

1. Что такое производная функции?
2. Что такое частная производная?
3. Назовите производные нескольких простых функций

таблица производных

<https://github.com/VetrovSV/Analyt.Mech/blob/master/derivativs%2C%20integrals.pdf>

▼ Кинематика

- кинематика точки
- кинематика твёрдого тела

Кинематика точки

- Когда можно считать тело точкой? Всегда ли это зависит от размеров тела?

Кинематика — раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа...) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

где применяется

- для описания движения *всего*
- Любые подвижные механизмы
- например передача движения от двигателя, через коробку передач колёсам
- Любые движущиеся в пространстве тела
- Например капля дождя в атмосфере, движение циклона и его отдельных частей, некоторого объёма воды элементарного
- Движение спутника, движение планет и других небесных тел

Способы задания движения точки

- естественный
- координатный
- векторный

Задать движение чаще всего означает описать изменение координаты с помощью уравнений, зависящих от времени (t)

Естественный

- задана (нарисована) траектория

- Задано уравнение движения в виде $S(t) = f(t)$
- S – координата вдоль траектории
- $f(t)$ – некоторая функция

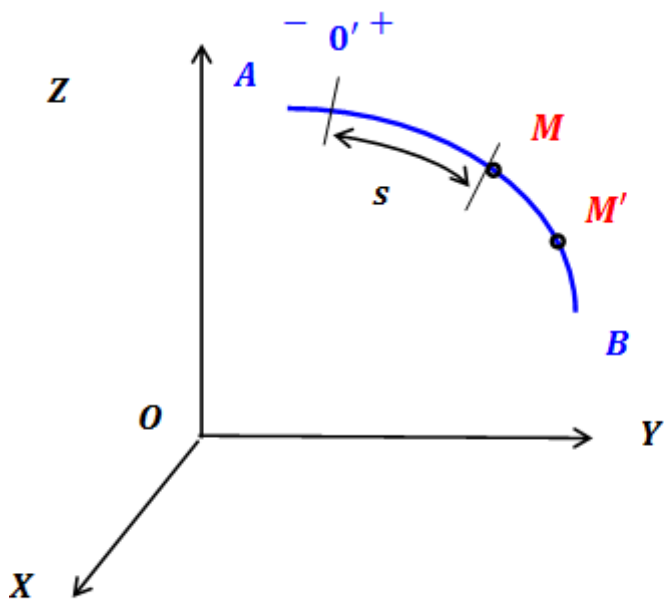


Рис.3. Естественный способ описания движения

Координатный способ

- траектория и движение задаются уравнениями:
 $x = f_1(t)$
 $y = f_2(t)$
 $z = f_3(t)$

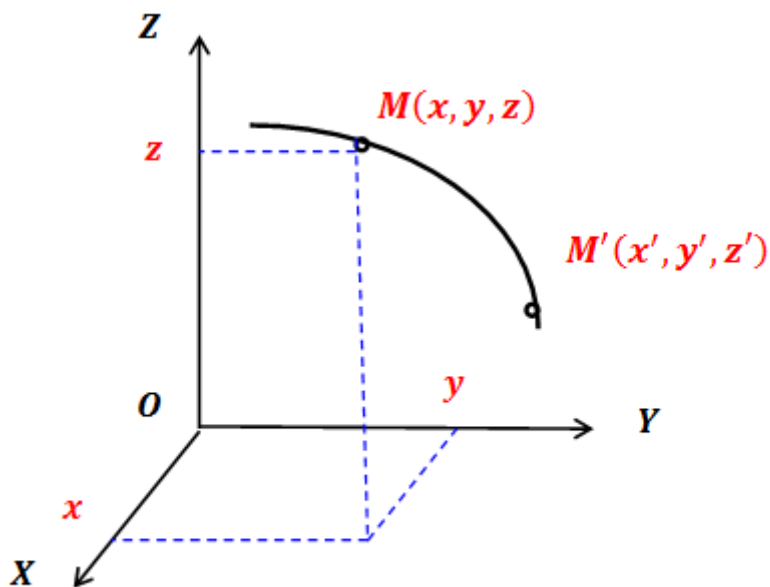


Рис.2. Координатный способ описания движения

▼ Векторный способ

- движение и траектория задаются векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{f}(t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{i}f_1(t) + \vec{j}f_2(t) + \vec{k}f_3(t)$$

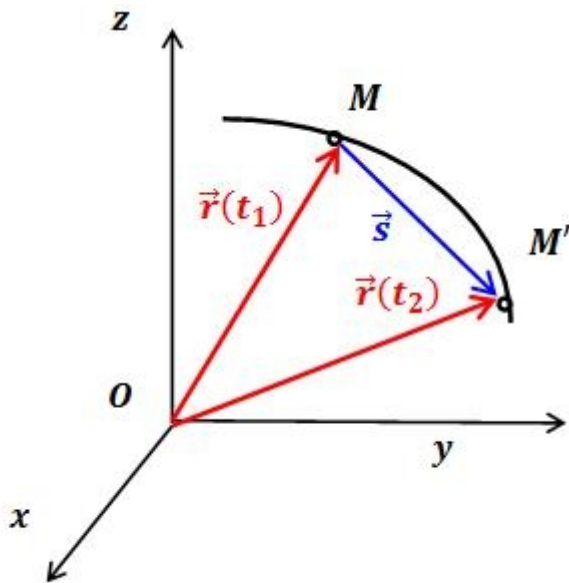
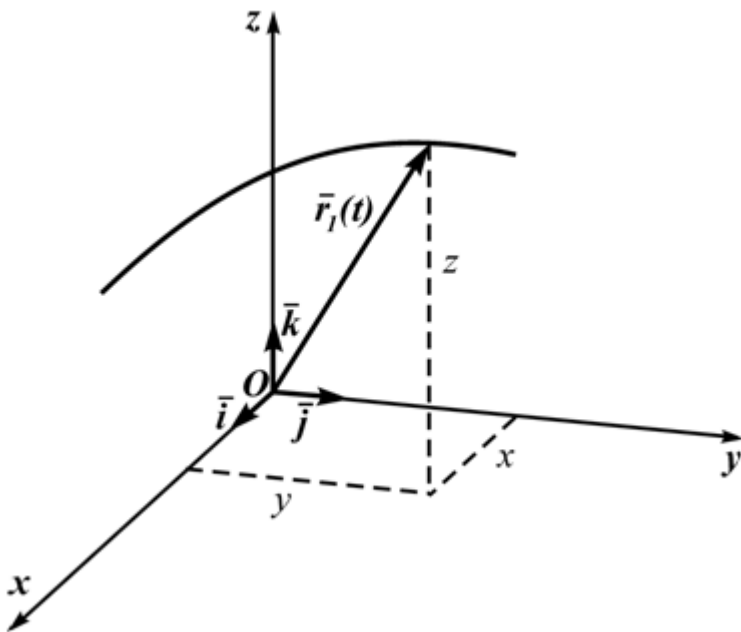


Рис.1. Векторный способ описания движения



▼ Пример

$$x = 2t + 5$$

$$y = -\ln(t)$$

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot (2t + 5) - \vec{j} \cdot \ln(t)$$

▼ Скорость

Скорость (\vec{v} , от англ. velocity или фр. vitesse, исходно от лат. vĕlōcitās) — векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта.

Телу можно придать скорость подействовав на него силой. Если действие сил прекратится, то скорость сохраняется. Причем она не будет менять своего модуля и направления.

Средняя скорость

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Единицы измерения [м\с]

Мгновенная скорость (скорость здесь сейчас):

- $v = \frac{dS}{dt}$ -- алгебраическая величина скорости
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ -- векторная скорость
- $v_x = \frac{dx}{dt}$
 $v_y = \frac{dy}{dt}$
 $v_z = \frac{dz}{dt}$

Скорость – производная от координаты по времени. В теоретической механике принято обозначать скорость ставя точку над координатой.

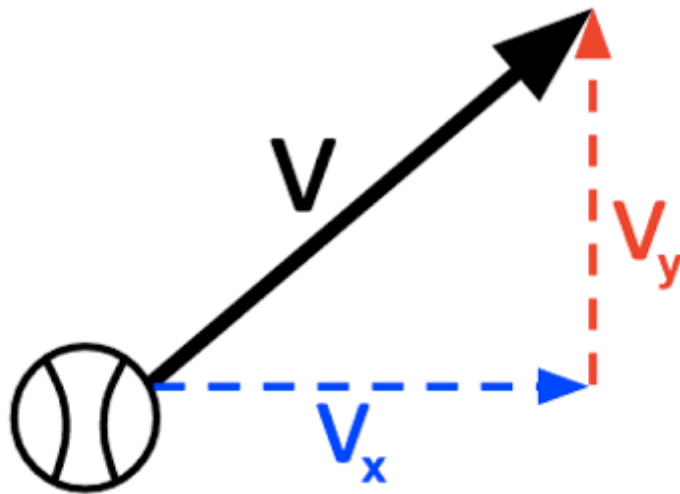
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Полная алгебраическая скорость

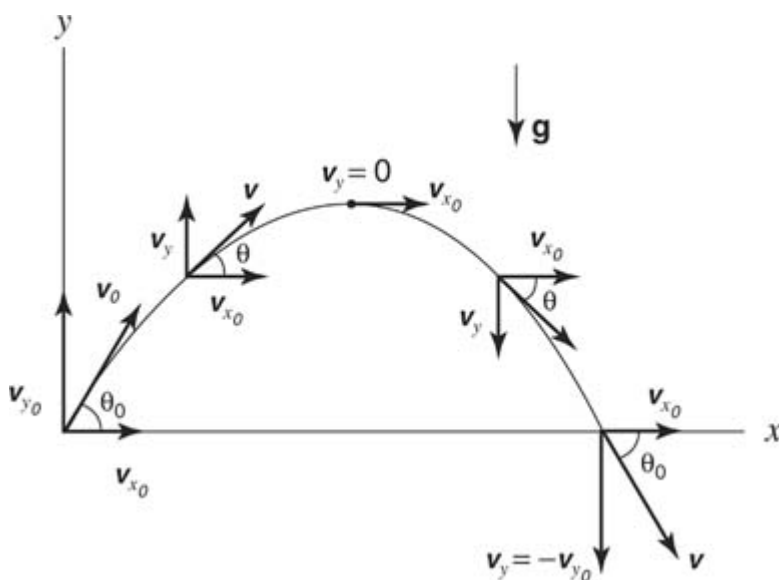
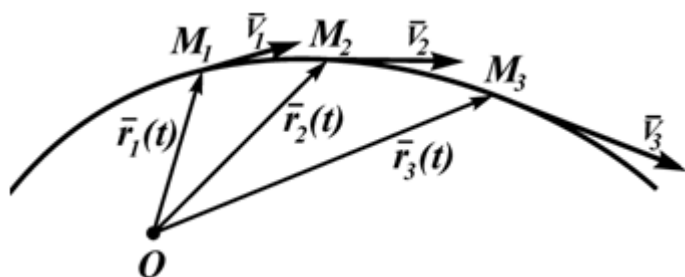
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$



Скорость всегда находится на касательной к траектории



▼ Пример

Найдите уравнения описывающие изменение скорости, если движение задано уравнениями:

$$x = 2t + 3$$

$$y = 12t^2 - t$$

- Как выглядит траектория точки?
- Какие выводы можно сделать о скорости вдоль каждой из осей координат?
- Запишите уравнений полной алгебраической скорости
- Вычислите скорость и координату в заданный момент времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{d(2t+3)}{dt}$$

$$v_x = \dot{x} = 2 \text{ м/с}$$

$$v_y = \dot{y} = 12 \cdot 2 \cdot t - 1 = 24t - 1 \text{ м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{2^2 + (24t - 1)^2}$$

Координата и скорость точки в момент времени $t = 2$ с

$$x(t = 2) = 7 \text{ м}$$

$$y(t = 2) = 24 \cdot 4 - 2 = 94 \text{ м}$$

$$v_x = 2 \text{ м/с}$$

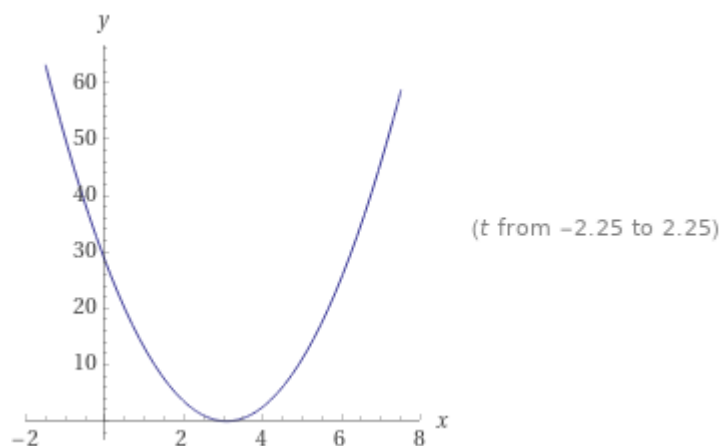
$$v_y(t = 2) = 47 \text{ м/с}$$

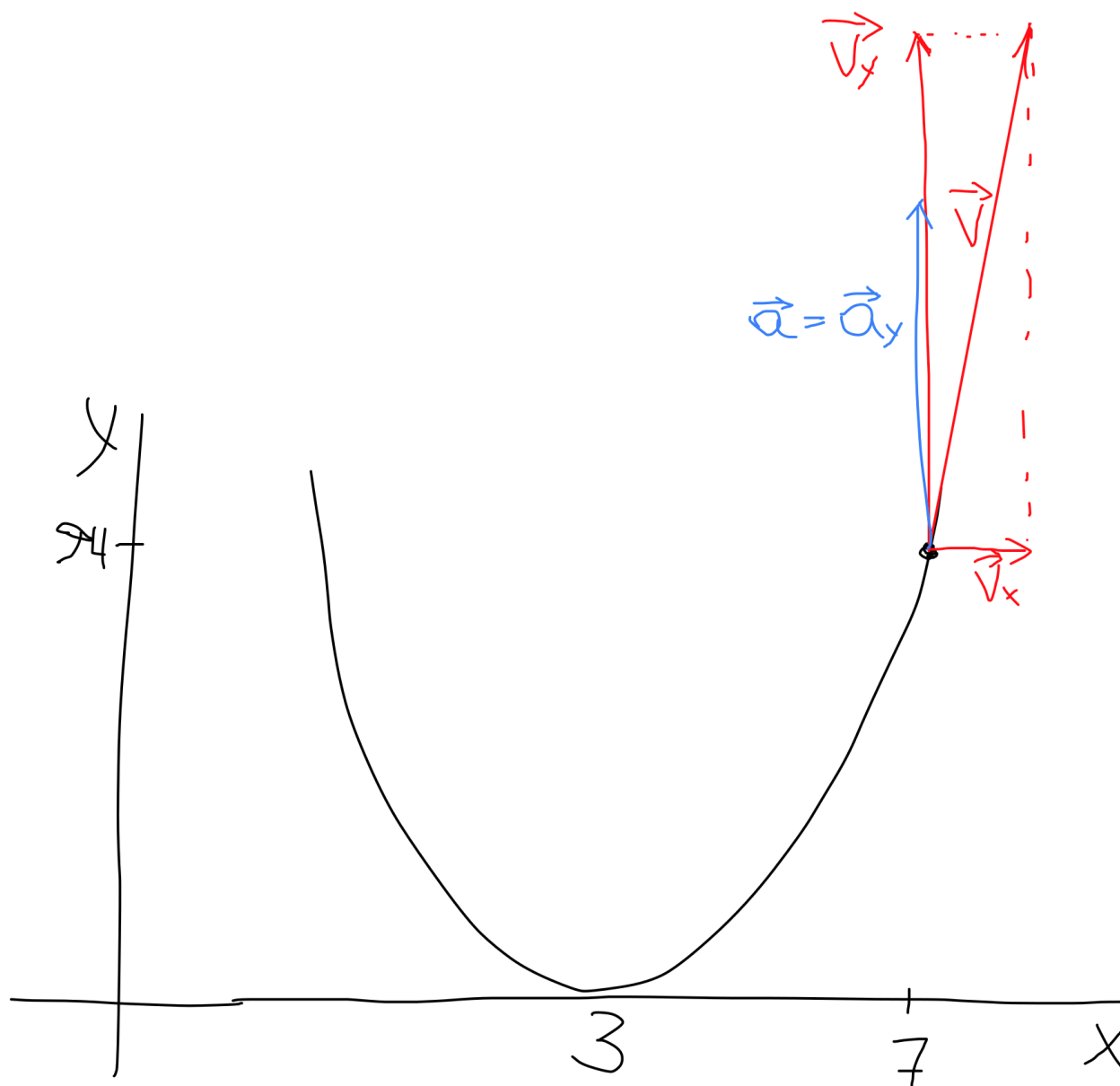
$$v(t = 2) = \sqrt{4 + 47^2} \approx 47 \text{ м/с}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(24t-1)}{dt} = 24$$

$$a = 24 \text{ м/с}^2$$





▼ Ускорение точки

Ускорение (\vec{a} (от лат. acceleratio) или w) — физическая величина, определяющая быстроту изменения модуля и вектора скорости, то есть первая производная от скорости по времени.

Ускорение — признак действия неуравновешенной системы сил на тело. Например одной силы. Если действие сил прекратится, то ускорение исчезнет.

Единицы измерения $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$

- $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

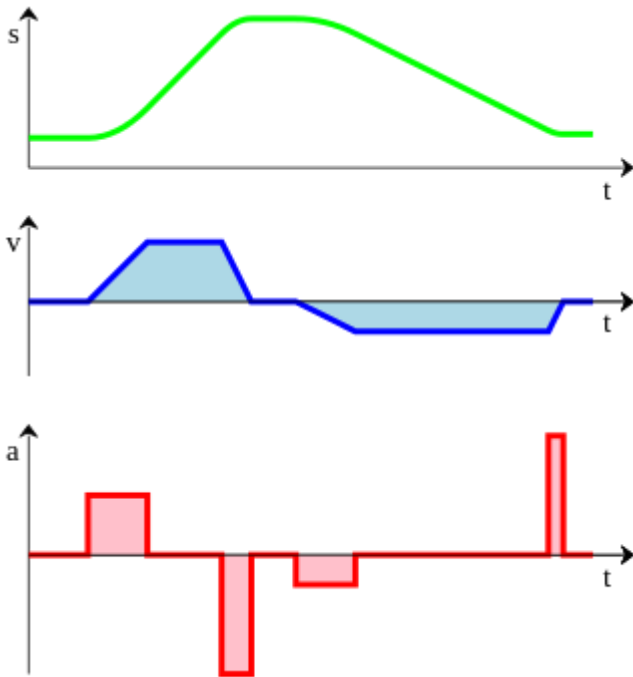
Полное алгебраическое ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Вектор ускорения

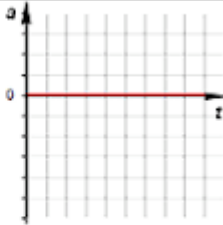
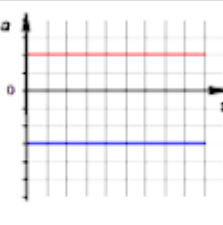
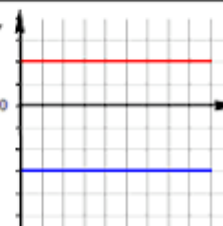
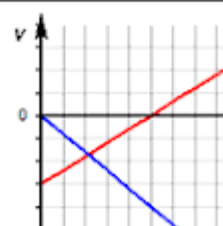
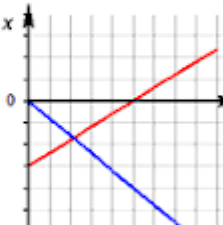

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Графики координаты, скорости и ускорения



▼ Классификация движения материальной точки

- равномерное ($a=0, v = const$)
- ускоренное\замедленное ($a \neq 0, v \neq const$)
 - равноускоренное\равнозамедленное ($a \neq 0 = const, v \neq const$)

