Динамика

Динамика – раздел механики, в котором изучаются причины изменения механического движения

Динамика материальной точки

материальная точка -- обладающее массой тело, размерами, формой, вращением и внутренней структурой которого можно пренебречь в условиях исследуемой задачи

Законы динамики

1-й закон -- закон инерции

Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

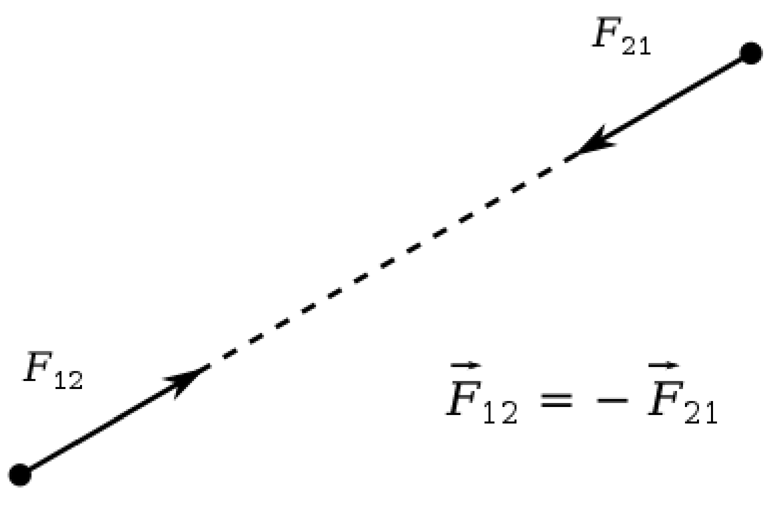
2-й закон -- основной закон динамики

В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.

$m\vec{a} = \vec{F}$

3-й закон

Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению



Парадокс лошади и телеги

Пусть лошадь запряжена в телегу, и тянет её с некоторой силой вперёд. Но согласно 3-му закону Ньютона, существует сила противодействия, равная ей по величине и направленная назад. Поскольку в сумме обе силы дают ноль, телега никогда не сможет сдвинуться с места

Ошибка здесь в том, что силы действия и противодействия приложены к разным телам (в этом примере: к телеге и к лошади), поэтому их бессмысленно складывать. Кроме этих сил, и на лошадь и на телегу действует сила трения, которая, собственно, и приводит лошадь в движение (именно, сила трения копыт лошади об землю направлена вперёд и преодолевает силу противодействия телеги, в то время как сила тяги лошади преодолевает силу трения телеги об землю, направленную назад)

Дифференциальные уравнения движения точки

Уравнения движения:

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t)$$
$$z = f_3(t)$$

Запишем основной закон динамики в проекциях

$$ma_x = \sum F_x$$
$$ma_y = \sum F_y$$
$$ma_z = \sum F_z$$

Представим ускорения через производные и получим **дифференциальный закон движения материальной точки**

$$m\ddot{x} = \sum F_x$$
$$m\ddot{y} = \sum F_y$$
$$m\ddot{z} = \sum F_z$$

Дифференциальный закон движения для естественных координатных осей

Две задачи динамики

Пример

На матереульную точку m = 4 кг действует одна сила F = 10 Н. В момент, когда сила начала действовать точка покоилась.

- По какой траектории будет двигаться точка?
- Как будет менятся скорость точки с течением времени?
- Как будет менятся ускорение точки с течением времени?
- Как будет меняться координата точки с течением времени?
- Какие уравнения описывают вышеперечисленное?

