

1. Что такое производная
2. Что такое частная производная
3. Назовите производные нескольких простых функций



таблица производных

<https://github.com/VetrovSV/Analyt.Mech/blob/master/derivativs%2C%20integrals.pdf>

▼ Кинематика

Кинематика точки

Кинематика — раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа...) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

где применяется

- для описания движения *всего*
- Любые подвижные механизмы
- например передача движения от двигателя, через коробку передач колёсам
- Любые движущиеся в пространстве тела
- Например капля дождя в атмосфере, движение циклона и его отдельных частей, некоторого объёма воды элементарного
- Движение спутника, движение планет и других небесных тел

Способы задания движения точки

- естественный
- координатный
- векторный

Задать движение чаще всего означает описать изменение координаты с помощью уравнений, зависящих от времени (t)

Естественный

- задана (нарисована) траектория
- Задано уравнение движения в виде $S(t) = f(t)$
- S – координата вдоль траектории
- $f(t)$ – некоторая функция

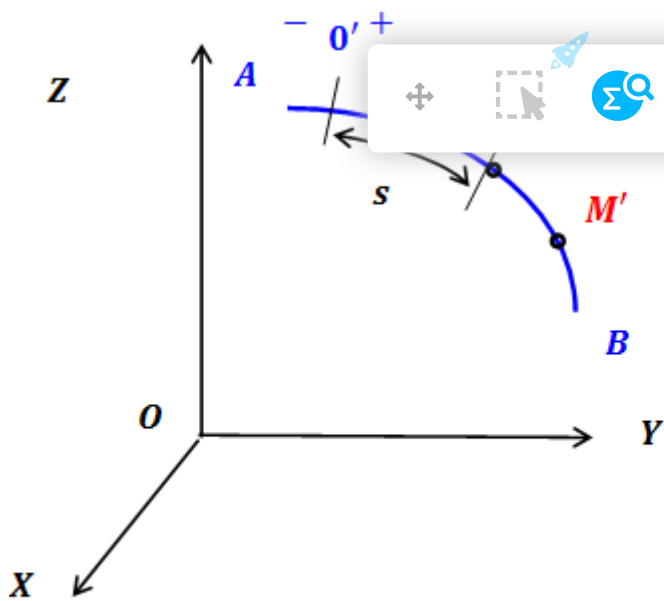


Рис.3. Естественный способ описания движения

Координатный способ

- траектория и движение задаются уравнениями:

$$x = f_1(t)$$

$$y = f_2(t)$$

$$z = f_3(t)$$

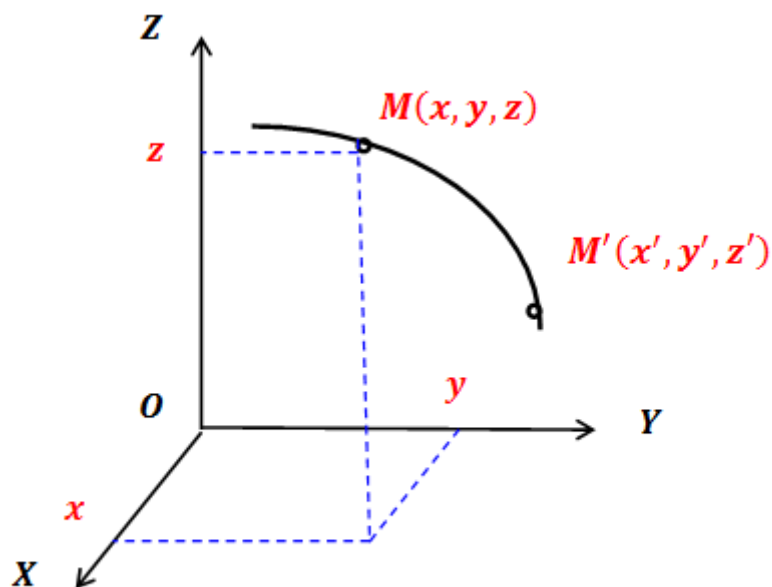


Рис.2. Координатный способ описания движения

▼ Векторный способ

- движение и траектория задаются векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{f}(t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{i} f_1(t) + \vec{j} f_2(t) +$$

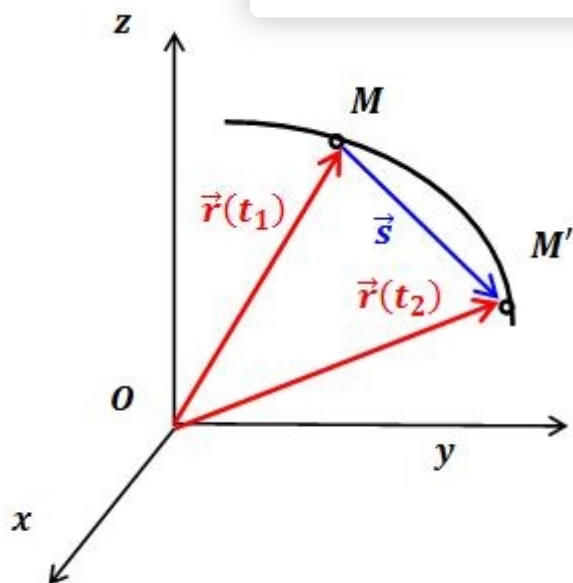
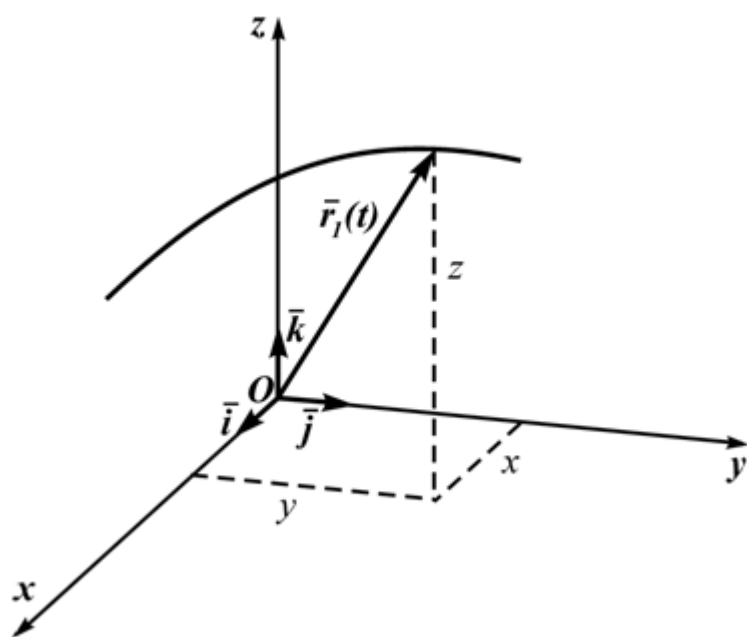


Рис.1. Векторный способ описания движения



▼ Пример

$$x = 2t + 5$$

$$y = -\ln(t)$$

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot (2t + 5) - \vec{j} \cdot \ln(t)$$

▼ Скорость

Скорость (\vec{v} , от англ. velocity или фр. vitesse, исходно от лат. vĕlōcitās) — векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материального тела относительно наблюдателя.

Телу можно придать скорость подействовав на него силой. Если действие сил прекратится, то скорость сохраняется. Причем она не будет менять своего модуля и направления.

Средняя скорость

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Единицы измерения [м\с]

Мгновенная скорость (скорость здесь сейчас):

- $v = \frac{dS}{dt}$ -- алгебраическая величина скорости
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ -- векторная скорость

- $v_x = \frac{dx}{dt}$
 $v_y = \frac{dy}{dt}$
 $v_z = \frac{dz}{dt}$

Скорость -- производная от координаты по времени. В теоретической механике принято обозначать скорость ставя точку над координатой.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

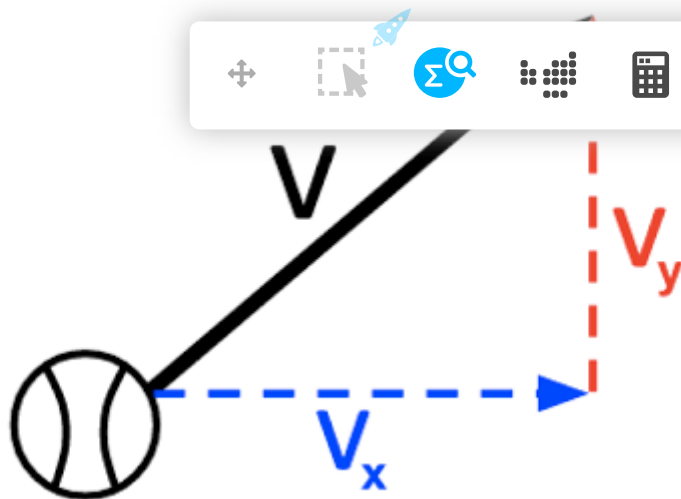
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Полная алгебраическая скорость

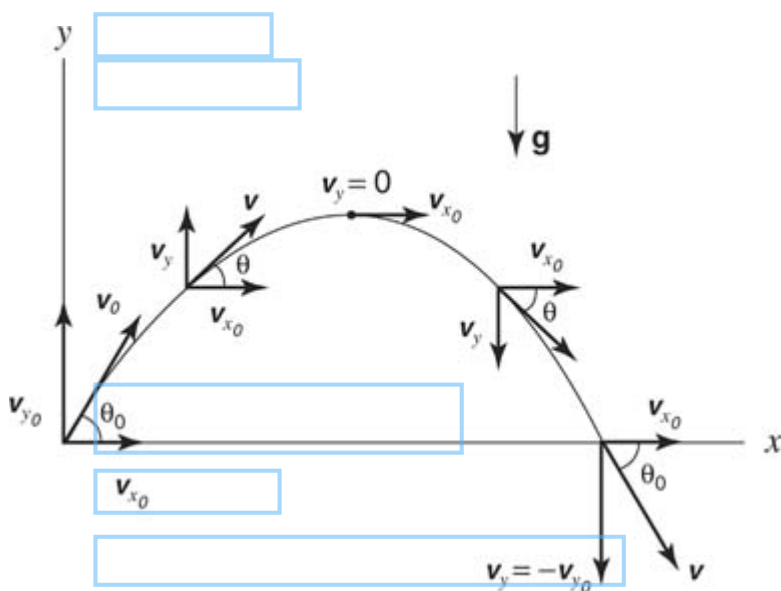
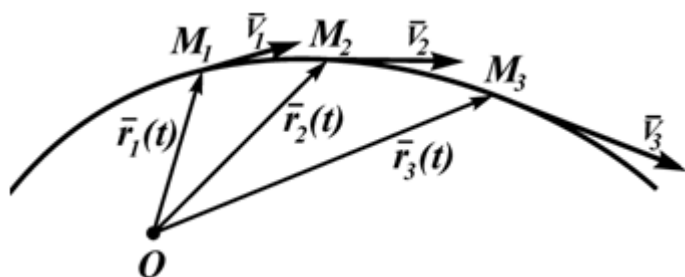
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$



Скорость всегда находится на касательной к траектории



▼ Пример

Найдите уравнения описывающие изменение скорости, если движение задано уравнениями:

$$x = 2t + 3$$

$$y = 12t^2 - t$$

- Как выглядит траектория точки?
- Какие выводы мож...
- Запишите уравнен...
- Вычислите скорость и координату в заданный момент времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{d(2t+3)}{dt}$$

$$v_x = \dot{x} = 2 \text{ м/с}$$

$$v_y = \dot{y} = 12 \cdot 2 \cdot t - 1 = 24t - 1 \text{ м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{2^2 + (24t - 1)^2}$$

Координата и скорость точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$

$$x(t = 2) = 7 \text{ м}$$

$$y(t = 2) = 24 \cdot 4 - 2 = 94 \text{ м}$$

$$v_x = 2 \text{ м/с}$$

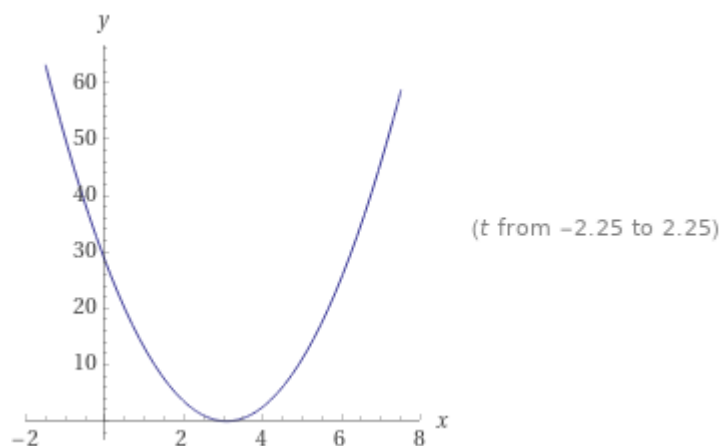
$$v_y(t = 2) = 47 \text{ м/с}$$

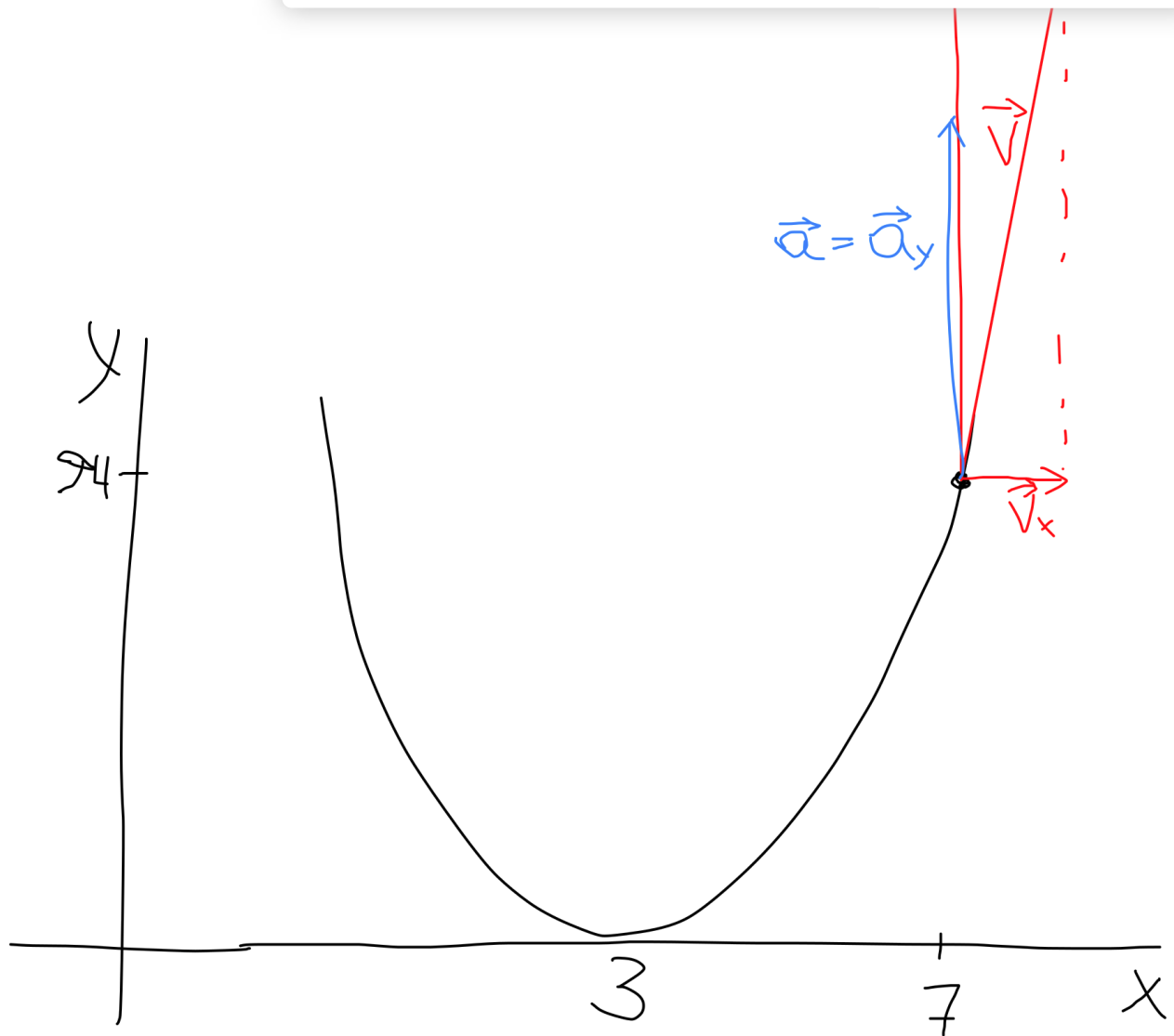
$$v(t = 2) = \sqrt{4 + 47^2} \approx 47 \text{ м/с}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(24t-1)}{dt} = 24$$

$$a = 24 \text{ м/с}^2$$





▼ Ускорение точки

Ускорение (\vec{a} (от лат. acceleratio) или w) — физическая величина, определяющая быстроту изменения модуля и вектора скорости, то есть первая производная от скорости по времени.

