u} \in V$

Alle subspaces er et span og alle span er et subspace

Finne ut om et subset er et subspace

- Er subsettet et span? Kan det skrives som et span?
- Kan det bli skrevet som et columnspace til en matrise?
- Kan det bli skrevet som nullspacet til en matrise
- Er det hele \mathbb{R}^n eller $\{\vec{0}\}$
- Kan det skrives som en type subspace?
 - Eigenspace
 - Ortogonal complement etc...
- Kan en bekrefte de tre kravene til et subspaces er oppfylt?

Basis:

La V være et subspace av \mathbb{R}^n . En basis til V vil da være et sett av vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ slik at:

1. $V = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$
2. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ Er lineært uavhengig.

Rank Theorem:

- $\text{Rank}(A) = \text{Dim}(\text{Col}(A)) = \text{Dim}(\text{Row}(A))$
- $\text{Nullity}(A) = \text{Dim}(\text{Null}(A))$

Hvis A er en $m \times n$ matrise, Da:

$$\text{Rank}(A) + \text{Nullity}(A) = n$$

Invertibel matrise teorem:

La A være en kvadratisk matrise. Følgende utsagn er ekvivalent:

1. A er invertibel
2. Redusert trappeform til A er identitetsmatrisen
3. $A\vec{x} = 0$ Har ingen løsninger annet en den trivielle
4. $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$ $\text{Nullity}(A) = 0$
5. Kolonnene til A er lineært uavhengig
6. Kolonnene til A former en basis for \mathbb{R}^n
7. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$
8. $\text{Rank}(A) = n$
9. $A\vec{x} = b$ er konsistent for alle b i \mathbb{R}^n
10. $A\vec{x} = b$ har en unik løsning for alle b i \mathbb{R}^n
11. $\det(A) \neq 0$
12. $\vec{0}$ er ikke en egenvektor til A

Determinant:

Definisjon:

Determinanten er en funksjon:

$$\det : \{n \times n \text{ matrise}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Som oppfyller følgende attributter:

1. Å legge til en multipl av en rad til en annen rad, endrer ikke determinanten
2. Skalere en av radene til A med en skalar c multipliserer determinanten med c
3. Bytte to rader av en matrise, multipliserer determinanten med -1
4. Determinanten til identitetsmatrisen er 1

Atributter til determinanten:

- Hvis A har en 0 kollone eller 0 rad så er determinanten 0
- Hvis A er triangulær, så er determinanten produktet av elementene langs diagonalen
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- Hvis en matrise A har to like rader, så er $\det(A) = 0$
- Determinanten er volumet til parallelepipedet spenst ut av kolonnene til en matrise

Egenvektor og egenverdier:

La A være en $n \times n$ matrise:

1. En egenvektor av A er en ikkenull vektor \vec{v} i \mathbb{R}^n slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
2. En egenverdi av A er en skalar λ , slik at likningen $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, har en ikke-triviell løsning.

Obs! Egenvektor er ved definisjon ikkenull, men egenverdier kan være 0

Det karakteristiske polynomet:

Definisjon:

Karakteristiske polynomet til en matrise A er funksjonen:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Theorem:

La A være en kvadratisk matrise, og la $f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ være dens karakteristiske polynom. Da er λ en egenverdi til A hvis $f(\lambda) = 0$

Similære matriser:

Definisjon:

To kvadratiske matriser A og B er similære, hvis det finnes en invertibel matrise C slik at $A = CBC^{-1}$

Atributter til similære matriser:

- Refleksivitet: A er similær med seg selv
- Symmetri: A er similær med $B \Leftrightarrow B$ er similær med A

- Transitivitet: A er similær med B, og B er similær med C, da er A similær med C
- $A = CBC^{-1} \rightarrow A^n = CB^nC^{-1}$
- $A = CBC^{-1}$: \vec{v}_1 er en egenvektor til A $\Rightarrow C^{-1}\vec{v}_1$ er en egenvektor til B
- $A = CBC^{-1}$: \vec{v}_2 er en egenvektor til B $\Rightarrow C\vec{v}_2$ er en egenvektor til A

Diagonalisering:

Definisjon:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hvis den er similær til en diagonal matrise.

Theorem:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hviss A har n lineært uavhengige egenvektorer. I tilfellet, $A = CDC^{-1}$ så gjelder:

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hvor v_1, v_2, \dots, v_n og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ er egenvektorene/verdiene til A

Ortogonal komplement:

La V være et underrom i \mathbb{R}^n , da er det ortogonale komplementet til V , alle vektorer som står ortogonalt på V
 $V^\perp = \{\vec{x} | \vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \vec{y} \in V\}$

OBS! Må ikke forveksles med ortogonal basis!

Ortogonal basis: