

# Теория вероятностей

## Распределения случайных величин

Кафедра СМиМ

2022

# План

## Законы распределения

- Равномерное распределение

- Нормальное распределение

  - Правило трёх сигм

- Биномиальное распределение

- Распределение Пуассона

- Экспоненциальное (показательное) распределение

- Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

- Распределение Гумбеля

- Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Outline

## Законы распределения

- Равномерное распределение

- Нормальное распределение

  - Правило трёх сигм

- Биномиальное распределение

- Распределение Пуассона

- Экспоненциальное (показательное) распределение

- Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

- Распределение Гумбеля

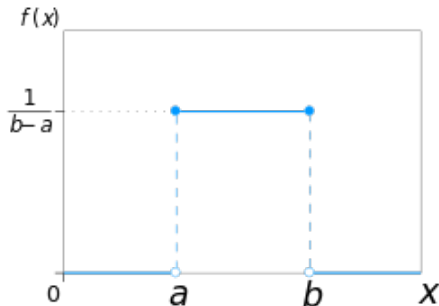
- Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Равномерное распределение



Все возможные значения случайной величины равновероятны.

Равномерное распределение может иметь как дискретная случайная величина, так и непрерывная

```
scipy.stats.uniform.rvs ( loc = a, scale = b)
```

# Равномерное распределение

Функция распределения:

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

Параметры

- ▶  $a$  - минимальное значение
- ▶  $b$  - максимальное значение

Математическое ожидание  $\frac{1}{2}(a + b)$

# Равномерное распределение. Примеры

- ▶ Количество очков, выпавших на игральной кости
- ▶ Число выпавшее на рулетке
- ▶ Номер автобусного билета (в единичном испытании)
- ▶ Время ожидания события, происходящего со строгой периодичностью. например время ожидания поезда, который отправляется со станции раз в 30 минут

Значения случайной величины с равномерным распределением используются для осуществления случайных выборов.

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

**Нормальное распределение**

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки



# Нормальное распределение

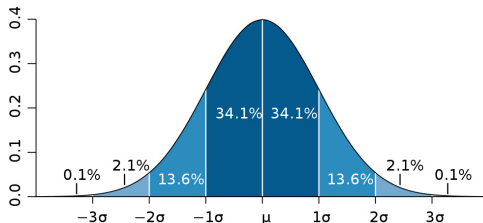
Функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметры

- ▶  $\mu = M(X)$  - математическое ожидание
- ▶  $\sigma = \sigma(X)$  - среднеквадратичное отклонение.

# Нормальное распределение



$\mu$  - математическое ожидание,  $\sigma$  - среднеквадратичное отклонение.

Возможные значения СВ близкие к мат. ожидания наиболее вероятны.

Если СВ является суммой большого числа других независимых величин, то она подчиняется нормальному закону распределения.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>см. центральная предельная теорема

# Нормальное распределение. Примеры

- ▶ Рост человека
- ▶ Ошибка измерения
- ▶ Прочность бетона
- ▶ Масса новорождённых детей
- ▶ Объём молока производимый коровой каждый день

# Нормальное распределение

- ▶ Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- ▶ Параметры
  - ▶  $\mu$  - математическое ожидание
  - ▶  $\sigma$  - стандартное отклонение

# Стандартное нормальное распределение

- ▶ При  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$  распределение называется *стандартным нормальным распределением*
- ▶ Нормирование случайной величины:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

где  $x$  - исходное значение случайной величины;  
 $z$  - нормированное значение.

- ▶ Тогда функция распределения

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

# Нормальное распределение и функция Лапласа

- ▶ В таблицах может приводиться значение функции, где нижний предел 0 вместо  $-\infty$

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- ▶ Чтобы перейти от  $F_0(x)$  к  $F(X)$ :

$$F(X) = 0.5 + F_0(X)$$

- ▶ 0.5 соответствует площади под кривой слева от нуля

# Нормальное распределение

## Пример

Пусть средний рост мужчин 178.4 см, со стандартным отклонением 7.59 см<sup>2</sup>.

Предполагая, что рост имеет нормальное распределение определить:

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет больше 178.4.

---

<sup>2</sup><https://ourworldindata.org/human-height>

# Нормальное распределение

## Пример

Пусть средний рост мужчин 178.4 см, со стандартным отклонением 7.59 см<sup>2</sup>.

Предполагая, что рост имеет нормальное распределение определить:

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет больше 178.4.

$$P(X > 178.4) = 1 - P(X < 178.4) = 1 - F(178.4) = 0.5$$

Получить ответ можно было и без вычислений: в нормальном распределении математическое ожидание совпадает с медианой, а значит вероятность того, что рост окажется больше медианного равна 0.5

---

<sup>2</sup><https://ourworldindata.org/human-height>



# Нормальное распределение

## Пример (продолжение)

Определить:

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет больше 160.

# Нормальное распределение

## Пример (продолжение)

Определить:

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет больше 160.

$$P(X > 160) = 1 - P(X < 160) = 1 - F(160) = 1 - 0.00767 = 0.99233$$

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет меньше 180 см но больше 170 см.

# Нормальное распределение

## Пример (продолжение)

Определить:

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет больше 160.

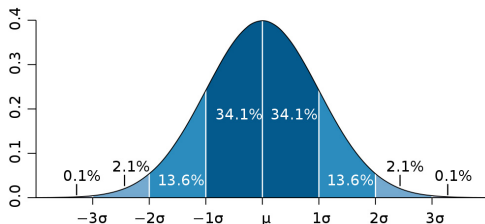
$$P(X > 160) = 1 - P(X < 160) = 1 - F(160) = 1 - 0.00767 = 0.99233$$

- ▶ Вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет меньше 180 см но больше 170 см.

$$P(170 < X < 180) = F(180) - F(170) = 0.86579 - 0.41652 = 0.44927$$

## Правило трёх сигм

Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на большую величину, чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.



$$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0.6827$$

$$Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

**Биномиальное распределение**

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Биномиальное распределение

- ▶ **Биномиальное распределение** – распределение количества «успехов» в последовательности из  $n$  независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна  $p$ .
- ▶ Обозначение:  $\text{Bin}(n, p)$
- ▶ Закон:  $p_Y(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  
вероятность того, что СВ  $Y$  примет значение равное  $k$ , т.е. в серии из  $n$  испытаний  $k$  будут «успешными»  
биномиальный коэффициент  $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = C_n^k$
- ▶  $M(Y) = np$
- ▶  $D(Y) = npq$

# Биномиальное распределение

- ▶ Если  $n$  большое, то в силу центральной предельной теоремы  $\text{Bin}(n, p) \approx N(np, npq)$
- ▶ Если  $n$  большое, а  $\lambda$  – фиксированное число, то  $\text{Bin}(n, \lambda/n) \approx P(\lambda)$  – распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ .

# Доска Гальтона





# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

**Распределение Пуассона**

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Распределение Пуассона

- ▶ Это распределение дискретной случайной величины
- ▶ СВ – количество появлений события в независимых испытаниях
- ▶ Функция вероятности

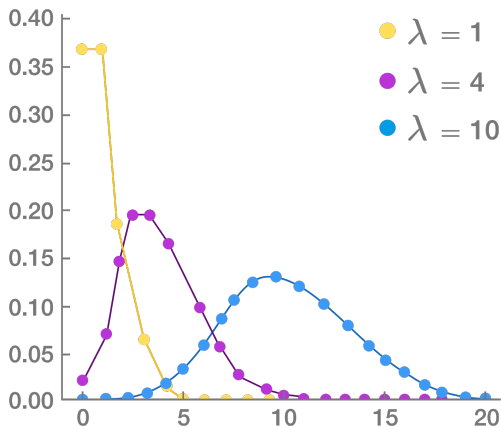
$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- ▶ Параметр  $\lambda$  – средняя частота появления события в единицу времени или пространства<sup>3</sup>
- ▶ Если известна вероятность единичного появления события  $p$  и число испытаний  $n$ , то  $\lambda$  вычисляется:  $\lambda = np$
- ▶  $M(X) = D(X) = \lambda$

---

<sup>3</sup>Например среднее число наводнений за 100 лет, или среднее число ям на 10 километров дороги

# Распределение Пуассона



СВ – количество событий на меру пространства или времени,  
при средней частоте  $\lambda$

## Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона<sup>4</sup>:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где  $\lambda = 2$  (средняя частота события за ед. времени - 2 раза в неделю).

