

# Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций

Надёжность

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

# План

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Outline

## Марка и класс бетона

### Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

### Надёжность системы

### Дерево отказов и дерево событий

### Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

### Ветровые и снеговые нагрузки

### Метод экспертных оценок

### Вопросы

### Справочные сведения

### Ссылки

- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в  $\text{кг/см}^2$ .  
Обозначение М100 - образец<sup>1</sup> бетона выдерживает давление  $100 \text{ кг/см}^2$
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов

---

<sup>1</sup>кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

# Бетон

## Марка

- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в  $\text{кг/см}^2$ .  
Обозначение М100 - образец<sup>1</sup> бетона выдерживает давление  $100 \text{ кг/см}^2$
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов
- ▶ Проблема?

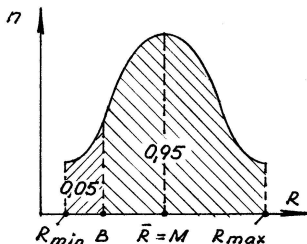
---

<sup>1</sup>кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

# Бетон

## Проблема марки

- ▶ Прочность на сжатие бетона - случайная величина распределённая по закону, близкому<sup>2</sup> к закону нормального распределения
- ▶ Поэтому бетон марки, например М100 выдержит нагрузку в  $100 \text{ кг/см}^2$  с вероятностью 0.5



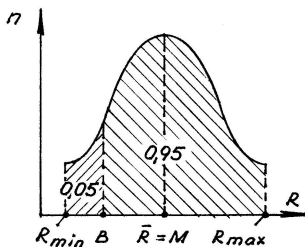
Распределение прочностной. Половина образцов имеет прочность больше \_\_\_\_\_ средней (справа от  $\bar{M}$ ), другая половина - меньше.

<sup>2</sup>у нормального закона хвосты кривой тянутся до бесконечности, на практике же такое невозможно

# Бетон

## Класс бетона

- ▶ **Класс бетона В** — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной обеспеченностью (доверительной вероятностью) 0,95
- ▶ Это означает, что образец выдержит нагрузку указанную в классе с вероятностью (обеспеченностью) 0.95
- ▶ Класс бетона занижает ожидаемую прочность, чтобы обеспечить запас прочности



# Бетон

## Перевод марки в класс

Переведём марку М100 в класс.

▶  $\text{кг/см}^2 \rightarrow \text{МПа}$

$$100 \cdot g \cdot 10000 = 9806650 \text{Па} = 9.806650 \text{МПа}$$

▶ Вычисление класса

$$B = M_{\text{МПа}} - \sigma \cdot 1.64$$

- ▶ Стандартное отклонение  $\sigma$  прочности бетона на сжатие определяют используя коэффициент вариации  $\nu = 0.135$
- ▶  $\sigma = \nu \cdot M_{\text{МПа}}$
- ▶  $F(1.64) = 0.05$ , где  $F$  - функция нормального распределения
- ▶ Подставляя формулу для  $\sigma$  и вынося  $M_{\text{МПа}}$  за скобку получим:

$$B = M_{\text{МПа}}(1 - 1.64\nu)$$



# Outline

Марка и класс бетона

## Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Теория надёжности

**Теория надёжности** - наука изучающая закономерности отказов технических объектов

- ▶ критерии и показатели надёжности
- ▶ метода анализа и синтеза по критериям надёжности
- ▶ методы обеспечения и повышения надёжности
- ▶ методы эксплуатации обеспечивающие надёжность

# Теория надёжности

**Надёжность** - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в течение заданного срока с заданной вероятностью  $P$ .

**Начальная надёжность** - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в начальный период эксплуатации

**Отказ** - случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта. Вероятность отказа:  $Q = 1 - P$


**Долговечность** - свойство сохранять работоспособность в течение определенного времени  $T$

## **Долговечность vs надёжность**

Долговечность определяется временем безотказной работы, а надёжность вероятностью безотказной работы в течении заданного времени.

- ▶ Традиционный подход к определению (обеспечение) надёжности (надёжно не надёжно) подразумевает использование коэффициентов запаса (коэффициентов перегрузки) обеспечивающих резерв несущей способности.
- ▶ Такой подход называется **детерминированным**
- ▶ **Вероятностный подход** подразумевает, что величины влияющие на надёжность - случайны<sup>3</sup>
- ▶ Определения или обеспечение надёжности основывается на знании числовых характеристик этих случайных величин и их функций распределения

---

<sup>3</sup> даже если принимают значения в узких диапазонах 

# Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаться неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \quad (1)$$

где  $S_i$  - воздействие на рассчитываемый элемент  $i$ -ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)

$A$  - геометрическая характеристика сечения

$[\sigma]$  - допускаемое напряжение в элементе

# Расчет по допускаемым напряжениям

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 1 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где  $\gamma_i$  – коэффициент надёжности по нагрузке  
 $\gamma_R$  – коэффициенты надёжности по материалам

# Расчет по предельным состояниям

**Предельное состояние** – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- ▶ используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- ▶ учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ▶ ...



# Предельные состояния

- ▶ **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- ▶ **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

# Предельные состояния

## Первое предельное состояние



изображение с сайта

[lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states](http://lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states)

# Предельные состояния

## Первое предельное состояние



изображение с сайта

[lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states](http://lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states)

# Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

$N_{max}$  - фактор характеризующий нагрузку

Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, ...

$N$  - нормативное значение соответствующего  $N_{max}$  фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode

# Outline

Марка и класс бетона

**Надёжность**

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

## Характеристика безотказности по Ржаницкому

Запишем выражение со слайда 19 как разность факторов:

$$g = R - L$$

- ▶  $R$  - сопротивление (несущая способность)
- ▶  $L$  - воздействие (нагрузочный эффект)
- ▶  $R$  и  $L$  - случайные величины<sup>4</sup>
- ▶  $g$  - характеристика безопасности - случайная величина
- ▶  $R$  и  $L$  - принимают конкретный вид в зависимости от исследуемой задачи

Вероятность безотказной работы

$$P = P(g > 0)$$

---

<sup>4</sup>распределения конкретных случайных величин определяющих  $R$  и  $L$  часто близки к нормальному распределению

## Характеристика безотказности по Ржаницкому

- ▶ Чтобы определить вероятность безотказной работы требуется знать распределение резерва несущей способности  $g$
- ▶ Функцию распределения  $g$  часто считают близкой к функции нормального распределения<sup>5</sup>.
- ▶ Далее для определения вероятности безотказной работы используют индекс надёжности:

$$\beta = \frac{\bar{g}}{\sigma_g}$$

- ▶  $\bar{g}$  - среднее значение резерва несущей способности
- ▶  $\sigma_g$  - стандартное отклонение резерва несущей способности
- ▶ Среднее значение и стандартного отклонение обычно вычисляют для линейной аппроксимации функции  $g$ <sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>если известны функции плотностей  $R$  и  $L$  то функцию распределения можно получить аналитически

<sup>6</sup>см. линеаризацию функции случайных аргументов

# Характеристика безотказности

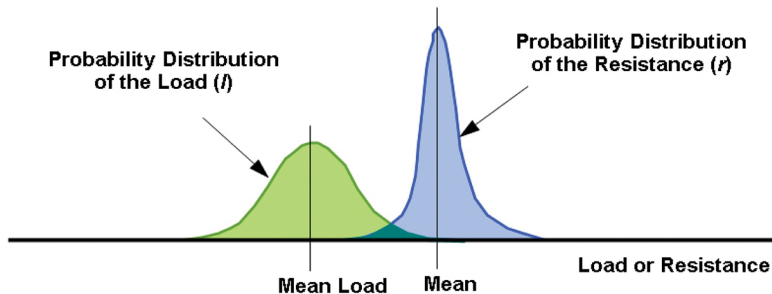
- ▶ Наконец используя вместо резерва несущей способности  $g$  индекс надёжности  $\beta$  для определения вероятности безотказной работы

$$P = P(\beta > 0)$$

- ▶ Как представить графически вероятность безотказной работы?
- ▶ Как связать вероятность безотказной работы и функцию Лапласа  $\Phi_0$ ?



# Характеристика безотказности



# Характеристика безотказности по Ржаницкому

Что дальше?

- ▶ **Обратная задача:** Для известного нагрузочного эффекта и сопротивления, с известными средними значениями и стандартными отклонениями величин определяется вероятность безотказной работы (надёжность)
- ▶ **Прямая задача:** определяются значения от которых зависит сопротивление для обеспечения заданной надёжности

# Характеристика безотказности по Ржаницкому

Какую надёжность выбрать?

- ▶ Стремление к абсолютной надёжности, то есть к  $P = 1$  не экономично
- ▶ потому, что  $g$  в этом случае должно быть очень велико, а значит велика и несущая способность  $R$
- ▶ С другой стороны низкая надёжность недопустима
- ▶ Как правило выбирают надёжность соответствующую отступу от  $\bar{g}$  вправо на  $3 \sigma_g$

# Outline

Марка и класс бетона

## Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Характеристика безотказности по Ржаницкому

## Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением  $F = 100$  кН. Средний предел текучести стержня  $\bar{R}_y - 230$  МПа.

Площадь поперечного сечения стержня -  $5.36$  см<sup>2</sup>

Если известны стандартное отклонение предела текучести  $R_y - 10$  МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

---

<sup>7</sup> деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

# Характеристика безотказности по Ржаницкому

## Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением  $F = 100$  кН. Средний предел текучести стержня  $\bar{R}_y = 230$  МПа.

Площадь поперечного сечения стержня -  $5.36$  см<sup>2</sup>

Если известны стандартное отклонение предела текучести  $R_y = 10$  МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

- ▶ Определим выражения для  $R$  - сопротивления и  $L$  - нагрузочного эффекта.
- ▶  $R = R_y \cdot A$
- ▶  $L = F$
- ▶ Определим резерв несущей способности как функцию случайной величины<sup>7</sup>:

$$g(R_y) = \bar{R}_y \cdot A / 10 - F$$

---

<sup>7</sup> деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

# Характеристика безотказности по Ржаницкому

## Пример

- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Функция  $g$  линейна<sup>8</sup> относительно  $R_y$  и  $F$ , поэтому используем следующие выражения для среднего значения и дисперсии:
- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Стандартное отклонение резерва несущей способности<sup>9</sup>:

$$S_g^2 = \left( \frac{dg}{dR_y} \right)^2 \cdot S_{R_y}^2$$

---

<sup>8</sup>если функция не линейна, то можно считать, её линейной на рассматриваемом участке (требуется проверка)

<sup>9</sup>см. формулу для дисперсии линеаризованной функции случайной величины

# Характеристика безотказности по Ржаницкому

## Пример

- ▶ Определим индекс надёжности  $\beta = \frac{\bar{g}}{S_g}$
- ▶ Определим вероятность безотказной работы  
 $P = P(\beta > 0) = 1 - F(\beta)$ ,  
где  $F(\beta)$  - функция стандартного нормального распределения
- ▶ Определив вероятность безотказной работы можно сделать вывод о надёжности и экономичности:
  - ▶ Если  $P$  меньше требуемого уровня надёжности, то конструкция ненадёжна
  - ▶ Если  $P$  сильно больше требуемого уровня надёжности, то конструкция не экономична  
Например надёжность 0.99999 требует избыточной прочности



# Характеристика безотказности по Ржаницкому

## Пример

Какое поперечное сечение стержня нужно выбрать чтобы добиться надёжности 0.99865?

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

**Надёжность системы**

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Надёжность системы

- ▶ При определении надёжности системы рассматриваются возможные сценарии разрешения её элементов приводящие к отказу
- ▶ Для определения вероятности безотказной работы используются теоремы о умножении и сложении вероятностей
- ▶  $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- ▶  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$

# Последовательное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором отказ одного элемента ведёт к отказу системы в целом

$$P = \prod P_i = \prod (1 - Q_i)$$

где  $P_i$ ,  $Q_i$  - надёжность и вероятность отказа соответственно для  $i$ -го элемента

При таком соединении надёжность идеальной системы всегда меньше надёжности самого слабого элемента

## Параллельное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором только отказ всех элементов системы ведёт к отказу системы в целом.

$$P = 1 - \prod Q_i = 1 - \prod (1 - P_i)$$

где  $P_i$ ,  $Q_i$  - надёжность и вероятность отказа соответственно для  $i$ -го элемента

При таком соединении надёжность системы всегда выше надёжности самого надёжного элемента

# Параллельное соединение элементов

## Замечание

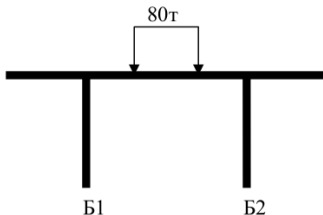
- ▶ Стоит учитывать что если один или несколько элементов системы вышли из строя, то надёжность остальных элементов системы может снижаться
- ▶ В этом случае рассматриваются различные варианты разрешения системы:
- ▶ когда все элементы выходят из строя
- ▶ когда из строя выходят один или несколько элементов системы

## Пример

На пролетное строение моста, имеющее в поперечном сечении две главных балки, действует нагрузка.

- ▶ Обеспеченность (надежность) несущей способности каждой балки в размере 400 кН равна  $P = 0.9$ .
- ▶ Обеспеченность несущей способности в размере 800 кН равна  $P = 0.6$ .

Определить надежность системы



Пример из учебного пособия "Основы надежности транспортных сооружений МАДИ, 2008

# Пример

## Решение

- ▶ Это система с параллельным соединением элементов
- ▶ Рассмотрим два сценария разрушения системы:
- ▶ 1. Балки разрушаются одновременно
- ▶ 2. Разрушается сначала одна, потом другая балка (разрушение Б1, Б2; разрушение Б2, Б1)
- ▶ Вероятность отказа всей системы  $Q$  будет складываться из вероятностей отказа случая 1 и 2



# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

**Метод Монте-Карло**

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Метод Монте-Карло



# Метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

# Метод Монте-Карло

- ▶ В процессе решения задачи можно "разыгрывать" исходные данные или случайные события
- ▶ Например можно задать значения случайных величин используя генератор случайных чисел
- ▶ Такое решение задачи, со случайностью, не надёжно. Поэтому оно повторяется множество раз
- ▶ Окончательный ответ получается путём "суммирования" множества ответов

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Расчёт надёжности методом статистических испытаний

## Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со средним значением  $\bar{F} = 100$  кН. Средний предел текучести стержня  $\bar{R}_y - 230$  МПа. Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см<sup>2</sup>. Если известны стандартные отклонения нагрузки  $F - 10$  кН и предела текучести  $R_y - 10$  МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

Решение на Python: [github.com/VetrovSV/ST/blob/master/python-examples/Monte-Carlo.ipynb](https://github.com/VetrovSV/ST/blob/master/python-examples/Monte-Carlo.ipynb)

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки



## Снеговые нагрузки

- ▶ нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия

$$S_0 = 0.7c_e c_t \mu S_g$$

- ▶  $c_e$  – коэффициент, учитывающий снос снега с покрытий зданий под действием ветра или иных факторов
- ▶  $c_t$  – термический коэффициент
- ▶  $\mu$  – коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие
- ▶  $S_g$  – вес снегового покрова на 1 м<sup>2</sup> горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ

# Снеговые нагрузки



# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

# Вопросы

- ▶ Возможно ли добиться вероятности безотказной работы равной единице?

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Разброс нагрузок от собственного веса конструкций:  
коэффициент вариации от 0.02 до 0.03
- ▶ Нормативная прочность обычно принимается с  
обеспеченностью  $P = 0.95$  ( $R_n = R1.65\sigma_R$ )
- ▶ Расчетная - 0.9986 ( $R_{расч} = R - 3\sigma_R$ )  
Коэффициенты вариации
  - ▶ для стали – 0.03...0.05;
  - ▶ для бетона – 0.10...0.15.

# Коэффициенты запаса

- ▶ для нагрузки

$$\gamma_F = \frac{F}{F + 3\sigma_F}$$

- ▶ для сопротивления

$$\gamma_R = \frac{R}{R - 3\sigma_R}$$



## Средние периоды повторяемости

- ▶ Для снеговой нагрузки - 50 лет
- ▶ Для ветровой нагрузки - 50 лет <sup>10</sup>

# Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Пшеничкина, В. А. Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков  
[http://vgasu.ru/attachments/oi\\_pshenichkina-03.pdf](http://vgasu.ru/attachments/oi_pshenichkina-03.pdf)
- ▶ Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко.

- ▶ [jupyter.org/try](https://jupyter.org/try) - Jupyter Online  
Выбрать Try Jupyter with Python

Материалы курса

[github.com/VetrovSV/ST](https://github.com/VetrovSV/ST)