

Теория вероятностей

Случайные величины

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

План

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

- Математическое ожидание

- Дисперсия

- Медиана, Квантиль

- Мода

- МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

- Теорема Чебышёва

- Теорема Бернулли

Ссылки

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

- Математическое ожидание

- Дисперсия

- Медиана, Квантиль

- Мода

- МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

- Теорема Чебышёва

- Теорема Бернулли

Ссылки

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X .

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X .

Возможные значения случайной величины обозначаются соответствующей строчной буквой.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Случайная величина и событие

Случайная величина может быть связана со случайным событием.

Например:

K - случайная величина: число очков выпавшее на игральной кости

A - случайное событие: выпадении более 3 очков на игральной кости ($K > 3$)

R - случайная величина: расстояние от центра плоской мишени до места попадания B - случайное событие: попадание в мишень $R < r$, где r - радиус мишени

Случайная величина

Примеры

- ▶ Число очков выпавшее на игральной кости
- ▶ Число орлов выпавшее в результате 10 бросков монеты
- ▶ Число детей в семье
- ▶ Число солнечных дней в году
- ▶ Средняя температура в аудитории в данный момент
- ▶ Рост случайно выбранного человека
- ▶ Кубиковая прочность бетона
- ▶ Количество выпавшего снега за месяц
- ▶ Время безотказной работы устройства

Случайная величина

- ▶ **Дискретная** (discrete) принимает конечное или счетное число значений.
- ▶ **Непрерывная** (continuous) может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Случайная величина

Примеры

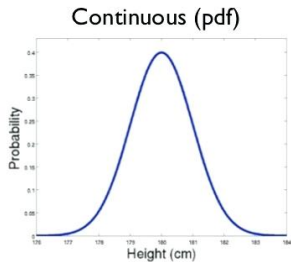
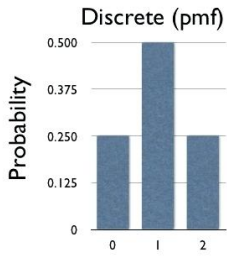
- ▶ Дискретная

Случайная величина

Примеры

- ▶ Дискретная
 - ▶ Число очков выпавшее на игральной кости
 - ▶ Число орлов выпавшее в результате 10 бросков монеты
 - ▶ Число студентов на конкретном занятии
 - ▶ Число солнечных дней в году
- ▶ Непрерывная
 - ▶ Средняя температура в аудитории в данный момент
 - ▶ Рост случайно выбранного человека
 - ▶ Кубиковая прочность бетона
 - ▶ Количество выпавшего снега за месяц
 - ▶ Время безотказной работы устройства

Случайная величина



Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

Функция вероятности

- ▶ Случайные величины отличаются друг от друга диапазоном своих значений
Например время ожидания троллейбуса на остановке в будний день в 8:00 и в 22:00
- ▶ Даже если случайные величины имеют одинаковый диапазон значений, одна СВ может быть более склонна принимать одни значения, а другая - другие
Например: процент оценок *отлично* по философии и теоретической механике у студентов направления 08.05.01
- ▶ Поэтому есть необходимость описывать значения случайной величины связывая их с вероятностью

Функция вероятности

Функция вероятности, probability mass function (pmf) – функция, возвращающая вероятность того, что дискретная случайная величина X примет определённое значение.

Вероятность того, что СВ X примет значение равное x

$$P(X = x)$$

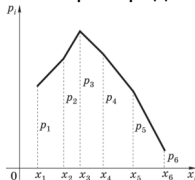
x - возможное значение случайной величины

Способы задания функции вероятности

- Таблично (ряд распределения)

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

Графически (многоугольник распределения)



