Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

Начальная надёжность элементов строительных конструкций

Методические указания
к выполнению расчётно-графической работы

Составитель Р.П. Моисеенко

Томск 2014

Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 23 с.

Рецензент д.ф.-м. н., профессор кафедры «Строительная механика» В.Н. Барашков
Редактор к.т.н., доцент кафедры «Строительная механика» И.Ю. Смолина

Методические указания к расчётно-графической работе по дисциплине С2.Б.15 «Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций» составлены для студентов, обучающихся по направлению 270000 «Строительство», специальность 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений», специализация № 1 «Строительство высотных и большепролётных зданий и сооружений».

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры «Строительная механика».
Протокол № 2 от 31.10.2013.

Срок действия с 01.09.2014
до 01.09.2019

Оригинал-макет подготовлен составителем
Р.П. Моисеенко.

Подписано в печать 27.03.14
Формат 60×90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л.1. Тираж 40 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г.Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены для студентов направления подготовки специалистов 270000 «Строительство», специальность 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений», специализация № 1 «Строительство высотных и большепролётных зданий и сооружений», выполняющих расчётно-графическую работу по дисциплине С2.Б.15 «Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций».

В указаниях излагаются основные понятия теории надёжности и теоретические основы для вычисления показателей надёжности. На примере металлического разрезного прогона проведён сравнительный анализ результатов расчёта надёжности аналитическим и статистическим методами. Показана последовательность обработки статистических данных для определения средних значений и дисперсии случайных величин.

В процессе выполнения расчётно-графической работы формируются следующие компетенции, предусмотренные Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС-):

ОК-1: Способность представлять современную целостную картину мира на основе системы естественнонаучных и математических знаний, ориентироваться в ценностях бытия, жизни, культуры;

ОК-7: Владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, критическому осмыслению, систематизации, прогнозированию, умение анализировать логику рассуждений и высказываний;

ПК-5: Использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПСК-1.4: Владение основными вероятностными методами строительной механики и теории надёжности строительных конструкций, необходимые для проектирования и расчёта высотных и большепролётных зданий и сооружений.

Выполнение расчётно-графической работы позволяет студенту

знать: основные методы расчёта надёжности строительных конструкций;

уметь: грамотно составить расчётную схему сооружения, выбрать наиболее рациональный метод расчёта надёжности, обеспечив при этом необходимую прочность и жёсткость элементов с учётом реальных свойств строительных материалов;

владеть: навыками использования практических приёмов и методов расчёта надёжности реальных строительных конструкций.

1. Основные определения.

1.*Начальная надёжность* – это способность элемента сохранять свои технические параметры в заданных условиях в начальный период эксплуатации. Продолжительность начального периода зависит от многих факторов: величины расчётных коэффициентов запаса; качество изготовления; качество материалов; продолжительность и частота невыгодного сочетания нагрузок и т.п.

Начальная надёжность выражается безразмерной величиной, которая называется *вероятность безотказной работы элемента* P_s. Вероятность изменяется в пределах $0 \le P_s \le 1$.

2. *Надёжность имеет противоположное понятие – отказ*, т.е. событие, при котором нарушаются функциональные качества элемента. Вероятность отказа определяется по формуле $Q = 1 - P_s$.

3. *Резерв несущей способности*. В математическом смысле начальная надёжность выражается вероятностью выполнения условий прочности или устойчивости. Условие прочности $L \le R$ (или устойчивости) представляется в виде

$$L \le R \to g = R - L > 0,$$

где g – резерв несущей способности; R – сопротивление; L – нагрузочный эффект.

Тогда вероятность безотказной работы элемента равна вероятности выполнения условия $g > 0$, т.е. $P_s = P(g > 0)$. Чтобы вычислить $P(g > 0)$, необходимо знать функцию распределения вероятностей $F(g)$.

4. *Функция распределения вероятностей* для непрерывных случайных величин определяется по формуле

$$F(g) = \int_{-\infty}^{g} f(g)dg,$$

где $f(g)$ – функция плотности распределения вероятности.