зависимость	равномерное движение	равноускоренное движение
$a(t)$	 $a = 0$	 $a = const$
$v(t)$	 $v = const$	 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$
$x(t)$	 $x = x_0 + \vec{v}t$	 $x = x_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

Выведем уравнения описывающие скорость и координату для равномерного движения

$$a = 0 \rightarrow v = const$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

уможим левую и правую часть на dt

$$v \cdot dt = dx$$

$$dx = v \cdot dt$$

Из этого уравнения необходимо вывести x , для этого проинтегрируем его левую и правую часть взяв интеграл с переменным верхним пределом

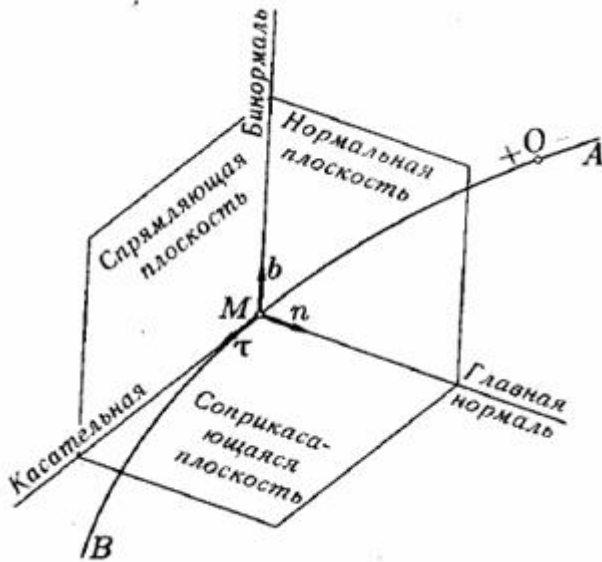
$$\int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = v(t - 0)$$

$$x = x_0 + vt$$

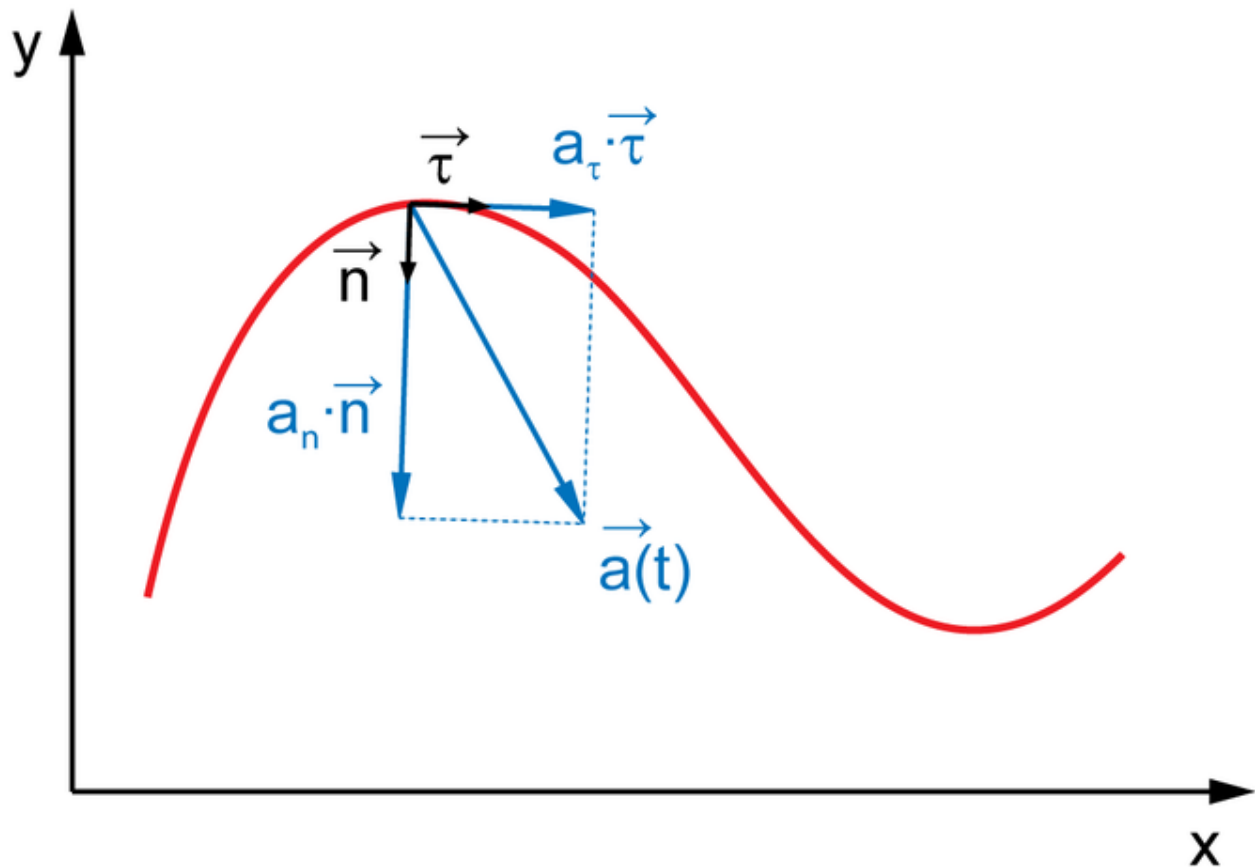
▼ Естественные координатные оси

- начало координат в данной точке траектории
- движутся вместе с точкой
- изменяют свои направления во время движения



