1. Что такое производная функции?
2. Что такое частная производная?
3. Назовите производные нескольких простых функций

таблица производных
https://github.com/VetrovSV/Analyt.Mech/blob/master/derivativs%2C%20integrals.pdf

Кинематика

- кинематика точки
- кинематика твёрдого тела

Кинематика точки

- Когда можно считать тело точкой? Всегда ли это зависит от размеров тела?

Кинематика — раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа…) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

где применяется

- для описания движения *всего*
- Любые подвижные механизмы
- например передача движения от двигателя, через коробку передач колёсам
- Любые движущиеся в пространстве тела
- Например капля дождя в атмосфере, движение циклона и его отдельных частей, некоторого объёма воды элементарного
- Движение спутника, движение планет и других небесных тел

Способы задания движения точки

- естественный
- координатный
- векторный

Задать движение чаще всего означает описать изменение координаты с помощью уравнений, зависящих от времени (t)

Естественный

- задана (нарисована) траектория

- Задано уравнение движения в виде $S(t) = f(t)$
- S -- координата вдоль траектории
- $f(t)$ -- некоторая функция

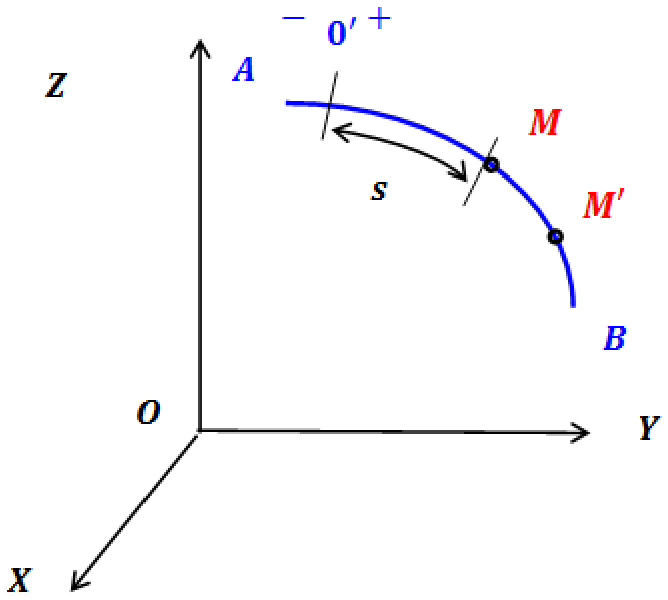


Рис.3. Естественный способ описания движения

Координатный способ

- траектория и движение задаются уравнениями:
  $x = f_1(t)$
  $y = f_2(t)$
  $z = f_3(t)$

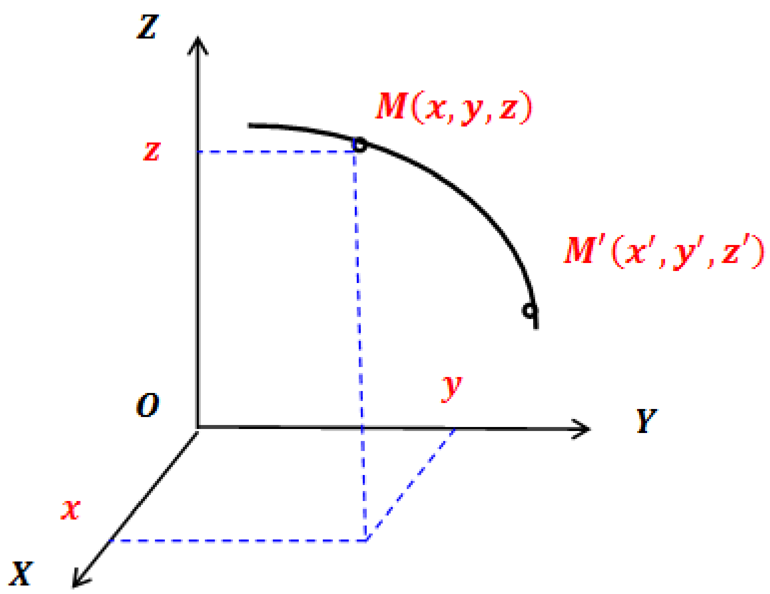


Рис.2. Координатный способ описания движения

Векторный способ

- движение и траектория задаются векторным уравнением

  $\vec{r} = \vec{f}(t)$

или

$\vec{r} = \vec{i} f_1(t) + \vec{j} f_2(t) + \vec{k} f_3(t)$

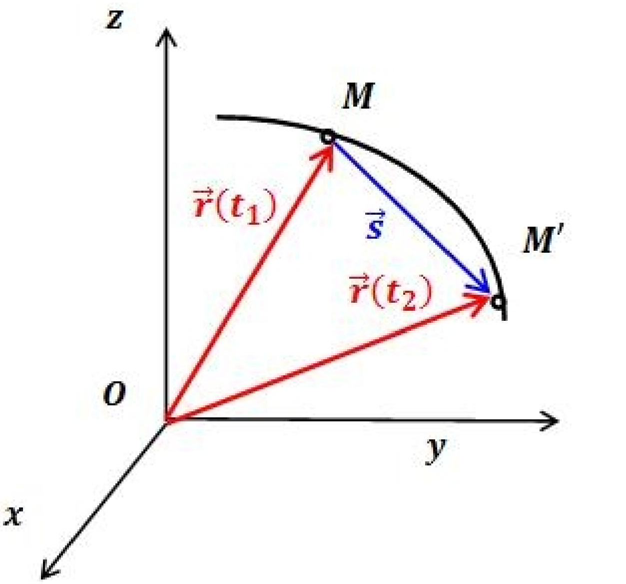
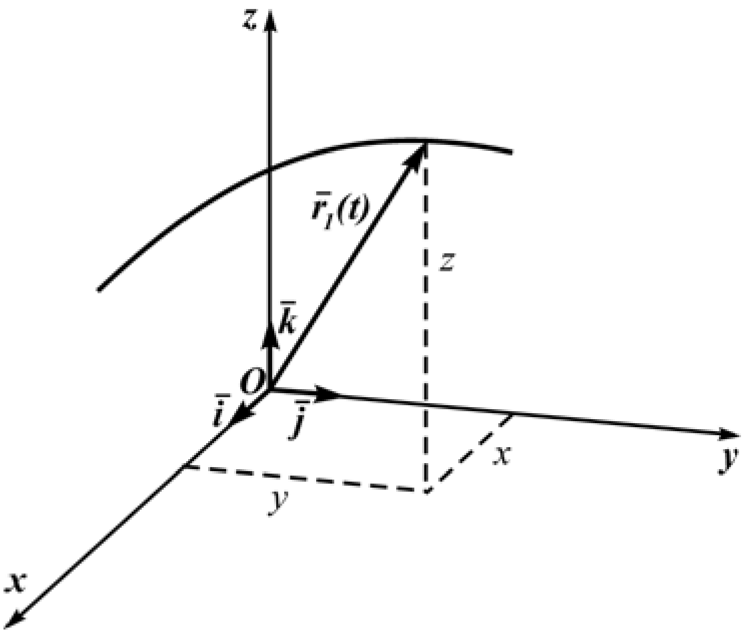


Рис.1. Векторный способ описания движения



Пример

$x = 2t + 5$
$y = -ln(t)$

$\vec{r} = \vec{i} \cdot (2t + 5) - \vec{j} \cdot ln(t)$

Скорость

Скорость ($\vec{v}$, от англ. velocity или фр. vitesse, исходно от лат. vēlōcitās) — векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта.

Телу можно придать скорость подействовав на него силой. Если действие сил прекратится, то скорость сохраняется. Причем она не будет менять своего модуля и направления.

Средняя скорость
$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Единицы измерения [м\с]

Мгновенная скорость (скорость здесь сейчас):

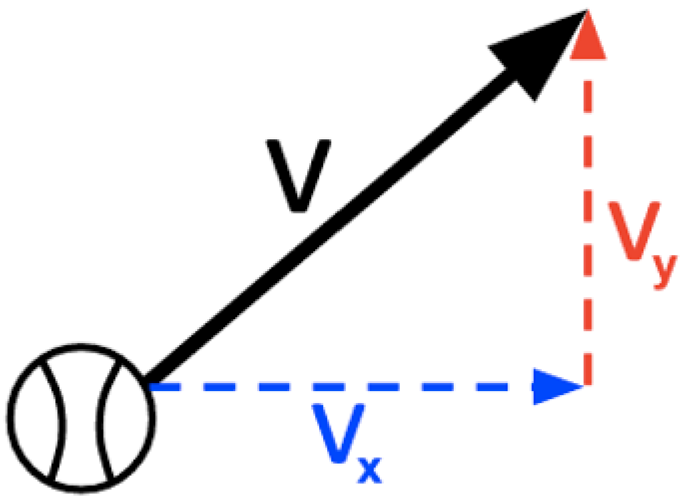
- $v = \frac{dS}{dt}$ -- алгебраическая величина скорости
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ -- векторная скорость
- $v_x = \frac{dx}{dt}$
  $v_y = \frac{dy}{dt}$
  $v_z = \frac{dz}{dt}$

Скорость -- производная от координаты по времени. В теоретической механике принято обозначать скорость ставя точку над координатой.

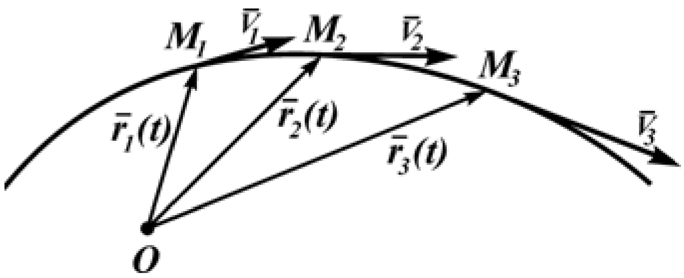
$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$
$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

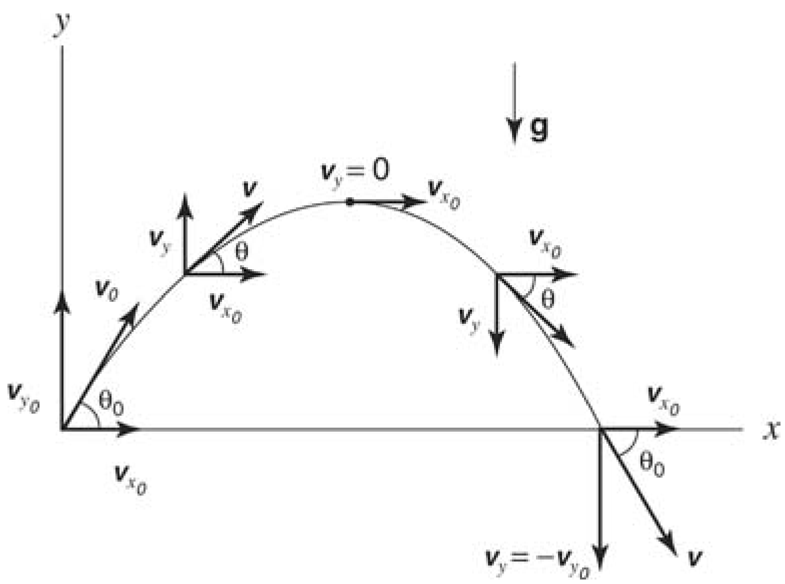
Полная алгебраическая скорость
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Вектор скорости
$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z}$



Скорость всегда находится на касательной к траектории





Пример

Найдите уравнения описывающие изменение скорости, если движение задано уравнениями:

$x = 2t + 3$

$y = 12t^2 - t$

- Как выглядит траектория точки?
- Какие выводы можно сделать о скорости вдоль каждой из осей координат?
- Запишите уравнений полной алгебраической скорости
- Вычислите скорость и координату в заданный момент времени

$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{d(2t+3)}{dt}$

$v_x = \dot{x} = 2$ м\с

$v_y = \dot{y} = 12 \cdot 2 \cdot t - 1 = 24t - 1$ м\с

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v = \sqrt{2^2 + (24t-1)^2}$

Координата и скорость точки в момент времени t = 2 с

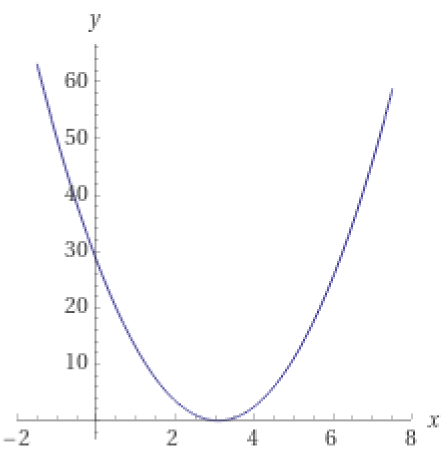
$x(t=2) = 7$ м
$y(t=2) = 24 \cdot 4 - 2 = 94$ м

$v_x = 2$ м\с
$v_y(t=2) = 47$ м\с
$v(t=2) = \sqrt{4+47^2} \approx 47$ м/с

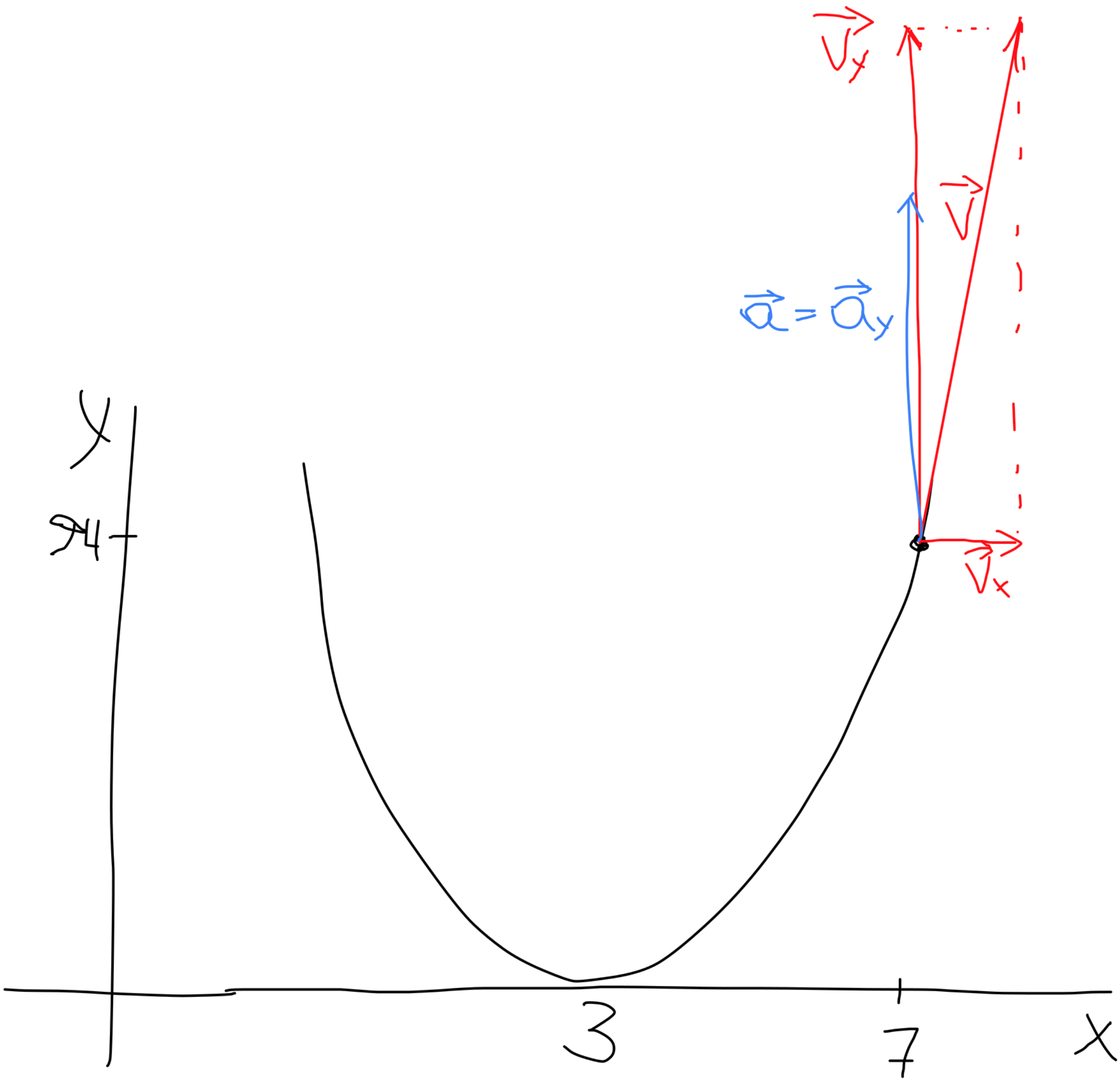
$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(24t-1)}{dt} = 24$