5. *Нормальный закон распределения вероятностей* наиболее часто применяется в расчётах надёжности строительных конструкций. Нормальная функция распределения вероятностей записывается в виде

$$F(g)=\frac{1}{S_g\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{g} e^{-\frac{(g-\bar{g})^2}{2S_g^2}}\,dg\,.$$

Для взятия интеграла используется подстановка $t=\dfrac{g-\bar{g}}{S_g}$.

Тогда нормальная функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(g)=0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{g-\bar{g}}{S_g}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,.$$

6. *Вероятность отказа при нормальной функции распределения.* По определению вероятность отказа равна $Q=F(g=0)$. При подстановке g = 0 в функцию распределения вероятностей получается

$$Q=F(g=0)=0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{0-\bar{g}}{S_g}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=0{,}5-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=$$
$$=0{,}5-\Phi(\beta)\,,$$

где $\beta=\dfrac{\bar{g}}{S_g}$ – индекс надёжности;

$\Phi(\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – интеграл Лапласа (величина интеграла определяется по соответствующей таблице в зависимости от β).

Вероятность выполнения условия прочности равна

$$P_s = 1 - Q = 1 - \left(0{,}5 - \Phi(\beta)\right) = 0{,}5 + \Phi(\beta).$$

7. *Индекс надёжности* определяется по формуле

$$\beta = \frac{\bar{g}}{S_g},$$

где $\bar{g} = \bar{R} - \bar{L}$; $S_g = \sqrt{S_g^2}$; $S_g^2 = S_R^2 + S_L^2$.

8. *Исходные случайные величины для расчёта начальной надёжности элемента*. В соответствии с формулами пункта 7 исходными случайными величинами являются: R – сопротивление и L – нагрузочный эффект. Сопротивление R зависит от прочности материала, и как случайная величина имеет две числовые характеристики: среднее значение $\bar{R}$ и среднеквадратичное отклонение S_R. Нагрузочный эффект L, зависящий от нагрузки и геометрических размеров, также характеризуется двумя величинами: среднее значение $\bar{L}$ и среднеквадратичное отклонение S_L.

9. *Определение числовых характеристик случайных величин*. Числовые характеристики $\bar{R}$, S_R, $\bar{L}$, S_L определяются в результате обработки выборки экспериментальных данных по формулам математической статистики.

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i; \quad S_R^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2; \quad S_R = \sqrt{S_R^2}.$$

Если геометрические размеры принимаются постоянными величинами, то числовые характеристики нагрузочного эффекта заменяются числовыми характеристиками нагрузки $\bar{q}$, S_q.

2. Постановка задачи.

Рассчитать начальную надёжность металлического разрезного прогона (см. рис. 1).

Дано: d = 3 м, l = 6 м, R_y = 230 МПа, постоянная расчётная нагрузка p = 1,14 кН/м^2, снеговая расчётная нагрузка s_0 = 2,4 кН/м^2. Уклон кровли не учитывается.

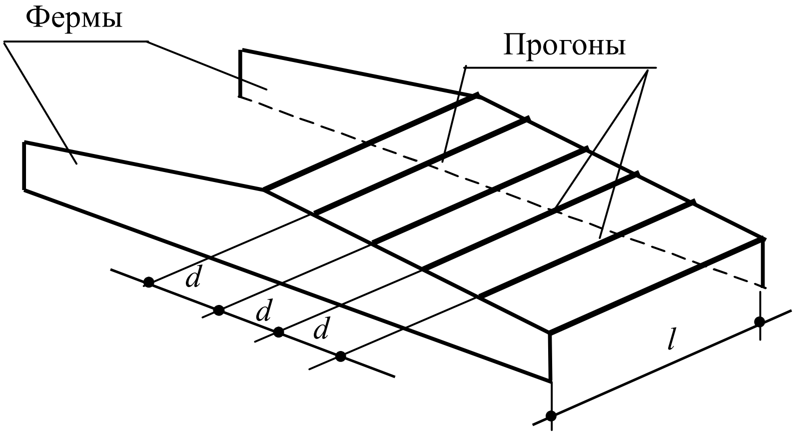

Рис. 1. Схема расстановки прогонов

В соответствии с пунктом 3 начальная надёжность выражается вероятностью выполнения условия прочности. Поэтому производится проектировочный расчёт, и определяется номер двутавра.

3. Проектировочный расчёт.

Постоянная погонная нагрузка равна $q = dp = 3 \cdot 1{,}14 = 3{,}42$ кН/м. Снеговая погонная нагрузка равна $q_s = ds_0 = 3 \cdot 2{,}4 = 7{,}2$ кН/м. Расчётный изгибающий момент равен $M = \dfrac{(q + q_s)l^2}{8} = \dfrac{(3{,}42 + 7{,}2) \cdot 6^2}{8} = 47{,}79\,\text{кН} \cdot \text{м}$. Требуемый момент сопротивления из условия прочности равен $W_{req} = \dfrac{M\gamma_n}{R_y \gamma_c} = \dfrac{47{,}79 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}95}{230 \cdot 1} \cdot 10^6 = 197{,}4\,\text{см}^3$. Принимается швеллер № 24, $W_z = 242$ см^3.

4. Расчёт начальной надёжности методом моментов.

Условие прочности записывается в виде

$$\frac{M}{W_z} \le R_y .$$

Резерв несущей способности равен

$$g = R_y - \frac{M}{W_z} \to g = R_y - \frac{(q + q_s)l^2}{8W_z} .$$

В качестве случайных величин принимаются R_y, q, q_s. Тогда среднее значение резерва несущей способности определяется по формуле

$$\overline{g} = \overline{R}_{yn} - \frac{(\overline{q}_n + \overline{q}_{sn})l^2}{8W_z} ,$$

где $\overline{R}_{yn}, \overline{q}_n, \overline{q}_{sn}$ – нормативные значения соответствующих расчётных величин.

Среднее значение сопротивления $\overline{R}_{yn}$ (среднее значение предела текучести $\sigma_т$) определяется по формуле, приведённой в пункте 9. Выборка экспериментальных данных представлена в табл. 1.

Таблица 1

Выборка значений предела текучести R_i (МПа)

Столбцы / Строки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
2	231	231	234	235	237	237	236	235	238	233
3	240	230	236	237	239	235	233	232	239	238
4	234	237	231	238	236	239	235	235	232	240
5	239	234	232	235	235	231	237	236	238	233
6	240	231	235	237	233	238	239	235	236	232
7	233	239	236	231	237	235	232	238	234	237
8	235	235	238	239	236	231	233	240	232	234
9	236	239	235	234	235	238	231	232	237	233
10	234	237	236	235	235	238	233	239	232	231

Для вычисления $\overline{R}_{уп}$ сто значений R_i подставляются в формулу

$$\overline{R}_{уп} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} R_i = \frac{1}{100}\cdot 23529 = 235{,}29 \text{ МПа}.$$

Аналогично вычисляется дисперсия сопротивления:

$$S_R^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R}_{уп})^2 = \frac{1}{100}\cdot 730{,}59 = 7{,}3059 \text{ (МПа)}^2.$$

Среднеквадратичное отклонение равно

$$S_R = \sqrt{S_R^2} = \sqrt{7{,}3059} = 2{,}7 \text{ МПа}.$$

Полученные числовые характеристики соответствуют нормальному закону распределения плотности вероятностей случайной величины $R_{уп}$. Для подтверждения нормального закона распределения строится *гистограмма* – столбчатый график плотности вероятностей. Для построения гистограммы используется ряд распределения – таблица, в которой указываются значения случайной величины R_i; количество событий m_i, соответствующее данному значению и вероятность реализации данного значения случайной величины P_i. Ряд распределения представлен в виде табл. 2.

Таблица 2

Ряд распределения нормативного сопротивления

R_i	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
m_i	1	10	9	9	8	17	10	11	10	10	5
$P_i = \frac{m_i}{n}$ $(n = 100)$	0,01	0,1	0,09	0,09	0,08	0,17	0,1	0,11	0,1	0,1	0,05

Значения m_i вычисляются по данным табл. 1 пересчётом соответствующих значений, причём должно выполняться равенство $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$.

Для чисел строки P_i должно выполняться равенство $\sum_i P_i = 1$.

Высота столбцов гистограммы вычисляется по формуле

$$h_i = \frac{m_i}{nl_i} = \frac{P_i}{l_i}.$$

Для выбора длины отрезков l_i определяется интервал изменения случайной величины

$$I = R_{i\,\max} - R_{i\,\min} = 240 - 230 = 10.$$

При сравнительно небольшой выборке и малом интервале изменения длина отрезка гистограммы l_i выбирается так, чтобы уменьшить влияние возможных резких изменений вероятностей на малых промежутках. С этой целью длина отрезка увеличивается по сравнению с длиной, рекомендуемой по формуле

$$l_i = \frac{I}{1 + 3{,}32\lg(n)} = \frac{10}{1 + 3{,}32\lg(100)} = 1{,}3.$$

Пусть l_i = 2,8. Границы участков получаются следующими: a_1 = 230, b_1 = 232,8; a_2 = 232,8, b_2 = 235,6; a_3 =235,6, b_3 = 238,4; a_4 = 238,4, b_4 = 241,2.

На этих участках вычисляются значения вероятностей с помощью ряда распределения (см. табл. 2):

P_1 = 0,01 + 0,1 + 0,09 = 0,2; P_2 = 0,09 + 0,08 + 0,17 = 0,34;
P_3 = 0,1 + 0,11 + 0,1 = 0,31; P_4 = 0,1 + 0,05 = 0,15.

Далее вычисляются высоты столбцов гистограммы:

$$h_1 = \frac{P_1}{l_1} = \frac{0{,}2}{2{,}8} = 0{,}07143; \quad h_2 = \frac{P_2}{l_2} = \frac{0{,}34}{2{,}8} = 0{,}12143;$$

$$h_3 = \frac{P_3}{l_3} = \frac{0{,}31}{2{,}8} = 0{,}11071; \quad h_4 = \frac{P_4}{l_4} = \frac{0{,}15}{2{,}8} = 0{,}05357.$$

Вычисленные значения h_i используются для построения гистограммы (см. рис. 2).

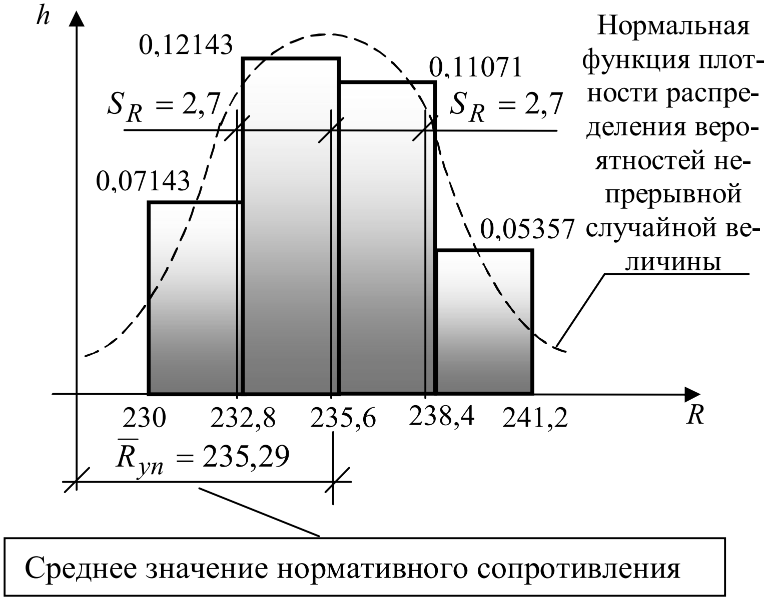

Рис. 2. Гистограмма нормативного сопротивления

Сравнение гистограммы и нормальной функции плотности распределения показывает, что выборка нормативного сопротивления в среднем удовлетворяет закону Гаусса. Конечно, такое визуальное обоснование нормального закона является весьма приблизительным. Существуют более точные методы обоснования, которые в данной работе не рассматриваются.

Аналогично определяются средние значения и среднеквадратичные отклонения нормативных нагрузок. Пусть дано: $\overline{q}_n = 3$ кН/м; $S_q = 0{,}1$ кН/м; $\overline{q}_{sn} = 6{,}9$ кН/м; $S_{q_s} = 0{,}5$ кН/м.

После определения числовых характеристик случайных величин определяются числовые характеристики резерва несущей способности. Среднее значение резерва равно

$$\overline{g} = \overline{R}_{yn} - \frac{(\overline{q}_n + \overline{q}_{sn})l^2}{8W_z} = 235{,}29 - \frac{(3+6{,}9)\cdot 10^{-3}\cdot 6^2}{8\cdot 242\cdot 10^{-6}} = 51{,}2 \text{ МПа}.$$

Дисперсия резерва S_g^2 определяется по формуле, указанной в пункте 7: $S_g^2 = S_R^2 + S_L^2$. Так как нагрузочный эффект L зависит от двух случайных величин (q_n, q_{sn}), дисперсия определяется по более общей формуле:

$$S_g^2 = S_R^2 + S_q^2\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{q}_n}\right)^2 + S_{q_s}^2\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sn}}\right)^2 \to$$

$$S_g^2 = S_R^2 + S_q^2\left(-\frac{l^2}{8W_z}\right)^2 + S_{q_s}^2\left(-\frac{l^2}{8W_z}\right)^2 \to$$

$$S_g^2 = 7{,}3059 + (0{,}1^2 + 0{,}5^2)\cdot 10^{-6}\left(-\frac{6^2}{8\cdot 242\cdot 10^{-6}}\right)^2 = 97{,}2\ (\text{МПа})^2.$$

Среднеквадратичное отклонение равно

$$S_g = \sqrt{S_g^2} = \sqrt{97{,}2} = 9{,}859 \text{ МПа}.$$

Индекс надёжности равен

$$\beta = \frac{\overline{g}}{S_g} = \frac{51{,}2}{9{,}859} = 5{,}2.$$

Вероятность безотказной работы равна

$$P_s = 0{,}5 + \Phi(\beta) = 0{,}5 + \Phi(5{,}2) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$$

Интеграл Ф(β) берётся по таблице интегралов Лапласа.

Высокая вероятность начальной надёжности объясняется тем, что принятый по сортаменту момент сопротивления W_z значительно больше требуемого момента сопротивления W_{req} (242 > 197,4).

5. Расчёт начальной надёжности прогона методом статистических испытаний. Теоретические основы метода состоят в следующем.

1. Используется главная формула математической статистики – формула определения статистической вероятности: $P^*(A) = m/n$, где m – число состоявшихся событий; n – число проведённых испытаний.

2. Событием в расчёте начальной надёжности элемента является положительное значение резерва несущей способности ($g_i > 0$). Значение g_i моделируется (создаётся, разыгрывается) с помощью случайных чисел. Так как g_i зависит от трёх случайных величин R_y, q, q_s, событие моделируется с помощью трёх чисел: R_{yi}, q_i, q_{si}.

3. Процедура моделирования случайных величин основывается на знании функции распределения вероятностей. В примере принята нормальная функция распределения, т.е. должны быть известны средние значения и среднеквадратичные отклонения для каждой случайной величины (в примере $\overline{R}_{yn}, \overline{q}_n, \overline{q}_{sn}, S_R, S_q, S_{q_s}$).

4. Моделирование нормально распределённых случайных величин производится по формулам:

$$z_i = S_z \cdot x_i + \bar{z}; \quad x_i = \sum_{j=1}^{12} \nu_j - 6.$$

Формулы показывают, что для моделирования одного числа z_i надо принять по специальной таблице двенадцать чисел ν_j.

5. Моделируется n чисел g_i, из которых выбирается m чисел, удовлетворяющих условию $g_i > 0$. Далее определяется вероятность безотказной работы $P^*(A) = m/n$.

Пусть в рамках учебной работы число испытаний равняется $n = 10$. Тогда для одной случайной величины требуется выбрать 120 чисел ν_j. Эти числа сведены в таблицы.

Таблица 3

Равномерно распределённые случайные числа $\nu_j\,(R_{yn})$

98	08	62	48	26	45	24	02	84	04	44	99
33	18	51	62	32	41	94	15	09	49	89	43
80	95	10	04	06	96	38	27	07	74	20	15
79	75	24	91	40	71	96	12	82	96	69	86
18	63	33	25	37	98	14	50	65	71	31	01
74	02	94	39	02	77	55	73	22	70	97	79
54	17	84	56	11	80	99	33	71	43	05	33
11	66	44	98	83	52	07	98	48	27	59	38
48	32	47	79	28	31	24	96	47	10	02	29
69	07	49	41	38	87	63	79	19	76	35	58

Таблица 4

Равномерно распределённые случайные числа $\nu_j\,(q)$

66	06	57	47	17	34	07	27	68	50	36	69
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72
83	45	29	96	34	06	28	89	80	83	13	74
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76
99	59	46	73	48	87	51	76	49	69	91	82

Таблица 5

Равномерно распределённые случайные числа $\nu_j(q_s)$

86	71	95	03	73	74	69	77	04	58	50	09
53	82	57	11	21	74	23	82	31	45	15	80
37	42	16	52	45	10	02	60	23	43	14	72
90	39	11	62	76	03	72	68	93	36	48	91
22	88	77	29	96	88	67	75	42	46	14	85
23	99	08	75	94	54	35	28	16	46	86	76
40	33	03	14	53	35	41	73	29	70	58	68
81	08	04	60	57	75	65	92	97	32	54	79
39	94	48	64	96	97	46	07	86	12	40	20
82	70	17	65	43	63	25	95	21	40	84	44

Для экономии места числа в табл. 3 – 5 представляют собой сотые части. Например, число в таблице – 85, в расчётах – 0,85.

Моделирование g_i. Формулы пункта 4 следует переписать в принятых обозначениях:

$$R_i = S_R \cdot x_i(R) + \overline{R}_{yn}; \quad x_i(R) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(R_{yn}) - 6;$$

$$q_i = S_q \cdot x_i(q) + \overline{q}_n; \quad x_i(q) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(q) - 6;$$

$$q_{si} = S_{q_s} \cdot x_i(q_s) + \overline{q}_{sn}; \quad x_i(q_s) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(q_s) - 6;$$

$$g_i = R_i - \frac{(q_i + q_{si})l^2}{8W_z}.$$

Вычисление случайной величины g_1. Для вычисления величины $x_1(R)$ используются числа $\nu_j(R)$ первой строки табл. 3.

$$x_1(R) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(R_{yn}) - 6 = \frac{1}{100}(98 + 8 + 62 + 48 + 26 + 45 +$$
$$+ 24 + 2 + 84 + 4 + 44 + 99) - 6 = -0{,}56.$$

Величина сопротивления R_1 равна:

$$R_1 = S_R \cdot x_1(R) + \overline{R}_{yn} = 2{,}7 \cdot (-0{,}56) + 235{,}29 = 233{,}778 \text{ МПа.}$$

Для вычисления величины $x_1(q)$ используются числа $\nu_j(q)$ первой строки табл. 4.

$$x_1(q) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(q) - 6 = \frac{1}{100}(66 + 6 + 57 + 47 + 17 + 34 +$$

$$+ 7 + 27 + 68 + 50 + 36 + 69) - 6 = -1{,}16.$$

Величина постоянной нагрузки q_1 равна:

$$q_1 = S_q \cdot x_1(q) + \overline{q}_n = 0{,}1 \cdot (-1{,}16) + 3 = 2{,}884 \text{ кН/м.}$$

Для вычисления величины $x_1(q_s)$ используются числа $\nu_j(q_s)$ первой строки табл. 5.

$$x_1(q_s) = \sum_{j=1}^{12} \nu_j(q_s) - 6 = \frac{1}{100}(86 + 71 + 95 + 3 + 73 + 74 +$$

$$+ 69 + 77 + 4 + 58 + 50 + 9) - 6 = 0{,}69.$$

Величина снеговой нагрузки равна:

$$q_{s1} = S_{q_s} \cdot x_1(q_s) + \overline{q}_{sn} = 0{,}5 \cdot 0{,}69 + 6{,}9 = 7{,}245 \text{ кН/м.}$$

Первое значение резерва несущей способности равно:

$$g_1 = R_1 - \frac{(q_1 + q_{s1})l^2}{8W_z} \rightarrow$$

$$\rightarrow g_1 = 233{,}778 - \frac{(2{,}884 + 7{,}245) \cdot 10^{-3} \cdot 6^2}{8 \cdot 242 \cdot 10^{-6}} = 45{,}43 \text{ МПа.}$$

Аналогично вычисляются все значения резерва несущей способности при n = 10. Результаты расчёта представлены в табл. 6.

Таблица 6

Расчёт начальной надёжности прогона методом статистических испытаний

$x_i(R)$	R_i	$x_i(q)$	q_i	$x_i(q_s)$	q_{si}	g_i
– 0,56	233,778	– 1,16	2,884	0,69	7,245	45,43
–0,64	233,562	– 3,34	2,666	– 0,26	6,77	58,1
– 1,28	231,834	–0,09	2,991	– 1,84	5,98	65
2,21	241,257	– 0,37	2,963	0,89	7,345	49,58
– 0,94	232,752	1,17	3,117	1,29	7,545	34,49
0,84	237,558	– 0,2	2,98	0,4	7,1	50,12
– 0,14	234,912	0,58	3,058	– 0,83	6,485	57,46
0,31	236,127	0,6	3,06	1,04	7,42	41,25
– 1,27	231,861	0,2	3,02	0,49	7,145	42,84
0,21	235,857	2,3	3,23	0,49	7,145	42,93

В табл. 6 все значения $g_i > 0$, следовательно, $m = 10$. Тогда вероятность безотказной работы прогона равна

$$P(g > 0) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1\,.$$

Вероятность безотказной работы прогона, вычисленная двумя методами, получилась одинаковой. Если в результате выполнения задания вероятности получились разными, то это объясняется тем, что точность метода статистических испытаний при малом числе испытаний ($n = 10$) недостаточна. Совпадение результатов в рассмотренном примере объясняется большим запасом прочности ($W_z = 242$ см^3 > $W_{req} = 197{,}4$ см^3).

Значение вероятности, определённое численным методом, проверяется с помощью интервальной оценки $P_1 < P < P_2$.

Граничные значения интервала определяются по формулам

$$P_1 = \frac{n}{(t^2 + n)}\left[w + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\,\right],$$

$$P_2 = \frac{n}{(t^2+n)}\left[w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

где n – число испытаний; m – число появления события; w – относительная частота ($w = m$ / n); t – значение аргумента интеграла Лапласа, при котором $\Phi(t) = \gamma / 2$.

Пусть заданная надёжность интервальной оценки выражается вероятностью $\gamma = 0{,}95$. При известной величине γ определяется аргумент t: $\Phi(t) = \gamma / 2 = 0{,}95/2 = 0{,}475 \rightarrow t = 1{,}96$ (t определяется по таблице интеграла Лапласа).

В примере $m = 10$, $w = 1$. Тогда нижний предел доверительного интервала равен

$$P_1 = \frac{n}{(t^2+n)} = \frac{10}{1{,}96^2+10} = 0{,}72.$$

Верхний предел равен

$$P_2 = \frac{n}{(t^2+n)}\left[w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow P_2 = \frac{n}{(t^2+n)}\left[\frac{t^2+n}{n}\right] = 1\,.$$

Вычисленная вероятность равна верхнему пределу доверительного интервала.

Теоретические выводы.

1. Показателем надёжности строительной конструкции является вероятность безотказной работы $P_s(g > 0)$. Безотказная работа выражается положительным значением резерва несущей способности $g > 0$.

2. Функция резерва несущей способности получается из условия прочности ($L \le R \rightarrow g = R - L > 0$). Однако между условием прочности и резервом несущей способности есть суще-

ственная разница – в условие прочности подставляются расчётные величины (расчётное сопротивление, расчётные нагрузки), а в резерв несущей способности подставляются нормативные величины сопротивления и нагрузок. Именно поэтому условие безотказной работы записывается в виде $g > 0$. Вариант $g = 0$ соответствует предельному состоянию конструкции, что рассматривается как отказ.

3. Для определения вероятности безотказной работы конструкции необходимо знать функцию распределения вероятностей $F(g)$. Наиболее распространённой является функция Гаусса (нормальный закон распределения вероятностей).

4. Все случайные величины при анализе надёжности конструкций являются непрерывными величинами. Практическое исследование непрерывных случайных величин основано на статистической обработке выборки дискретных случайных величин. В результате статистической обработки определяются числовые характеристики функции распределения или числовые характеристики плотности распределения вероятностей $f(g)$. Числовые характеристики функции распределения и числовые характеристики плотности распределения одинаковы.

5. Кроме числовых характеристик статистическая обработка позволяет определить функцию плотности распределения вероятностей. Приблизительно это можно сделать с помощью построения гистограммы, точные методы в данном задании не рассматриваются.

6. Если случайные величины изменяются по нормальному закону, то вероятность может определяться или аналитическим методом моментов или численным методом. Если резерв несущей способности зависит от нескольких случайных величин, изменяющихся по разным законам распределения, то вероятность безотказной работы определяется только численным методом.

Вопросы на защите расчётно-графической работы.

1. Что такое начальная надёжность конструкции, в чём измеряется надёжность?

2. Что такое отказ, каково соотношение между надёжностью и отказом?

3. Что такое резерв несущей способности? Как записывается условие надёжности?

4. Как записывается функция распределения вероятностей?

5. Как записывается функция нормального закона распределения вероятностей? Каковы числовые характеристики нормального закона?

6. Как вычисляется вероятность, соответствующая нормальному закону распределения? Как определяется величина интеграла Лапласа?

7. Что такое гистограмма? Какую функцию представляет гистограмма?

8. Как рассчитывается надёжность конструкции методом моментов? Почему этот метод имеет такое название?

9. Какова последовательность расчёта надёжности конструкции методом статистических испытаний?

10. Как определяются числовые характеристики случайных величин?

11. В каких случаях надёжность рассчитывается только методом статистических испытаний?

12. Почему используется моделирование случайных величин? Что заменяет это моделирование?

13. Как производится интервальная оценка вероятности?

14. Зависит ли интервальная оценка вероятности, выражающей надёжность, от закона распределения вероятностей резерва несущей способности?

15. На каких данных о случайных величинах основан метод статистических испытаний?

Список рекомендуемой литературы

1. *Теория вероятностей* и математическая статистика: учеб. пособие / В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин, Е.В. Астафьева, Ю.Н. Миронкина; под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Маркет ДС, 2010. – 240 с. (Университетская серия).
2. *Гмурман, В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 404 с. – (Основы наук).
3. *Митюгов, Е.А.* Курс металлических конструкций. Учебник. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 120 с.
4. *Лычёв, А.С.* Надёжность строительных конструкций. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 184 с.
5. *Райзер, В.Д.* Теория надёжности сооружений. Научное издание. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 384 с.