Искомая вероятность  $P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.14$

---

<sup>4</sup> в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

# Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона<sup>4</sup>:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где  $\lambda = 2$  (средняя частота события за ед. времени - 2 раза в неделю).

Искомая вероятность  $P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.14$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет 1 и 2 ДТП?

$$P(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.27, \quad P(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0.27$$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет больше 2-х ДТП?

$$P(X > 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

---

<sup>4</sup> в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

# Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за  $t$  единиц времени параметр  $\lambda$  определяют так:

$$\lambda' = t\lambda$$

где  $n$  число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- ▶ 3 ДТП за неделю
- ▶ 15 ДТП за 5 недель

# Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за  $t$  единиц времени параметр  $\lambda$  определяют так:

$$\lambda' = t\lambda$$

где  $n$  число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- ▶ 3 ДТП за неделю
- ▶ 15 ДТП за 5 недель

$$\lambda'_2 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$P(3, \lambda_1 = 2) = \dots$$

$$P(15, \lambda_2 = 10) = 0.035$$

# Распределение Пуассона. Примеры

Величины подчиняющиеся распределению Пуассона

- ▶ Число изюминок в булочке
- ▶ Число мутация в ДНК
- ▶ Число звонков в службу технической поддержки
- ▶ Число смертей в год для заданной возрастной категории
- ▶ Число альфа-частиц излучённых за определённый промежуток времени

[kvant.mccme.ru/1988/08/raspredelenie\\_puassona.htm](http://kvant.mccme.ru/1988/08/raspredelenie_puassona.htm)



# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

**Экспоненциальное (показательное) распределение**

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Экспоненциальное (показательное) распределение

- ▶ Распределение непрерывной случайной величины
- ▶ Обозначение

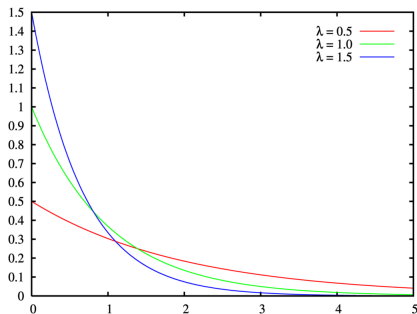
$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- ▶ Моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события
- ▶  $\lambda$  - частота события
- ▶  $1/\lambda$  - среднее время между появлениями события
- ▶ Функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- ▶ Математическое ожидание:  $M(X) = \frac{1}{\lambda}$

# Экспоненциальное (показательное) распределение



моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

## Экспоненциальное (показательное) распределение.

### Пример

*Среднее* время ожидания покупателя - 15 минут. Какова вероятность, что во время перерыва длительностью 5, 10 и 15 минут придёт покупатель?

Тогда  $\frac{1}{\lambda} = 15 \rightarrow \lambda = 0.067$ .

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-0.067 \cdot 5} = 0.28$$

$$P(X < 10) = F(10) = 1 - e^{-0.067 \cdot 10} = 0.49$$

$$P(X < 15) = F(15) = 1 - e^{-0.067 \cdot 15} = 0.63$$

```
scipy.stats.expon.cdf ( x = 5, scale = 15)  # 0.28
```

# Экспоненциальное распределение vs распределение Пуассона

В чём разница и что общее у экспоненциального распределения и распределения Пуассона?

# Экспоненциальное (показательное) распределение

Величины подчиняющиеся экспоненциальному распределению

- ▶ Расстояние между участками ДНК с мутациями
- ▶ Время ожидания звонка службу технической поддержки
- ▶ Время между излучением частиц
- ▶ Расстояние между местами ДТП на дороге<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> в предположении, что вероятность ДТП на каждом участке дороги одинакова

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

**Распределение максимальных и минимальных значений**

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Распределение максимальных и минимальных значений

- ▶ Рассмотрим с.в.  $X$  с известной функцией распределения  $F_X(x)$
- ▶ Произведём первую выборку, получим значения  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$
- ▶ Найдём максимальное и минимальное значения из первой выборки:

$$u_1 = \max(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

$$v_1 = \min(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

- ▶ Произведём вторую выборку, найдём максимальное и минимальное значения из первой выборки

$$u_1 = \max(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$$

$$v_1 = \min(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$$

- ▶ Повторим для  $k$  выборок
- ▶ Получим максимальные значения  $u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $v_1, v_2, \dots, v_k$



# Распределение максимальных и минимальных значений

- ▶ Полученные значения  $u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $v_1, v_2, \dots, v_k$  можно считать реализацией случайных величин
- ▶  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$
- ▶  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- ▶ Определим функцию распределения  $F_U(x)$  максимальных значения с.в.  $X$   
$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(u_1 \leq x \text{ И } u_2 \leq x \text{ И } \dots \text{ И } u_k \leq x)$$

# Распределение максимальных и минимальных значений

- ▶ Полученные значения  $u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $v_1, v_2, \dots, v_k$  можно считать реализацией случайных величин
- ▶  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$
- ▶  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- ▶ Определим функцию распределения  $F_U(x)$  максимальных значения с.в.  $X$   
$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(u_1 \leq x \text{ И } u_2 \leq x \text{ И } \dots \text{ И } u_k \leq x)$$
- ▶ Где вероятность  $P(u_i \leq x) = P(x \leq u) = F_X(x)$
- ▶ Тогда функцию распределения  $F_U(x)$  можно записать как

$$F_U(x) = [F_X(x)]^k$$

# Распределение максимальных и минимальных значений

- ▶ Тогда функцию распределения максимальных значений  $F_U(x)$  случайной величины  $X$  можно записать как

$$F_U(x) = [F_X(x)]^k$$

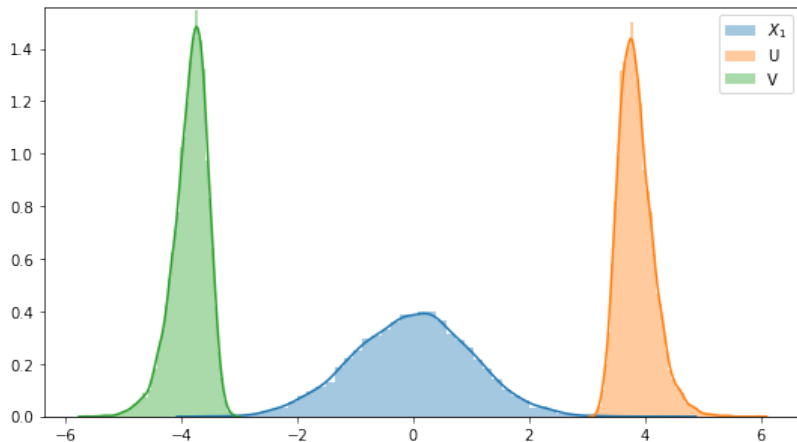
- ▶ Похожие рассуждения для функции распределения минимальной величины:

$$F_V(x) = P(V \leq x) = 1 - P(V > x) = 1 - [1 - F_X(x)]^k$$

- ▶ В итоге функцию распределения  $F_V(x)$  минимальных значений случайной величины  $X$  можно записать так

$$F_V(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^k$$

# Распределение максимальных и минимальных значений



# Распределение максимальных и минимальных значений

Где используется

- ▶ Применяется везде, где важны максимальные или минимальные значения величин
- ▶ Например максимальных нагрузок и минимальных характеристик прочности

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

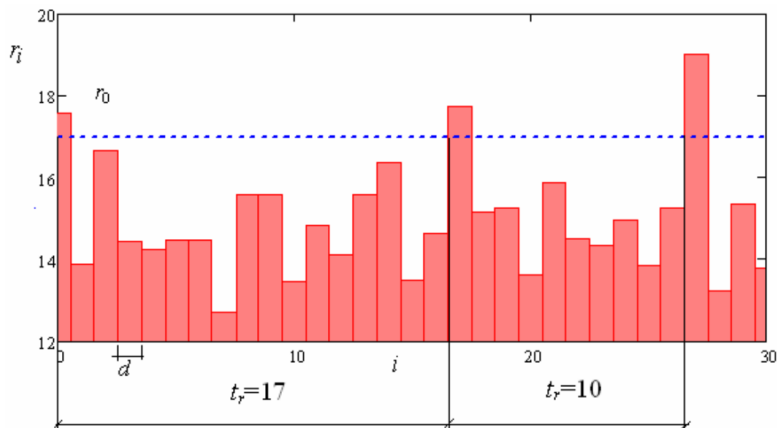
## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Последовательность независимых случайных величин

- ▶ Рассмотрим случайную величину  $R$
- ▶ Предположим что независимые значения этой случайной величины реализуются через одинаковые промежутки времени  $d$
- ▶ Примером такой случайной величины может быть количество выпавшего снега каждый год

# Последовательность независимых случайных величин



Изображение из учебного пособия Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций, Пшеничкина В. А.



# Последовательность независимых случайных величин

- ▶ Будем называть время между двумя последовательными превышениями  $r_0$  *периодом повторяемости*  $T$
- ▶ Через какой интервал времени значение случайной величины превысит заданное значение  $r_0$ ?
- ▶ Считаем время в единицах интервала  $d$

# Последовательность независимых случайных величин

- ▶ Будем называть время между двумя последовательными превышениями  $r_0$  *периодом повторяемости*  $T$
- ▶ Через какой интервал времени значение случайной величины превысит заданное значение  $r_0$ ?
- ▶ Считаем время в единицах интервала  $d$
- ▶ Рассмотрим событие: с.в.  $R$  превысила заданное значение  $r_0$  через время  $i$
- ▶ Оно будет складываться из  $i-1$  последовательных не превышений и одного превышения заданного значения  $r_0$

$$P = [F_R(r_0)]^{i-1}(1 - F_R(r_0))$$

# Последовательность независимых случайных величин

- ▶ Определим математическое ожидание периода повторяемости  $m_T$
- ▶ ... [Пшеничкина, В. А. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций]

$$m_T = \frac{1}{1 - F_R(r_0)}$$

- ▶ Зная (или задавая) период повторяемости, можно и вычислить предельное  $r_0$  значение, которое будет превышено

$$F_R(r_0) = 1 - \frac{1}{m_T}$$

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Распределение Гумбеля

- ▶ распределение непрерывной случайной величины
- ▶ Распределение максимальных или минимальных значений
- ▶ Функция распределения (наибольших значений)

$$F(x) = \exp(-\exp[\frac{\alpha - x}{\beta}])$$

- ▶ Функция распределения (наименьших значений)

$$F(x) = 1 - \exp(-\exp[\frac{\alpha - x}{\beta}])$$

- ▶ Два параметра:  $\alpha$ ,  $\beta$
- ▶ Математическое ожидание

$$M(X) = \alpha + \beta\gamma$$

6

- ▶ Дисперсия

$$D(X) = \frac{\pi^2}{6}\beta^2$$

# Распределение Гумбеля

## Пример

См. пример в "Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций": учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков ;  
страница 46, последний абзац и далее

[vgasu.ru/publishing/on-line](http://vgasu.ru/publishing/on-line)

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки



# Распределение Вейбулла

- ▶ Распределение непрерывной случайной величины
- ▶ обозначение  $XW(k, \lambda)$
- ▶  $k$  - параметр формы - интенсивность отказов (модуль Вейбулла)
  - ▶  $k < 0$ . интенсивность отказов уменьшается со временем
  - ▶  $k = 0$ . интенсивность отказов постоянна
  - ▶  $k > 0$ . интенсивность отказов увеличивается
- ▶  $\lambda$  - параметр масштаба
- ▶ Функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^k}$$

# Распределение Вейбулла

- ▶ Математическое ожидание

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{k})$$

- ▶  $\Gamma$  – гамма-функция. легко вычисляется в математических программах. в Python `gamma ( z )`
- ▶ Медиана

$$Me = \frac{1}{\lambda} (\ln 2)^{1/k}$$

# Распределение Гумбеля

Что описывает

- ▶ Максимальные (или минимальные) значения величины разной природы
- ▶ Максимальный уровень реки
- ▶ Максимальное количество выпавших осадков
- ▶ Максимальная сила землетрясения

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Определение параметров распределений

- ▶ Для того чтобы определять вероятности связанные со случайной величиной требуется знать функцию распределения этой случайной величины

Например чтобы определить вероятность наступления события за время  $x$  используется функция распределения задаваемая формулой  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

- ▶ Но помимо знания функции распределения часто требуется знать параметры распределения - величины входящие в функцию распределения

В примере выше это  $\lambda$

# Определение параметров распределений

- ▶ Параметры распределения связаны с числовыми характеристиками случайной величины (с математическим ожиданием, дисперсией, ... )
- ▶ Числовые характеристики случайной величины могут быть получены из эксперимента (когда имеется набор значений случайной величины - выборка)
- ▶ Таким образом можно использовать формулы связывающую числовые характеристики и параметры распределения.

Например, для экспоненциального распределения математическое ожидание:  $M(X) = 1/\lambda$ . Вычислив  $M(X)$  легко определить и  $\lambda$ .

# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

# Нелинейность - это сложно

- ▶ Система из независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$
- ▶ Для каждой из величин известны математическое ожидание  $m_{x1}$  и стандартное отклонение  $\sigma_{x1}$
- ▶ Рассмотрим новую случайную величину  $Y$ , которая зависит от  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- ▶ Требуется определить математическое ожидание и стандартное отклонение с.в.  $Y$



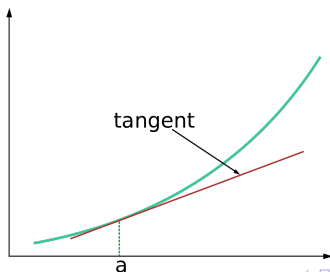
## Функция случайного аргумента

- ▶ Определение математического ожидания с.в. требует знания функции плотности, а так же интегрирования этой функции.
- ▶ Эта процедура может быть сложной, кроме того некоторые интегралы невозможно вычислить аналитически
- ▶ Однако если функция  $f$  линейна то математическое ожидание и дисперсия вычисляются просто
- ▶ Даже если  $f$  нелинейна её можно рассматривать как линейную на небольшой области определения
- ▶ Далее для простоты рассмотрим функцию для  $f$  одного аргумента

$$Y = f(X)$$

# Линейная аппроксимация

- ▶ Нелинейную функцию можно аппроксимировать линейной в окрестности некоторой точки
- ▶ Аппроксимирующую прямую можно выбрать совпадающую с касательной к функции в этой точке
- ▶ Если предполагается, что рассматриваемая окрестность точки, через которую проведена касательная небольшая, то и ошибка аппроксимации может быть невелика



# Ряд Тейлора

- Для аппроксимации используем разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $a$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$f^{(n)}(a)$  - значение  $n$ -й производной функции  $f$  в точке  $a$

- Запишем только первые два слагаемых ряда

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} (x - a)^0 + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1$$

# Ряд Тейлора

- Для аппроксимации используем разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $a$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$f^{(n)}(a)$  - значение  $n$ -й производной функции  $f$  в точке  $a$

- Запишем только первые два слагаемых ряда

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} (x - a)^0 + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- Это уравнение касательной к функции  $f$  в точке  $a$

# Ряд Тейлора

## Пример

Разложим функцию  $\sin(x)$  в окрестности 0

# Ряд Тейлора

## Пример

Разложим функцию  $\sin(x)$  в окрестности 0

$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

$x$	$\sin x$	$taylor$	$delta$
0,000	0,000	0,000	0,000
0,001	0,001	0,001	0,000
0,010	0,010	0,010	0,000
0,100	0,100	0,100	0,000
0,200	0,199	0,200	0,001
0,300	0,296	0,300	0,004
0,400	0,389	0,400	0,011

Значения  $x$  приведено в радианах

# Линеаризация функции случайного аргумента

## Математическое ожидание и дисперсия

Разложим функцию  $y = f(x)$  в окрестности математического ожидания  $m_x$ :

$$y = f(m_x) + f'(m_x) \cdot (x - m_x)$$

Найдём найдём математическое ожидание  $y$ :

$$m_y = M[f(m_x) + f'(m_x) \cdot (x - m_x)] = M[f(m_x)] = f(m_x)$$

Найдём найдём дисперсию  $y$  используя формулу со слайда ??:

$$D_y = M[[f(m_x) + f'(m_x) \cdot (x - m_x) - (f(m_x) + f'(m_x) \cdot (x - m_x))]^2] = M[[f'(m_x)]^2 \cdot (x - m_x)^2] = [f'(m_x)]^2 \sigma_x^2$$

# Линеаризация функции случайного аргумента

## Математическое ожидание и дисперсия

Таким образом, чтобы определить математическое ожидание и дисперсию линеаризованной функции случайного аргумента достаточно знать:

- ▶ Математическое ожидание аргумента
- ▶ Дисперсию аргумента

$$m_y = f(m_x)$$

$$D_y = [f'(m_x)]^2 \sigma_x^2$$



# Математическое ожидание и дисперсия функции нескольких переменных

Если функция зависит от нескольких переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$m_y = f(m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn})$$

$$D_y = \sum \left( \frac{\partial f(m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn})}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{xi}^2 \quad (1)$$

## Пример

Относ бомбы выражается приближенной аналитической формулой:

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} (1 - 1.8 \cdot 10^{-5} cH)$$

где  $v_0$  - скорость самолета (м/с),  $H$  - высота сбрасывания (м),  $c$  - баллистический коэффициент.

По приборам определены:  $H = 4000$ ,  $\sigma_H = 40$  м;  $v_0 = 150$  м/с,  $\sigma_{v_0} = 1$  м/с;  $c = 1$ ,  $\sigma = 0.05$ . Ошибки приборов независимы друг от друга.

- ▶ Найти относ и среднее квадратическое отклонение точки падения бомбы вследствие неточности в определении параметров  $v_0$ ,  $H$  и  $c$ .
- ▶ Определить, какой из этих факторов оказывает наибольшее влияние на разброс точки падения бомбы.

## Пример

Можно убедиться, что при небольших изменениях параметров  $v_0$ ,  $H$  и  $c$  функция определяющая относ бомбы остаётся практически линейной

Поэтому замена формул для математического ожидания и стандартного отклонения на аналогичные для линейной аппроксимации оправдана

## Пример

- ▶ Заданные значения величин  $v_0$ ,  $H$  и  $c$  являются средними значениями, так как их отклонения в обе стороны равновероятны

Определим среднее значения отнosa  $X$ :

$$X = 150 \cdot \sqrt{\frac{8000}{9.81}} \cdot (1 - 1.8^{-5} \cdot 1 \cdot 4000) = 3975.12\text{м}$$

## Пример

- ▶ Определим величину, ошибка определения которой вносит наибольший вклад в величину отношения бомбы  $X$
- ▶ Для этого вычислим все слагаемые, из которых образуется дисперсия искомой величины (формула 1)
- ▶ Сначала определим производные

$$\frac{\partial X}{\partial H} = \frac{v_0}{\sqrt{2Hg}}(1 - 1.8 \cdot 10^{-5} cH) - v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}(-1.8 \cdot 10^{-5} c)$$

## Пример

- ▶ Определим величину, ошибка определения которой вносит наибольший вклад в величину отбоя бомбы  $X$
- ▶ Для этого вычислим все слагаемые, из которых образуется дисперсия искомой величины (формула 1)
- ▶ Сначала определим производные

$$\frac{\partial X}{\partial H} = \frac{v_0}{\sqrt{2Hg}}(1 - 1.8 \cdot 10^{-5}cH) - v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}(-1.8 \cdot 10^{-5}c)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \sqrt{\frac{2H}{g}}(1 - 1.8 \cdot 10^{-5}cH)$$

$$\frac{\partial X}{\partial c} = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}(1 - 1.8 \cdot 10^{-5}H)$$

## Пример

$$\left(\frac{\partial X}{\partial H} \cdot \sigma_h\right)^2 = 0.429^2 \cdot 40^2$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial v_0} \cdot \sigma_{v_0}\right)^2 = 26.4^2 \cdot 1^2$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial c} \cdot \sigma_c\right)^2 = (-307)^2 \cdot 0.05^2$$

## Пример

Если предположить, что  $X$  имеет нормальное распределение, то с какой вероятностью бомба упадёт на далее чем в  $x$  м от расчетного места падения?



# Outline

## Законы распределения

Равномерное распределение

Нормальное распределение

Правило трёх сигм

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Экспоненциальное (показательное) распределение

Распределение максимальных и минимальных значений

## Последовательность независимых случайных величин

## Распределения

Распределение Гумбеля

Распределение Вейбулла

## Определение параметров распределений

## Линеаризация функции случайного аргумента

## Ссылки

- ▶ Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. [biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095](http://biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095)
- ▶ Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с [www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0](http://www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0)

- ▶ [jupyter.org/try](https://jupyter.org/try) - Jupyter Online  
Выбрать Try Jupyter with Python

Материалы курса

[github.com/VetrovSV/ST](https://github.com/VetrovSV/ST)