

## Sannsynlighetsfordelinger:

### Binomisk Fordeling:

1.  $n$  uavhengige delforsøk
2. Suksess eller ikke
3.  $P(A)=p$  i alle forsøk
  - $X$  = Antall ganger  $A$  inntreffer på  $n$  forsøk.
  - $X \sim \text{binom}(n, p)$
  - $f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, n$
  - $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x P(X = k)$
  - $E(X) = np$   $Var(X) = np(1-p)$

### Hypergeometrisk:

1. Populasjon med  $N$  elementer.
2.  $k$  av disse regnes som "Suksess",  $N-k$  som fiasko
3. Trekker  $n$  elementer uten tilbakelegging
  - $X$ , antallet suksesser.
  - $f(x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
  - $E(X) = np$   $Var(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$ ,  $p = k/N$

### Negativ-Binomisk:

$X$  er antall forsøk en må gjøre for at en hendelse  $A$  skal inntreffe  $k$  ganger

- $f(x) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^k (1-p)^{x-k}$ ,  $x = k, k+1, k+2, \dots$
- $E(X) = k/p$   $Var(x) = k \cdot \frac{1-p}{p^2}$

### Geometrisk:

$X$  er antall forsøk en må gjøre for at hendelsen  $A$  inntreffer første gang.

- $g(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$
- $E(X) = 1/p$   $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Geometrisk fordeling er minneløs!

### Poisson:

Antall forekomster av hendelsen  $A$  er Poisson-fordelt hvis:

1. Antallet av  $A$  i disjunkte tidsintervall er uavhengige
2. Forventa antall av  $A$  er konstant lik  $\lambda$  (raten) per tidsenhet
3. Kan ikke få to forekomster samtidig
  - $X$  = antall forekomster av  $A$  i et tidsrom  $t$
  - $f(x) = \frac{(\lambda t)^x \cdot e^{-\lambda t}}{x!}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$
  - $E(X) = \lambda t$   $Var(X) = \lambda t$
  - $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x P(X = k)$
  - Ventetida til hendelse  $k$  er gammafordelt med  $\alpha = k$  og  $\beta = 1/\lambda$
  - Ventetida til første hendelse, og mellom etterfølgende hendelser, er eksponensialfordelt

### Uniform fordeling:

En kontinuerlig uniformt fordelt variabel, har samme sannsynlighet for alle verdier innen et intervall. Generelt har vi tetthetsfunksjonen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{A+B}{2}$   $Var(X) = \frac{(A-B)^2}{12}$

### Gammafordeling:

En kontinuerlig variabel  $X$  er gammelfordelt med parameter  $\alpha > 0$  og  $\beta > 0$  dersom tetthetsfunksjonen er gitt ved:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- $E(X) = \alpha\beta$   $Var(X) = \alpha\beta^2$
- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

### Eksponensialfordeling:

- $f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- $E(X) = \beta$   $Var(X) = \beta^2$

Eksponensialfordelinga er minneløs!

### Normalfordeling:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

### Standard normalfordeling:

- Alle normalfordelinger kan skrives som Standard normalfordeling
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- $F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Anta at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige og normalfordelt.

Da er:  $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$  Være normalfordelt med:

- $E(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$   $Var(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2$

### Inferens:

#### QQ-Plot:

- Plotter observasjoner mot teoretiske ("ideelle") observasjoner fra en aktuell fordeling.
- Teoretiske observasjoner er gitt ved invers kumulativ fordeling av jevnt spredte Sannsynlighetsfordelinger mellom 0 og 1.
- Om antatt fordeling stemmer skal plottet gi tilnærmet rett linje.

### Estimering:

#### Viktige estimatoregenskaper:

- En punktestimator  $\Theta$  for en parameter  $\theta$  er forventningsrett hvis  $E(\Theta) = \theta$

- Variansen  $Var(\Theta)$  burde synke med økende antall observasjoner
- Om en har to ulike estimatorer, så er den estimatoren med minst varians den mest effektive estimatoren.

### Vanlige estimatorer:

Alle estimatorene vist til her er forventningsrett.

- $\mu$ :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$   $E(\bar{X}) = \mu$   $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- $\sigma^2$ :  $S^2 = \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$   $E(S^2) = \sigma^2$   $Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
- $p$ :  $\hat{p} = \frac{X}{n}$   $E(\hat{p}) = p$   $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$  Binomisk
- $\mu_1 - \mu_2$ :  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$   $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ :  $\frac{S_1^2}{S_2^2}$
- $p_1 - p_2$ :  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ , Binomisk
- $\mu_D$ :  $\bar{D}$

### Utvalgsfordelinger:

#### $\bar{X}, Z$ :

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$   $Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$  Selv om populasjonen ikke er normalfordelt gjelder dette når  $n \rightarrow \infty$ . Regner vanligvis tilnærmina for god når  $n > 30$

#### Sentralgrenseteoremet:

Når utvalgsstørrelsen  $N \rightarrow \infty$  så vil  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$  for uansett fordeling av  $X$ . Godkjener dette for  $N \geq 30$

#### T

Hvis ukjent varians:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$  Dette gjelder tilnærmet andre fordelinger som har klokkeliknende form.

#### $S^2$ :

Forutsatt normalfordeling:  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$

#### $\hat{p}$ :

Binomisk forsøk med sannsynlighet  $p$ , gitt at  $n$  er stor nok:  $Z = \frac{\hat{p} - E(\hat{p})}{\sqrt{Var(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1)$

#### $\hat{X}_1 - \hat{X}_2$ :

Kjent varians:

- $\hat{X}_1 - \hat{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$

Ukjent varians:

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ :  $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$
- $S_p^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$

$$\bullet \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2: T' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_v,$$

$$v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

#### F

Fra to uavhengige NF utvalg:  $F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$

#### $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

#### D Differanse av parvis utvalg

Gitt normalfordeling:  $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Fra utvalgsfordelinger kan en utlede testobservatorer og konfidensintervaller!

#### Utlede Konfidensintervall:

Anta at vi har  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stokastiske variabler, hvor sannsynlighetsfordelingen til disse inneholder en ukjent parameter  $\theta$ . Anta også at vi har observasjoner  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Har lyst å bruke disse for å finne et  $100(1 - \alpha)\%$  konfidensintervall:

1. Bestem en stokastiske variabel  $Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$  som følger en kjent fordeling. Altså finn utvalgsfordelingen for parameteren  $\theta$
2. Finn kvantilene  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  og  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ . Da har en at:  $P(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) \leq Z_{\frac{\alpha}{2}})$
3. Da er løsningen på ulikhetene  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$  og  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \geq h(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$  konfidensintervallet.

#### Prediksjonsintervall:

$\mu, \sigma$  kjent:

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \mu}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$\mu$  kjent og  $\sigma$  ukjent:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \bar{X}}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\mu, \sigma$  ukjent:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{X_0 - \bar{X}}{S \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

#### Hypotesetesting:

Velger testobservator med kjent fordeling (Velger utvalgsfordelingen til parameteren) når nullhypotesen er sann. Dersom utregna testobservator gir en verdi som er veldig usannsynlig hvis nullhypotesen er sann forkastes nullhypotesen.

#### Forkastningsområde:

Forkastnings område velges slik at det skal være en sannsynlighet  $\alpha$  for å få en så ekstrem verdi, dersom  $H_0$  er sant. Kritisk verdi blir da  $z_\alpha$ , og vi forkaster  $H_0$  om  $Z > z_\alpha$

## Kritisk region:

Hypotesetest for parameter  $\theta$  og fordeling  $z$ :

$$\left| \begin{array}{l} \theta < \theta_0 \\ \theta > \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} z < -z_\alpha \\ z > z_\alpha \\ z < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ eller } z > z_{\frac{\alpha}{2}} \end{array} \right|$$

## Type 1 og type 2 feil:

- Type 1: Forkaste  $h_0$  når  $h_0$  er sann:  
 $\alpha = P(\text{Forkaste } h_0 \mid h_0 \text{ sann})$
- Type 2: Forkaster ikke  $h_0$  når  $h_1$  er sann:  
 $\beta = P(\text{Beholder } h_0 \mid h_1 \text{ sann})$

## P-verdi:

$P(\text{minst like ekstremt resultat som vi fikk} \mid H_0 \text{ sann})$

## Styrken til hypotesetest:

Test for parameter  $\theta$  med utvalgsfordeling  $z$ :

Styrken  $= 1 - P(\text{type II-feil}) = 1 - \beta$

$P(\text{Forkaste } h_0 \mid \text{Sann}\theta)$

Løser utvalgsfordelingen til  $\theta, f(\hat{\theta}, \theta_0)$ , med hensyn på estimert verdi  $\hat{\theta}$ :

$$P(f(\hat{\theta}, \theta_0 < z_\alpha)) = P(\hat{\theta} < f'(\theta_0, z_\alpha))$$

Setter inn for ekte verdi  $\theta$ , på begge sider av ulikheten:

$$P(f(\hat{\theta}, \theta) > f(\theta_0, \theta)) = P(z > f(\theta_0, \theta))$$

Finner da sannsynligheten.

## Enkel lineær regresjon:

### Regresjonsmodell:

- $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$
- Forutsatt:  $E(\epsilon_i) = 0, \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$
- $E(Y_i) = \mu_{Y|x_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i, \text{Var}(Y_i) = \sigma_{Y|x_i}^2 = \sigma^2$

## Minste kvadraters metode:

- Brukes for å finne  $\beta_0, \beta_1$  fra data
- Vil minimere  $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1)^2$
- Minste verdier av  $b_0, b_1$  kan finnes ved partiellderivasjon.
- $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{x}$
- $b_0, b_1$  forventningsrette estimatorer for  $\beta_0, \beta_1$
- $\text{Var}(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
- $\text{Var}(b_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
- $S^2 = \frac{SSE}{n-2}$

## Inferens av parametere:

- $T = \frac{b_1 - E(b_1)}{SE(b_1)} = \frac{b_1 - \beta_1}{\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \text{t-fordelt}, n-2 \text{ frihetsgrader}$
- $T = \frac{b_0 - E(b_0)}{SE(b_0)} = \frac{b_0 - \beta_0}{s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \text{t-fordelt}, n-2 \text{ frihetsgrader}$

## Inferens av $\sigma^2$ og $\mu_{Y|x_0}$ :

- $\sigma^2$ :  $V = \frac{(n-2)S^2}{\sigma^2}, \chi^2\text{-fordelt}, n-2 \text{ frihetsgrader}$
- $\mu_{Y|x_0}$ :  $T = \frac{\hat{Y}_0 - \mu_{Y|x_0}}{S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \text{t-fordelt}, n-2 \text{ frihetsgrader}$

## Generell sannsynlighet og statistikkregler:

- Addisjonsregel  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Betinget sannsynlighet  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Multiplikasjonsregelen:  
 $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
- Kumulativ fordelingsfunksjon:  $F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{t \leq x} P(X = t), & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt, & \text{Kont.} \end{cases}$
- Forventningsverdi:  
 $E(X) = \begin{cases} \sum_x X f(x), & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} X f(x) dx, & \text{Kont.} \end{cases}$
- Varians:  
 $\text{Var}(X) = \begin{cases} \sum_x (x - \mu)^2 f(x) = E(X^2) - E(X)^2 & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 & \text{Kont.} \end{cases}$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad E(cX) = cE(X)$
- $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$   
 $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  Ved uavhengighet.

## Simultanfordeling for to variabler:

- $P((x, y) \in A) = \begin{cases} \int \int_A f(x, y) dx dy & \text{Kont.} \\ \sum \sum_A F(x, y) & \text{Diskret} \end{cases}$
- $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$  eller  $\sum_y f(x, y)$  Samme for  $h(y)$
- $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$
- $\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y), & \text{Diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy & \text{Kont.} \end{cases}$
- $\rho_{XY} = \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$
- $X, Y$  uavhengig  $\Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$

## Sannsynlighetsmaksimeringsestimator:

Brukes hvis en ikke har/vet en naturlig estimator for en parameter  $\theta$

1.  $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$
2. Bruk  $\ln(L)$  og deriver med hensyn på theta.
3. Løs  $\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta) = 0$  for  $\theta$