- τ направлена по касательной к траектории в данной точке, в сторону движения (по скорости)
- n – нормаль, направлена \perp оси τ , в сторону вогнутости траектории. в случае прямолинейной траектории направление не определено.
- b – бинормаль, направлена так чтобы τ, n, b образовывали правую систему координат

▼ Ускорения в естественной координатной системе



- a_τ – тангенциальное ускорение. определяет изменение алгебраической скорости

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$a_\tau = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right|$$

$\vec{v} \cdot \vec{a}$ – скалярное произведение

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y$$

- a_n – нормальное ускорение. определяет изменение направления скорости

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

r – радиус кривизны.

$$a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}$$

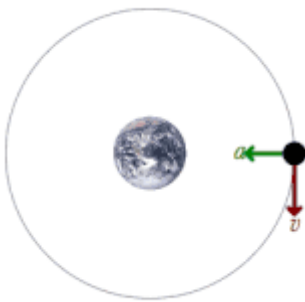
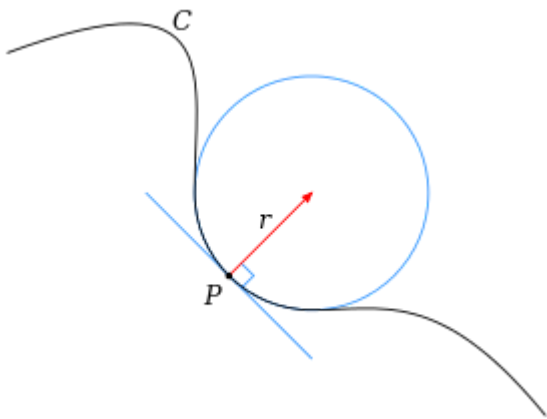
$\vec{v} \times \vec{a}$ – векторное произведение векторов

$$\vec{v} \times \vec{a} = v_x \cdot a_y - v_y \cdot a_x$$

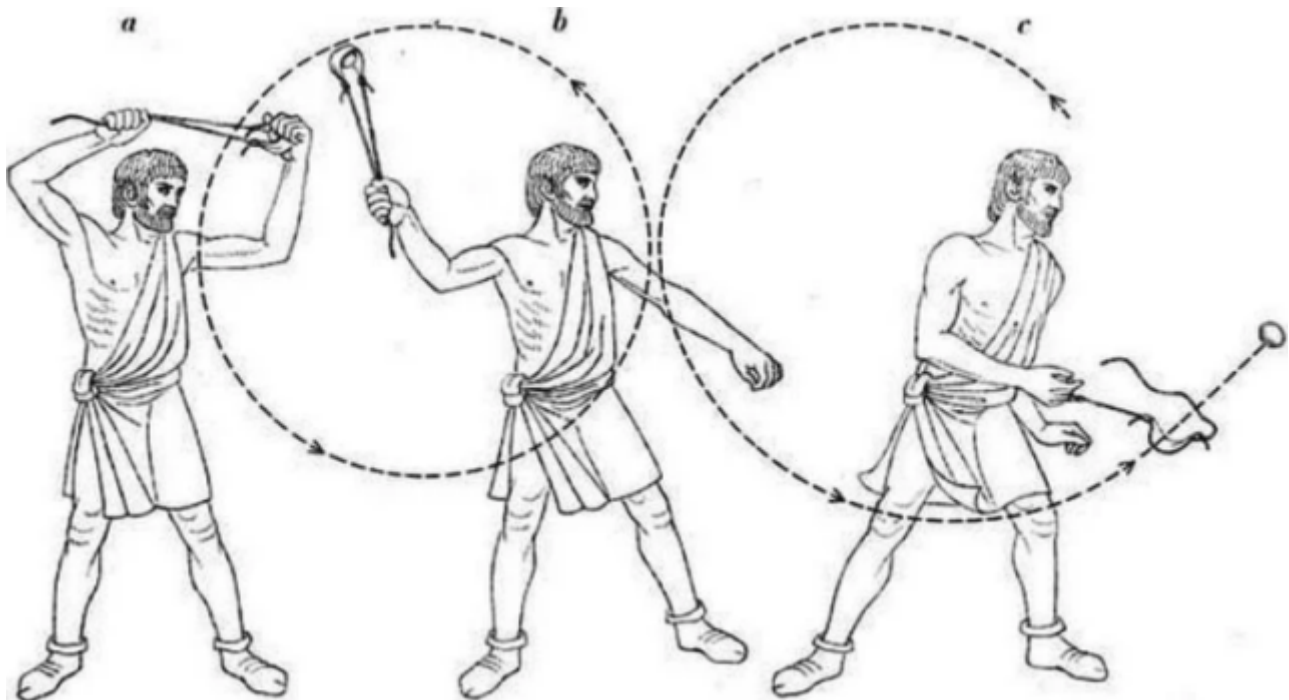
- $a_b = 0$
- Полное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$
- Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Куда будут направлены вектора скорости и ускорений в разных точках траектории?





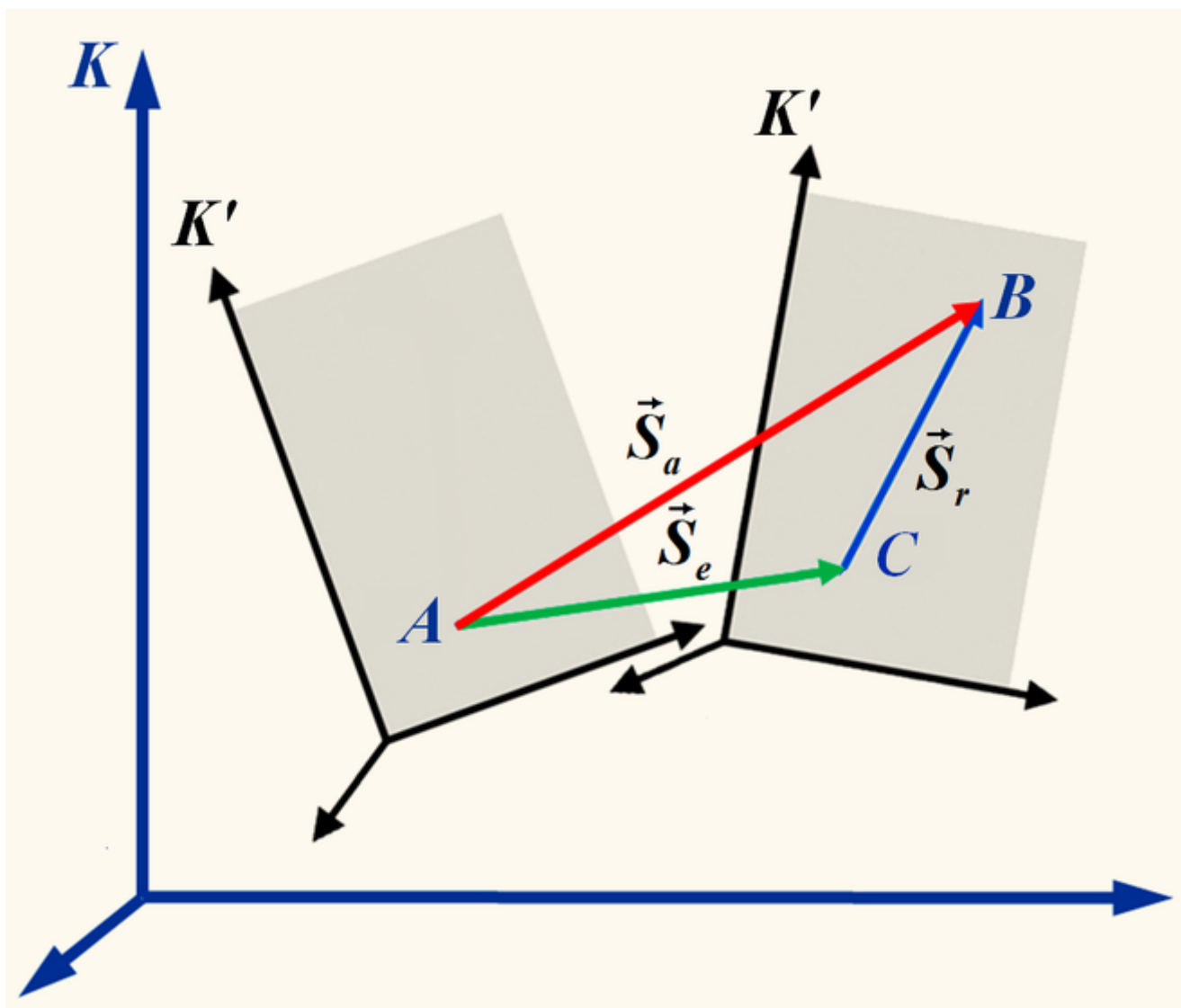
Вопросы

1. Можно ли *почувствовать* скорость? Ускорение?
2. Как будет двигаться точка, если его ускорение равно нулю?
3. Как будет двигаться точка, если у него есть только тангенциальное ускорение?
4. Как будет двигаться точка, если у него есть только нормальное ускорение?
5. Как будет двигаться точка, если у него есть и нормальное ускорение и тангенциальное ускорение?

см. движение твёрдого тела (вращательное движение) перед рассмотрением сложного движения точки

▼ Сложное движение точки

Сложное движение – движение материальной точки относительно какой-либо системы отсчёта, которая, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчёта.



- черным отмечены оси подвижной системы отсчёта
- синим отмечены оси неподвижной системы отсчёта

\vec{S}_r – вектор перемещения точки относительно подвижной СО – вектор относительного перемещения

\vec{S}_e – вектор перемещения подвижной СО – вектор переносного движения

\vec{S}_a – вектор перемещения точки относительно неподвижной СО – вектор абсолютного перемещения

Виды движения:

- относительное (обозначается индексом r, relatif)
- переносное (обозначается индексом e, exporter)
- абсолютное

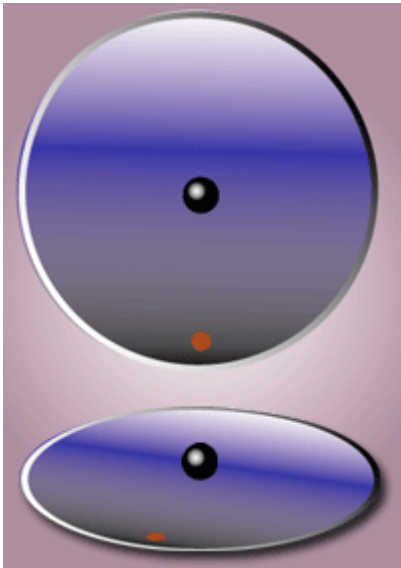
Соответственно скорости и ускорения точки называют относительными, переносными и абсолютными.

Неинерциальная система отсчёта — система отсчёта, движущаяся с ускорением или поворачивающаяся относительно инерциальной.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) — система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно, либо покоятся.

Пример неинерциальной СО (связанной с диском) приведён ниже.

Приведите примеры ИСО и неинерциальной СО



- Приведите примеры сложного движения?
- Вы прямо сейчас участвуете в сложном движении?
- Можно ли рассматривать в отдельных случаях сложное движение, абстрагируясь от переносного движения?
- Можно ли определить, движется ли ваша система отсчёта прямолинейно и с постоянной скоростью или покоится?

Закон сложения скоростей

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

▼ Закон сложения ускорений

Полный вывод формулы ускорений из формулы скоростей см. в [2]

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

▼ Кориолисово ускорение

\vec{a}_k (иногда обозначается \vec{a}_c)

► Правило Жуковского

Ускорение Кориолиса \vec{a}_K можно получить, спроецировав вектор относительной скорости точки \vec{v}_r на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, увеличив полученную проекцию в 2ω раз и повернув её на 90 градусов в направлении переносного вращения.

↳ 2 cells hidden

► Примеры

- В Северном полушарии приложенная к движущемуся поезду сила Кориолиса направлена перпендикулярно рельсам, имеет горизонтальную составляющую и стремится сместить поезд вправо по ходу движения.
- правые берега рек в Северном полушарии более крутые — их подмывает вода под действием этой силы
- Северном полушарии вращение воздушных масс происходит в циклонах против часовой стрелки, а в антициклонах — по часовой стрелке; в Южном — наоборот: по часовой стрелке в циклонах и против — в антициклонах. Отклонение ветров (пассатов) при циркуляции атмосферы — также проявление силы Кориолиса.

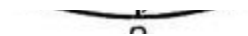
↳ 1 cell hidden

▼ Пример. Определение кориолисова ускорения

Домашнее задание

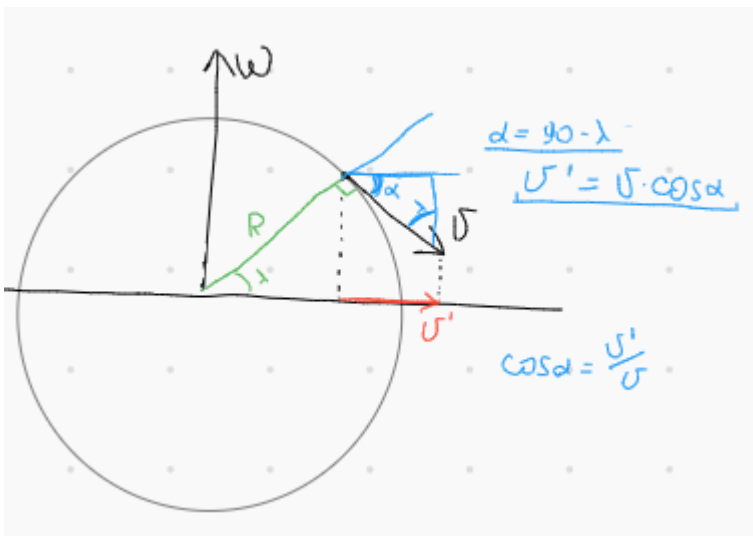
Точка движется вдоль меридиана с севера на юг со скоростью 100 км\ч. Определите ускорение Кориолиса для своего положения точки:

1. Чита
2. Хельсинки
3. Майами
4. Кито
5. Сидней
6. Норильск
7. Воркута



$$a_K = 2 \cdot \omega_e \cdot v'_r$$

▼ Решение



$$\omega_e = \frac{1}{24} \frac{\text{об}}{\text{час}} = \frac{1}{24} \frac{1}{3600} \frac{\text{об}}{c} = \frac{1}{24} \frac{2\pi}{3600} \frac{1}{c}$$

$$a_K = 2 \cdot (2\pi/86400) \cdot ((100 \cdot 1000/3600) \cdot \cos(53))$$



▼ Литература

1. Краткий курс теоретической механики. Тарг С.М., издания после 2000 г.
2. Курс теоретической механики в 2 т. Яблонский А. А., Никифорова В. М., издания после 2000 г.
3. Coriolis Force: <https://youtu.be/aeY9tY9vKgs?t=80>