

Sannsynlighetsfordelinger:

Binomisk Fordeling:

1. n uavhengige delforsøk
2. Suksess eller ikke
3. $P(A)=p$ i alle forsøk
 - $X =$ Antall ganger A inntreffer på n forsøk.
 - $X \sim \text{binom}(n, p)$
 - $f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$
 - $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x P(X = k)$
 - $E(X) = np$ $Var(X) = np(1-p)$

Hypergeometrisk:

1. Populasjon med N elementer.
2. k av disse regnes som "Suksess", $N-k$ som fiasko
3. Trekker n elementer uten tilbakelegging
 - X , antallet suksesser.
 - $f(x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
 - $E(X) = np$ $Var(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$, $p = k/N$

Negativ-Binomisk:

X er antall forsøk en må gjøre for at en hendelse A skal inntreffe k ganger

- $f(x) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^k (1-p)^{x-k}$, $x = k, k+1, k+2, \dots$
- $E(X) = k/p$ $Var(x) = k \cdot \frac{1-p}{p^2}$

Geometrisk:

X er antall forsøk en må gjøre for at hendelsen A inntreffer første gang.

- $g(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$
- $E(X) = 1/p$ $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Geometrisk fordeling er minneløs!

Poisson:

Antall forekomster av hendelsen A er Poisson-fordelt hvis:

1. Antallet av A i disjunkte tidsintervall er uavhengige
2. Forventa antall av A er konstant lik λ (raten) per tidsenhet
3. Kan ikke få to forekomster samtidig
 - $X =$ antall forekomster av A i et tidsrom t
 - $f(x) = \frac{(\lambda t)^x \cdot e^{-\lambda t}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$
 - $E(X) = \lambda t$ $Var(X) = \lambda t$
 - $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x P(X = k)$
 - Ventetida til hendelse k er gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = 1/\lambda$
 - Ventetida til første hendelse, og mellom etterfølgende hendelser, er eksponensialfordelt

Uniform fordeling:

En kontinuerlig uniformt fordelt variabel, har samme sannsynlighet for alle verdier innen et intervall. Generelt har vi tetthetsfunksjonen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{A+B}{2}$ $Var(X) = \frac{(A-B)^2}{12}$

Gammafordeling:

En kontinuerlig variabel X er gammelfordelt med parameter $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ dersom tetthetsfunksjonen er gitt

ved: $f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$

- $E(X) = \alpha\beta$ $Var(X) = \alpha\beta^2$
- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Eksponensialfordeling:

- $f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- $E(X) = \beta$ $Var(X) = \beta^2$

Eksponensialfordelinga er minneløs!

Normalfordeling:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Standard normalfordeling:

- Alle normalfordelinger kan skrives som Standard normalfordeling
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- $F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Anta at X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige og normalfordelt.

Da er: $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$ Være normalfordelt med:

- $E(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$ $Var(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2$

Inferens:

QQ-Plot:

- Plotter observasjoner mot teoretiske ("ideelle") observasjoner fra en aktuell fordeling.
- Teoretiske observasjoner er gitt ved invers kumulativ fordeling av jevnt spredte Sannsynlighetsfordelinger mellom 0 og 1.
- Om antatt fordeling stemmer skal plottet gi tilnærmet rett linje.

Estimering:

Viktige estimatoregenskaper:

- En punktestimator Θ for en parameter θ er forventningsrett hvis $E(\Theta) = \theta$

- Variansen $Var(\Theta)$ burde synke med økende antall observasjoner
- Om en har to ulike estimatorer, så er den estimatoren med minst varians den mest effektive estimatoren.

Vanlige estimatorer:

Alle estimatorene vist til her er forventningsrett.

- μ : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $E(\bar{X}) = \mu$ $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- σ^2 : $S^2 = \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ $E(S^2) = \sigma^2$ $Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
- p : $\hat{p} = \frac{X}{n}$ $E(\hat{p}) = p$ $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ Binomisk
- $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$
- $p_1 - p_2$: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, Binomisk
- μ_D : \bar{D}

Utvalgsfordelinger:

\bar{X}, Z :

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$ Selv om populasjonen ikke er normalfordelt gjelder dette når $n \rightarrow \infty$. Regner vanligvis tilnærmina for god når $n > 30$

Sentralgrenseteoremet:

Når utvalgsstørrelsen $N \rightarrow \infty$ så vil $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ for uansett fordeling av X . Godkjener dette for $N \geq 30$

T

Hvis ukjent varians: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ Dette gjelder tilnærmet andre fordelinger som har klokkeliknende form.