$a = 24$ м/с2



(t from −2.25 to 2.25)



Ускорение точки

Ускорение ($\vec{a}$ (от лат. acceleratio) или w) — физическая величина, определяющая быстроту изменения модуля и вектора скорости, то есть первая производная от скорости по времени.

Ускорение -- признак действия неуравновешенной системы сил на тело. Например одной силы. Если действие сил прекратится, то ускорение исчезнет.

Единицы измерения $\text{м} \backslash \text{с}^2$

- $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v_x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v_y} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{y}$
  $a_z = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v_z} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{z}$

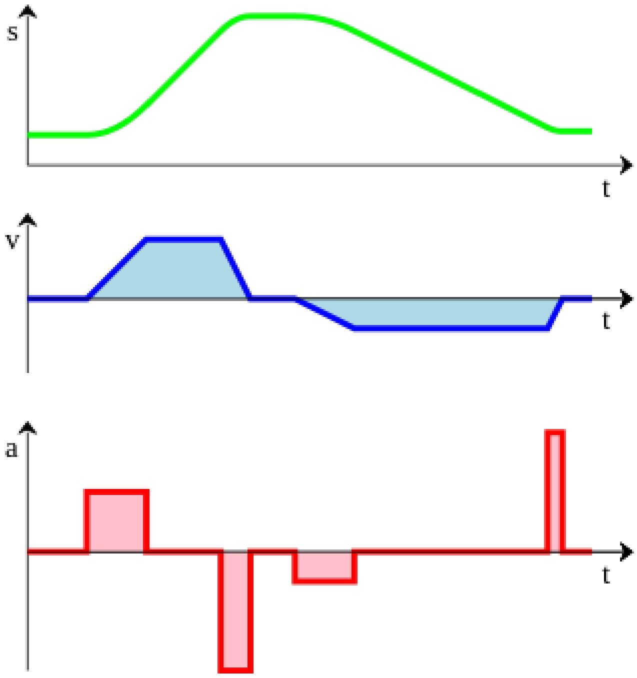
Полное алгебраическое ускорение

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Вектор ускорения

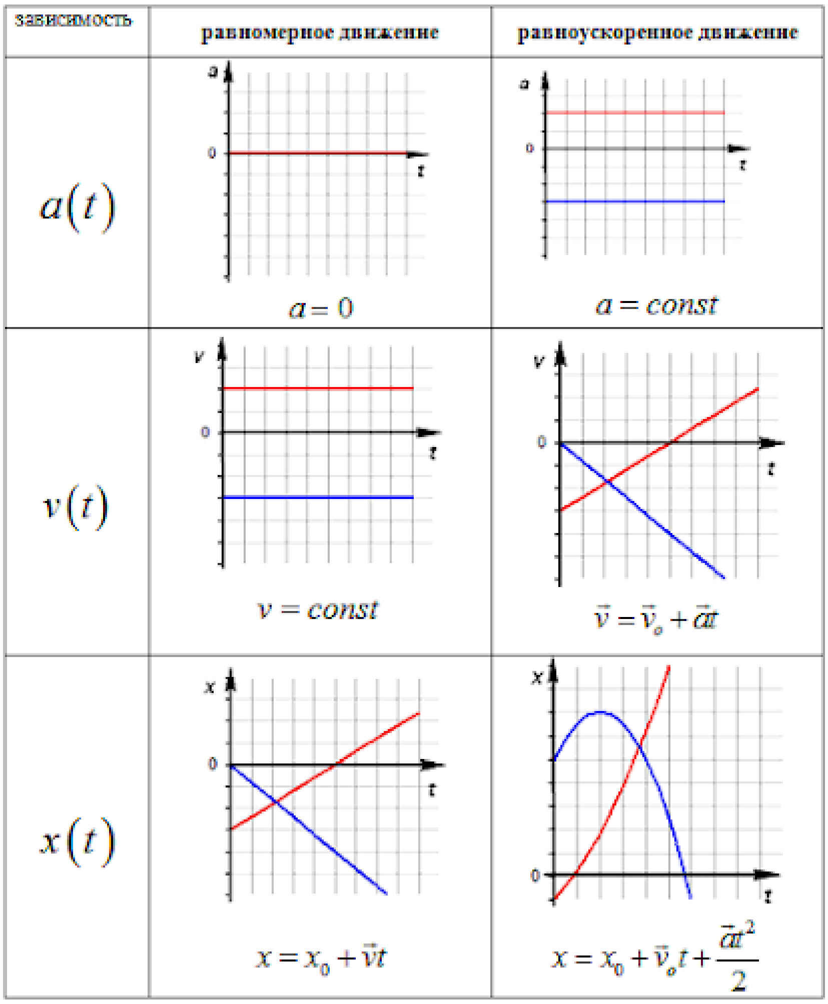
$\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + \overrightarrow{a_z}$

Графики координаты, скорости и ускорения



Классификация движения материальной точки

- равномерное (a=0, $v = const$)
- ускоренное\замедленное ($a \neq 0, v \neq const$)
    - равноускоренное\равнозамедленное ($a \neq 0 = const, v \neq const$)



зависимость	равномерное движение	равноускоренное движение
$a(t)$	$a = 0$	$a = const$
$v(t)$	$v = const$	$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$
$x(t)$	$x = x_0 + \vec{v}t$	$x = x_0 + \vec{v}_o t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

Выведем уравнения описывающие скорость и координату для равномерного движения

$$a = 0 \rightarrow v = const$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

умножим левую и правую часть на dt

$$v \cdot dt = dx$$

$$dx = v \cdot dt$$

Из этого уравнения необходимо вывести x, для этого проинтегрируем его левую и правую часть взяв интеграл с переменным верхним пределом

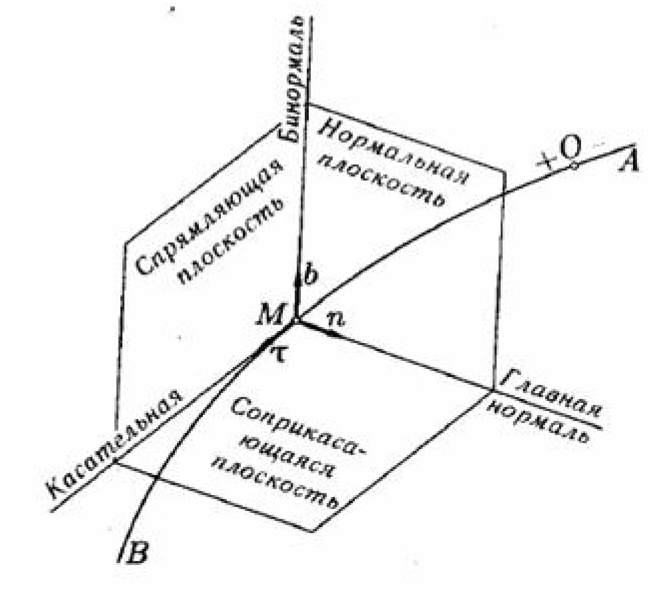
$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = v(t - 0)$$

$$x = x_0 + vt$$

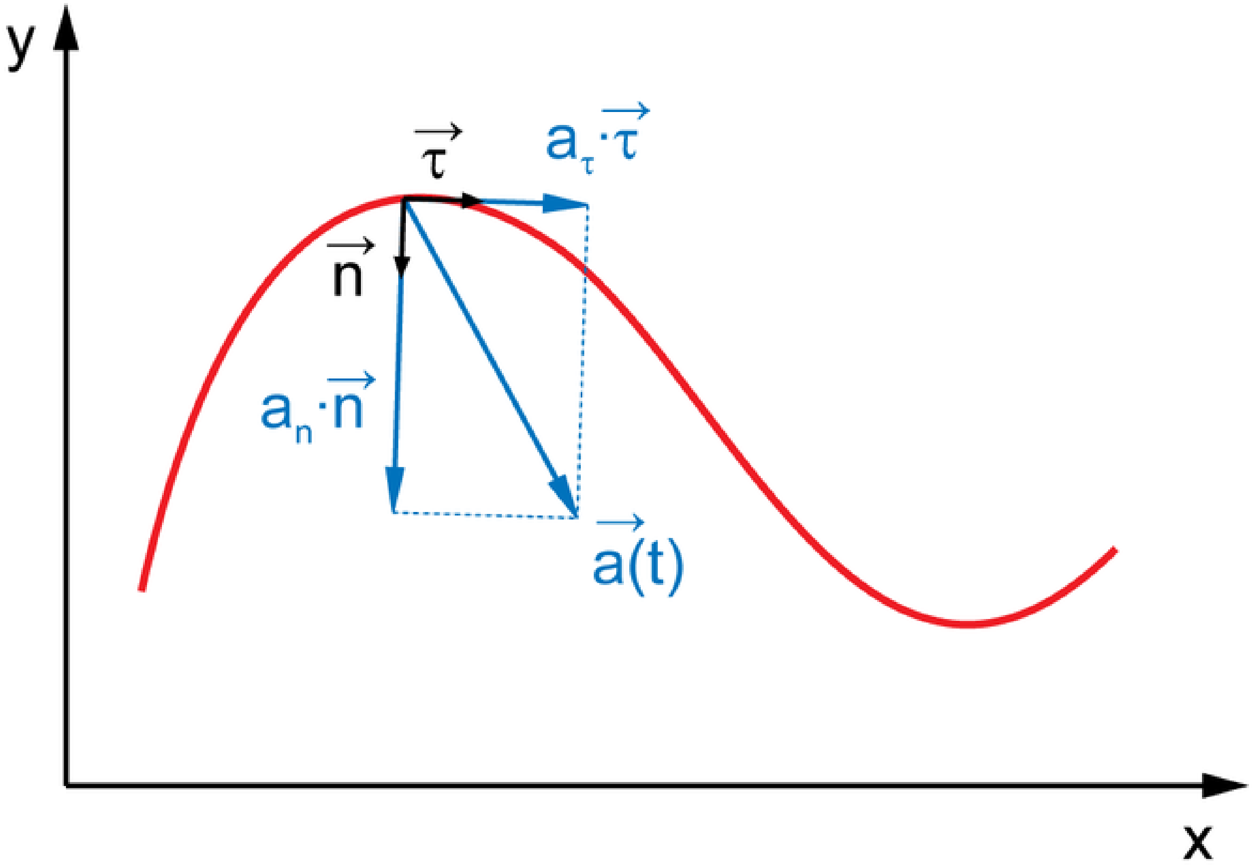
Естественные координатные оси

- начало координат в данной точке траектории
- движутся вместе с точкой
- изменяют свои направления во время движения



- τ направлена по касательной к траектории в данной точке, в сторону движения (по скорости)
- n -- нормаль, направлена $\perp$ оси τ, в сторону вогнутости траектории. в случае прямолинейной траектории направление не определено.
- b -- бинормаль, направлена так чтобы τ, n, b образовывали правую систему координат

Ускорения в естественной координатной системе



- a_τ -- тангенциальное ускорение. определяет изменение алгебраической скорости

  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$

  $a_\tau = |\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}|$

  $\vec{v} \cdot \vec{a}$ -- скалярное произведение

  $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y$

- a_n -- нормальное ускорение. определяет изменение направления скорости

  $a_n = \frac{v^2}{r}$

  r -- радиус кривизны.

  $a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}$

  $\vec{v} \times \vec{a}$ -- векторное произведение векторов

  $\vec{v} \times \vec{a} = v_x \cdot a_y - v_y \cdot a_x$

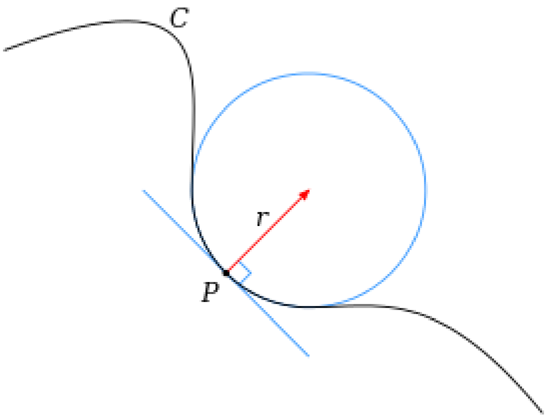
- $a_b = 0$

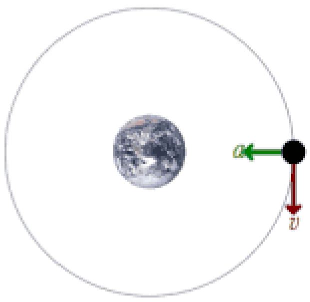
- Полное ускорение

  $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$

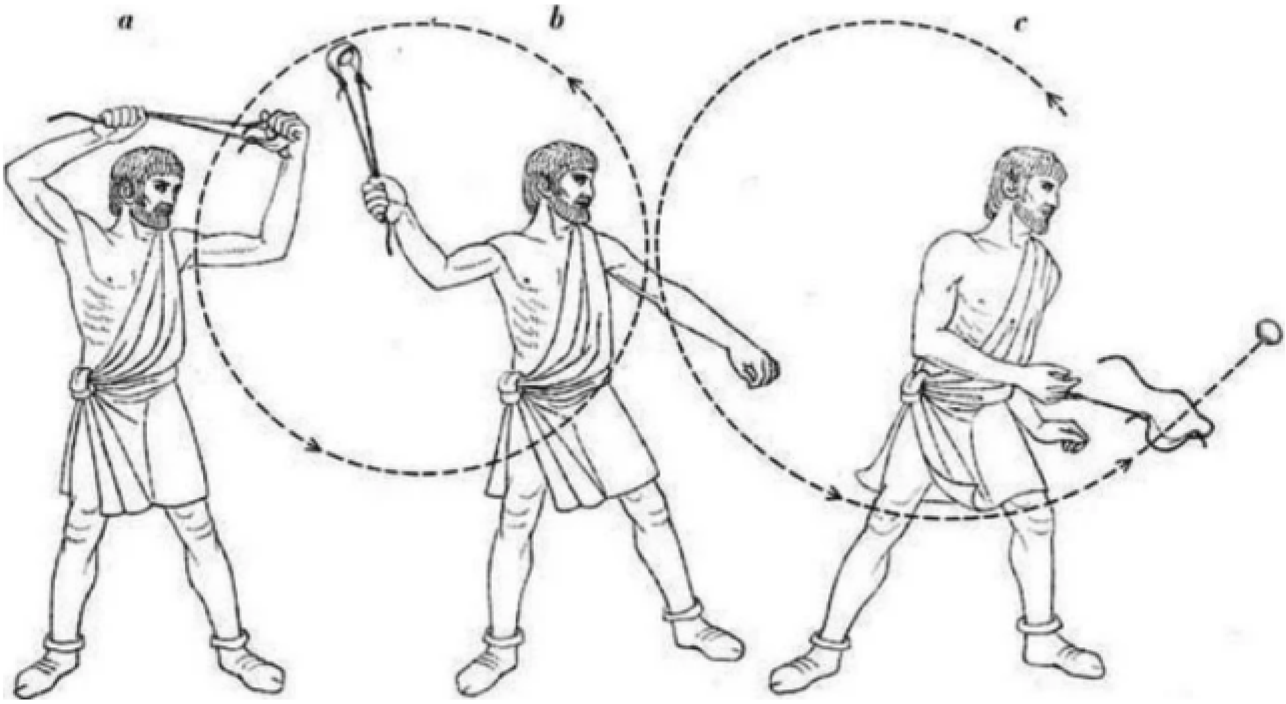
- Модуль полного ускорения

  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$





Куда будут направлены вектора скорости и ускорений в разных точках траектории?



Вопросы

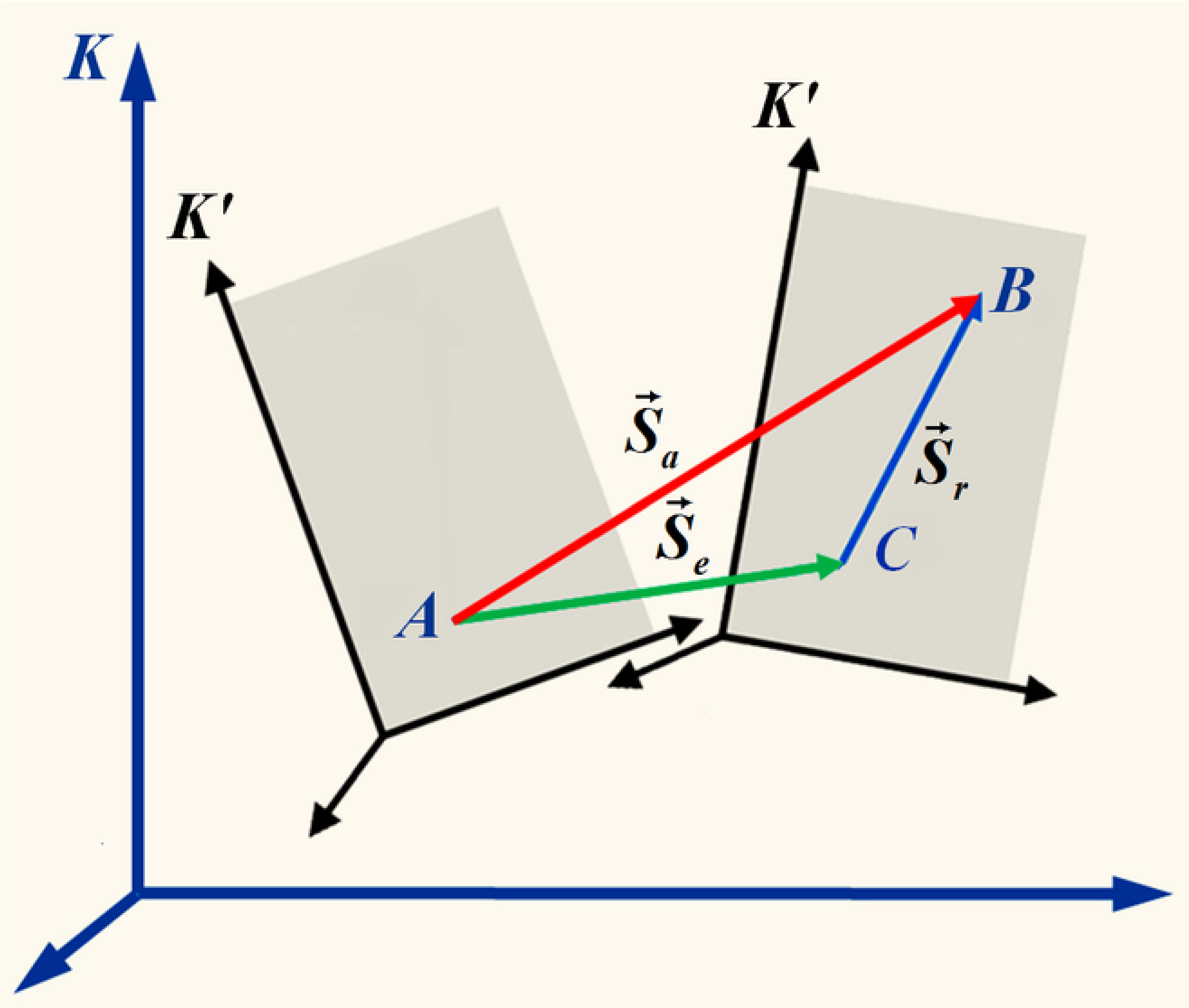
1. Можно ли *почувствовать* скорость? Ускорение?
2. Как будет двигаться точка, если его ускорение равно нулю?
3. Как будет двигаться точка, если у него есть только тангенциальное ускорение?
4. Как будет двигаться точка, если у него есть только нормальное ускорение?
5. Как будет двигаться точка, если у него есть и нормальное ускорение и тангенциальное ускорение?

***

см. движение твёрдого тела (вращательное движение) перед рассмотрением сложного движения точки

Сложное движение точки

Сложное движение -- движение материальной точки относительно какой-либо системы отсчёта, которая, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчёта.



- черным отмечены оси подвижной системы отсчёта
- синим отмечены оси неподвижной системы отсчёта

$\overrightarrow{S_r}$ -- вектор перемещения точки относительно подвижной СО -- вектор относительного перемещения
$\overrightarrow{S_e}$ -- вектор перемещения подвижной СО -- вектор переносного движения
$\overrightarrow{S_a}$ -- вектор перемещения точки относительно неподвижной СО -- вектор абсолютного перемещения

Виды движения:

- относительное (обозначается индексом r, relatif)
- переносное (обозначается индексом e, emporter)
- абсолютное

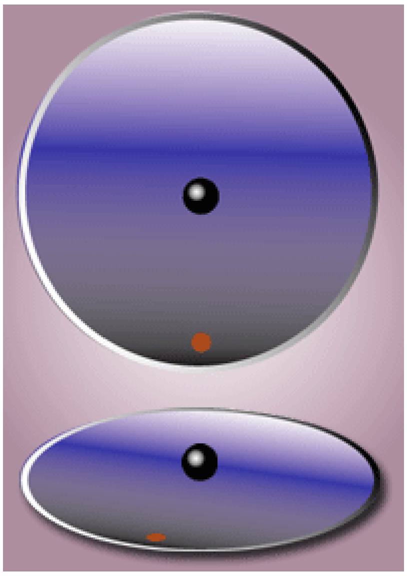
Соответственно скорости и ускорения точки называют относительными, переносными и абсолютными.

Неинерциальная система отсчёта — система отсчёта, движущаяся с ускорением или поворачивающаяся относительно инерциальной.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) — система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно, либо покоятся.

Пример неинерциальной СО (связанной с диском) приведён ниже.

Приведите примеры ИСО и неинерциальной СО



- Приведите примеры сложного движения?
- Вы прямо сейчас участвуете в сложном движении?
- Можно ли рассматривать в отдельных случаях сложное движение, абстрагируясь от переносного движения?
- Можно ли определить, движется ли ваша система отсчёта прямолинейно и с постоянной скоростью или покоится?

Закон сложения скоростей

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

Закон сложения ускорений

Полный вывод формулы ускорений из формулы скоростей см. в [2]

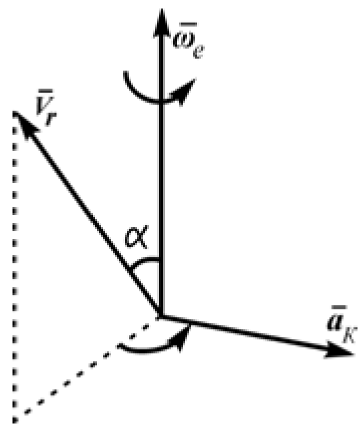
$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_k}$$

Кориолисово ускорение

$\overrightarrow{a_k}$ (иногда обозначается $\overrightarrow{a_c}$)

- Правило Жуковского

  Ускорение Кориолиса $\overrightarrow{a_K}$ можно получить, спроецировав вектор относительной скорости точки $\overrightarrow{v_r}$ на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\overrightarrow{\omega_e}$, увеличив полученную проекцию в 2ω раз и повернув её на 90 градусов в направлении переносного вращения.

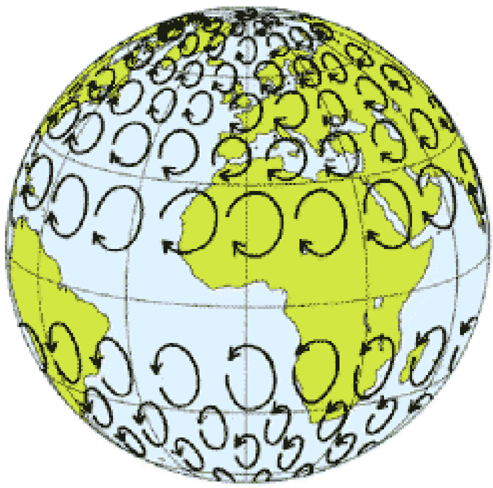
- Примеры

  - В Северном полушарии приложенная к движущемуся поезду сила Кориолиса направлена перпендикулярно рельсам, имеет горизонтальную составляющую и стремится сместить поезд вправо по ходу движения.
  - правые берега рек в Северном полушарии более крутые — их подмывает вода под действием этой силы
  - Северном полушарии вращение воздушных масс происходит в циклонах против часовой стрелки, а в антициклонах — по часовой стрелке; в Южном — наоборот: по часовой стрелке в циклонах и против — в антициклонах. Отклонение ветров (пассатов) при циркуляции атмосферы — также проявление силы Кориолиса.

- Пример. Определение кориолисова ускорения

Решение

$v = n$



Литература

1. Краткий курс теоретической механики. Тарг С.М., издания после 2000 г.
2. Курс теоретической механики в 2 т. Яблонский А. А., Никифорова В. М., издания после 2000 г.