1. Основной закон динамики:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$
2. В условиях когда начальная скорость м.т. равна нулю эта точка будет двигатся в направлении действия силы. Причём по прямой.
   - Определися с начальными и конечными условиями
   - Начальные условия -- момент времени и состояние тела в начальный момент времени (когда начали рассматривать движение)
     $t_0 = 0$
     $x_0 = 0$
     $v_{x0} = 0$
   - конечные условия -- момент времени и состояние тела в момент, когда поменялся характер движения
     $t_1 = 30$
     x_1
     v_{x1}
3. Сила постоянна, поэтому согласно основному закону динамики, ускорение тоже будет постоянным.
4. Выведем уравнение движения $x = f_1(t)$ и уравнение скорости $v = f_2(t)$ из основного закона динамики. Для этого запишем его в коорлинатной форме
$$F_x = ma_x$$
   Понадобилось всего оно уравнение, т.к. точка движется по прямой.Можно провести ось x вдоль этой прямой.
   1. $a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$
   2. Подставим в верхнее уравнение:
   $$m\frac{dv_x}{dt} = F_x$$
      Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения нужно преобразовать его так, чтобы в левой и правой частиях уравнения был один дифференциал и связанные с ним переменные.
   $$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (\cdot dt)$$

$$m dv_x = F_x dt$$

3. Проинтегрируем

$$m \int\limits_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = F_x \int\limits_{t_0}^{t} dt$$

$$\int\limits_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \frac{F_x}{m} \int\limits_{t_0}^{t} dt$$

   Здесь использован определённый интеграл с переменным верхним пределом. Из такого интеграла получится формула, где на место величины из верхнего предела можно будет подставить любое значение

$$v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = \frac{F_x}{m} t \Big|_{t_0}^{t}$$

$$v_x - v_{x0} = \frac{F_x}{m}(t - t_0)$$

$$v_x = v_{x0} + \frac{F_x}{m} t$$

4. Снова выписав дифференциал проинтегрируем последнюю формулу чтобы получить уравнение для координаты

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0} + \frac{F_x}{m} t$$

$$dx = v_{x0} dt + \frac{F_x}{m} t dt$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx = v_{x0} \int\limits_{t_0}^{t} dt + \frac{F_x}{m} \int\limits_{t_0}^{t} t dt$$

$$x - x_0 = v_{x0}(t - t_0) + \frac{F_x}{m}(0.5t^2 - 0.5t_0^2)$$

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{F_x}{m} 0.5t^2$$

Движение под действием силы, завясящей от скорости

Пример: капля воды в атмосфере

- на некоторой высоте над поверхностью земли образовалась капля воды
- будем считать каплю сферической, а её массу постоянной

- при движении в среде с сопротивлением телу препятствует сила зависящая от скорости

$$F_c = kv$$

где k - некоторый коэффициент, зависящий от аэродинамических свойств тела и свойств среды

- На каплю будет действовать сила Архимеда, но её значение будем считать незначительным

Тогда основной закон динамики:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_C$$

- Начальные условия -- момент времени и состояние тела в начальный момент времени (когда начали рассматривать движение)
  $t_0 = 0$
  $x_0 = 0$
  $v_{x0} = 0$
- Конечные условия -- момент времени и состояние тела в момент, когда поменялся характер движения
  t_1
  x_1
  v_{x1}

Спроецируем на ось x

$$ma_x = G - F_c$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = g - k/m\ v_x$$

Снова разделим переменные, но с учётом того что в правой части присутствует v_x

$$\frac{dv_x}{g - k/m\ v_x} = \partial t$$

Упростим введя новые обозначения

$$u = g - k/m\ v_x$$

тогда

$$du = -k/m\ dv_x$$

чтобы записать dv_x в новых обозначениях, выразим его из формулы выше

$$dv_x = -du\, m/k$$

Окончательно после замены

$$-\frac{m}{k}\frac{du}{u} = dt$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{k}{m}\int dt$$

$$ln(u) = -\frac{k}{m}t + C_1$$

Помня о замене:

$$ln(g - k/m\; v_x) = -\frac{k}{m}t + C_1$$

Это общее решение д.у.

Найдём частное решение определив константу C_1. Для этого подставим начальные условия

$$ln(g - 0) = -0 + C_1$$

$$C_1 = ln(g)$$

Тогда частное решение д.у.

$$ln(g - k/m\; v_x) = -\frac{k}{m}t + ln(g)$$

$$g - k/m\; v_x = exp(-\frac{k}{m}t + ln(g))$$

$$v_x = m/k\; exp(-\frac{k}{m}t + ln(g)) + m/k\; g$$

Double-click (or enter) to edit