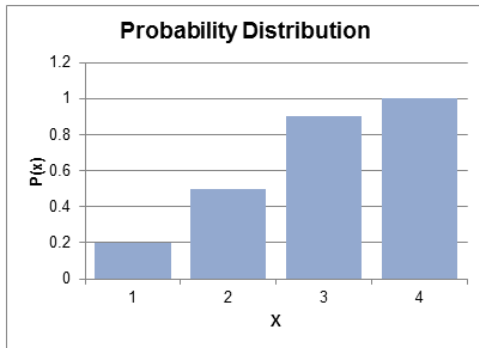
Аналитически

$$P(K) = f(k)$$

Способы задания функции вероятности

Гистограмма

Часто вместо многоугольника распределения строят гистограмму



Функция распределения

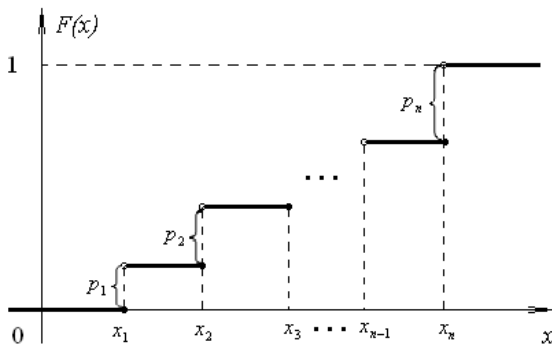
- ▶ Функция вероятности позволяет узнать вероятность только реализации одного значения случайной величины $P(X = x)$.
- ▶ Однако часто нужно знать вероятность того, что случайная величина не превысит заданного значения $P(X < x)$
- ▶ Эта вероятность задаётся **функцией распределения**

$$F(x) = P(X < x)$$

- ▶ В англоязычных источниках используется название **cumulative distribution function (cdf)**

Функция распределения

Функция распределения дискретной СВ



Функция распределения

Свойства

- ▶ неубывающая функция
 $x_1 < x_2, F(x_1) \leq F(x_2)$
- ▶ $F(+\infty) = 0$
- ▶ $F(-\infty) = 1$

Функция распределения

Пример

- ▶ В группе 5 человек
- ▶ Записать закон распределения в табличном виде СВ X - число человек присутствующих на занятии
- ▶ $p = 0.9$ - вероятность появления студента на занятии
- ▶ Считать появление отдельных студентов на занятии независимыми событиями

Функция распределения

Пример

- ▶ В группе 5 человек
- ▶ Записать закон распределения в табличном виде СВ X - число человек присутствующих на занятии
- ▶ $p = 0.9$ - вероятность появления студента на занятии
- ▶ Считать появление отдельных студентов на занятии независимыми событиями
- ▶ Записать в табличном виде функцию распределения

Функция распределения

Непрерывная случайная величина

- ▶ Для непрерывной случайной величины невозможно составить ряд распределения так же как для дискретной
- ▶ Но различные области значений непрерывной случайной величины могут не являются равновероятными Например рост случайно выбранного человека попадёт в интервал (150, 155) и в интервал от (170,175) с разной вероятностью.
- ▶ Поэтому вместо ряда распределения для описания непрерывной случайной величины используется **функция распределения (cdf)**

$$F(x) = P(X < x)$$

- ▶ Эту функцию иногда называют *интегральным законом распределения*

Вероятность попадания СВ на заданный участок

- ▶ Рассмотрим полуинтервал значений СВ $[a, b)$
- ▶ Согласно теореме о сумме событий

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b)$$

- ▶ Отсюда

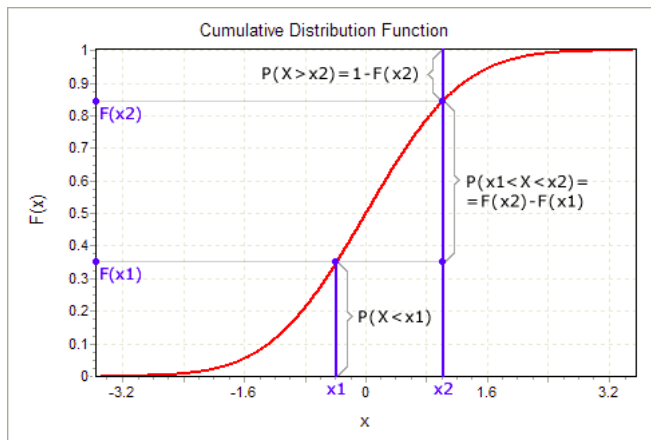
$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

- ▶ Используем функцию распределения

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Функция распределения

Функция распределения непрерывной СВ



- ▶ Рассмотрим непрерывную СВ X
- ▶ Определим вероятность попадания этой СВ на участок от x до $x + \Delta x$

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

- ▶ Определим среднюю вероятность приходящуюся на длину этого участка при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

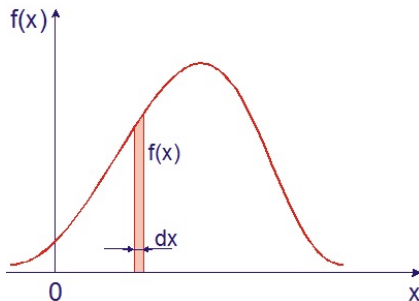
Плотность распределения

Непрерывная случайная величина

- Обозначим

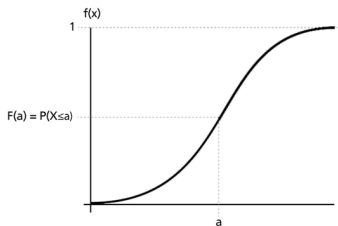
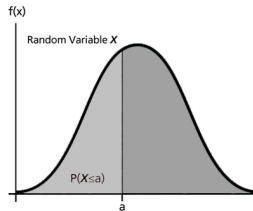
$$f(x) = F'(x)$$

- Это *плотность распределения* (плотность вероятности)
- Кривая определяемая $f(x)$ называется кривой распределения



Функция распределения и функция плотности

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

Числовые характеристики

- ▶ Случайную величину можно исчерпывающим образом описать:
 - ▶ функцией распределения $F(x)$ (дискретная и непрерывная СВ)
 - ▶ рядом распределения $P(x)$ (дискретная СВ)
 - ▶ плотностью распределения $f(x)$ (непрерывная СВ)
- ▶ Однако такое исчерпывающее описание не всегда удобно.
- ▶ Поэтому в дополнении к вышеприведённым способам описания СВ используют характеристики СВ отражающие наиболее существенные её особенности.
- ▶ Их называют **числовыми характеристиками**

Числовые характеристики

Некоторые числовые характеристики

- ▶ Математическое ожидание - характеристика положения СВ на числовой оси
- ▶ Медиана - характеристика положения СВ на числовой оси
- ▶ Мода
- ▶ Дисперсия, среднее квадратическое отклонение - характеристики рассеивания СВ около её математического ожидания

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

Математическое ожидание

- ▶ Expected value, mean value
- ▶ Обозначение: $M(X)$ или $E(X)$
- ▶ характеристика положения СВ на числовой оси
- ▶ Это среднее (взвешенное) значение СВ
- ▶ Для дискретной СВ

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

- ▶ Для непрерывной СВ

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Математическое ожидание

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x * P(x)
1	0.10	1 * 0.10 = 0.10
2	0.30	2 * 0.30 = 0.60
3	0.45	3 * 0.45 = 1.35
4	0.15	4 * 0.15 = 0.60
		$\mu_x = 2.65$

Математическое ожидание

Свойства

- ▶ Математическое ожидание числа есть само число.

$$M[a] = a$$

- ▶ Сумма случайных величин

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]$$

- ▶ Линейность математического ожидания

$$M[kX] = k \cdot M[X]$$

- ▶ Произведение независимых, некоррелированных случайных величин

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$$

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

Дисперсия

- ▶ Variance
- ▶ Обозначение: $D(X)$, $Var(X)$
- ▶ Обозначение в статистике: σ_X^2
- ▶ Характеризует рассеивания СВ около её математического ожидания
- ▶ $D[X] = M[(X - M[X])^2]$
- ▶ $X - M[X]$ - отклонение случайной величины

Дисперсия

- ▶ Для дискретной СВ

$$D[X] = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - M[X])^2$$

- ▶ Для непрерывной СВ

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx$$

- ▶ Иногда дисперсию проще вычислить так:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Среднее квадратичное отклонение

- ▶ Дисперсия имеет размерность квадрата СВ, что не слишком наглядно
- ▶ Поэтому из дисперсии извлекают квадратный корень
- ▶ Такую величину называют средним квадратическим отклонением (с.к.о.) $\sigma[X]$
- ▶ $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$
- ▶ В статистике с.к.о. обозначают SD

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	$x^2 * P(x)$
1	0.10	$1 * 1 = 1$	$1 * 0.10 = 0.10$
2	0.30	$2 * 2 = 4$	$4 * 0.30 = 1.20$
3	0.45	$3 * 3 = 9$	$9 * 0.45 = 4.05$
4	0.15	$4 * 4 = 16$	$16 * 0.15 = 2.40$

$$M[X] =$$

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	$x^2 * P(x)$
1	0.10	$1*1 = 1$	$1 * 0.10 = 0.10$
2	0.30	$2*2 = 4$	$4 * 0.30 = 1.20$
3	0.45	$3*3 = 9$	$9 * 0.45 = 4.05$
4	0.15	$4*4 = 16$	$16 * 0.15 = 2.40$

$$M[X] = 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65$$

$$M[X^2] =$$

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	$x^2 * P(x)$
1	0.10	$1 * 1 = 1$	$1 * 0.10 = 0.10$
2	0.30	$2 * 2 = 4$	$4 * 0.30 = 1.20$
3	0.45	$3 * 3 = 9$	$9 * 0.45 = 4.05$
4	0.15	$4 * 4 = 16$	$16 * 0.15 = 2.40$

$$M[X] = 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65$$

$$M[X^2] = 0.1 + 1.2 + 4.05 + 2.4 = 7.75$$

$$D[X] =$$

Дисперсия

Дискретная случайная величина. Пример

x	P(x)	x^2	$x^2 * P(x)$
1	0.10	$1*1 = 1$	$1 * 0.10 = 0.10$
2	0.30	$2*2 = 4$	$4 * 0.30 = 1.20$
3	0.45	$3*3 = 9$	$9 * 0.45 = 4.05$
4	0.15	$4*4 = 16$	$16 * 0.15 = 2.40$

$$M[X] = 0.1 \cdot 1 + 1.2 \cdot 2 + 4.05 \cdot 3 + 2.4 \cdot 4 = 2.65$$

$$M[X^2] = 0.1 + 1.2 + 4.05 + 2.4 = 7.75$$

$$D[X] = 7.75 - 2.65^2 = 0.7275$$

$$\sigma[x] = 0.8529$$

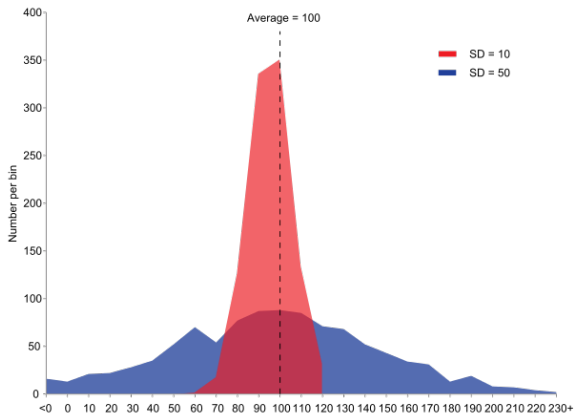
Дисперсия

Свойства

- ▶ Дисперсия всегда неотрицательна: $D[X] \geq 0$
- ▶ Дисперсия константы равна нулю: $D[a] = 0$
- ▶ Дисперсия суммы двух случайных величин
 $D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2cov(X, Y)^1$
- ▶ $D[kX] = k^2 D[X]$
- ▶ $D[-X] = D[X]$
- ▶ $D[X + a] = D[X]$

¹ $cov(X, Y)$ - ковариация - мера линейной зависимости двух случайных величин. $cov(X, Y) = 0$ если величины линейно независимы

Дисперсия



Коэффициент вариации

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}$$

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

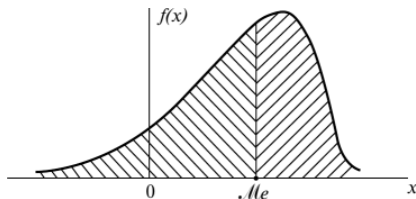
Медиана

Медиана $Me[X]$ - такое значение случайной величины для которого выполняется равенство

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

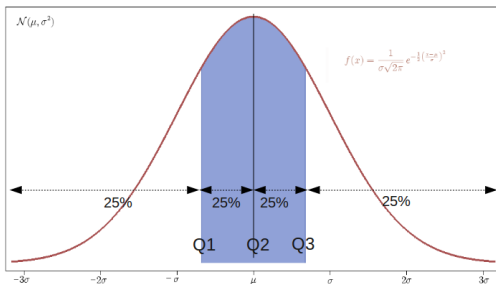
Для непрерывной СВ:

$$F(Me) = 0.5$$



Квантиль

- ▶ **Квантиль** - значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью
- ▶ **Квартили** Q1, Q2, Q3 - значения случайной величины которые делят распределение на 4 равные части



Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

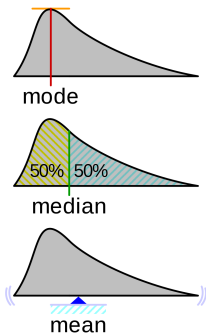
Ссылки

Мода

Мода - значение СВ, которое встречается наиболее часто

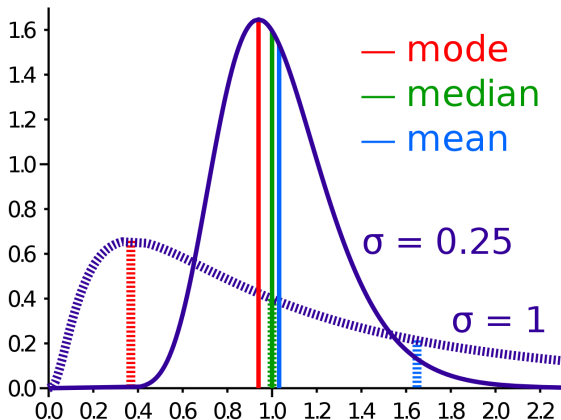
Мода, медиана, математическое ожидание

Пример



Мода, медиана, математическое ожидание

Пример



Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

МО и дисперсия числа появления события

- ▶ Испытания независимы
- ▶ p - вероятность появления события в единичном испытании
- ▶ Эта вероятность не меняется от испытания к испытанию
- ▶ проводится n испытаний
- ▶ МО числа появлений события в независимых испытаниях

$$M(X) = np$$

- ▶ Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

$$D(X) = npq$$

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

- Математическое ожидание

- Дисперсия

- Медиана, Квантиль

- Мода

- МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

- Теорема Чебышёва

- Теорема Бернулли

Ссылки

Закон больших чисел

- ▶ При очень большом числе случайных явлений их результат практически перестаёт быть случайным и может быть определён с большой степенью определённости
- ▶ Закон больших чисел
 - ▶ Теорема Чебышёва
 - ▶ Теорема Бернулли

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

- Математическое ожидание

- Дисперсия

- Медиана, Квантиль

- Мода

- МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

- Теорема Чебышёва

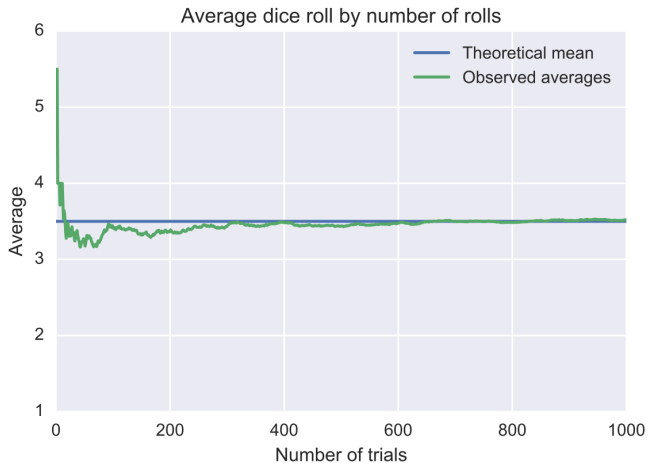
- Теорема Бернулли

Ссылки

Теорема Чебышёва

- ▶ При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины *сходится по вероятности* к ее математическому ожиданию.
- ▶ Другими словами: на практике можно использовать вместо математического ожидания среднее значение случайной величины (если этих значений много)

Теорема Чебышёва



Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Дисперсия

Медиана, Квантиль

Мода

МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

Теорема Чебышёва

Теорема Бернулли

Ссылки

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами: на практике можно использовать вместо вероятности события относительную частоту события (при условиях описанных выше)

Outline

Случайная величина

Закон и функция распределения СВ

Числовые характеристики

- Математическое ожидание

- Дисперсия

- Медиана, Квантиль

- Мода

- МО и дисперсия числа появления события

Закон больших чисел

- Теорема Чебышёва

- Теорема Бернулли

Ссылки

- ▶ Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095
- ▶ Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST