

Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций

Надёжность

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

План

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Бетон

Марка

- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в кг/см^2 .
Обозначение М100 - образец¹ бетона выдерживает давление 100 кг/см^2
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов

¹кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

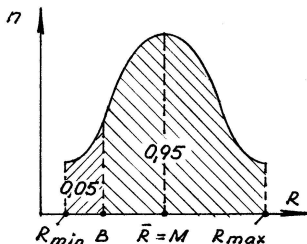
- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в кг/см^2 .
Обозначение М100 - образец¹ бетона выдерживает давление 100 кг/см^2
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов
- ▶ Проблема?

¹кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

Бетон

Проблема марки

- ▶ Прочность на сжатие бетона - случайная величина распределённая по закону, близкому² к закону нормального распределения
- ▶ Поэтому бетон марки, например М100 выдержит нагрузку в 100 кг/см^2 с вероятностью 0.5



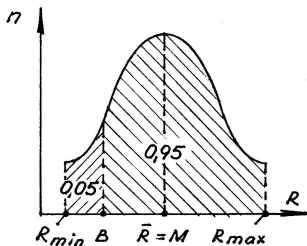
Распределение прочностной. Половина образцов имеет прочность больше _____ средней (справа от M), другая половина - меньше.

²у нормального закона хвосты кривой тянутся до бесконечности, на практике же такое невозможно

Бетон

Класс бетона

- ▶ **Класс бетона В** — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной обеспеченностью (доверительной вероятностью) 0,95
- ▶ Это означает, что образец выдержит нагрузку указанную в классе с вероятностью (обеспеченностью) 0.95
- ▶ Класс бетона занижает ожидаемую прочность, чтобы обеспечить запас прочности



Бетон

Перевод марки в класс

Переведём марку М100 в класс.

▶ $\text{кг/см}^2 \rightarrow \text{МПа}$

$$100 \cdot g \cdot 10000 = 9806650 \text{Па} = 9.806650 \text{МПа}$$

- ▶ Вычисление класса

$$B = M_{\text{МПа}} - \sigma \cdot 1.64$$

- ▶ Стандартное отклонение σ прочности бетона на сжатие определяют используя коэффициент вариации $\nu = 0.135$
- ▶ $\sigma = \nu \cdot M_{\text{МПа}}$
- ▶ $F(1.64) = 0.05$, где F - функция нормального распределения
- ▶ Подставляя формулу для σ и вынося $M_{\text{МПа}}$ за скобку получим:

$$B = M_{\text{МПа}}(1 - 1.64\nu)$$

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Теория надёжности

Теория надёжности - наука изучающая закономерности отказов технических объектов

- ▶ критерии и показатели надёжности
- ▶ метода анализа и синтеза по критериям надёжности
- ▶ методы обеспечения и повышения надёжности
- ▶ методы эксплуатации обеспечивающие надёжность

Теория надёжности

Надёжность - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в течение заданного срока с заданной вероятностью P .

Начальная надёжность - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в начальный период эксплуатации


Отказ - случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта. Вероятность отказа: $Q = 1 - P$

Долговечность - свойство сохранять работоспособность в течение определенного времени T

Долговечность vs надёжность

Долговечность определяется временем безотказной работы, а надёжность вероятностью безотказной работы в течении заданного времени.

- ▶ Традиционный подход к определению (обеспечение) надёжности (надёжно не надёжно) подразумевает использование коэффициентов запаса (коэффициентов перегрузки) обеспечивающих резерв несущей способности.
- ▶ Такой подход называется **детерминированным**
- ▶ **Вероятностный подход** подразумевает, что величины влияющие на надёжность - случайны³
- ▶ Определения или обеспечение надёжности основывается на знании числовых характеристик этих случайных величин и их функций распределения

³ даже если принимают значения в узких диапазонах 

Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаться неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \quad (1)$$

где S_i - воздействие на рассчитываемый элемент i -ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)

A - геометрическая характеристика сечения

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение в элементе

Расчет по допускаемым напряжениям

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 1 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где γ_i – коэффициент надёжности по нагрузке
 γ_R – коэффициенты надёжности по материалам

Расчет по предельным состояниям

Предельное состояние – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- ▶ используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- ▶ учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ▶ ...

Предельные состояния

- ▶ **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- ▶ **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

N_{max} - фактор характеризующий нагрузку

Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, ...

N - нормативное значение соответствующего N_{max} фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Запишем выражение со слайда 19 как разность факторов:

$$g = R - L$$

- ▶ R - сопротивление (несущая способность)
- ▶ L - воздействие (нагрузочный эффект)
- ▶ R и L - случайные величины⁴
- ▶ g - характеристика безопасности - случайная величина
- ▶ R и L - принимают конкретный вид в зависимости от исследуемой задачи

Вероятность безотказной работы

$$P = P(g > 0)$$

⁴распределения конкретных случайных величин определяющих R и L часто близки к нормальному распределению

Надёжность

- ▶ Чтобы определить вероятность безотказной работы требуется знать распределение резерва несущей способности g
- ▶ Функцию распределения g часто считают близкой к функции нормального распределения⁵.
- ▶ Далее для определения вероятности безотказной работы используют индекс надёжности:

$$\beta = \frac{\bar{g}}{\sigma_g}$$

- ▶ \bar{g} - среднее значение резерва несущей способности
- ▶ σ_g - стандартное отклонение резерва несущей способности
- ▶ Среднее значение и стандартного отклонение обычно вычисляют для линейной аппроксимации функции g ⁶

⁵если известны функции плотностей R и L то функцию распределения можно получить аналитически

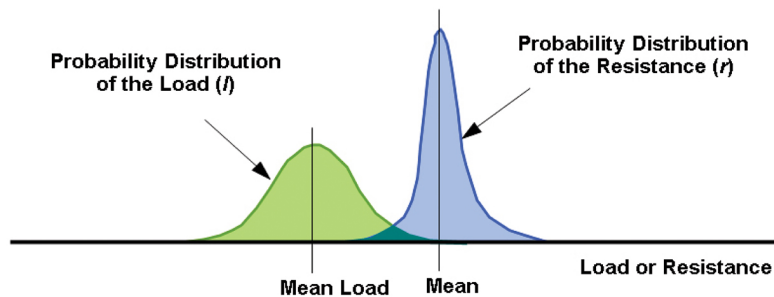
⁶см. линеаризацию функции случайных аргументов

- ▶ Наконец используя вместо резерва несущей способности g индекс надёжности β для определения вероятности безотказной работы

$$P = P(\beta > 0)$$

- ▶ Как представить графически вероятность безотказной работы?
- ▶ Как связать вероятность безотказной работы и функцию Лапласа Φ_0 ?

Надёжность



Надёжность

Что дальше?

- ▶ **Обратная задача:** Для известного нагрузочного эффекта и сопротивления, с известными средними значениями и стандартными отклонениями величин определяется вероятность безотказной работы (надёжность)
- ▶ **Прямая задача:** определяются значения от которых зависит сопротивление для обеспечения заданной надёжности

Надёжность

Какую надёжность выбрать?

- ▶ Стремление к абсолютной надёжности, то есть к $P = 1$ не экономично
- ▶ потому, что g в этом случае должно быть очень велико, а значит велика и несущая способность R
- ▶ С другой стороны низкая надёжность недопустима
- ▶ Как правило выбирают надёжность соответствующую отступу от \bar{g} вправо на $3 \sigma_g$

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Надёжность

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением $F = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа.

Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см²

Если известны стандартное отклонение предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

⁷ деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

Надёжность

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением $F = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа.

Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см²

Если известны стандартное отклонение предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

- ▶ Определим выражения для R - сопротивления и L - нагрузочного эффекта.
- ▶ $R = R_y \cdot A$
- ▶ $L = F$
- ▶ Определим резерв несущей способности как функцию случайной величины⁷:

$$g(R_y) = \bar{R}_y \cdot A / 10 - F$$

⁷деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

Надёжность

Пример

- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Функция g линейна⁸ относительно R_y и F , поэтому используем следующие выражения для среднего значения и дисперсии:
- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Стандартное отклонение резерва несущей способности⁹:

$$S_g^2 = \left(\frac{dg}{dR_y} \right)^2 \cdot S_{R_y}^2$$

⁸если функция не линейна, то можно считать, её линейной на рассматриваемом участке (требуется проверка)

⁹см. формулу для дисперсии линеаризованной функции случайной величины

Надёжность

Пример

- ▶ Определим индекс надёжности $\beta = \frac{\bar{g}}{S_g}$
- ▶ Определим вероятность безотказной работы $P = P(\beta > 0) = 1 - F(\beta)$,
где $F(\beta)$ - функция стандартного нормального распределения
- ▶ Определив вероятность безотказной работы можно сделать вывод о надёжности и экономичности:
 - ▶ Если P меньше требуемого уровня надёжности, то конструкция ненадёжна
 - ▶ Если P сильно больше требуемого уровня надёжности, то конструкция не экономична
Например надёжность 0.99999 требует избыточной прочности

Надёжность

Пример

Какое поперечное сечение стержня нужно выбрать чтобы добиться надёжности 0.99865?

Надёжность

Пример 2

Начальная надёжность элементов строительных конструкций:
методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск:
Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 23 с

Надёжность

Пример 2

Начальная надёжность железобетонной балки: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.- строит. ун-та, 2014. – 23 с.

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Надёжность системы

- ▶ При определении надёжности системы рассматриваются возможные сценарии разрешения её элементов приводящие к отказу
- ▶ Для определения вероятности безотказной работы используются теоремы о умножении и сложении вероятностей
- ▶ $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- ▶ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Последовательное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором отказ одного элемента ведёт к отказу системы в целом

$$P = \prod P_i = \prod (1 - Q_i)$$

где P_i , Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i -го элемента

При таком соединении надёжность идеальной системы всегда меньше надёжности самого слабого элемента

Параллельное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором только отказ всех элементов системы ведёт к отказу системы в целом.

$$P = 1 - \prod Q_i = 1 - \prod (1 - P_i)$$

где P_i , Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i -го элемента

При таком соединении надёжность системы всегда выше надёжности самого надёжного элемента

Параллельное соединение элементов

Замечание

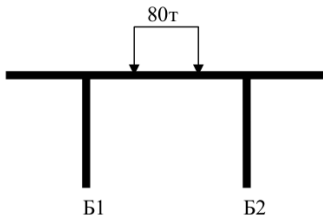
- ▶ Стоит учитывать что если один или несколько элементов системы вышли из строя, то надёжность остальных элементов системы может снижаться
- ▶ В этом случае рассматриваются различные варианты разрешения системы:
- ▶ когда все элементы выходят из строя
- ▶ когда из строя выходят один или несколько элементов системы

Пример

На пролетное строение моста, имеющее в поперечном сечении две главных балки, действует нагрузка.

- ▶ Обеспеченность (надежность) несущей способности каждой балки в размере 400 кН равна $P = 0.9$.
- ▶ Обеспеченность несущей способности в размере 800 кН равна $P = 0.6$.

Определить надежность системы



Пример из учебного пособия "Основы надежности транспортных сооружений МАДИ, 2008

Пример

Решение

- ▶ Это система с параллельным соединением элементов
- ▶ Рассмотрим два сценария разрушения системы:
- ▶ 1. Балки разрушаются одновременно
- ▶ 2. Разрушается сначала одна, потом другая балка (разрушение Б1, Б2; разрушение Б2, Б1)
- ▶ Вероятность отказа всей системы Q будет складываться из вероятностей отказа случая 1 и 2

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Метод Монте-Карло



Метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

Метод Монте-Карло

- ▶ В процессе решения задачи можно "разыгрывать" исходные данные или случайные события
- ▶ Например можно задать значения случайных величин используя генератор случайных чисел
- ▶ Такое решение задачи, со случайностью, не надёжно. Поэтому оно повторяется множество раз
- ▶ Окончательный ответ получается путём "суммирования" множества ответов

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со средним значением $\bar{F} = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа. Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см². Если известны стандартные отклонения нагрузки $F - 10$ кН и предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

Решение на Python: github.com/VetrovSV/ST/blob/master/python-examples/Monte-Carlo.ipynb

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Снеговые нагрузки

- ▶ нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия

$$S_0 = 0.7c_e c_t \mu S_g$$

- ▶ c_e – коэффициент, учитывающий снос снега с покрытий зданий под действием ветра или иных факторов
- ▶ c_t – термический коэффициент
- ▶ μ – коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие
- ▶ S_g – вес снегового покрова на 1 м² горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ

Снеговые нагрузки



Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Вопросы

- ▶ Возможно ли добиться вероятности безотказной работы равной единице?

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Разброс нагрузок от собственного веса конструкций:
коэффициент вариации от 0.02 до 0.03
- ▶ Нормативная прочность обычно принимается с
обеспеченностью $P = 0.95$ ($R_n = R1.65\sigma_R$)
- ▶ Расчетная - 0.9986 ($R_{расч} = R - 3\sigma_R$)
Коэффициенты вариации
 - ▶ для стали – 0.03...0.05;
 - ▶ для бетона – 0.10...0.15.

Коэффициенты запаса

- ▶ для нагрузки

$$\gamma_F = \frac{F}{F + 3\sigma_F}$$

- ▶ для сопротивления

$$\gamma_R = \frac{R}{R - 3\sigma_R}$$

Средние периоды повторяемости

- ▶ Для снеговой нагрузки - 50 лет
- ▶ Для ветровой нагрузки - 50 лет¹⁰

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Пшеничкина, В. А. Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков
http://vgasu.ru/attachments/oi_pshenichkina-03.pdf
- ▶ Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко.

- ▶ jupyter.org/try - Jupyter Online
Выбрать Try Jupyter with Python

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST