Теория вероятностей

Случайные величины

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

План

Outline

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X.

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X.

Возможные значения случайной величины обозначаются соответствующей строчной буквой.

$$\mathtt{X} = \{\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n\}$$

Случайная величина

Пусть X – с.в. – число очков выпавшее на игральной кости.

Тогда возможные значения `X = {1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }`

Случайная величина и событие

Случайная величина может быть связана со *случайным событием*.

Например:
K - случайная величина: число очков выпавшее на игральной кости
A - случайное событие: выпадении более 3 очков на игральной кости ($K > 3$)

R - случайная величина: расстояние от центра плоской мишени до места попадания B - случайное событие: попадание в мишень $R < r$, где r - радиус мишени

Случайная величина

Примеры

- Число очков выпавшее на игральной кости
- Число орлов выпавшее в результате 10 бросков монеты
- Число детей в семье
- Число солнечных дней в году
- Средняя температура в аудитории в данный момент
- Рост случайно выбранного человека
- Кубиковая прочность бетона
- Количество выпавшего снега за месяц
- Время безотказной работы устройства

Случайная величина

- **Дискретная** (discrete)
  принимает конечное или счетное число значений.
- **Непрерывная** (continuous) может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Случайная величина

Примеры

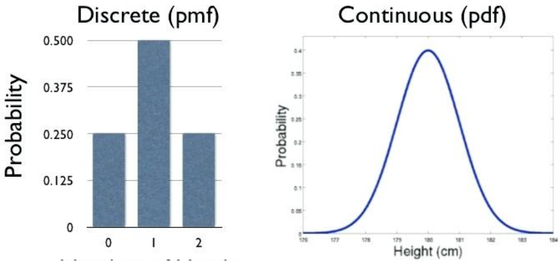
- Дискретная

Случайная величина

Примеры

- Дискретная
  - Число очков выпавшее на игральной кости
  - Число орлов выпавшее в результате 10 бросков монеты
  - Число студентов на конкретном занятии
  - Число солнечных дней в году
- Непрерывная
  - Средняя температура в аудитории в данный момент
  - Рост случайно выбранного человека
  - Кубиковая прочность бетона
  - Количество выпавшего снега за месяц
  - Время безотказной работы устройства

Случайная величина



Outline

Функция вероятности

- Случайные величины отличатся друг от друга диапазоном своих значений
  Например время ожидания троллейбуса на остановке в будний день в 8:00 и в 22:00
- Даже если случайные величины имеют одинаковый диапазон значений, одна СВ может быть более склонна принимать принимать одни значения, а другая - другие
  Например: процент оценок *отлично* по философии и теоретической механике у студентов направления 08.05.01
- Поэтому имеет смысл сопоставить каждому возможному значению СВ некую вероятность.

Функция вероятности

Функция вероятности, probability mass function (pmf) – функция, возвращающая вероятность того, что дискретная случайная величина X примет определённое значение.

Вероятность того, что СВ X примет значение равное x

$$P(X = x)$$

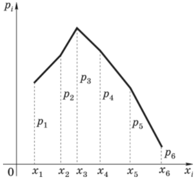
x - возможное значение случайной величины

Способы задания функции вероятности

- Табличного (ряд распределения)

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Графически (многоугольник распределения)



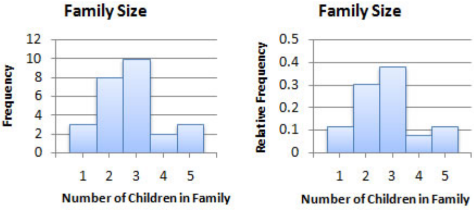
Аналитически

$$P(K) = f(k)$$

Способы задания функции вероятности

Гистограмма

Часто вместо многоугольника распределения строят гистограмму



Функция распределения

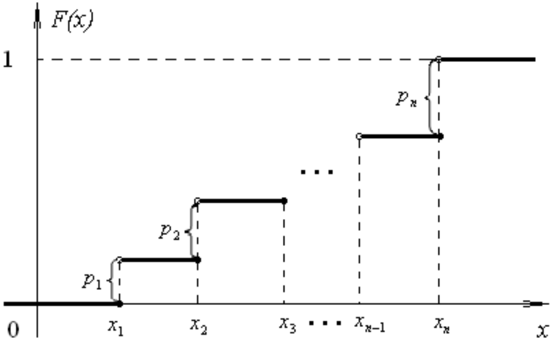
- Функция вероятности позволяет узнать вероятность только реализации одного значения случайной величины $P(X = x)$.
- Однако часто нужно знать вероятность того, что случайная величина не превысит заданного значения $P(X < x)$
- Эта вероятность задаётся **функцией распределения**

$$F(x) = P(X < x)$$

- В англоязычних источниках используется название **cumulative distribution function (cdf)**

Функция распределения

Функция распределения дискретной СВ



Функция распределения
Свойства

- неубывающая функция
  $x_1 < x_2, F(x_1) \le F(x_2)$
- $F(+\infty) = 1$
- $F(-\infty) = 0$

Функция распределения
Пример

- В группе 5 человек
- Записать закон распределения в табличном виде СВ X - число человек присутствующих на занятии
- p = 0.9 - вероятность появления студента на занятии
- Считать появление отдельных студентов на занятии независимыми событиями

Функция распределения

Пример

- В группе 5 человек
- Записать закон распределения в табличном виде СВ X - число человек присутствующих на занятии
- $p = 0.9$ - вероятность появления студента на занятии
- Считать появление отдельных студентов на занятии независимыми событиями
- Записать в табличном виде функцию распределения

Функция распределения

Непрерывная случайная величина

- Для непрерывной случайной величины невозможно составить ряд распределения так же как для дискретной
- Но различные области значений непрерывной случайной величины могут не являются равновероятными Например рост случайно выбранного человека попадёт в интервал (150, 155) и в интервал от (170,175) с разной вероятностью.
- Поэтому вместо ряда распределения для описания непрерывной случайной величины используется **функция распределения** (cdf)

$$F(x) = P(X < x)$$

- Эту функцию иногда называют *интегральным законом распределения*

Вероятность попадания СВ на заданный участок

- Рассмотрим полуинтервал значений СВ $[a, b)$
- Согласно теореме о сумме событий

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b)$$

- Отсюда

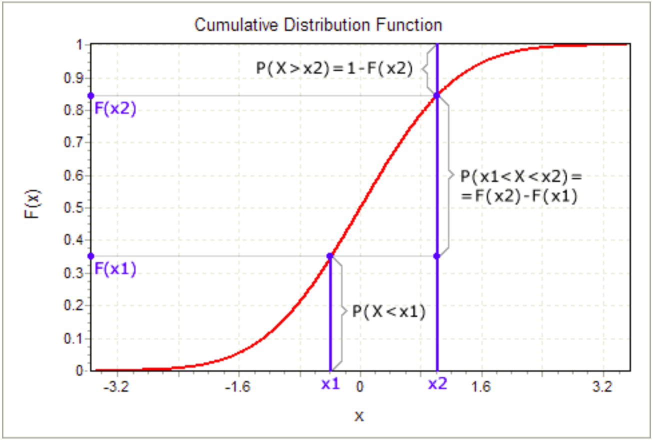
$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

- Используем функцию распределения

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Функция распределения

Функция распределения непрерывной СВ



- Рассмотрим непрерывную СВ X
- Определим вероятность попадания этой СВ на участок от x до $x + \Delta x$

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

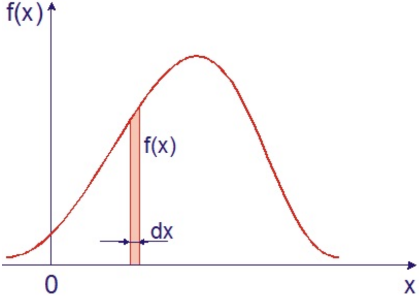
- Определим среднюю вероятность приходящуюся на длину этого участка при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Плотность распределения

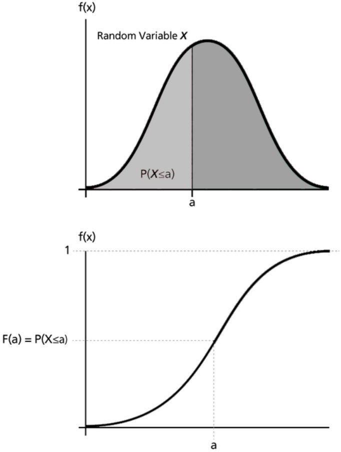
Непрерывная случайная величина

- Обозначим
$$f(x) = F'(x)$$
- Это *плотность распределения* (плотность вероятности)
- Кривая определяемая $f(x)$ называется кривой распределения



Функция распределения и функция плотности

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$



Outline

Числовые характеристики

- Случайную величину можно исчерпывающим образом описать:
  - функцией распределения $F(x)$ (дискретная и непрерывная СВ)
  - рядом распределения $P(x)$ (дискретная СВ)
  - плотностью распределения $f(x)$ (непрерывная СВ)
- Однако такое исчерпывающее описание не всегда удобно.
- Поэтому в дополнении к вышеприведённым способам описания СВ используют характеристики СВ отражающие наиболее существенные её особенности.
- Их называют **числовыми характеристиками**

Числовые характеристики

Некоторые числовые характеристики

- Математическое ожидание - характеристика положения СВ на числовой оси
- Медиана - характеристика положения СВ на числовой оси
- Мода
- Дисперсия, среднеквадратичное отклонение - характеристики рассеивания СВ около её математического ожидания

Outline

Математическое ожидание

- Expected value, mean value
- Обозначение: $M(X)$ или $E(X)$
- характеристика положения СВ на числовой оси
- Это среднее (взвешенное) значение СВ
- Для дискретной СВ

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i.$$

- Для непрерывной СВ

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Математическое ожидание

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x * P(x)
1	0.10	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2 * 0.30 = 0.60
3	0.45	3 * 0.45 = 1.35
4	0.15	4 * 0.15 = 0.60
		$\mu_x =$ 2.65

Математическое ожидание
Свойства

- Математическое ожидание числа есть само число.

$$M[a] = a$$

- Сумма случайных величин

$$M[X + Y] = M[x] + M[Y]$$

- Линейность математического ожидания

$$M[kX] = k \cdot M[X]$$

- Произведение независимых, некоррелированых случайных величин

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$$

Outline

Дисперсия

- Variance
- Обозначение: $D(X)$, $Var(X)$
- Обозначение в статистике: σ_X^2
- Характеризует рассеивания СВ около её математического ожидания
- $D[X] = M[(X - M[X])^2]$
- $X - M[X]$ - отклонение случайной величины

Дисперсия

- Для дискретной СВ
  $D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - M[X])^2)$
- Для непрерывной СВ
  $D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx$

- Иногда дисперсию проще вычислить так:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Среднее квадратичное отклонение

- Дисперсия имеет размерность квадрата СВ, что не слишком наглядно
- Поэтому из дисперсии извлекают квадратный корень
- Такую величину называют средним квадратическим отклонением (с.к.о.) $\sigma[X]$
- $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$
- В статистике с.к.о. обозначают SD

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	x^2 * P(x)
1	0.10	1*1 = 1	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2*2 = 4	4 * 0.30 = 1.20
3	0.45	3*3 = 9	9 * 0.45 = 4.05
4	0.15	4*4 = 16	16 * 0.15 = 2.40

$$M[X] =$$

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	x^2 * P(x)
1	0.10	1*1 = 1	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2*2 = 4	4 * 0.30 = 1.20
3	0.45	3*3 = 9	9 * 0.45 = 4.05
4	0.15	4*4 = 16	16 * 0.15 = 2.40

$$M[X] = 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65$$
$$M[X^2] =$$

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	x^2 * P(x)
1	0.10	1*1 = 1	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2*2 = 4	4 * 0.30 = 1.20
3	0.45	3*3 = 9	9 * 0.45 = 4.05
4	0.15	4*4 = 16	16 * 0.15 = 2.40

$$M[X] = 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65$$
$$M[X^2] = 0.1 + 1.2 + 4.05 + 2.4 = 7.75$$
$$D[X] =$$

x	P(x)	x^2	x^2 * P(x)
1	0.10	1*1 = 1	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2*2 = 4	4 * 0.30 = 1.20
3	0.45	3*3 = 9	9 * 0.45 = 4.05
4	0.15	4*4 = 16	16 * 0.15 = 2.40

$$
\begin{aligned}
M[X] &= 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65 \\
M[X^2] &= 0.1 + 1.2 + 4.05 + 2.4 = 7.75 \\
D[X] &= 7.75 - 2.65^2 = 0.7275 \\
\sigma[x] &= 0.8529
\end{aligned}
$$

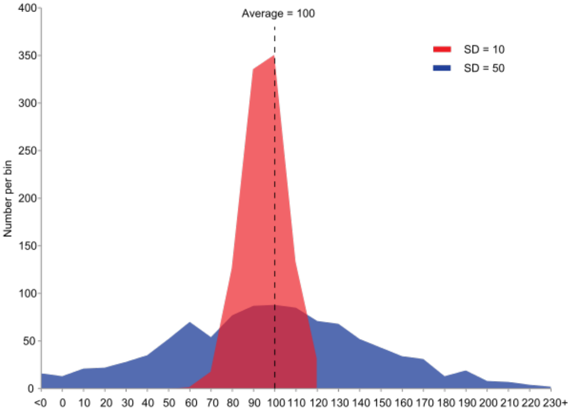
Дисперсия

Свойства

- Дисперсия всегда неотрицательна: $D[X] \geq 0$
- Дисперсия константы равна нулю: $D[a] = 0$
- Дисперсия суммы двух случайных величин $D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2cov(X, Y)$[1]
- $D[kX] = k^2 D[X]$
- $D[-X] = D[X]$
- $D[X + a] = D[X]$

[1] $cov(X, Y)$ - ковариация - мера линейной зависимости двух случайных величин. $cov(X, Y) = 0$ если величины линейно независимы

Дисперсия



Average = 100
SD = 10
SD = 50
Number per bin
400
350
300
250
200
150
100
50
0
<0 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230+

Коэффициент вариации

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}$$

Outline

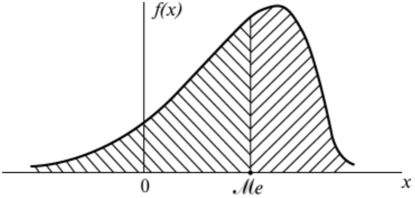
Медиана

Медиана $Me[X]$ - такое значение случайной величины для которого выполняется равенство

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

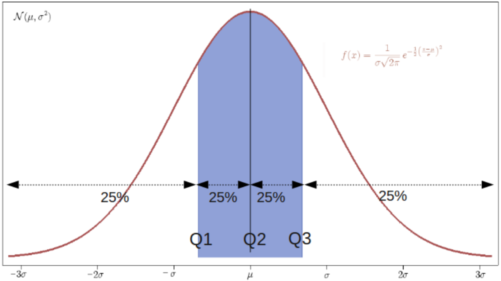
Для непрерывной СВ:

$$F(Me) = 0.5$$



Квантиль

- **Квантиль** - значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью
- **Квартили** Q1, Q2, Q3 - значения случайной величины которые делят распределение на 4 равные части



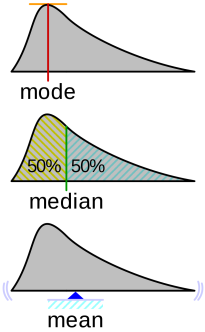
Outline

Мода

Мода - значение СВ, которое встречается наиболее часто

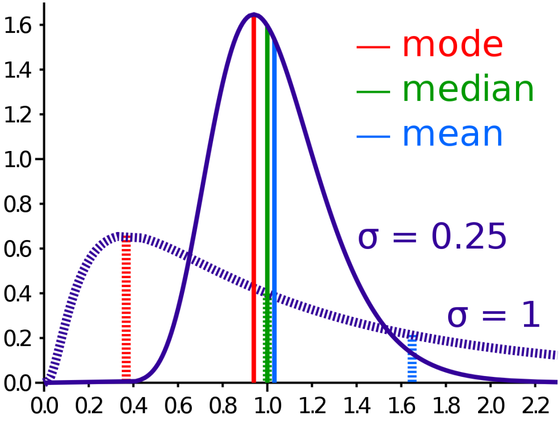
Мода, медиана, математическое ожидание

Пример



Мода, медиана, математическое ожидание

Пример



Outline

МО и дисперсия числа появления события

- Испытания независимы
- p - вероятность появления события в единичном испытании
- Эта веротность не меняется от испытания к испытанию
- проводится n испытаний

- МО числа появлений события в независимых испытаниях

$$M(X) = np$$

- Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

$$D(X) = npq$$

Outline

Закон больших чисел

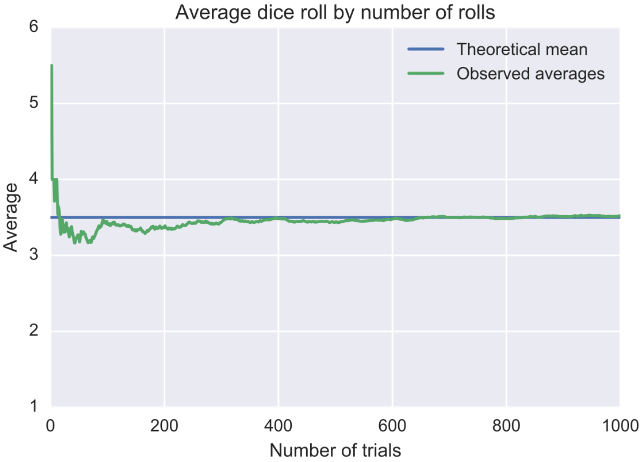
- При очень большом числе случайных явлений их результат практически перестаёт быть случайным и может быть определён с большой степенью определённости
- Закон больших чисел
    - Теорема Чебышёва
    - Теорема Бернулли

Outline

Теорема Чебышёва

- При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюденных значении случайной величины *сходится по вероятности* к ее математическому ожиданию.
- Другими словами: на практике можно использовать вместо математического ожидания среднее значение случайной величины (если этих значений много)

Теорема Чебышёва



Outline

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна,

то как угодно близка к единице вероятность того,

что отклонение относительной частоты от вероятности по абсолютной величине будет сколь угодно малым,

если число испытаний достаточно велико.

Другими словами: на практике можно использовать вместо вероятности события относительную частоту события (при условиях описанных выше)

Outline

Источники

- Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095
- Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0

Ссылки

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST