Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций

Надёжность

Черновик

Кафедра СМиМ

2021

План

Outline

Бетон
Марка

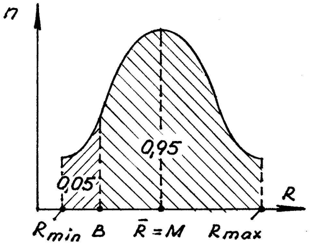
- Одна из основных характеристик прочности бетона – прочность на сжатие.
- **Марка бетона** – предел прочности на сжатие в кг/см^2.
  `M100` – образец бетона выдерживает давление 100 кг/см^2
- Прочность на сжатие указанная в марке – среднее значение прочности испытанных образцов

кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

Бетон

Проблема марки

- Прочность на сжатие бетона - случайная величина распределённая по закону, близкому[1] к закону нормального распределения
- Поэтому бетон марки, например М100, выдержит нагрузку в 100 кг/см^2 с вероятностью 0.5



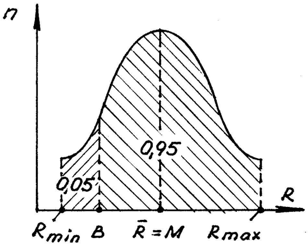
Распределение прочностной. Половина образцов имеет прочность больше средней (справа от М), другая половина - меньше.

[1] у нормального закона "хвосты"кривой тянутся до бесконечности, на практике же такое невозможно

Бетон

Класс бетона

- **Класс бетона В** — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной *обеспеченностью* (доверительной вероятностью) 0.95
- Т.е. фактическая прочность образца превосходит указанную в классе с вероятностью (обеспеченностью) 0.95.
- Класс бетона занижает ожидаемую прочность, чтобы обеспечить запас прочности



Переведём марку М100 в класс.

- кг/см^2 $\rightarrow$ МПа

$100 \cdot g \cdot 10000 = 9\,806\,650$Па $= 9.806650$МПа

- Вычисление класса

$$B = M_{\text{МПа}} - \sigma \cdot 1.64$$

[2]

- Стандартное отклонение σ прочности бетона на сжатие определяют используя коэффициент вариации $\nu = 0.135$ [3]
- $\sigma = \nu \cdot M_{\text{МПа}}$
- Подставляя формулу для σ и выноса $M_{\text{МПа}}$ за скобку получим:

$$B = M_{\text{МПа}}(1 - 1.64\nu)$$

[2] $F_N(1.64) = 0.95$

[3] определён эмпирически, исходя из анализа производств бетонных смесей

См. также

ГОСТ 18105-2018 Бетоны. Правила контроля и оценки прочности.

Outline

Теория надёжности

Теория надёжности – наука изучающая закономерности отказов технических объектов

- критерии и показатели надёжности
- метода анализа и синтеза по критериям надёжности
- методы обеспечения и повышения надёжности
- методы эксплуатации обеспечивающие надёжность

ГОСТ 27751-2014 Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения

Теория надёжности

Надёжность – свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в течение заданного срока с за- данной вероятностью P.

Начальная надёжность – свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в начальный период эксплуатации

Отказ – случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта. Вероятность отказа: $Q = 1 - P$

Долговечность – свойство сохранять работоспособность в течение определенного времени T

Долговечность vs надёжность
Долговечность определяется временем безотказной работы, а надёжность вероятностью безотказной работы в течении заданного времени.

- Традиционный подход к определению (обеспечение) надёжности (надёжно\не надёжно) подразумевает использование коэффициентов запаса (коэффициентов перегрузки) обеспечивающих резерв несущей способности.
- Такой подход называется **детерминированным**

- **Вероятностный подход**[4] подразумевает, что величины влияющие на надёжность – случайны[5]
- Определения или обеспечение надёжности основывается на знании числовых характеристик этих случайных величин и их функций распределения

[4] ГОСТ

[5] даже если принимают значения в узких диапазонах

Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаются неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \tag{1}$$

где S_i - воздействие на рассчитываемый элемент i-ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)
A - геометрическая характеристика сечения
$[\sigma]$ - допускаемое напряжение в элементе

Расчет по допускаемым напряжениям

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 1 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где γ_i – коэффициент надежности по нагрузке
γ_R – коэффициенты надежности по материалам

Расчет по предельным состояниям

Предельное состояние – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ...

Предельные состояния

- **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

Предельные состояния

Первое предельное состояние

изображение с сайта
lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Предельные состояния

Первое предельное состояние

изображение с сайта
lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

N_{max} - фактор характеризующий нагрузку
Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, ...

N - нормативное значение соответствующего N_{max} фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode

Outline

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Запишем выражение со слайда 20 как разность факторов:

$$g = R - L \tag{2}$$

- g – характеристика безопасности – резерв несущей способности
- R – сопротивление (несущая способность)
- L – воздействие (нагрузочный эффект)
- R и L – случайные величины $\Rightarrow g$ – случайная величина[6]
- R и L – принимают конкретный вид в зависимости от исследуемой задачи

Вероятность безотказной работы

$$P = P(g > 0)$$

[6] распределения конкретных случайных величин определяющих R и L часто близки к нормальному распределению

Надёжность

1. Чтобы определить вероятность безотказной работы требуется знать распределение резерва несущей способности g
   Функцию распределения g часто считают близкой к функции нормального распределения[7].

2. Далее для определения вероятности безотказной работы используют индекс надёжности:

$$\beta = \frac{\bar{g}}{\sigma_g}$$

   $\bar{g}$ - среднее значение резерва несущей способности
   σ_g - стандартное отклонение резерва несущей способности

[7] если известны функции плотностей R и L то функцию распределения можно получить аналитически

Надёжность

3. Среднее значение и стандартное отклонение обычно вычисляют для линейной аппроксимации функции g[8]

$$\bar{g} = g(\bar{R}, \bar{L})$$

$$\sigma_g^2 = \sum[\frac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_{x_i}]^2$$

где x_i - случайная величина

4. Наконец используя вместо резерва несущей способности g индекс надёжности β для определения вероятности безотказной работы

$$P = P(\beta > 0) = F(\beta)$$

где $F(\beta)$ - функция распределения индекса надёжности[9].

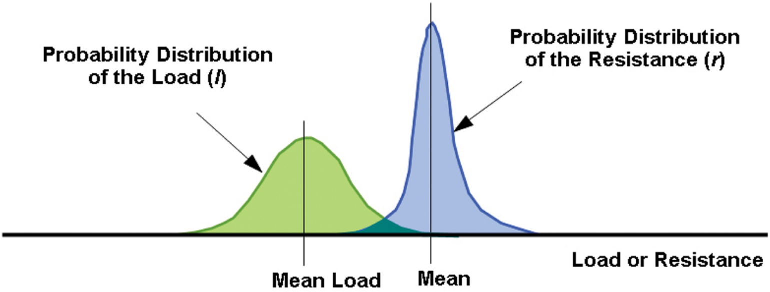
[8]см. линеаризацию функции случайных аргументов

[9]Часто используется функция нормального распределения

Надёжность

- Как представить графически вероятность безотказной работы?
- Как связать вероятность безотказной работы и функцию Лапласа Φ_0?

Надёжность


Probability Distribution
of the Load (l)
Probability Distribution
of the Resistance (r)
Load or Resistance
Mean Load
Mean

- **Обратная задача**: Для известного нагрузочного эффекта и сопротивления, с известными средними значениями и стандартными отклонениями величин определяется вероятность безотказной работы (надёжность)
- **Прямая задача:** определяются значения от которых зависит сопротивление для обеспечения заданной надёжности

Надёжность

Какую надёжность выбрать?

- Стремление к абсолютной надёжности, то есть к $P = 1$ не экономично
- потому, что g в этом случае должно быть очень велико [10], а значит велика и несущая способность R
- С другой стороны низкая надёжность недопустима
- Как правило выбирают надёжность соответствующую отступу от $\bar{g}$ вправо на $3\sigma_g$

[10] на правом "хвосте" распределения небольшой прирост P происходит за счёт очень большого прироста g

Outline

Outline

Надёжность

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила $F = 100$ кН. Средний предел текучести материал стержня $\bar{R}_y = 230$ МПа. Стандартное отклонение предела текучести $S_{R_y} = 10$ МПа. Площадь поперечного сечения стержня $A = 5.36$ см^2.
Определить резерв несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

[11] деление на 10 в формуле появляется для приведения всей разности к кН. Теперь R_y и A можно подставлять в исходных единицах измерения

Надёжность

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила $F = 100$ кН. Средний предел текучести материал стержня $\bar{R}_y = 230$ МПа. Стандартное отклонение предела текучести $S_{R_y} = 10$ МПа. Площадь поперечного сечения стержня $A = 5.36$ см^2.
Определить резерв несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

- Определим выражения для R – сопротивления и L – нагрузочного эффекта.
- $R = R_y \cdot A$
- $L = F$
- Тогда конкретный вид формулы (2) резерва несущей способности, для данной расчётной схемы[11]:

$$g(R_y) = R_y \cdot A/10 - F \tag{3}$$

В скобках, как аргумент g, записана единственная случайная величина в формуле.

[11] деление на 10 в формуле появляется для приведения всей разности к кН. Теперь R_y и A можно подставлять в исходных единицах измерения

Дисперсия и мат. ожидание функции случайного аргумента

Напомним, как вычислить математическое ожидание и дисперсию функции, зависящей от случайных величин.
Пусть дана функция

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – случайные величины.

Тогда её математическое ожидание получим подставив математические ожидания (средние) всех случайных величин:

$$m_y \approx f(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn})$$

Дисперсия (квадрат стандартного отклонения):

$$D_y \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn})}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{xi}^2$$

где $\frac{\partial f(m_{x\mathbf{1}}, m_{x\mathbf{2}}, ..., m_{xn})}{\partial x_i}$ – частная производная функции f по её аргументу x_i. Например, для функции одного случайного аргумента слагаемое будет одно.

Надёжность

Пример

- Функция g линейна[12] (формула 3) относительно R_y и F, поэтому используем выражения для среднего значения и дисперсии с предыдущего слайда.
- Средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F \tag{4}$$

- Дисперсия резерва несущей способности:
  $D_g = S_g^2 = (\frac{\partial g}{\partial R_y})^2 \cdot S_{R_y}^2 = (\frac{\partial (R_y \cdot A/10 - F)}{\partial R_y})^2 \cdot S_{R_y}^2 = (A/10)^2 \cdot S_{R_y}^2$
- В итоге

$$S_g^2 = (A/10)^2 \cdot S_{R_y}^2 \tag{5}$$

[12] если функция не линейна, то можно считать, её линейной на рассматриваемом участке (требует проверки)

Надёжность

Пример

- $\bar{g}$ и S_g получены
- Определим индекс надёжности

$$\beta = \frac{\bar{g}}{S_g} \tag{6}$$

- Тогда вероятность безотказной работы

$$P = F(\beta) \tag{7}$$

где $F(\beta)$ – функция стандартного нормального распределения
- Определив вероятность безотказной работы можно сделать вывод о надёжности и экономичности:
  - Если P меньше требуемого уровня надёжности, то конструкция ненадёжна
  - Если P сильно больше требуемого уровня надёжности, то конструкция не экономична
    Например надёжность 0.99999 требует избыточной прочности

Надёжность

Пример

Подставим значения:

- Из формулы (4) среднее значение резерва несущей способности:

$$\bar{g} = 230 \cdot 5.36/10 - 100 = 23.28$$

- Из формулы (5) стандартное отклонение резерва несущей способности:

$$S_g = 5.36/10 \cdot 10 = 5.36$$

- Индекс надёжности, по формуле (6):

$$\beta = \frac{23}{5.36} \approx 4.3433$$

- Вероятность[13] безотказной работы по (7):

$$P = F(4.3433) \approx 0.9999$$

---

[13] F определяется например в программе Probability Distributions, при m=0, $\sigma = 1$, P(X<x) и x = 4.3433

Надёжность

Пример

Надёжность 0.9999 больше рекомендуемой 0.99865, есть небольшой резерв для увеличения экономичности: можно уменьшить площадь поперечного сечения стержня.

Какое поперечное сечение стержня нужно выбрать чтобы добиться надёжности 0.99865?
Выразите из формул 3 - 7 площадь поперечного сечения A, при P = 0.99865. Прочие значения оставьте прежними.

Outline

Надёжность

Пример 2

Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 23 с

Дополнительные ссылки

- Условие прочности при изгибе
- Расчётные схемы для балок
- ГОСТ 8240-97

Outline

Начальная надёжность железобетонной балки: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.- строит. ун-та, 2014. – 23 с.

Outline

Надёжность системы

- При определении надёжности системы рассматриваются возможные сценарии разрешения её элементов приводящие к отказу
- Для определения вероятности безотказной работы используются теоремы о умножении и сложении вероятностей
- $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Последовательное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором отказ одного элемента ведёт к отказу системы в целом

$$P = \prod P_i = \prod (1 - Q_i)$$

где P_i, Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i-го элемента

При таком соединении надёжность идеальной системы всегда меньше надёжности самого слабого элемента

Параллельное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором только отказ всех элементов системы ведёт к отказу системы в целом.

$$P = 1 - \prod Q_i = 1 - \prod (1 - P_i)$$

где P_i, Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i-го элемента

При таком соединение надёжность системы всегда выше надёжности самого надёжного элемента

Параллельное соединение элементов

Замечание

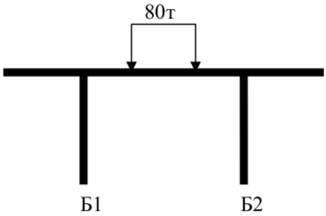
- Стоит учитывать что если один или несколько элементов системы вышли из строя, то надёжность остальных элементов системы может снижаться
- В этом случае рассматриваются различные варианты разрешения системы:
- когда все элементы выходят из строя
- когда из строя выходят один или несколько элементов системы

Пример

На пролетное строение моста, имеющее в поперечном сечении две главных балки, действует нагрузка.

- Обеспеченность (надежность) несущей способности каждой балки в размере 400 кН равна $P = 0.9$.
- Обеспеченность несущей способности в размере 800 кН равна $P = 0.6$.

Определить надежность системы



Пример из учебного пособия "Основы надежности транспортных сооружений МАДИ, 2008

Пример
Решение

- Это система с параллельным соединением элементов
- Рассмотрим два сценария разрушения системы:
- 1. Балки разрушаются одновременно
- 2. Разрушается сначала одна, потом другая балка (разрушение Б1, Б2; разрушение Б2, Б1)
- Вероятность отказа всей системы Q будет складывается из вероятностей отказа случая 1 и 2

Outline

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили предложили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

Метод Монте-Карло

- В процессе решения задачи можно "разыгрывать"исходные данные или случайные события
- Например можно задать значения случайных величин используя генератор случайных чисел
- Такое решение задачи, со случайностью, не надёжно. Поэтому оно повторяется множество раз
- Окончательный ответ получается путём "суммирования"множества ответов

Outline

На стальной стержень действует растягивающая сила со средним значением $\bar{F} = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y$ - 230 МПа. Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см2
Если известны стандартные отклонения нагрузки F - 10 кН и предела текучести R_y - 10 МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

Решение на Python: github.com/VetrovSV/ST/blob/master/python-examples/Monte-Carlo.ipynb

Outline

Снеговые нагрузки

- нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия

$$S_0 = 0.7 c_e c_t \mu S_g$$

- c_e – коэффициент, учитывающий снос снега с покрытий зданий под действием ветра или иных факторов
- c_t – термический коэффициент
- μ – коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие
- S_g – вес снегового покрова на 1 м 2 горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ

ktbbeton.com/upload/iblock/4b8/4b863cee34edb38f3a6644209f9bf401.pdf - СНиП 2.01.07-85* Нагрузки и воздействия

Снеговые нагрузки

Outline

Вопросы

- Что такое обеспеченность сопротивления(нагрузки)?

- Как определяется резерв несущей способности?
- Как он связан с вероятностью безотказной работы?
- Что такое коэффициент вариации?
- Возможно ли добиться вероятности безотказной работы равной единице?
- Назовите рекомендуемую вероятность безотказной работы?
- Какому значению индекса надёжности соответствует эта вероятность?

Вопросы

- Как определяется надёжность системы?
- Почему требуется заново рассчитывать надёжность элемента конструкции при параллельном соединении, если другой элемент разрушен?
- Как определить превышаемую нагрузку исходя из периода повторяемости?
- Опишите метод Монте-Карло.

Outline

- Разброс нагрузок от собственного веса конструкций: коэффициент вариации от 0.02 до 0.03
- Нормативная прочность обычно принимается с обеспеченностью P = 0.95 ($R_{\text{н}} = R1.65\sigma_R$)
- Расчетная - 0.9986 ($R_{\text{расч}} = R - 3\sigma_R$)
  Коэффициенты вариации
  - для стали – 0.03...0.05;
  - для бетона – 0.10...0.15.

Коэффициенты запаса

- для нагрузки

$$\gamma_F = \frac{F}{F + 3\sigma_F}$$

- для сопротивления

$$\gamma_R = \frac{R}{R - 3\sigma_R}$$

Средние периоды повторяемости

- Для снеговой нагрузки - 50 лет
- Для ветровой нагрузки - 50 лет [14]

[14] СП 20.13330.2016

Outline

Источники

- Пшеничкина, В. А. Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков http://vgasu.ru/attachments/oi_pshenichkina-03.pdf
- Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко.

Ссылки

- jupyter.org/try - Jupyter Online
  Выбрать Try Jupyter with Python

Ссылки

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST