# Математика в Python

2018

### План

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

Ссылки и литература

### Outline

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

### Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

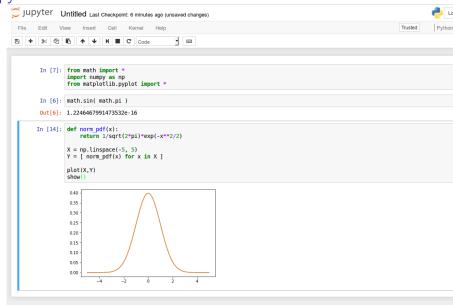
Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

Ссылки и литератур

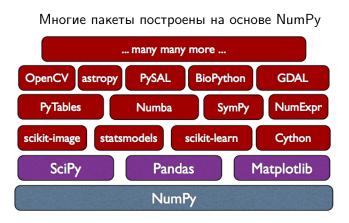
## Jupyter



## Некоторые популярные математические пакеты

- ▶ numpy работа с матрицами и многомерными массивами
- scipy научные и инженерные вычисления, использует numpy;
- matplotlib построение графиков и диаграмм;
- seaborn визуализация статистических данных, эстетичнее чем matplotlib;
- mpld3 использование D3.js для построения интерактивных matplotlib графиков в окне браузера;
- pandas анализ данных: статистики, регрессия, визуализация и т.п.

## Популярные математические пакеты



### Outline

Введение

### Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

Линейная алгебра

Полиномы

Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

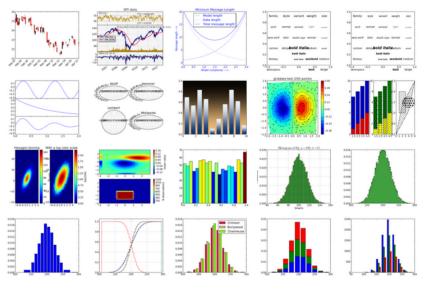
Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

Ссылки и литература



□ > 《□ > 《필 > 《필 > 《필 > ② < ○ O / O 1

Пакет matplotlib содержит модули предназначенные для построения диаграмм и графиков.

**Модуль pyplot** из этого пакета предназначен непосредственно для построения графиков. Этого модуля будет достаточно для построения относительно простых графиков.

Остальные модули пакета matplotlib содержат преимущественно функции для гибкой настройки вида графиков, осей, подписей к осям, компоновки нескольких графиков на одном листе и т.п.

from matplotlib.pyplot import plot

Основные функции модуля pyplot Создание графика **plot** - функция с переменным числом параметров. Если некоторые параметры не указаны, то им задаётся значение по-умолчанию.

plot(y-list) - создаёт график в памяти программы
 y-list - список ординат (значений y).
 В качестве абсцисс (значений у) используются номера значений из списка y-list, т.е. индексы.

help(plot)

plot(x-list, y-list)

```
x-list - список абсцисс (значений x).
y-list - список ординат (знаений y).
Длинны списков x-list и y-list должны быть одинаковы.
```

#### Дополнительные параметры

- plot(x-list, y-list, style)
   style стиль графика. Определяет цвет, вид кривой и точек
  - прямая линия
  - - пунктирная линия
  - только точки
  - ▶ v треугольники вместо точек

#### Цвета

- **▶ 'b'** blue
- ▶ 'g' green
- **▶** '**r**' red
- ▶ 'k' black

Дополнительную информацию о стилях см. в документации

#### Дополнительные параметры

- plot(x-list, y-list, style, label)
   label подпись к графику. По-умолчанию не показывается.
- plot(x-list, y-list, style, label, linewidth)
   linewidth толщина линии. По-умолчанию 1.

from matplotlib.pyplot import grid, xlabel, ylabel, legend

- grid(True) "включает" координатную сетку.
   Шаг сетки выбирается автоматически.
- ightharpoonup xlabel("подпись") добавляет название для оси x
- ▶ ylabel("подпись") добавляет название для оси y
- legend(loc) добавляет к графикам пояснения (легенду)
   loc положение блока с пояснениями. По-умолчанию справа сверху.

Для автоматического выбора положения следует задать параметр loc = 'best'

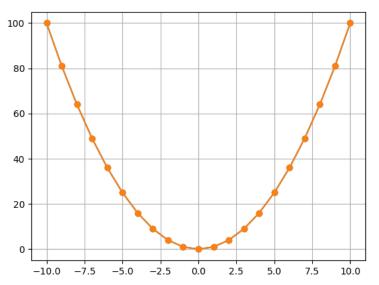
from matplotlib.pyplot import show, savefig

- show() создаёт и показывает окно содержащие построенные функциями plot() графики.
   Оси координат строятся строятся автоматически, масштаб выбирается в зависимости от ширины и высоты графика.
- savefig(filename [, dpi]) сохраняет изображение графика в файл. Графический формат определяется по расширению файла. filename - имя файла dpi - количество точек на дюйм (DPI)

### Типичный алгоритм построения графика

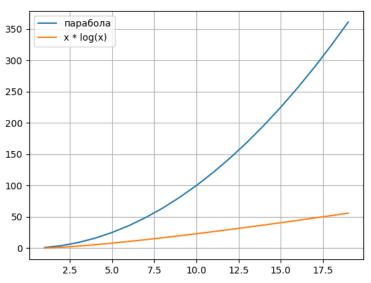
- 1. Создать графики
- 2. Настроить оформление графика
- 3. Показать или сохранить график

```
X = list(range(-10,11))
Y = [x**2 for x in X]
plot(X,Y,'-o')
grid(True)
show()
```



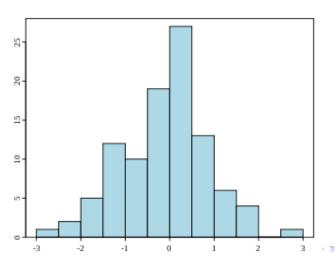
На одном поле можно построить несколько графиков. Чтобы их различать стоит указать для них названия. Для этого будем явно задавать имя параметра: label

```
X = list(range(20))
Y1 = [x**2 for x in X]
Y2 = [x * log(x) for x in X]
plot(X,Y, label = 'mapa6ona')
plot(X,Y, label = 'x * log(x)')
grid(True)
show()
```



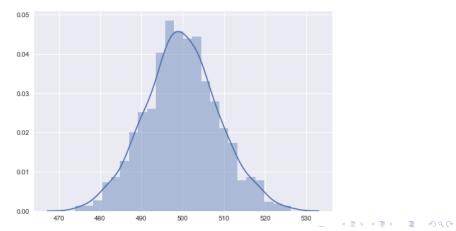
#### Гистограммы

Гистограмма - столбчатая диаграмма, способ графического представления табличных данных



```
from matplotlib.pyplot import bar bar(x-values, y-values) - строит гистограмму. x-values - значения х y-values - значения у (высоты столбцов)
```

```
X = [2,3,4,5]
Y = [10,20, 15,5]
bar(X,Y)
show()
```



### Добавление дополнительных элементов на график

```
▶ Заголовок
title('1a TITLE')▶ Текст
text(x,y, 'текст')
```

Matplotlib и Jupyter По-умолчанию графики построенные в Jupyter будут показаны в ячейке вывода.

Чтобы показать их в отдельном окне, с возможностью масштабирования и перемещения следует перед построением графиков выполнить в Jupyter команду:

%matplotlib

Чтобы вернуть построение графиков в блокнот нужно выполнить команду %matplotlib inline

#### Эстетика графиков

На основе matplotlib создано много пакетов для визуализации данных. Один из них - sebaorn. Этот пакет предназначен для представления статистических данных и поэтому работа с ним может показаться немного сложнее.

Графики построенные этим модулем смотрятся лучше, чем аналогичные, построенные с помощью matplotlib (со стандартными настройками)

Для того чтобы использовать стиль оформления seaborn достаточно просто подключить этот модуль и далее работать с maplotlib.

#### Эстетика графиков

На основе matplotlib создано много пакетов для визуализации данных. Один из них - **sebaorn**. Этот пакет предназначен для представления статистических данных и поэтому работа с ним может показаться немного сложнее.

Графики построенные этим модулем могут выглядеть лучше, чем аналогичные, построенные с помощью matplotlib (со стандартными настройками)

Для того чтобы использовать стиль оформления seaborn достаточно просто подключить этот модуль и далее работать с maplotlib.

import seaborn

Пакет seaborn не входит в стандартную библиотеку Python. Поэтому его придётся установить отдельно используя программу рір (поставляется вместе с Python)

pip.exe install seaborn

Ещё примеры и документация: matplotlib.org/tutorials/introductory/pyplot.html

### Outline

#### Введение

### Диаграммы и графики

### Векторизация функций

Двумерные графики Графики в изометрии Интерактивные графики

### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Ссылки и литература

Для построение трёхмерных графиков неудобно пользоватся скалярными функциями, вручную вычисляя значения для каждого значения аргумента.

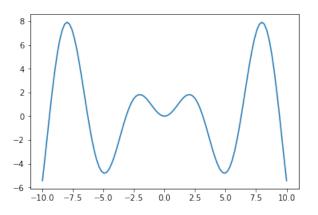
Класс vectorize пакета numpy может быть использован для "векторизации" функции. Такая функция может принимать в качестве параметра array и возвращать array.

```
from math import *
import numpy as np

def foo(x):
    return x*sin(x)

foo = np.vectorize(foo)
```

```
from math import *
from matplotlib.pyplot import *
import numpy as np
def foo(x):
    return x*sin(x)
foo = np.vectorize(foo)
# создание array из 100 точек отрезка [-10, 10]
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = foo(x)
plot(x,y)
show()
```



Вместо обычных функций можно использовать лямбда-функции

```
from math import *
import numpy as np

foo = np.vectorize(lambda x: x*sin(x))
```

### Outline

#### Введение

### Диаграммы и графики

Векторизация функций

### Двумерные графики

Графики в изометрии Интерактивные графики

### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

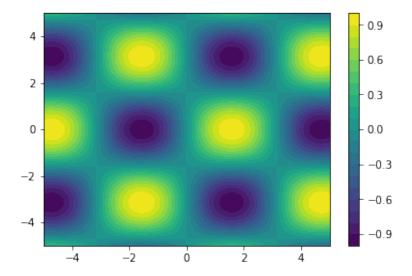
Диаграмма размаха

### Ссылки и литература

### Пример

Тепловая карта с линиями уровня

```
from matplotlib.pyplot import *
import numpy as np
from math import *
X = np.linspace(-5, 5, 100)
Y = np.linspace(-5, 5, 100)
# создание сетки (декартового произведения Х и У)
xx,yy = np.meshgrid(X, Y)
foo = np.vectorize(lambda x, y: sin(x)*cos(y))
zz = foo(xx,yy)
contourf(xx, yy, zz, 20)
colorbar()
show()
```



Ещё примеры:

jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/04.04-density-and-contour-plots.html

#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики

Графики в изометрии Интерактивные графики

## Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

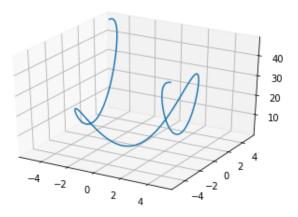
## Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

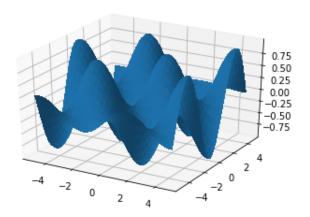
# Графики в изометрии

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = np.sin(x)*5
z = x**2 + y**2
ax.plot(x, y, z, antialiased=True)
plt.show()
```



# Графики в изометрии

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
X = np.arange(-5, 5, 0.25)
Y = np.arange(-5, 5, 0.25)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
foo = np.vectorize(lambda x, y: sin(x) * cos(y))
Z = foo(X,Y)
ax.plot_surface(X, Y, Z, antialiased=False)
                                     ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □ ♡٩@
plt.show()
```



# Графики в изометрии

Дополнительно можно раскрасить поверзность как тепловую карту, изобрасить сетку вместо поверзности и настроить друге параметры отображения.

Документации matplotlib с примерами: matplotlib.org/mpl\_toolkits/mplot3d/tutorial.html

#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

# Интерактивные графики

## Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

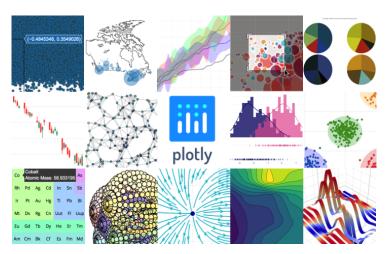
Минимизация функции Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

# plot.ly



plotly - модуль для создание интерактивных графиков.

Существуют версии для Python, R, Matlab

Графики представляют собой html фрейм с JavaScript (фреимворк D3.js).

Существуют два режима редима с графиками:

- оффлайн (график сохраняется как отдельный html файл)
- ▶ графики публикуются на сервере plot.ly

Для создания оффлаин-графиков нужно использовать отдельный модуль offline пакета plotly.

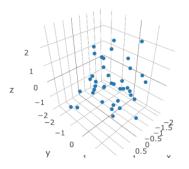
```
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
init_notebook_mode, plot, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter, Figure, Layout
import numpy as np

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.vectorize(lambda x: np.sin(x) * x )(x)
plot([Scatter(x=x, y=y)])
```

Будет создан отдельный html файл, который автоматически откроется вбраузере

```
Чтобы графики отображались в окне Jupyter следует явно это
указать
init notebook mode(connected=True)
и использовать функцию рисовани iplot вместо plot.
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
            init_notebook_mode, plot, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter, Figure, Layout
import numpy as np
init_notebook_mode(connected=True)
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.vectorize(lambda x: np.sin(x) * x )(x)
iplot([Scatter(x=x, y=y)])
                                      4□ > 4問 > 4 = > 4 = > = 900
```

```
Диаграмма рассеивания трёхмерной случайной величины
from plotly.offline import download_plotlyjs, \
       init_notebook_mode, iplot
from plotly.graph_objs import Scatter3d, Figure
import numpy as np
init_notebook_mode(connected=True)
# создание 3-х массивов заполненых 10 случайными значениями
x,y,z = np.random.uniform(size=(3, 10))
trace1 = Scatter3d(x=x, y=y, z=z, mode='markers', \
                   marker=dict(size=2))
data = [trace1]
fig = Figure(data=data)
iplot(fig)
```



#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии Интерактивные графики

## Линейная алгебра

#### Полиномы

Численные методь

Минимизация функции

Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

Матрица А - это двумерный массив (список), только в обёртке numpy.

```
# умножение на число
A * 3.14
> array([[ 3.14, 6.28, 9.42],
        [ 9.42, 6.28, 3.14],
        [6.28, 3.14, 9.42]
# Умножение на вектор
A * [2.3.4]
array([[ 2, 6, 12],
      [6, 6, 4].
      [4, 3, 12]
```

Причём здесь вектор не обязательно должен быть типом numpy.

```
# Сложение матриц
A + B
# Умножение матриц
A @ B
# unu
np.dot(A,B)
# Обратная матрица
np.linalg.inv(A)
```

#### Решение СЛАУ

```
# Настройка вывода. Число знаков после запятой - 4.
# не выводить числа в экспоненциальной форме
numpy.set_printoptions(precision=4, suppress=True)
A = np.matrix([
    [1, 2, 3],
    [3, 2, 1],
    [2, 3, 1])
B = np.matrix([[1], [2], [3]])
X = np.linalg.solve(A, B)
matrix([[ 0.0833].
        [ 1.0833].
        [-0.4167]
Стоит обратить внимание на то, что вектор-столбец
```

определяется как матрица из одного столбца, а не как список.

#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

## Линейная алгебра

#### Полиномы

Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

## Полиномы

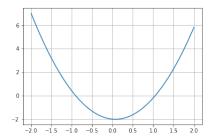
```
import numpy as np
# полнином одной переменной
p1 = np.poly1d([2.1, -0.3, -2])
print(p1)
# 2.1 x^2 - 0.3 x + 7
# вычисление значения полинома
p1(10) # 214.0
# \kappaорни полинома (p1 = 0)
p1.r
# [ 1.04993917 -0.90708203 ]
```

#### Полиномы

```
from matplotlib.pyplot import *

x = np.linspace(-2, 2, 100)
y = [p1(x) for x in x]

plot(x,y)
grid(True)
show()
```



#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики

Графики в изометрии Интерактивные графики

Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

# Линейная алгебра

#### Полиномы

Численные методы

Минимизация функции

Интерполяция

## Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

# Минимизация функции

```
from scipy.optimize import minimize
х0 = 100 # начальное значение
minimize(lambda x: return (x-3)*(x-3) - 5, x0)
Вывод:
   nfev: 12
   jac: array([ 0.])
   message: 'Optimization terminated successfully.'
   fun: -5.0
   success: True
   x: array([ 3.])
   njev: 4
   hess_inv: array([[ 0.5]])
   status: 0
Минимум функции: f(3) = -5
```

#### Введение

## Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

## Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции

#### Интерполяция

## Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

# Численные методы Интерполяция

**Интерполяция** - нахождение промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

## Сплайн

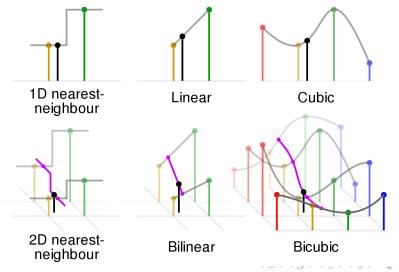
Сплайн (spline) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом).

Максимальная из степеней использованных полиномов называется **степенью сплайна**.

сплайн — это кусочно заданная функция

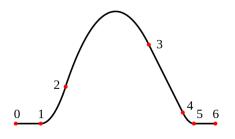
# Сплайн

Примеры интерполяции для отдельных участков.



# График кучочно заданной функции

Сплайн второй степени



- 0-1 Прямая
- 1-2 Парабола
- ▶ 2-3 Парабола
- 3-4 Прямая
- 4-5 Парабола
- 5-6 Прямая

# Интерполяция

Интерполяция функции одной переменной from scipy.interpolate import interp1d

Возможна интреполяция сплайном первой, второй и третей степени $^{1}$ 

- slinear
- quadratic
- cubic

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>см. другие способы в документации

# Интерполяция

Пусть функция задана в табличном виде - набором значения X и Y.

Задача - определить значение функции для X, не перечисленного в таблице.

Применем для этого интерполяцию, построив функцию в аналитическом виде, которая будет проходить наиболее близко к заданым точкам.

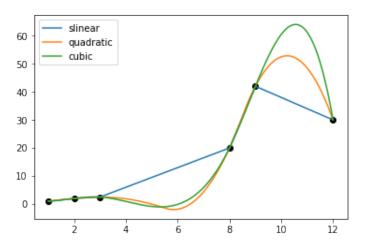
```
X = [1,2,3,4,5,6,7]
Y = [1,4,9,16,25,36,49]
func = interp1d(X, Y, kind='cubic')
func - функция определённая на отрезке от min(x) до max(x).
kind - тип интерполяции (см. справку)
В примере использована интерполяция сплайном третьего порядка.
```

from scipy.interpolate import interp1d

Теперь можно вычислять значение функции в любой точке. func(5.3)

```
# array(28.09000000000003)
```

```
# таблично заданная функция
X = [1,2, 3, 8, 9, 12]
Y = [1,2,2.5, 20, 42, 30]
# создание сплайнов
f1 = interp1d(X,Y,'slinear')
f2 = interp1d(X,Y,'quadratic')
f3 = interp1d(X,Y,'cubic')
# набор точек для интреполяции
XO = np.linspace(min(X), max(X), 1000)
Y1 = [f1(x) \text{ for } x \text{ in } X0]
Y2 = \lceil f2(x) \text{ for } x \text{ in } X0 \rceil
Y3 = [f3(x) \text{ for } x \text{ in } X0]
plot(X,Y, 'o', color='black')
plot(X0, Y1, label='slinear')
plot(X0, Y2, label='quadratic')
plot(X0, Y3, label='cubic')
legend(loc='best')
show()
```



# Пример 3

#### Интреполяция функции задающей поверхность

Примеры использования модуля interpolate: docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/tutorial/interpolate.html

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методь

Минимизация функции

Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

## Теория вероятностей и статистика

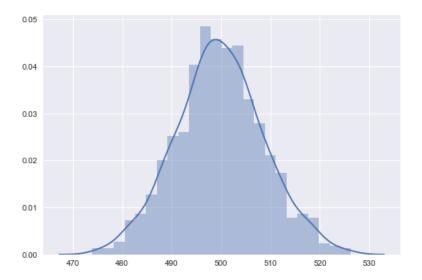
#### Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания Диаграмма размаха

# Гистограмма

```
from random import random
import seaborn
from matplotlib.pyplot import show
X = [ sum( [random() for i in range(1000)] )
                          for j in range(1000)]
# подготовим гистограмму и кривую распределения
seaborn.distplot(X)
show()
```

# Гистограмма



# Некоторые распределения

#### Распределения случайных величин

```
from scipy.stats import norm # нормальное распр.
from scipy.stats import f # распределение Фишера
from scipy.stats import t # распред. Стьюдента (t распред)
from scipy.stats import chi2 # распред. Хи-квадрат
from scipy.stats import poisson # распред. Пуассона
```

# Некоторые распределения

Работа с каждой из случанйх величин может быть организована с помощью методов

- rvs( size ) сгенерировать size случаных значений. может потребоватся указать параметры распределения.
- pdf(x) Probability density function at x
- cdf( x ) Cumulative distribution function
- ▶ isf ( p ) Inverse survival function

## Некоторые распределения

Вычислить вероятность того, что рост наугад выбранного человека будет меньше 180 см.
Средний рост людей 172 см.
Стандартное отклонение 7 см.

```
from scipy.stats import norm norm.cdf( (180 - 172) / 7 ) 0.87345104552644226
```

Сколько людей на Земле имеют рост меньше 180? norm.cdf( (180 - 172) / 7 ) \* 7.6e9 6 638 227 946

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

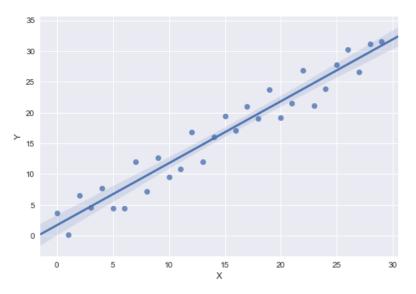
## Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

# Коэффициент корреляции

```
import seaborn # для визуализации
# Таблица для хранения стат. данных
from pandas import DataFrame
# поместим в таблицу как столбцы с заголовками Х и У
D = DataFrame( {'X':X, 'Y':Y} )
# Построим диаграмму рассеивания
seaborn.regplot(x='X', y='Y', data=D);
plt.show()
```

# Диаграмма рассеивания



#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций Двумерные графики Графики в изометрии

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методы

Минимизация функции Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

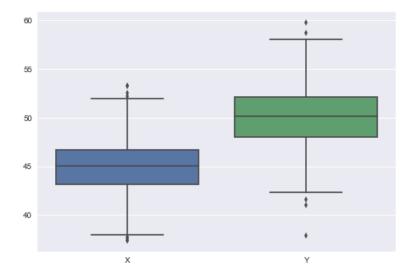
Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

# Диаграмма размаха ("Ящик с усами")

# Диаграмма размаха ("Ящик с усами")



O визуализации статистический данных и проверке гипотез с помощью Python: nahlogin.blogspot.ru/2016/01/pandas.html

#### Введение

#### Диаграммы и графики

Векторизация функций

Двумерные графики

Графики в изометрии

Интерактивные графики

#### Линейная алгебра

#### Полиномы

#### Численные методь

Минимизация функции

Интерполяция

#### Теория вероятностей и статистика

Гистограмма

Корреляция и диаграмма рассеивания

Диаграмма размаха

- Numerical methods in engineering with Python 3 / Jaan Kiusalaas.
- try.jupyter.org
- ► Как использовать Jupyter (ipython-notebook) на 100%

# Ссылки и литература

Ссылка на слайды

github.com/VetrovSV/Programming