Математика в Python

2018

План

Outline

Jupyter

jupyter Untitled Last Checkpoint: 6 minutes ago (unsaved changes)

File Edit View Insert Cell Kernel Help Trusted Python

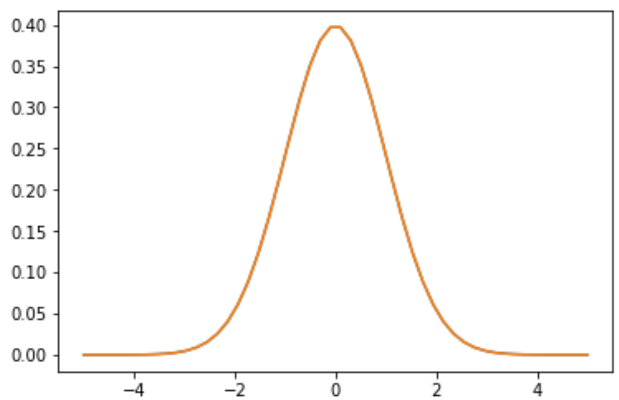
Code

In [7]:
```
from math import *
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import *
```

In [6]:
```
math.sin( math.pi )
```

Out[6]: 1.2246467991473532e-16

In [14]:
```
def norm_pdf(x):
    return 1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2)

X = np.linspace(-5, 5)
Y = [ norm_pdf(x) for x in X ]

plot(X,Y)
show()
```

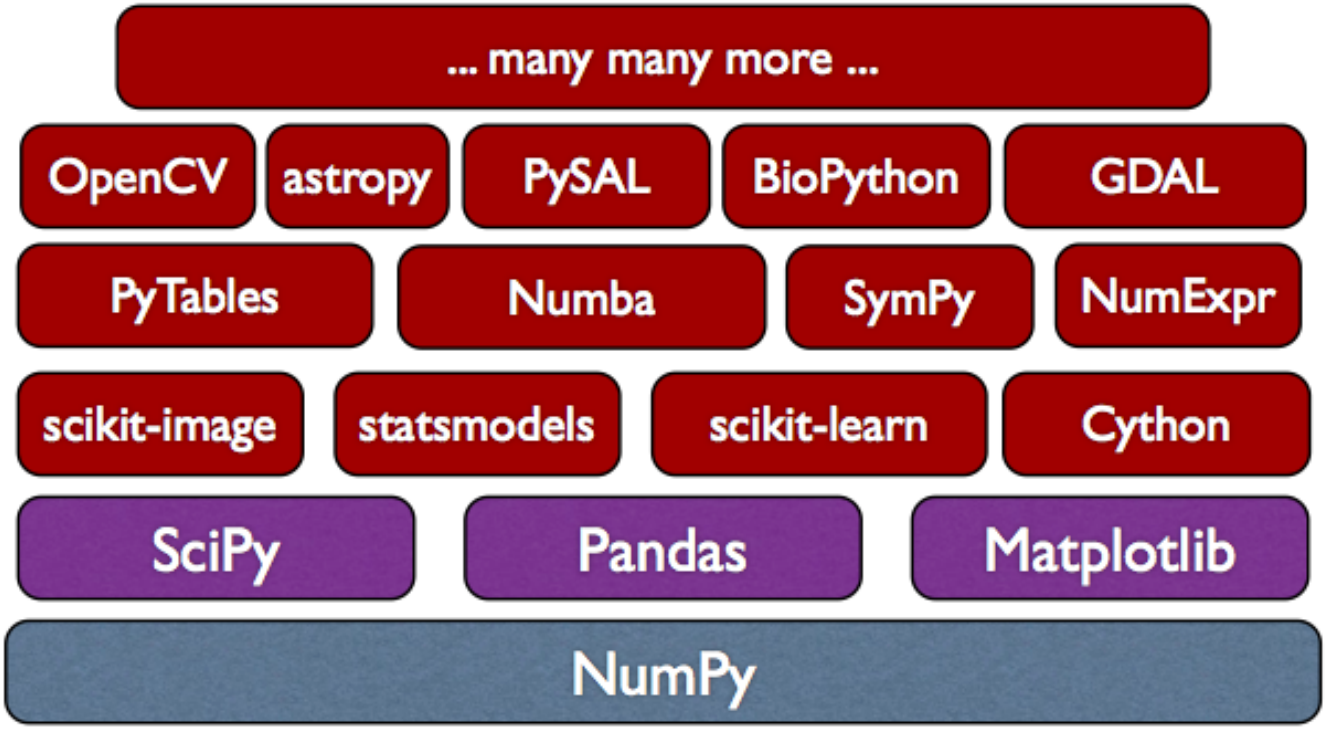


Некоторые популярные математические пакеты

- **numpy** - работа с матрицами и многомерными массивами
- **scipy** - научные и инженерные вычисления, использует numpy;
- **matplotlib** - построение графиков и диаграмм;
- **seaborn** - визуализация статистических данных, эстетичнее чем matplotlib;
- **mpld3** - использование D3.js для построения интерактивных matplotlib графиков в окне браузера;
- **pandas** - анализ данных: статистики, регрессия, визуализация и т.п.

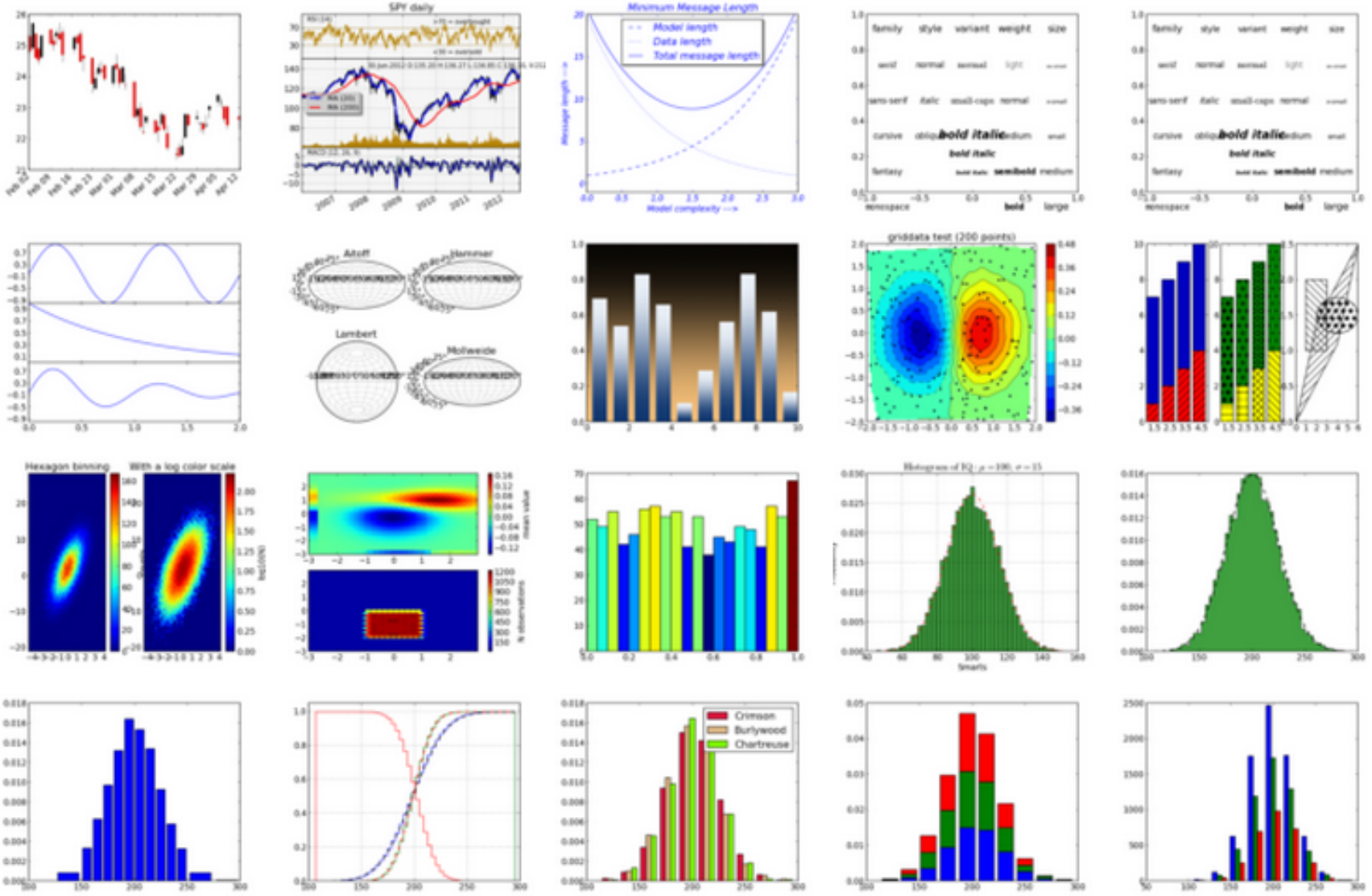
Популярные математические пакеты

Многие пакеты построены на основе NumPy



Outline

Пакет matplotlib



Пакет matplotlib

Пакет **matplotlib** содержит модули предназначенные для построения диаграмм и графиков.

Модуль pyplot из этого пакета предназначен непосредственно для построения графиков. Этого модуля будет достаточно для построения относительно простых графиков.

Остальные модули пакета matplotlib содержат преимущественно функции для гибкой настройки вида графиков, осей, подписей к осям, компоновки нескольких графиков на одном листе и т.п.

Пакет matplotlib

```
from matplotlib.pyplot import plot
```

Основные функции модуля pyplot
Создание графика **plot** - функция с переменным числом параметров. Если некоторые параметры не указаны, то им задаётся значение по-умолчанию.

- **plot(y-list)** - создаёт график в памяти программы
  y-list - список ординат (значений y).
  В качестве абсцисс (значений y) используются номера значений из списка y-list, т.е. индексы.

```
help(plot)
```

Пакет matplotlib

- **plot(x-list, y-list)**

  x-list - список абсцисс (значений x).
  y-list - список ординат (знаений y).
  Длинны списков x-list и y-list должны быть одинаковы.

Пакет matplotlib

Дополнительные параметры

- **plot(x-list, y-list, style)**
  style - стиль графика. Определяет цвет, вид кривой и точек
  - \- прямая линия
  - \- - пунктирная линия
  - **.** только точки
  - **v** треугольники вместо точек

  Цвета
  - **'b'** blue
  - **'g'** green
  - **'r'** red
  - **'k'** black

Дополнительную информацию о стилях см. в документации

Пакет matplotlib

Дополнительные параметры

- **plot(x-list, y-list, style, label)**
  label - подпись к графику. По-умолчанию не показывается.
- **plot(x-list, y-list, style, label, linewidth)**
  linewidth - толщина линии. По-умолчанию - 1.

Пакет matplotlib

```
from matplotlib.pyplot import grid, xlabel, ylabel, legend
```

- **grid(True)** - "включает"координатную сетку.
  Шаг сетки выбирается автоматически.
- **xlabel**("подпись") - добавляет название для оси x
- **ylabel**("подпись") - добавляет название для оси y
- **legend(loc)** - добавляет к графикам пояснения (легенду)
  loc - положение блока с пояснениями. По-умолчанию - справа сверху.
  Для автоматического выбора положения следует задать параметр loc = 'best'

Пакет matplotlib

```
from matplotlib.pyplot import show, savefig
```

- **show()** - создаёт и показывает окно содержащие построенные функциями plot() графики.
  Оси координат строятся строятся автоматически, масштаб выбирается в зависимости от ширины и высоты графика.
- **savefig(filename [, dpi])** - сохраняет изображение графика в файл. Графический формат определяется по расширению файла.
  filename - имя файла
  dpi - количество точек на дюйм (DPI)

Пакет matplotlib

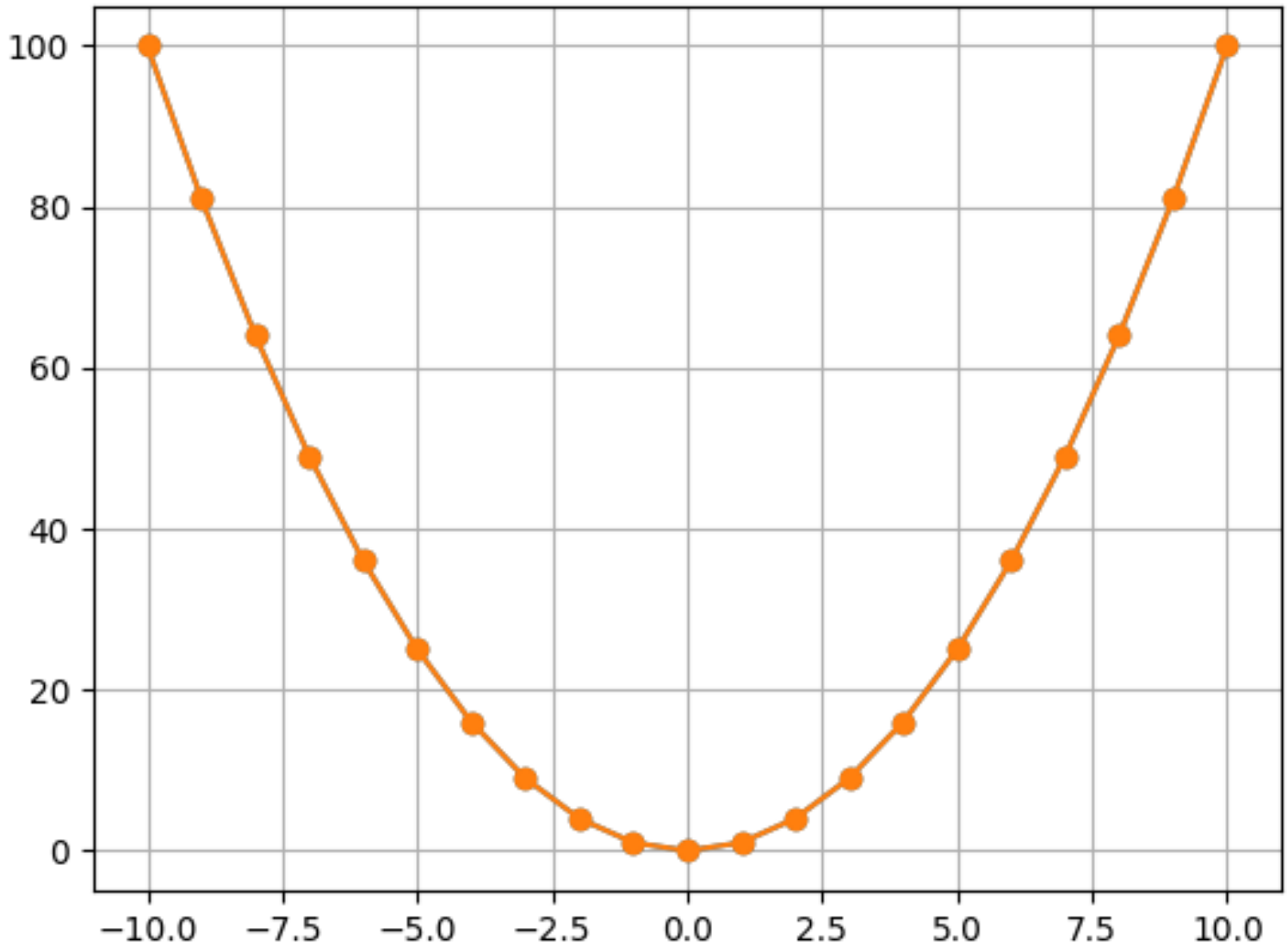
Типичный алгоритм построения графика

1. Создать графики
2. Настроить оформление графика
3. Показать или сохранить график

Пакет matplotlib

```
X = list(range(-10,11))
Y = [x**2 for x in X]
plot(X,Y,'-o')
grid(True)
show()
```

Пакет matplotlib

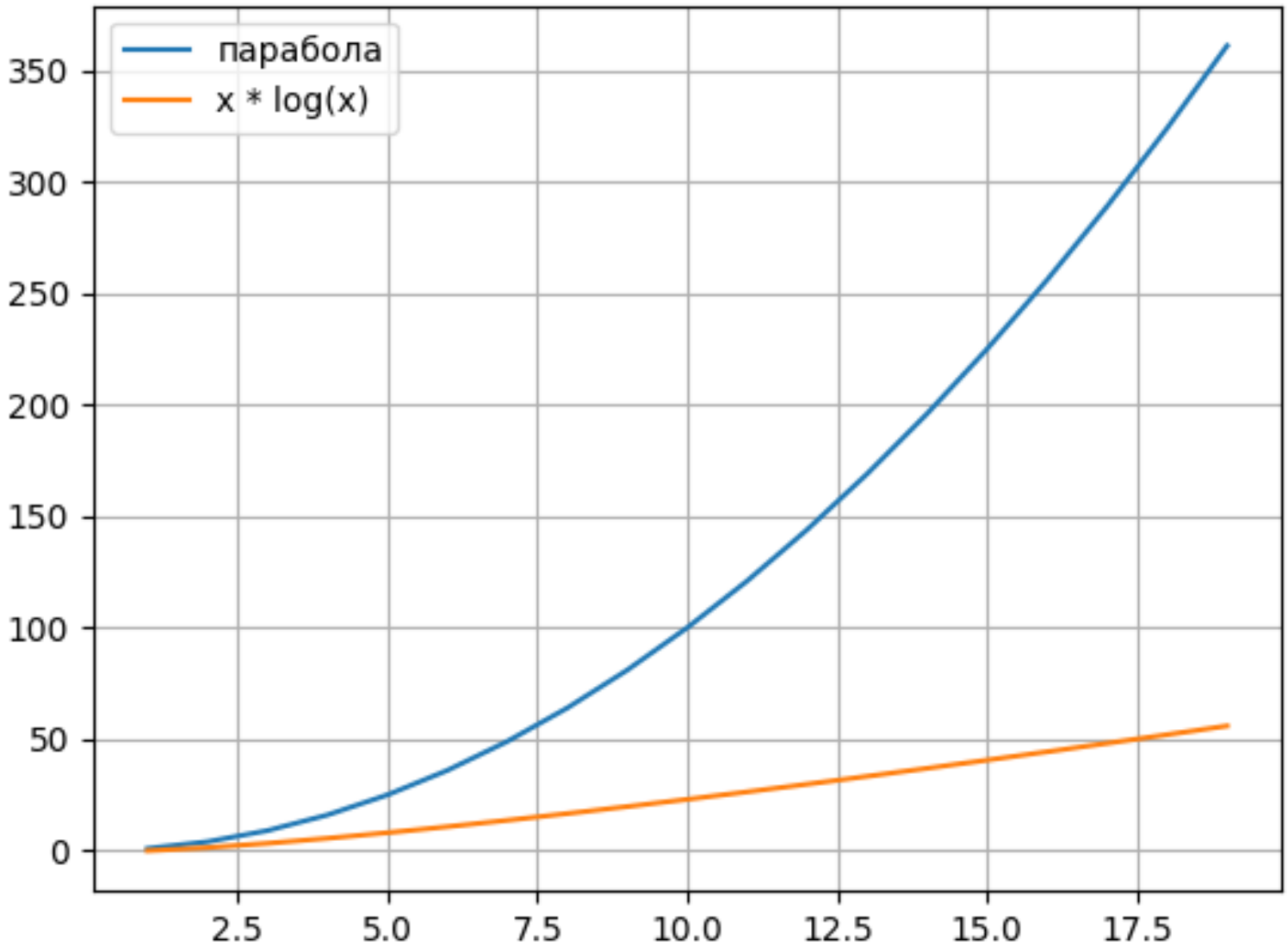


Пакет matplotlib

На одном поле можно построить несколько графиков.
Чтобы их различать стоит указать для них названия.
Для этого будем явно задавать имя параметра: **label**

```
X = list(range(20))
Y1 = [x**2 for x in X]
Y2 = [x * log(x) for x in X]
plot(X,Y, label = 'парабола')
plot(X,Y, label = 'x * log(x)')
grid(True)
show()
```

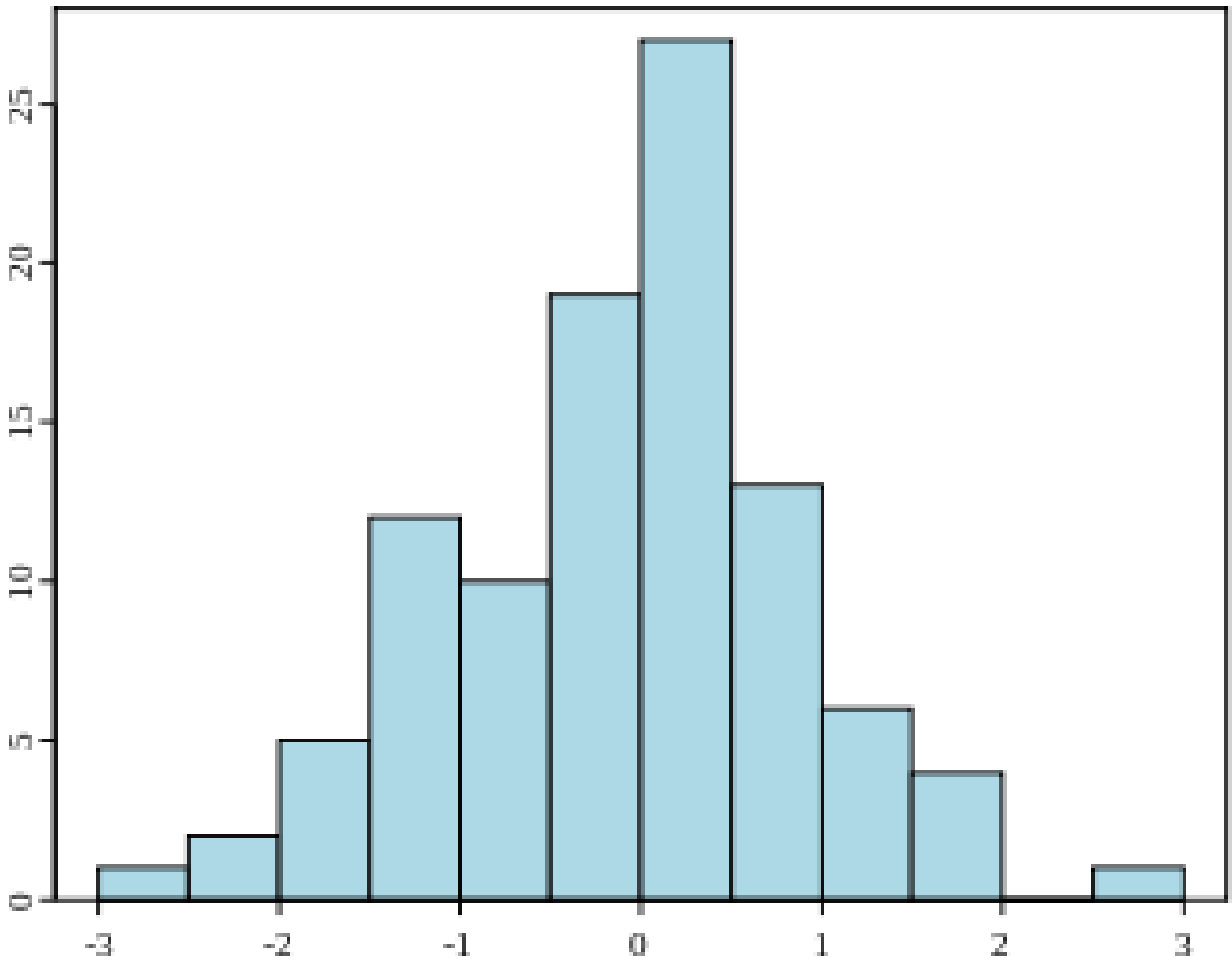
Пакет matplotlib



Пакет matplotlib

Гистограммы

Гистограмма - столбчатая диаграмма, способ графического представления табличных данных



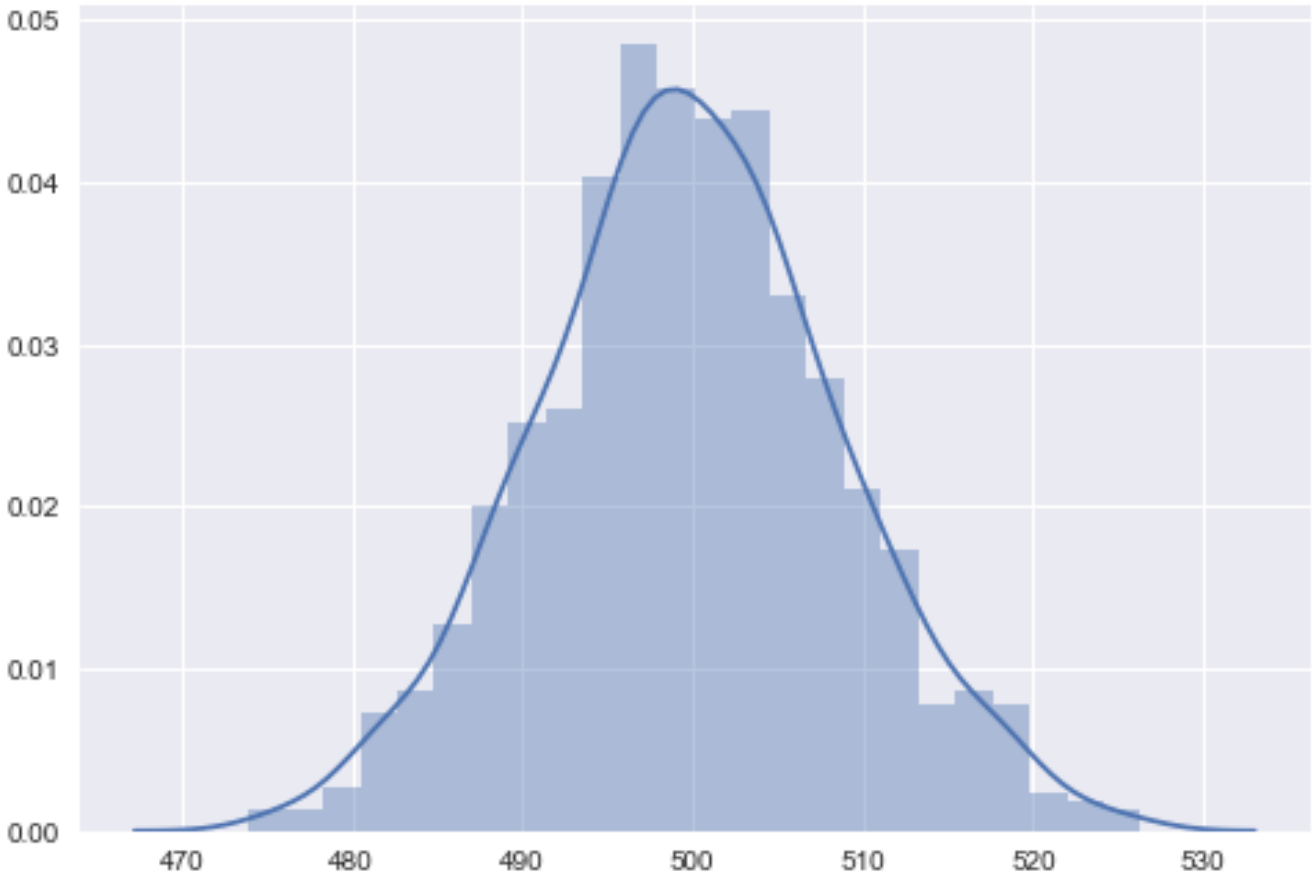
Пакет matplotlib

```
from matplotlib.pyplot import bar
```

bar(x-values, y-values) - строит гистограмму.
x-values - значения x
y-values - значения y (высоты столбцов)

Пакет matplotlib

```
X = [2,3,4,5]
Y = [10,20, 15,5]
bar(X,Y)
show()
```



Добавление дополнительных элементов на график

- Заголовок

  ```
  title('1a TITLE')
  ```

- Текст

  ```
  text(x,y, 'текст')
  ```

Пакет matplotlib

Matplotlib и Jupyter
По-умолчанию графики построенные в Jupyter будут показаны в ячейке вывода.

Чтобы показать их в отдельном окне, с возможностью масштабирования и перемещения следует перед построением графиков выполнить в Jupyter команду:

```
%matplotlib
```

Чтобы вернуть построение графиков в блокнот нужно выполнить команду

```
%matplotlib inline
```

Эстетика графиков

На основе matplotlib создано много пакетов для визуализации данных. Один из них - **sebaorn**. Этот пакет предназначен для представления статистических данных и поэтому работа с ним может показаться немного сложнее.

Графики построенные этим модулем смотрятся лучше, чем аналогичные, построенные с помощью matplotlib (со стандартными настройками)
Для того чтобы использовать стиль оформления seaborn достаточно просто подключить этот модуль и далее работать с maplotlib.

Пакет matplotlib

Эстетика графиков

На основе matplotlib создано много пакетов для визуализации данных. Один из них - **sebaorn**. Этот пакет предназначен для представления статистических данных и поэтому работа с ним может показаться немного сложнее.

Графики построенные этим модулем могут выглядеть лучше, чем аналогичные, построенные с помощью matplotlib (со стандартными настройками)
Для того чтобы использовать стиль оформления seaborn достаточно просто подключить этот модуль и далее работать с maplotlib.

```
import seaborn
```

Пакет matplotlib

Пакет seaborn не входит в стандартную библиотеку Python. Поэтому его придётся установить отдельно используя программу pip (поставляется вместе с Python)

```
pip.exe install seaborn
```

Пакет matplotlib

Ещё примеры и документация:
matplotlib.org/tutorials/introductory/pyplot.html

Outline

Векторизация функций

Для построение трёхмерных графиков неудобно пользоватся скалярными функциями, вручную вычисляя значения для каждого значения аргумента.

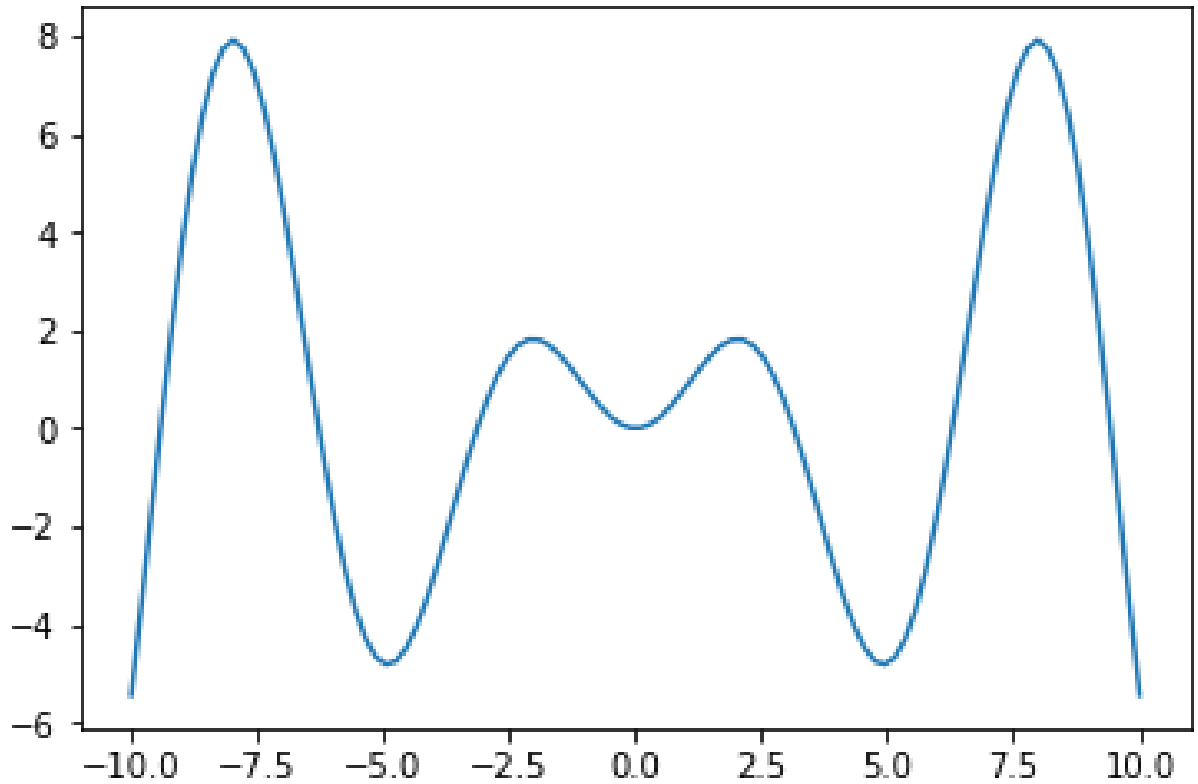
Класс **vectorize** пакета numpy может быть использован для "векторизации"функции. Такая функция может принимать в качестве параметра array и возвращать array.

```
from math import *
import numpy as np

def foo(x):
    return x*sin(x)

foo = np.vectorize(foo)
```

Векторизация функций

```
from math import *
from matplotlib.pyplot import *
import numpy as np

def foo(x):
    return x*sin(x)

foo = np.vectorize(foo)

# создание array из 100 точек отрезка [-10, 10]
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = foo(x)

plot(x,y)
show()
```

Векторизация функций



Векторизация функций

Вместо обычных функций можно использовать лямбда-функции

```
from math import *
import numpy as np

foo = np.vectorize(lambda x: x*sin(x))
```

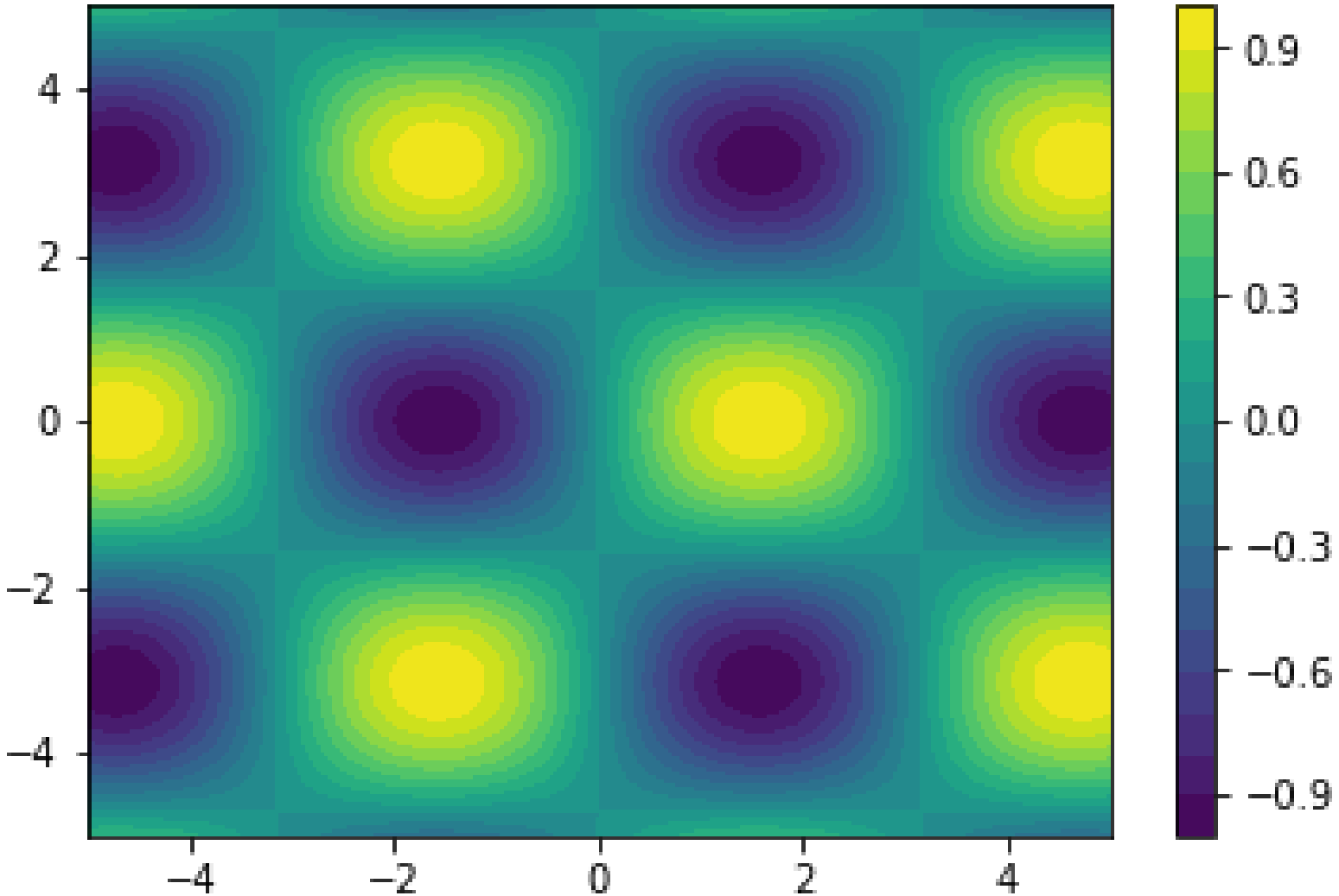
Outline

Пример

Тепловая карта с линиями уровня

```
from matplotlib.pyplot import *
import numpy as np
from math import *

X = np.linspace(-5, 5, 100)
Y = np.linspace(-5, 5, 100)

# создание сетки (декартового произведения X и Y)
xx,yy = np.meshgrid( X, Y)

foo = np.vectorize(lambda x,y: sin(x)*cos(y))
zz = foo(xx,yy)

contourf(xx, yy, zz, 20)
colorbar()
show()
```

Пример

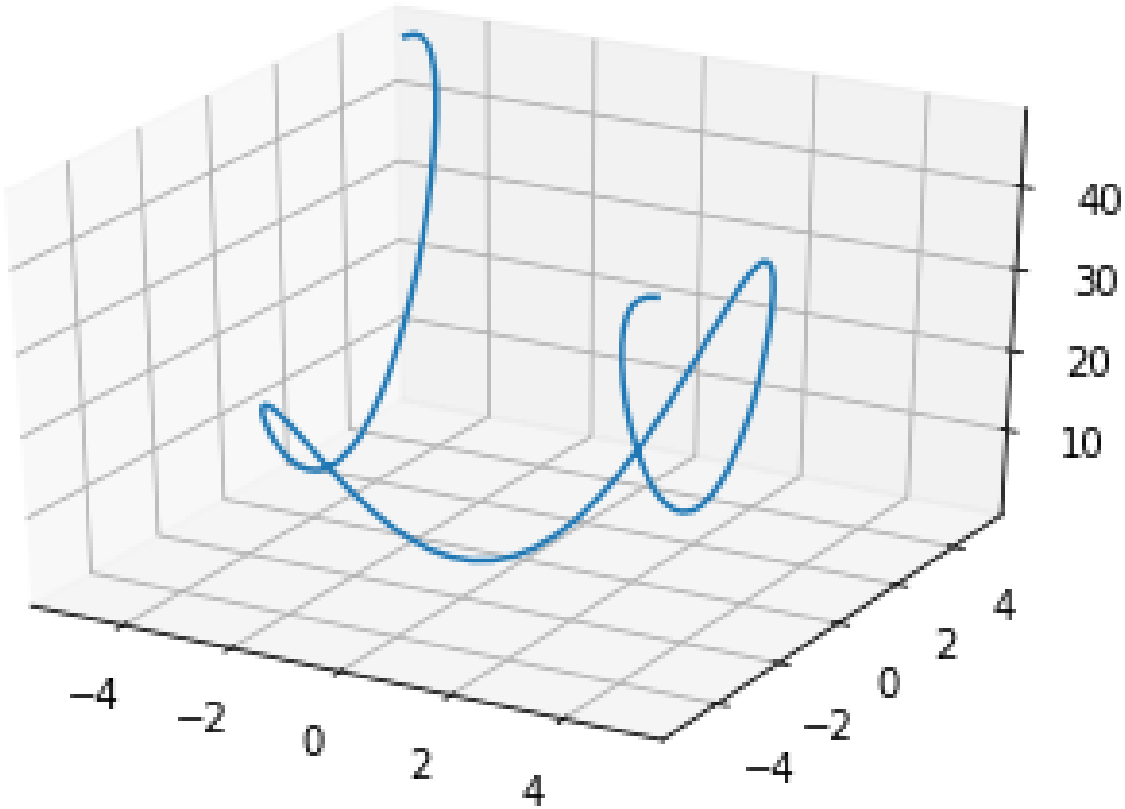


Ещё примеры:
jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/04.04-density-and-contour-plots.html

Outline

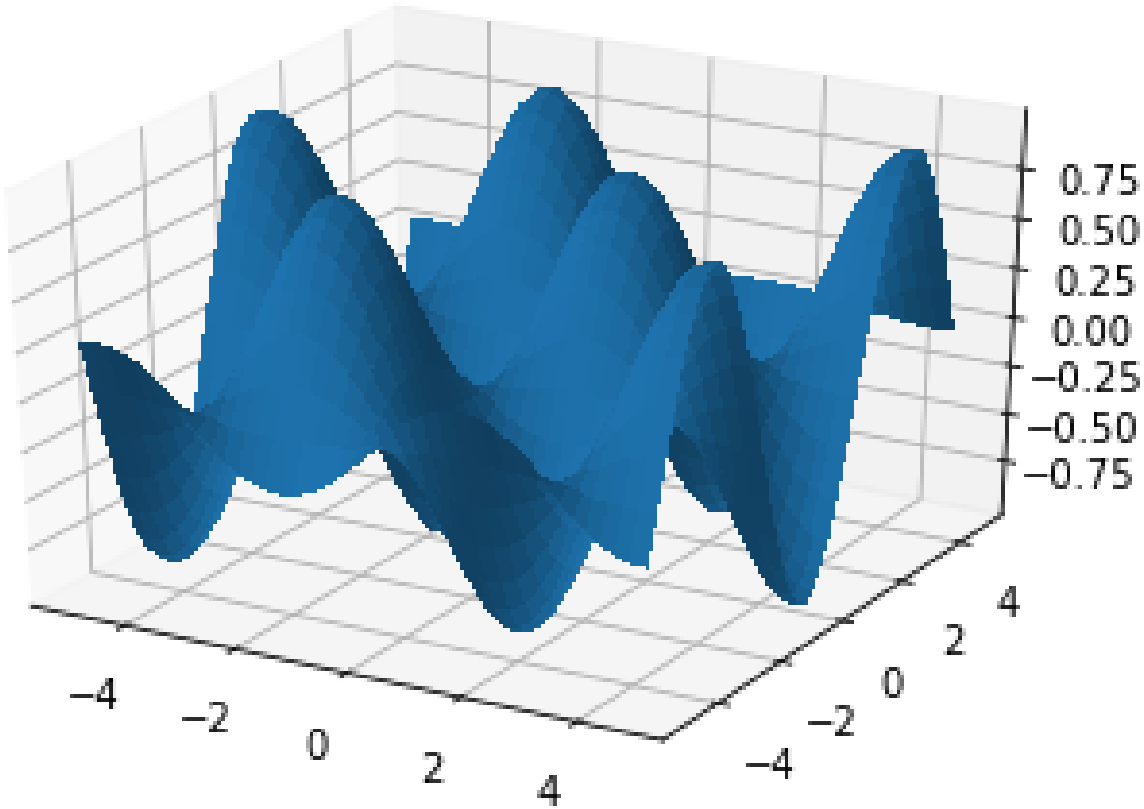
Графики в изометрии

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = np.sin(x)*5
z = x**2 + y**2

ax.plot(x, y, z, antialiased=True)

plt.show()
```


40
30
20
10
−4
−2
0
2
4
−4
−2
0
2
4

Графики в изометрии

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

X = np.arange(-5, 5, 0.25)
Y = np.arange(-5, 5, 0.25)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)

foo = np.vectorize(lambda x, y: sin(x) * cos(y))
Z = foo(X,Y)

ax.plot_surface(X, Y, Z, antialiased=False)
plt.show()
```


0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−4
−2
0
2
4
−4
−2
0
2
4

Графики в изометрии

Дополнительно можно раскрасить поверзность как тепловую карту, изобрасить сетку вместо поверзности и настроить друге параметры отображения.

Документации matplotlib с примерами:
matplotlib.org/mpl_toolkits/mplot3d/tutorial.html

Outline

plotly

plot.ly

plotly

plotly - модуль для создание интерактивных графиков.

Существуют версии для Python, R, Matlab

Графики представляют собой html фрейм с JavaScript (фреимворк D3.js).

Существуют два режима редима с графиками:

- оффлайн (график сохраняется как отдельный html файл)
- графики публикуются на сервере plot.ly

plotly

Для создания оффлаин-графиков нужно использовать отдельный модуль offline пакета plotly.

```
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
init_notebook_mode, plot, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter, Figure, Layout
import numpy as np

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.vectorize(lambda x: np.sin(x) * x )(x)
plot([Scatter(x=x, y=y)])
```

Будет создан отдельный html файл, который автоматически откроется вбраузере

plotly

Чтобы графики отображались в окне Jupyter следует явно это указать

```
init_notebook_mode(connected=True)
```

и использовать функцию рисовани **iplot** вместо plot.

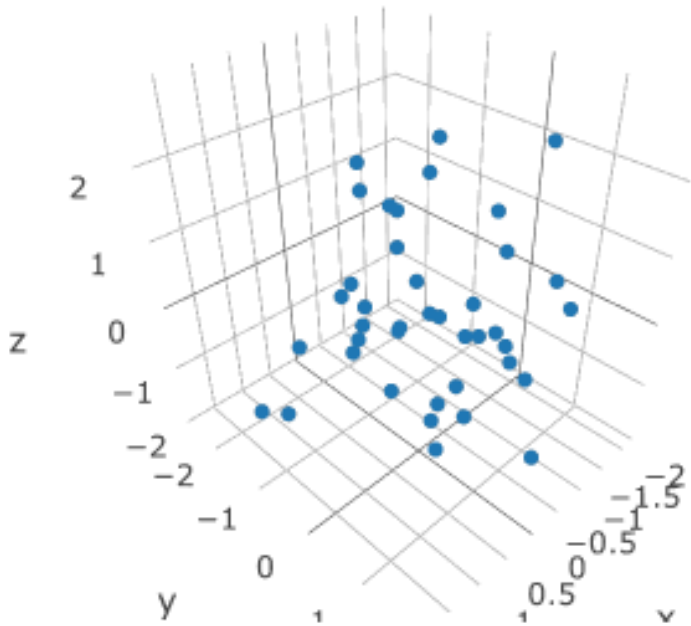
```
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
            init_notebook_mode, plot, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter, Figure, Layout
import numpy as np

init_notebook_mode(connected=True)

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.vectorize(lambda x: np.sin(x) * x )(x)
iplot([Scatter(x=x, y=y)])
```

plotly

Диаграмма рассеивания трёхмерной случайной величины

```
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
        init_notebook_mode, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter3d, Figure
import numpy as np

init_notebook_mode(connected=True)
# создание 3-х массивов заполненых 10 случайными значениями
x,y,z = np.random.uniform( size=(3, 10))

trace1 = Scatter3d(x=x, y=y, z=z, mode='markers', \
                   marker=dict(size=2))

data = [trace1]
fig = Figure(data=data)
iplot(fig)
```

Пример



Outline

Линейная алгебра

```
import numpy as np

# Создание матрицы
A = np.array([ [1,2,3],
               [3,2,1],
               [2,1,3] ] )
```

Матрица A - это двумерный массив (список), только в обёртке numpy.

Линейная алгебра

```
# умножение на число
A * 3.14
```

```
> array([[ 3.14,  6.28,  9.42],
         [ 9.42,  6.28,  3.14],
         [ 6.28,  3.14,  9.42]])
```

```
# Умножение на вектор
A * [2,3,4]
```

```
array([[ 2,  6, 12],
       [ 6,  6,  4],
       [ 4,  3, 12]])
```

Причём здесь вектор не обязательно должен быть типом numpy.

Линейная алгебра

```
# Сложение матриц
A + B

# Умножение матриц
A @ B
# или
np.dot(A,B)


# Обратная матрица
np.linalg.inv(A)
```

Линейная алгебра

Решение СЛАУ

```
# Настройка вывода. Число знаков после запятой - 4.
# не выводить числа в экспоненциальной форме
numpy.set_printoptions(precision=4, suppress=True)
A = np.matrix([
    [1, 2, 3],
    [3, 2, 1],
    [2, 3, 1]])
B = np.matrix([[1], [2], [3]])
X = np.linalg.solve(A, B)

matrix([[ 0.0833],
        [ 1.0833],
        [-0.4167]])
```

Стоит обратить внимание на то, что вектор-столбец определяется как матрица из одного столбца, а не как список.

Outline

Outline

Минимизация функции

```
from scipy.optimize import minimize
x0 = 100 # начальное значение
minimize(lambda x: return (x-3)*(x-3) - 5, x0)
```

Вывод:

```
    nfev: 12
    jac: array([ 0.])
    message: 'Optimization terminated successfully.'
    fun: -5.0
    success: True
    x: array([ 3.])
    njev: 4
    hess_inv: array([[ 0.5]])
    status: 0
```

Минимум функции: f(3) = -5

Outline

Интерполяция - нахождение промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Сплайн

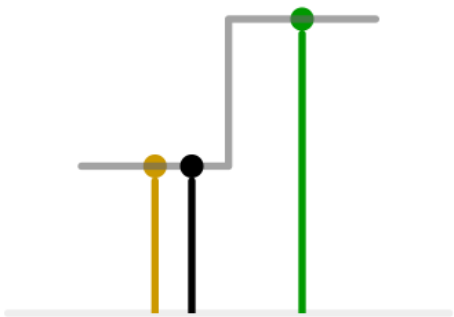
Сплайн (spline) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом).

Максимальная из степеней использованных полиномов называется **степенью сплайна**.

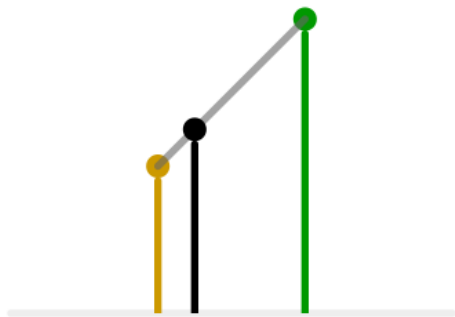
сплайн — это кусочно заданная функция

Сплайн

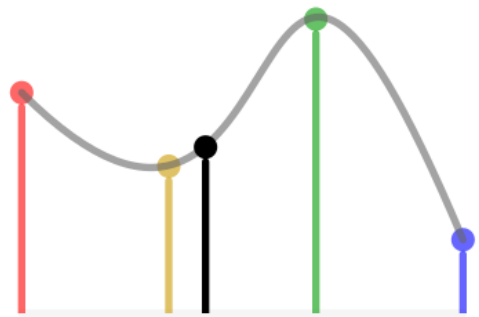
Примеры интерполяции для отдельных участков.



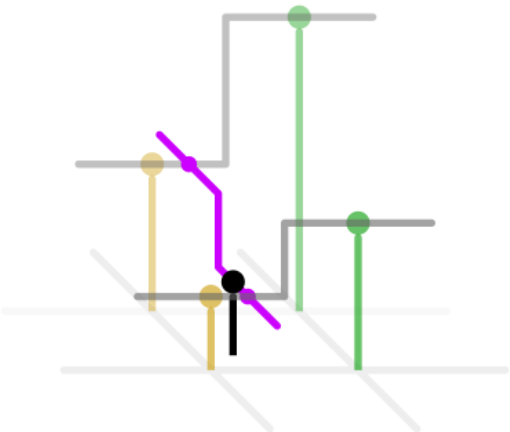
1D nearest-neighbour



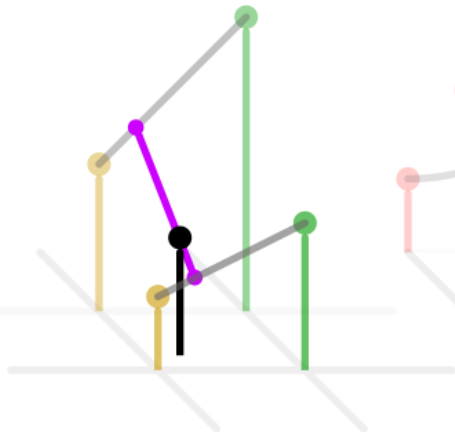
Linear



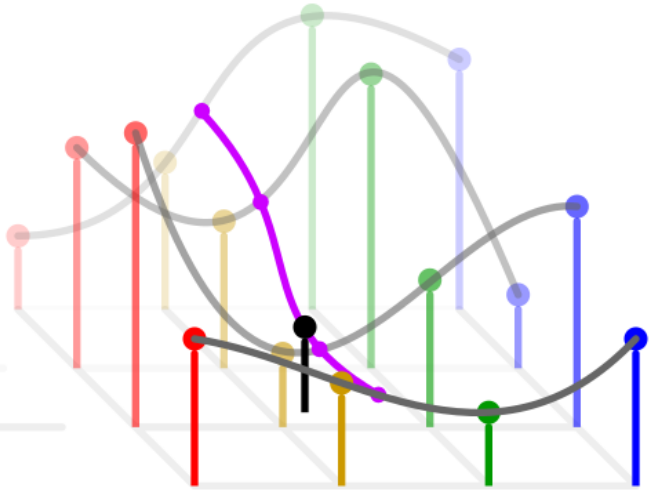
Cubic



2D nearest-neighbour



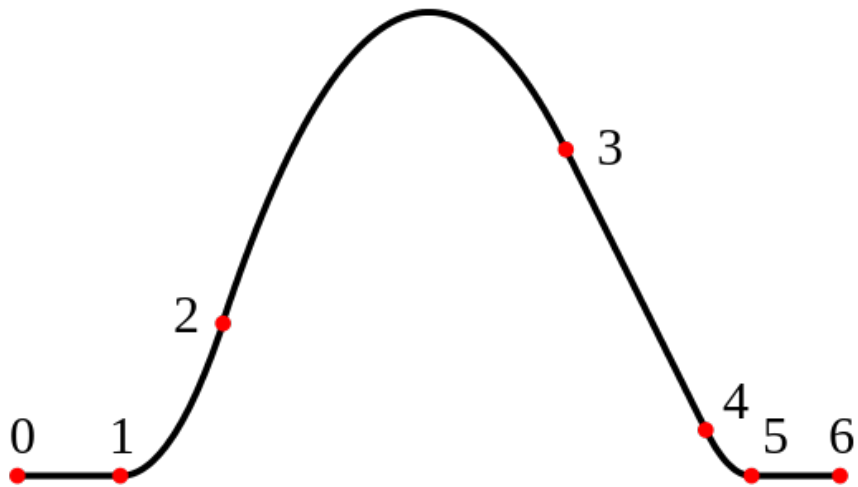
Bilinear



Bicubic

График кучочно заданной функции

Сплайн второй степени



- 0-1 Прямая
- 1-2 Парабола
- 2-3 Парабола
- 3-4 Прямая
- 4-5 Парабола
- 5-6 Прямая

Интерполяция

Интерполяция функции одной переменной

```
from scipy.interpolate import interp1d
```

Возможна интреполяция сплайном первой, второй и третей степени[1]

- slinear
- quadratic
- cubic

[1] см. другие способы в документации

Интерполяция

Пусть функция задана в табличном виде - набором значения X и Y.

Задача - определить значение функции для X, не перечисленного в таблице.

Применем для этого интерполяцию, построив функцию в аналитическом виде, которая будет проходить наиболее близко к заданым точкам.

Пример 1

```
from scipy.interpolate import interp1d

X = [1,2,3,4,5,6,7]
Y = [1,4,9,16,25,36,49]
func = interp1d(X, Y, kind='cubic')
```

func - функция определённая на отрезке от min(x) до max(x).
kind - тип интерполяции (см. справку)
В примере использована интерполяция сплайном третьего порядка.

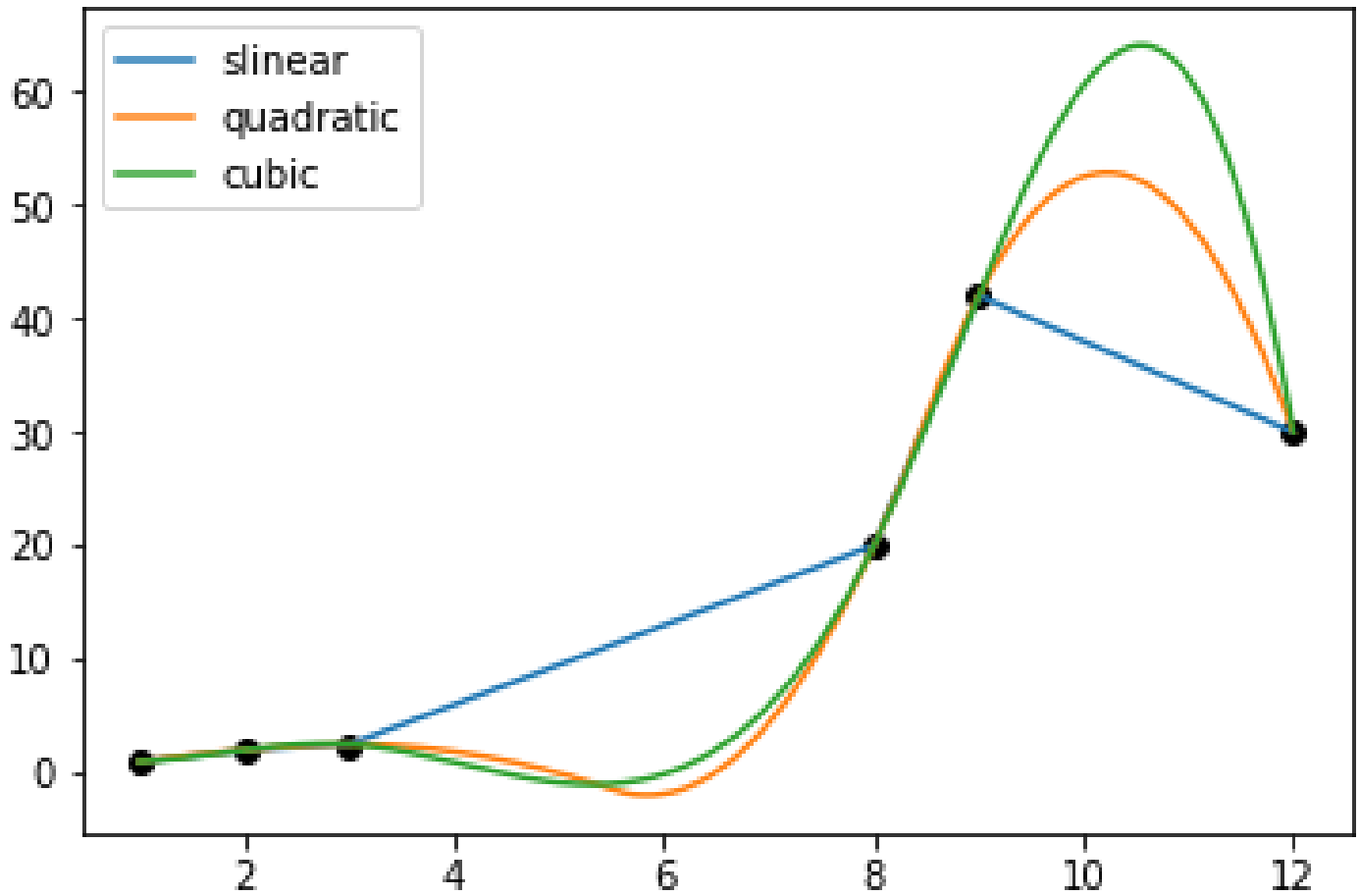
Теперь можно вычислять значение функции в любой точке.

```
func(5.3)

# array(28.090000000000003)
```

Пример 2

```
# таблично заданная функция
X = [1,2, 3, 8, 9, 12]
Y = [1,2,2.5, 20, 42, 30]

# создание сплайнов
f1 = interp1d(X,Y,'slinear')
f2 = interp1d(X,Y,'quadratic')
f3 = interp1d(X,Y,'cubic')

# набор точек для интреполяции
X0 = np.linspace(min(X), max(X), 1000)
Y1 = [f1(x) for x in X0]
Y2 = [f2(x) for x in X0]
Y3 = [f3(x) for x in X0]

plot(X,Y, 'o', color='black')
plot(X0, Y1, label='slinear')
plot(X0, Y2, label='quadratic')
plot(X0, Y3, label='cubic')

legend(loc='best')
show()
```

Пример 2



Пример 3

Интреполяция функции задающей поверхность

```
x = np.array([-5.0, -1.7,  1.7,  5.0])
y = np.array([-5.0, -1.7,  1.7,  5.0])
z = np.array([[ 50. ,  27.8,  27.8,  50. ],
              [ 27.8,  5.6 ,  5.6 ,  27.8],
              [ 27.8,  5.6 ,  5.6 ,  27.8],
              [ 50. ,  27.8,  27.8,  50. ]])

f = interp2d(x, y, z, kind='cubic')
```

Примеры использования модуля interpolate:
docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/tutorial/interpolate.html

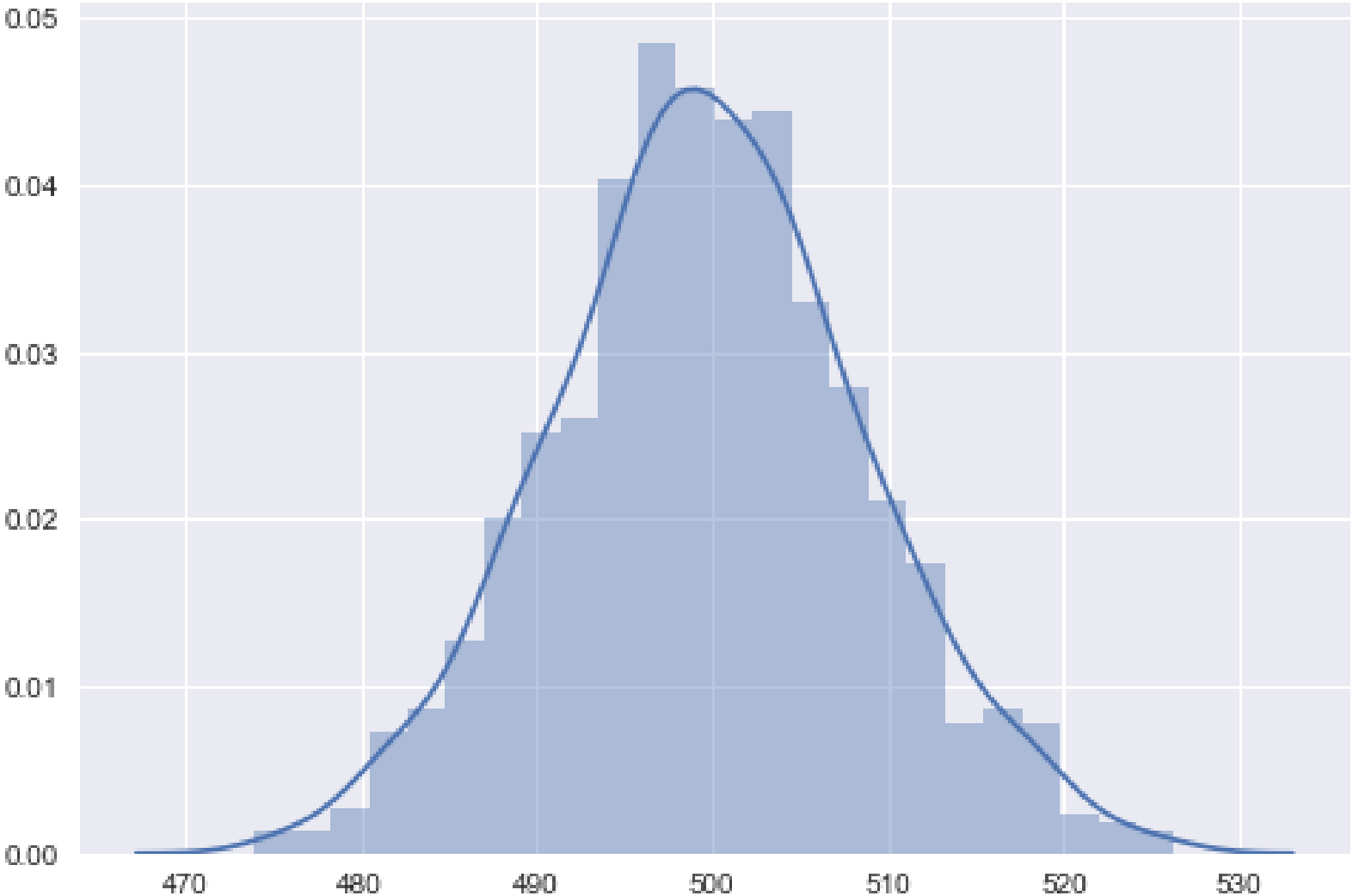
Outline

Outline

Гистограмма

```
from random import random
import seaborn
from matplotlib.pyplot import show

X = [ sum( [random() for i in range(1000)] )
                          for j in range(1000)]

# подготовим гистограмму и кривую распределения
seaborn.distplot(X)

show()
```

Гистограмма



Некоторые распределения

Распределения случайных величин

```
from scipy.stats import norm # нормальное распр.
from scipy.stats import f  # распределение Фишера
from scipy.stats import t  # распред. Стьюдента (t распред)
from scipy.stats import chi2  # распред. Хи-квадрат
from scipy.stats import poisson  # распред. Пуассона
```

Некоторые распределения

Работа с каждой из случанйх величин может быть организована с помощью методов

- rvs(size) сгенерировать size случаных значений. может потребовается указать параметры распределения.
- pdf(x) - Probability density function at x
- cdf(x) - Cumulative distribution function
- isf (p) - Inverse survival function

Некоторые распределения

Вычислить вероятность того, что рост наугад выбранного человека будет меньше 180 см.
Средний рост людей 172 см.
Стандартное отклонение 7 см.

```
from scipy.stats import norm
norm.cdf( (180 - 172) / 7 )
```

0.8734510455264422 6

Сколько людей на Земле имеют рост меньше 180?

```
norm.cdf( (180 - 172) / 7 ) * 7.6e9
```

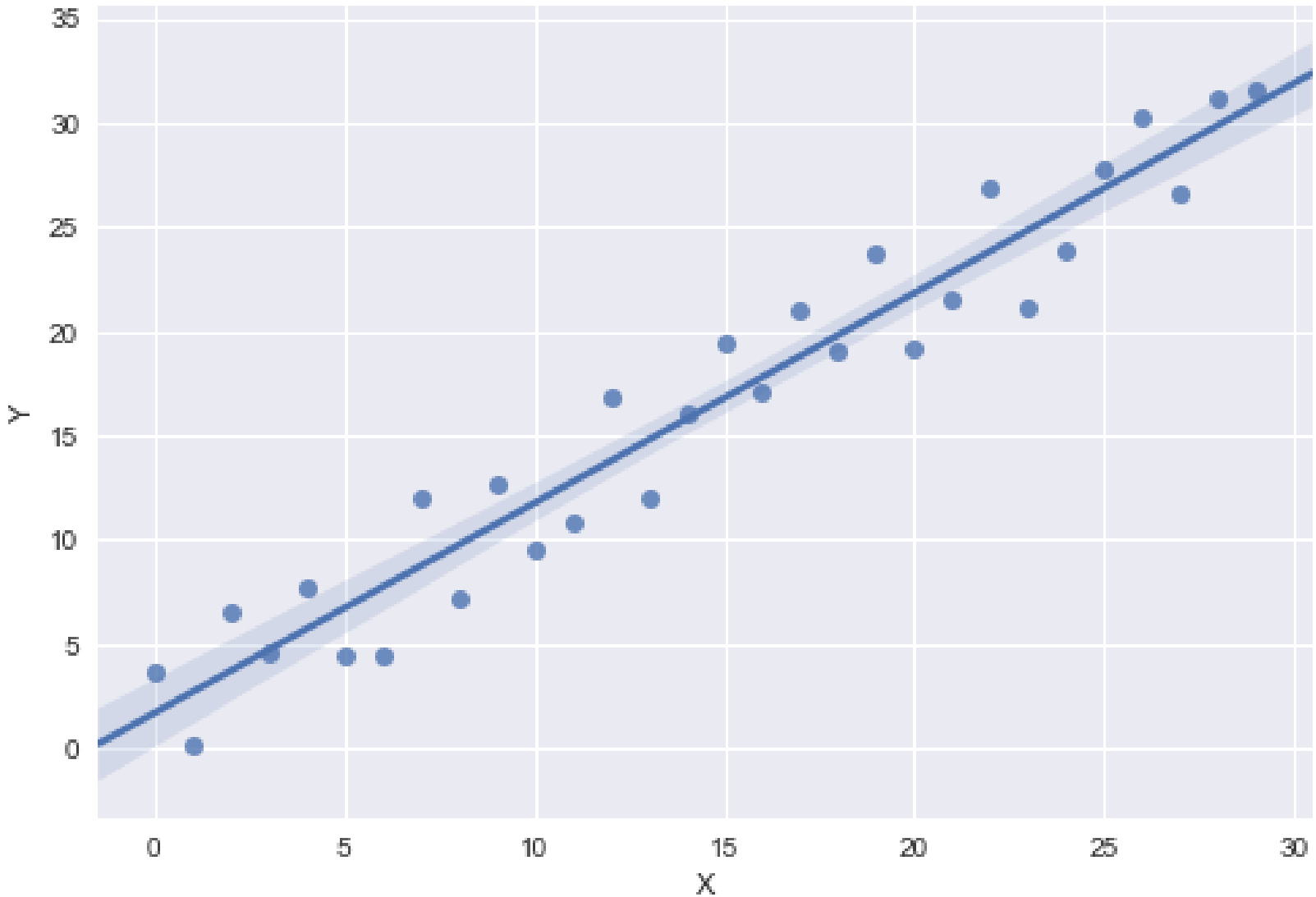
6 638 227 946

Outline

Коэффициент корреляции

```
import seaborn  # для визуализации

# Таблица для хранения стат.данных
from pandas import DataFrame

# поместим в таблицу как столбцы с заголовками X и Y
D = DataFrame( {'X':X, 'Y':Y} )

# Построим диаграмму рассеивания
seaborn.regplot(x='X', y='Y', data=D);

plt.show()
```

Диаграмма рассеивания

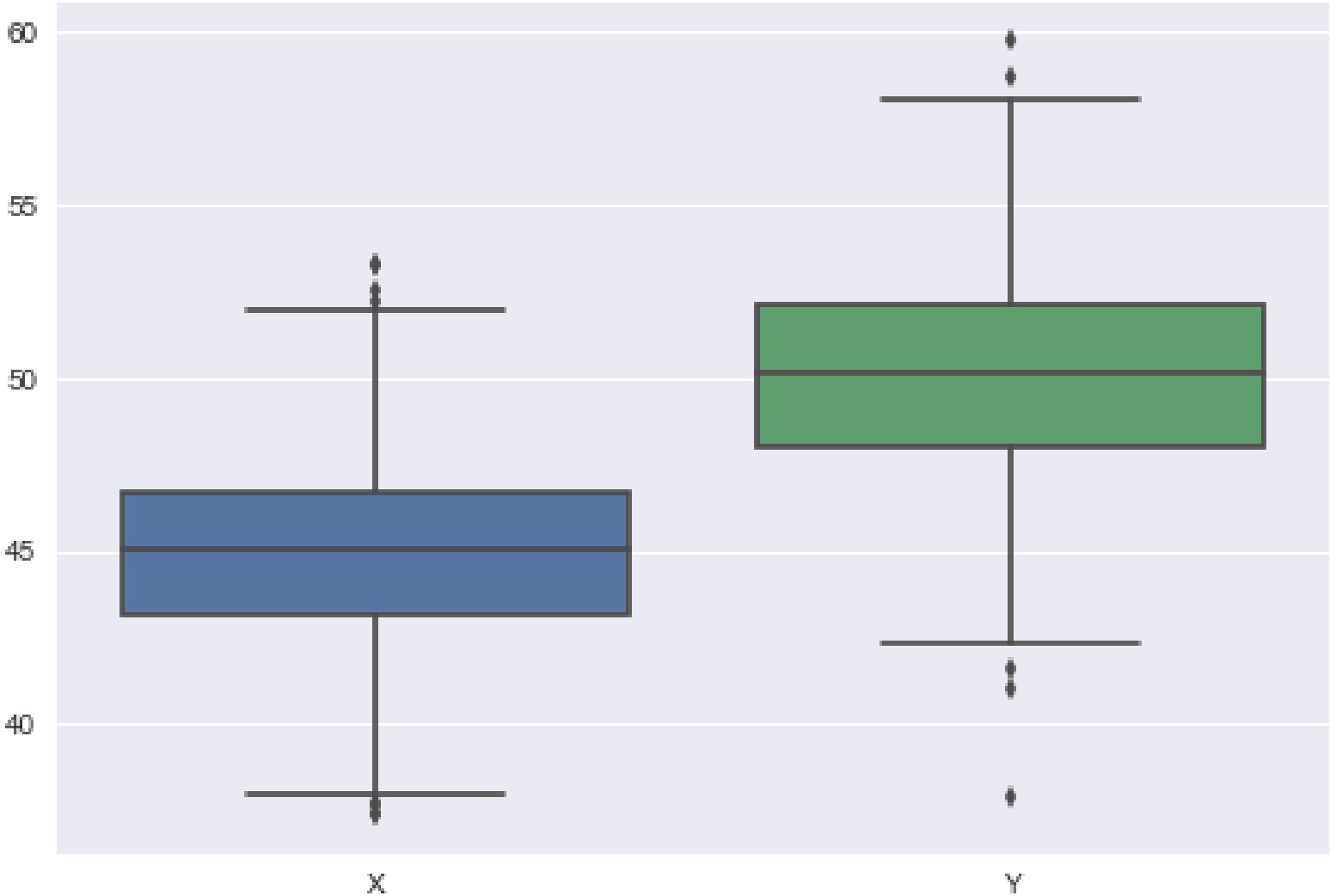


Outline

Диаграмма размаха ("Ящик с усами")

```
X = [ sum([random() for i in range(90)])
                        for j in range(1000) ]
Y = [ sum([random() for i in range(100)])
                        for j in range(1000) ]

D = DataFrame( {'X' : X, 'Y':Y} )
seaborn.boxplot(D)
plt.show()
```

Диаграмма размаха ("Ящик с усами")



О визуализации статистический данных и проверке гипотез с помощью Python:
nahlogin.blogspot.ru/2016/01/pandas.html

Outline

Ссылки и литература

- Numerical methods in engineering with Python 3 / Jaan Kiusalaas.
- try.jupyter.org
- Как использовать Jupyter (ipython-notebook) на 100%

Ссылки и литература

Ссылка на слайды

github.com/VetrovSV/Programming