Subspace

Et subspace av $\mathbb{R}^n$ er et subset V av $\mathbb{R}^n$, som oppfyller:

1. Nonemptiness: $\vec{\mathbf{0}} \in V$
2. Closure under additiion: $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{k}} \in V \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{k}} \in V$
3. Closure under multiplication: $\vec{\mathbf{u}} \in V \Leftrightarrow c\vec{\mathbf{u}} \in V$

Alle subspaces er et span og alle span er et subspace

Finne ut om et subset er et subspace

- Er subsettet et span? Kan det skrives som et span?
- Kan det bli skrevet som et columnspace til en matrise?
- Kan det bli skrevet som nullspacet til en matrise
- Er det hele $\mathbb{R}^n$ eller $\{\vec{\mathbf{0}}\}$
- Kan det skrives som en type subspace?
  - Eigenspace
  - Ortogonal complement etc...
- Kan en bekrefte de tre kravene til et subspaces er oppfylt?

Basis:

La V være et subspace av $\mathbb{R}^n$. En basis til V vil da være et sett av vektorer $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \dots \vec{\mathbf{v_n}}\}$ slik at:

1. $V = Span\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \dots \vec{\mathbf{v_n}}\}$
2. $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \dots \vec{\mathbf{v_n}}\}$ Er lineært uavhengig.

Rank Theorem:

- $Rank(A) = Dim(Col(A)) = Dim(Row(A))$
- $Nullity(A) = Dim(Null(A))$

Hvis A er en $m \times n$ matrise, Da:
$Rank(A) + Nullity(A) = n$

Invertibel matrise teorem:

La A være en kvadratisk matrise. Følgende utsagn er ekvivalent:

1. A er invertibel
2. Redusert trappeform til A er identitetsmatrisen
3. $A\vec{\mathbf{x}} = 0$ Har ingen løsninger annet en den trivielle
4. $Nul(A) = \{\vec{\mathbf{0}}\} \quad Nullity(A) = 0$
5. Kolonnene til A er lineært uavhengig
6. Kolonnene til A former en basis for $\mathbb{R}^n$
7. $Col(A) = \mathbb{R}^n$
8. $Rank(A) = n$
9. $A\vec{\mathbf{x}} = b$ er konsistent for alle b i $\mathbb{R}^n$
10. $A\vec{\mathbf{x}} = b$ har en unik løsning for alle b i $\mathbb{R}^n$
11. $det(A) \neq 0$
12. $\vec{\mathbf{0}}$ er ikke en egenvektor til A

Determinant:

Definisjon:

Determinanten er en funksjon:
$det : \{n \times nmatrise\} \to \mathbb{R}$
Som oppfyller følgende atributter:

1. Å legge til en multippel av en rad til en annen rad, endrer ikke determinanten
2. Skalere en av radene til A med en skalar c multipliserer determinanten med c
3. Bytte to rader av en matrise, multipliserer determinanten med -1
4. Determinanten til identitetsmatrisen er 1

Atributter til determinanten:

- Hvis A har en 0 kollone eller 0 rad så er determinanten 0
- Hvis A er triangulær, så er determinanten produktet av elementene langs diagonalen
- $det(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)})$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^T) = det(A)$
- Hvis en matrise A har to like rader, så er $det(A) = 0$
- Determinanten er volumet til paralellepipeden spent ut av kolonnene til en matrise

Egenvektor og egenverdier:

La A være en $n \times n$ matrise:

1. En egenvektor av A er en ikkenull vektor $\vec{\mathbf{v}}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$
2. En egenverdi av A er en skalar λ, slik at likningen $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, har en ikketriviell løsning.

Obs! Egenvektor er ved definisjon ikkenull, men egenverdier kan være 0

Det karakteristiske polynomet:

Definisjon:

Karakteristiske polynomet til en matrise A er funksjonen:
$f(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$

Theorem:

La A være en kvadratisk matrise, og la $f(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ være dens karakteristiske polynom. Da er λ en egenverdi til A hviss $f(\lambda) = 0$

Similære matriser:

Definisjon:

To kvadratiske matriser A og B er similære, hvis det finnes en ivertibel matrise C slik at $A = CBC^{-1}$

Atributter til similære matriser:

- Refleksivitet: A er similær med seg selv
- Symmetri: A er similær med B $\Leftrightarrow$ B er similær med A

- Transitivitet: A er similær med B, og B er similær med C, da er A similær med C
- $A = CBC^{-1} \rightarrow A^n = CB^nC^{-1}$
- $A = CBC^{-1}$: $\vec{\mathbf{v_1}}$ er en egenvektor til A $\Rightarrow C^{-1}\vec{\mathbf{v_1}}$ er en egenvektor til B
- $A = CBC^{-1}$: $\vec{\mathbf{v_2}}$ er en egenvektor til B $\Rightarrow C\vec{\mathbf{v_2}}$ er en egenvektor til A

Diagonalisering:

Definisjon:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hvis den er similær til en diagonal matrise.

Theorem:

En kvadratisk matrise A er diagonaliserbar hviss A har n lineært uavhengige egenvektorer. I tilfellet, $A = CDC^{-1}$ så gjelder:

$$C = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \; D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hvor $v_1, v_2 \ldots v_n$ og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er egenvektorene/verdiene til A

Ortogonal kompliment:

La V være et underrom i $\mathbb{R}^n$, da er det ortogonale komplimentet til V, alle vektorer som står ortogonalt på V
$V^{\perp} = \{\vec{x} | x \cdot \vec{y} = 0, y \in V\}$
OBS! Må ikke forveksles med ortogonal basis!

Ortogonal basis:

En ortogonal basis, er en basis $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ for et subspace V, der $\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = 0$. Altså alle vektorene i basisen, er ortogonale.

Ortonormal basis:

I en ortonormal basis er alle vektorene av lengde 1.