S^2 :

Forutsatt normalfordeling: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$

\hat{p} :

Binomisk forsøk med sannsynlighet p , gitt at n er stor nok: $Z = \frac{\hat{p} - E(\hat{p})}{\sqrt{Var(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1)$

$\hat{X}_1 - \hat{X}_2$:

Kjent varians:

- $\hat{X}_1 - \hat{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$

Ukjent varians:

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$
- $S_p^2 = \frac{S_1^2(n_1-1) + S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}$

$$\bullet \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2: T' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_v,$$

$$v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

F

Fra to uavhengige NF utvalg: $F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

D Differanse av parvis utvalg

Gitt normalfordeling: $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Fra utvalgsfordelinger kan en utlede testobservatorer og konfidensintervaller!

Utlede Konfidensintervall:

Anta at vi har X_1, X_2, \dots, X_n stokastiske variabler, hvor sannsynlighetsfordelingen til disse inneholder en ukjent parameter θ . Anta også at vi har observasjoner x_1, x_2, \dots, x_n . Har lyst å bruke disse for å finne et $100(1 - \alpha)\%$ konfidensintervall:

1. Bestem en stokastiske variabel $Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ som følger en kjent fordeling. Altså finn utvalgsfordelingen for parameteren θ
2. Finn kvantilene $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ og $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Da har en at: $P(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) \leq Z_{\frac{\alpha}{2}})$
3. Da er løsningen på ulikhetene $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ og $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \geq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ konfidensintervallet.

Prediksjonsintervall:

μ, σ kjent:

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \mu}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

μ kjent og σ ukjent:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \bar{X}}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

μ, σ ukjent:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \bar{X}}{S \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Hypotesetesting:

Velger testobservator med kjent fordeling (Velger utvalgsfordelingen til parameteren) når nullhypotesen er sann. Dersom utregna testobservator gir en verdi som er veldig usannsynlig hvis nullhypotesen er sann forkastes nullhypotesen.

Forkastningsområde:

Forkastnings område velges slik at det skal være en sannsynlighet α for å få en så ekstrem verdi, dersom H_0 er sant. Kritisk verdi blir da z_α , og vi forkaster H_0 om $Z > z_\alpha$

Kritisk region:

Hypotesetest for parameter θ og fordeling z :

$$\left| \begin{array}{ll} \theta < \theta_0 & z < -z_\alpha \\ \theta > \theta_0 & z > z_\alpha \\ \theta \neq \theta_0 & z < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ eller } z > z_{\frac{\alpha}{2}} \end{array} \right|$$

Type 1 og type 2 feil:

- Type 1: Forkaste h_0 når h_0 er sann:
 $\alpha = P(\text{Forkaste } h_0 | h_0 \text{ sann})$
- Type 2: Forkaster ikke h_0 når h_1 er sann:
 $\beta = P(\text{Beholder } h_0 | h_1 \text{ sann})$

P-verdi:

$P(\text{minst like ekstremt resultat som vi fikk} | H_0 \text{ sann})$

Styrken til hypotesetest:

Test for parameter θ med utvalgsfordeling z :

Styrken $= 1 - P(\text{type II-feil}) = 1 - \beta$

$P(\text{Forkaste } h_0 | \text{Sann}\theta)$

Løser utvalgsfordelingen til $\theta, f(\hat{\theta}, \theta_0)$, med hensyn på estimert verdi $\hat{\theta}$:

$$P(f(\hat{\theta}, \theta_0) < z_\alpha) = P(\hat{\theta} < f'(\theta_0, z_\alpha))$$

Setter inn for ekte verdi θ , på begge sider av ulikheten:

$$P(f(\hat{\theta}, \theta) > f(\theta_0, \theta)) = P(z > f(\theta_0, \theta))$$

Finner da sannsynligheten.

Enkel lineær regresjon:

Regresjonsmodell:

- $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$
- Forutsatt: $E(\epsilon_i) = 0, \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$
- $E(Y_i) = \mu_{Y|x_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i, \text{Var}(Y_i) = \sigma_{Y|x_i}^2 = \sigma^2$

Minste kvadraters metode:

- Brukes for å finne β_0, β_1 fra data
- Vil minimere $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1)^2$
- Minste verdier av b_0, b_1 kan finnes ved partiellderivasjon.
- $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{x}$
- b_0, b_1 forventningsrette estimatorer for β_0, β_1
- $\text{Var}(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
- $\text{Var}(b_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
- $S^2 = \frac{SSE}{n-2}$

Inferens av parametere:

- $T = \frac{b_1 - E(b_1)}{SE(b_1)} = \frac{b_1 - \beta_1}{\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, t-fordelt, $n-2$ frihetsgrader
- $T = \frac{b_0 - E(b_0)}{SE(b_0)} = \frac{b_0 - \beta_0}{s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, t-fordelt, $n-2$ frihetsgrader

Inferens av σ^2 og $\mu_{Y|x_0}$:

- σ^2 : $V = \frac{(n-2)S^2}{\sigma^2}, \chi^2$ -fordelt, $n-2$ frihetsgrader
- $\mu_{Y|x_0}$: $T = \frac{\hat{Y}_0 - \mu_{Y|x_0}}{s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$, t-fordelt, $n-2$ frihetsgrader

Generell sannsynlighet og statistikkregler:

- Addisjonsregel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Betinget sannsynlighet $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Multiplikasjonsregelen:
 $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
- Kumulativ fordelingsfunksjon: $F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{t \leq x} P(X = t), & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt, & \text{Kont.} \end{cases}$
- Forventningsverdi:
 $E(X) = \begin{cases} \sum_x X f(x), & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} X f(x) dx, & \text{Kont.} \end{cases}$
- Varians:
 $\text{Var}(X) = \begin{cases} \sum_x (x - \mu)^2 f(x) = E(X^2) - E(X)^2 & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 & \text{Kont.} \end{cases}$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad E(cX) = cE(X)$
- $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
 $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ Ved uavhengighet.

Simultanfordeling for to variabler:

- $P((x, y) \in A) = \begin{cases} \int \int_A f(x, y) dx dy & \text{Kont.} \\ \sum \sum_A F(x, y) & \text{Diskret} \end{cases}$
- $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ eller $\sum_y f(x, y)$ Samme for $h(y)$
- $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$
- $\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y), & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy & \text{Kont.} \end{cases}$
- $\rho_{XY} = \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$
- X, Y uavhengig $\Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimator:

Brukes hvis en ikke har/vet en naturlig estimator for en parameter θ

1. $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$
2. Bruk $\ln(L)$ og deriver med hensyn på θ .
3. Løs $\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta) = 0$ for θ

Eksempel:

- $f(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$
- $L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x_i}{\beta}} = \frac{1}{\beta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\beta}}$
- Ønsker å derivere, men har produkt. så tar \ln :

- $\ln(L(\beta)) \stackrel{\text{Bruker logaritmeregler}}{=} \ln\left(\frac{1}{\beta^n} e^{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\beta}}\right) = \ln(1) - n \cdot \ln(\beta) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\beta}$
- Deriverer:
- $\frac{\partial L}{\partial \beta}(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta}(-n \cdot \ln(\beta)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)$
- $\frac{\partial L}{\partial \beta}(\beta) = -\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n x_i \beta^{-2}$
- Setter uttrykket lik 0 og løser:
- $\frac{n}{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\beta^2}$
- Trekker β^{-2} ut av summen, fordi summen omhandler x
- $\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Logaritmeregler:

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

Forventning:

Forventningsverdien er et sentralmål, og sier noe om hvor sentrum av fordelingen er. Gjennomsnitt av alle observasjonene i populasjonen og tyngdepunktet i sannsynlighetstettheten.

Varians:

Varians er et spredningsmål for fordelingen. Forventet kvadratavvik fra forventningsverdien.