Ускорение — признак действия неуравновешенной системы сил на тело. Например одной силы. Если действие сил прекратится, то ускорение исчезнет.

Единицы измерения м/с^2

- $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

Полное алгебраическое ускорение

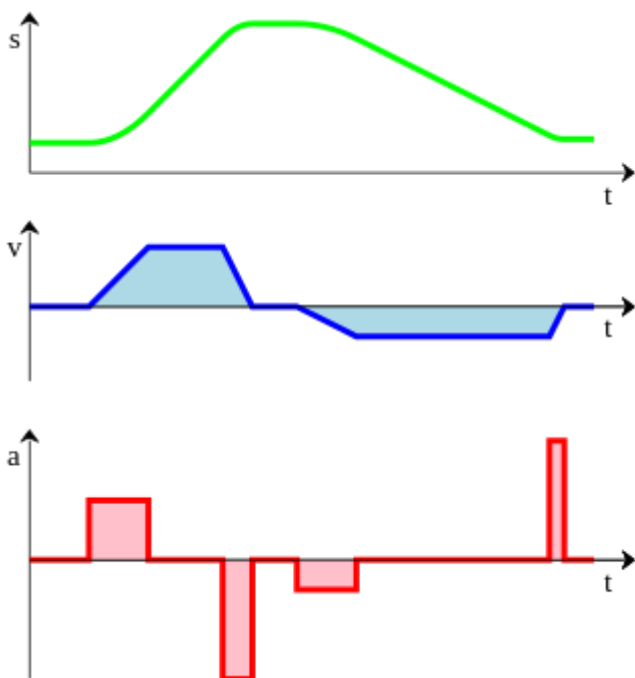
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Вектор ускорения

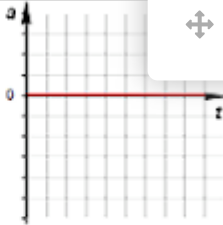
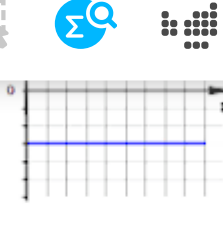
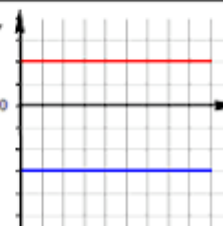
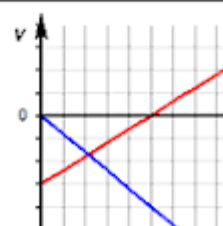
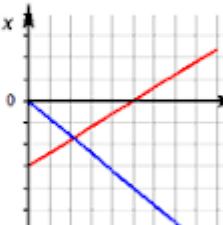

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$



Графики координаты, скорости и ускорения



▼ Классификация движения материальной точки

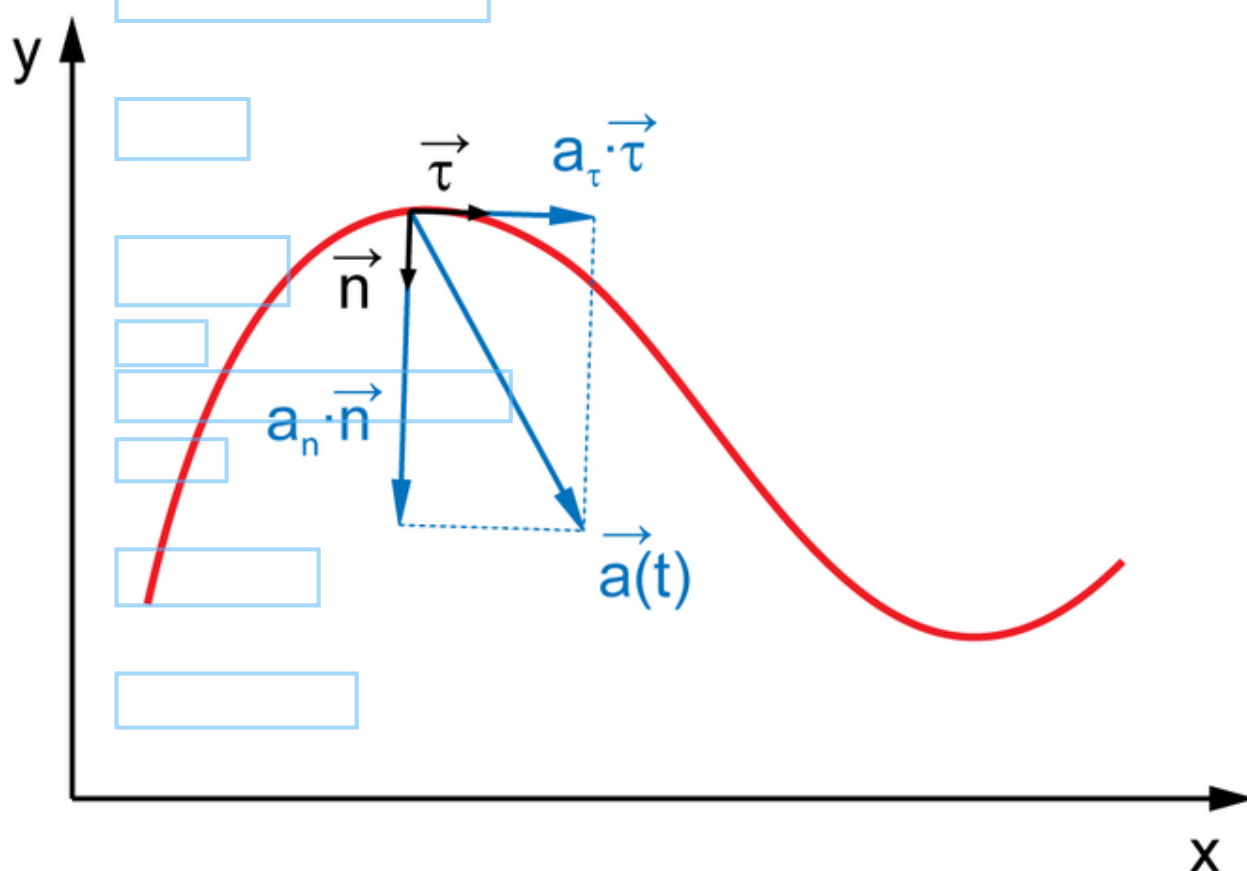
зависимость	равномерное движение	
$a(t)$	 $a = 0$	 $a = const$
$v(t)$	 $v = const$	 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$
$x(t)$	 $x = x_0 + \vec{v}t$	 $x = x_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

▼ Естественные координатные оси

- начало координат в данной точке траектории
- движутся вместе с точкой
- изменяют свои направления во время движения

- τ направлена по к (скорости)
- n – нормаль, направлена \perp оси τ , в сторону вогнутости траектории. в случае прямолинейной траектории направление не определено.
- b – бинормаль, направлена так чтобы τ, n, b образовывали правую систему координат

▼ Ускорения в естественной координатной системе



- a_{τ} – тангенциальное ускорение. определяет изменение алгебраической скорости

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_{\tau} = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right|$$

$\vec{v} \cdot \vec{a}$ – скалярное произведение

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y$$

- a_n – нормальное ускорение. определяет изменение направления скорости

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

r -- радиус кривизны.

$$a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}$$

$\vec{v} \times \vec{a}$ -- векторное произведение векторов

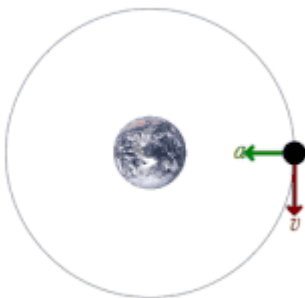
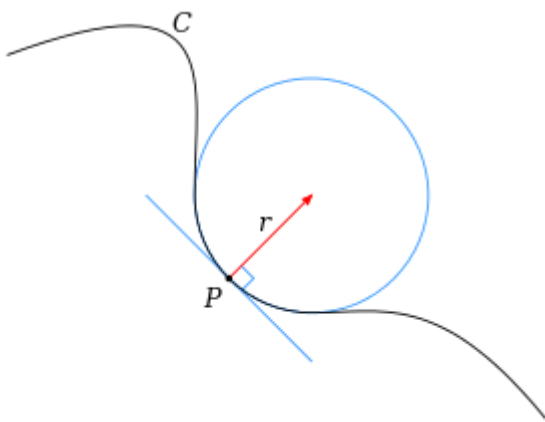
$$\vec{v} \times \vec{a} = v_x \cdot a_y - v_y \cdot a_x$$

- $a_b = 0$
- Полное ускорение

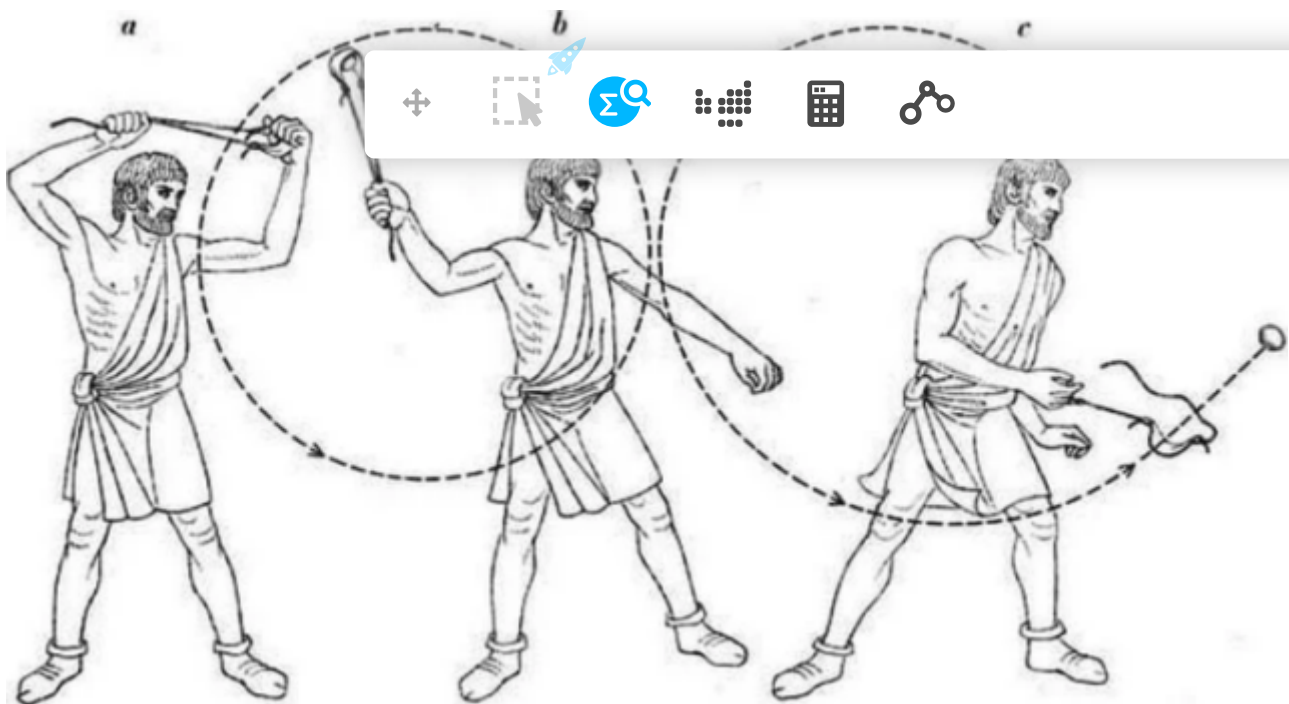
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

- Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Куда будут направлены вектора скорости и ускорений в разных точках траектории?



▼ Вопросы

1. Можно ли *почувствовать* скорость? Ускорение?
2. Как будет двигаться точка, если его ускорение равно нулю?
3. Как будет двигаться точка, если у него есть только тангенциальное ускорение?
4. Как будет двигаться точка, если у него есть только нормальное ускорение?

5. Как будет двигаться точка, если у него есть и нормальное ускорение и

