

Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций

Надёжность

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

План

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в кг/см^2 .
Обозначение М100 - образец¹ бетона выдерживает давление 100 кг/см^2
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов

¹кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

Бетон

Марка

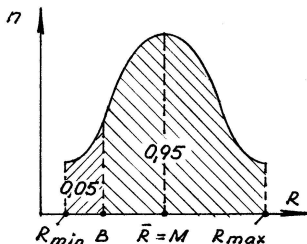
- ▶ Одна из основных характеристик прочности бетона - прочность на сжатие.
- ▶ Марка бетона - предел прочности на сжатие в кг/см^2 .
Обозначение М100 - образец¹ бетона выдерживает давление 100 кг/см^2
- ▶ Прочность на сжатие указанная в марке - среднее значение прочности испытанных образцов
- ▶ Проблема?

¹кубики со сторонами 150 мм, которые затем выдерживают в условиях нормального твердения 28 суток

Бетон

Проблема марки

- ▶ Прочность на сжатие бетона - случайная величина распределённая по закону, близкому² к закону нормального распределения
- ▶ Поэтому бетон марки, например М100 выдержит нагрузку в 100 кг/см^2 с вероятностью 0.5



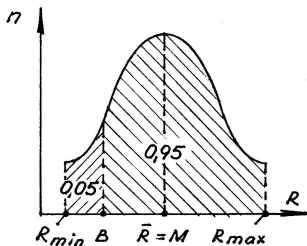
Распределение прочностной. Половина образцов имеет прочность больше _____ средней (справа от \bar{M}), другая половина - меньше.

²у нормального закона хвосты кривой тянутся до бесконечности, на практике же такое невозможно

Бетон

Класс бетона

- ▶ **Класс бетона В** — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной обеспеченностью (доверительной вероятностью) 0,95
- ▶ Это означает, что образец выдержит нагрузку указанную в классе с вероятностью (обеспеченностью) 0.95
- ▶ Класс бетона занижает ожидаемую прочность, чтобы обеспечить запас прочности



Бетон

Перевод марки в класс

Переведём марку М100 в класс.

▶ $\text{кг/см}^2 \rightarrow \text{МПа}$

$$100 \cdot g \cdot 10000 = 9806650 \text{Па} = 9.806650 \text{МПа}$$

- ▶ Вычисление класса

$$B = M_{\text{МПа}} - \sigma \cdot 1.64$$

- ▶ Стандартное отклонение σ прочности бетона на сжатие определяют используя коэффициент вариации $\nu = 0.135$
- ▶ $\sigma = \nu \cdot M_{\text{МПа}}$
- ▶ $F(1.64) = 0.05$, где F - функция нормального распределения
- ▶ Подставляя формулу для σ и вынося $M_{\text{МПа}}$ за скобку получим:

$$B = M_{\text{МПа}}(1 - 1.64\nu)$$

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Теория надёжности

Теория надёжности - наука изучающая закономерности отказов технических объектов

- ▶ критерии и показатели надёжности
- ▶ метода анализа и синтеза по критериям надёжности
- ▶ методы обеспечения и повышения надёжности
- ▶ методы эксплуатации обеспечивающие надёжность

Теория надёжности

Надёжность - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в течение заданного срока с заданной вероятностью P .

Начальная надёжность - свойство объекта выполнять свои функции в заданном режиме в начальный период эксплуатации

Отказ - случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта. Вероятность отказа: $Q = 1 - P$


Теория надёжности

Долговечность - свойство сохранять работоспособность в течение определенного времени T

Долговечность vs надёжность

Долговечность определяется временем безотказной работы, а надёжность вероятностью безотказной работы в течении заданного времени.

- ▶ Традиционный подход к определению (обеспечение) надёжности (надёжно не надёжно) подразумевает использование коэффициентов запаса (коэффициентов перегрузки) обеспечивающих резерв несущей способности.
- ▶ Такой подход называется **детерминированным**
- ▶ **Вероятностный подход** подразумевает, что величины влияющие на надёжность - случайны³
- ▶ Определения или обеспечение надёжности основывается на знании числовых характеристик этих случайных величин и их функций распределения

³ даже если принимают значения в узких диапазонах 

Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаться неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \quad (1)$$

где S_i - воздействие на рассчитываемый элемент i -ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)

A - геометрическая характеристика сечения

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение в элементе

Расчет по допускаемым напряжениям

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 1 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где γ_i – коэффициент надёжности по нагрузке
 γ_R – коэффициенты надёжности по материалам

Расчет по предельным состояниям

Предельное состояние – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- ▶ используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- ▶ учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ▶ ...

Предельные состояния

- ▶ **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- ▶ **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

N_{max} - фактор характеризующий нагрузку

Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, ...

N - нормативное значение соответствующего N_{max} фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Запишем выражение со слайда 19 как разность факторов:

$$g = R - L$$

- ▶ R - сопротивление (несущая способность)
- ▶ L - воздействие (нагрузочный эффект)
- ▶ R и L - случайные величины⁴
- ▶ g - характеристика безопасности - случайная величина
- ▶ R и L - принимают конкретный вид в зависимости от исследуемой задачи

Вероятность безотказной работы

$$P = P(g > 0)$$

⁴распределения конкретных случайных величин определяющих R и L часто близки к нормальному распределению

Характеристика безотказности по Ржаницкому

- ▶ Чтобы определить вероятность безотказной работы требуется знать распределение резерва несущей способности g
- ▶ Функцию распределения g часто считают близкой к функции нормального распределения⁵.
- ▶ Далее для определения вероятности безотказной работы используют индекс надёжности:

$$\beta = \frac{\bar{g}}{\sigma_g}$$

- ▶ \bar{g} - среднее значение резерва несущей способности
- ▶ σ_g - стандартное отклонение резерва несущей способности
- ▶ Среднее значение и стандартного отклонение обычно вычисляют для линейной аппроксимации функции g ⁶

⁵если известны функции плотностей R и L то функцию распределения можно получить аналитически

⁶см. линеаризацию функции случайных аргументов

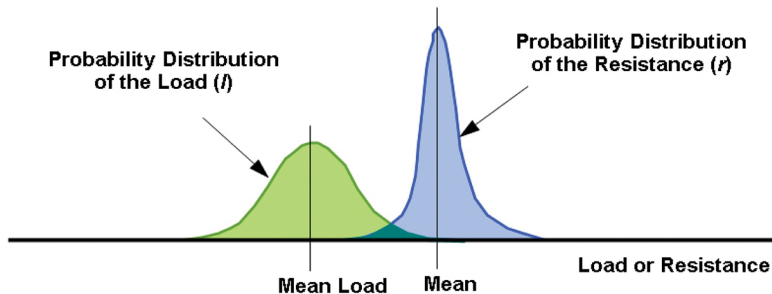
Характеристика безотказности

- ▶ Наконец используя вместо резерва несущей способности g индекс надёжности β для определения вероятности безотказной работы

$$P = P(\beta > 0)$$

- ▶ Как представить графически вероятность безотказной работы?
- ▶ Как связать вероятность безотказной работы и функцию Лапласа Φ_0 ?

Характеристика безотказности



Характеристика безотказности по Ржаницкому

Что дальше?

- ▶ **Обратная задача:** Для известного нагрузочного эффекта и сопротивления, с известными средними значениями и стандартными отклонениями величин определяется вероятность безотказной работы (надёжность)
- ▶ **Прямая задача:** определяются значения от которых зависит сопротивление для обеспечения заданной надёжности

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Какую надёжность выбрать?

- ▶ Стремление к абсолютной надёжности, то есть к $P = 1$ не экономично
- ▶ потому, что g в этом случае должно быть очень велико, а значит велика и несущая способность R
- ▶ С другой стороны низкая надёжность недопустима
- ▶ Как правило выбирают надёжность соответствующую отступу от \bar{g} вправо на $3 \sigma_g$

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением $F = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа.

Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см²

Если известны стандартное отклонение предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

⁷ деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со значением $F = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа.

Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см²

Если известны стандартное отклонение предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

- ▶ Определим выражения для R - сопротивления и L - нагрузочного эффекта.
- ▶ $R = R_y \cdot A$
- ▶ $L = F$
- ▶ Определим резерв несущей способности как функцию случайной величины⁷:

$$g(R_y) = \bar{R}_y \cdot A / 10 - F$$

⁷деление на 10 в формуле появляется после приведения слагаемых к кН

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Пример

- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Функция g линейна⁸ относительно R_y и F , поэтому используем следующие выражения для среднего значения и дисперсии:
- ▶ Тогда средний резерв несущей способности:

$$\bar{g} = \bar{R}_y \cdot A/10 - F$$

- ▶ Стандартное отклонение резерва несущей способности⁹:

$$S_g^2 = \left(\frac{dg}{dR_y} \right)^2 \cdot S_{R_y}^2$$

⁸если функция не линейна, то можно считать, её линейной на рассматриваемом участке (требуется проверка)

⁹см. формулу для дисперсии линеаризованной функции случайной величины

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Пример

- ▶ Определим индекс надёжности $\beta = \frac{\bar{g}}{S_g}$
- ▶ Определим вероятность безотказной работы $P = P(\beta > 0) = 1 - F(\beta)$,
где $F(\beta)$ - функция стандартного нормального распределения
- ▶ Определив вероятность безотказной работы можно сделать вывод о надёжности и экономичности:
 - ▶ Если P меньше требуемого уровня надёжности, то конструкция ненадёжна
 - ▶ Если P сильно больше требуемого уровня надёжности, то конструкция не экономична
Например надёжность 0.99999 требует избыточной прочности

Характеристика безотказности по Ржаницкому

Пример

Какое поперечное сечение стержня нужно выбрать чтобы добиться надёжности 0.99865?

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Надёжность системы

- ▶ При определении надёжности системы рассматриваются возможные сценарии разрешения её элементов приводящие к отказу
- ▶ Для определения вероятности безотказной работы используются теоремы о умножении и сложении вероятностей
- ▶ $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- ▶ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Последовательное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором отказ одного элемента ведёт к отказу системы в целом

$$P = \prod P_i = \prod (1 - Q_i)$$

где P_i , Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i -го элемента

При таком соединении надёжность идеальной системы всегда меньше надёжности самого слабого элемента

Параллельное соединение элементов

Последовательное соединение элементов системы - соединение, при котором только отказ всех элементов системы ведёт к отказу системы в целом.

$$P = 1 - \prod Q_i = 1 - \prod (1 - P_i)$$

где P_i , Q_i - надёжность и вероятность отказа соответственно для i -го элемента

При таком соединении надёжность системы всегда выше надёжности самого надёжного элемента

Параллельное соединение элементов

Замечание

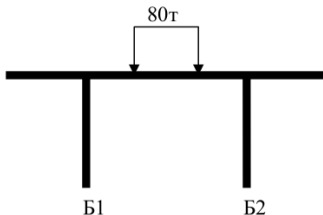
- ▶ Стоит учитывать что если один или несколько элементов системы вышли из строя, то надёжность остальных элементов системы может снижаться
- ▶ В этом случае рассматриваются различные варианты разрешения системы:
- ▶ когда все элементы выходят из строя
- ▶ когда из строя выходят один или несколько элементов системы

Пример

На пролетное строение моста, имеющее в поперечном сечении две главных балки, действует нагрузка.

- ▶ Обеспеченность (надежность) несущей способности каждой балки в размере 400 кН равна $P = 0.9$.
- ▶ Обеспеченность несущей способности в размере 800 кН равна $P = 0.6$.

Определить надежность системы



Пример из учебного пособия "Основы надежности транспортных сооружений МАДИ, 2008

Пример

Решение

- ▶ Это система с параллельным соединением элементов
- ▶ Рассмотрим два сценария разрушения системы:
- ▶ 1. Балки разрушаются одновременно
- ▶ 2. Разрушается сначала одна, потом другая балка (разрушение Б1, Б2; разрушение Б2, Б1)
- ▶ Вероятность отказа всей системы Q будет складываться из вероятностей отказа случая 1 и 2

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Метод Монте-Карло



Метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

Метод Монте-Карло

- ▶ В процессе решения задачи можно "разыгрывать" исходные данные или случайные события
- ▶ Например можно задать значения случайных величин используя генератор случайных чисел
- ▶ Такое решение задачи, со случайностью, не надёжно. Поэтому оно повторяется множество раз
- ▶ Окончательный ответ получается путём "суммирования" множества ответов

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Пример

На стальной стержень действует растягивающая сила со средним значением $\bar{F} = 100$ кН. Средний предел текучести стержня $\bar{R}_y - 230$ МПа. Площадь поперечного сечения стержня - 5.36 см². Если известны стандартные отклонения нагрузки $F - 10$ кН и предела текучести $R_y - 10$ МПа определить запас несущей способности и вероятность безотказной работы стержня.

Решение на Python: github.com/VetrovSV/ST/blob/master/python-examples/Monte-Carlo.ipynb

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Снеговые нагрузки

- ▶ нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия

$$S_0 = 0.7c_e c_t \mu S_g$$

- ▶ c_e – коэффициент, учитывающий снос снега с покрытий зданий под действием ветра или иных факторов
- ▶ c_t – термический коэффициент
- ▶ μ – коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие
- ▶ S_g – вес снегового покрова на 1 м² горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ

Снеговые нагрузки



Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

Вопросы

- ▶ Возможно ли добиться вероятности безотказной работы равной единице?

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Разброс нагрузок от собственного веса конструкций:
коэффициент вариации от 0.02 до 0.03
- ▶ Нормативная прочность обычно принимается с
обеспеченностью $P = 0.95$ ($R_n = R1.65\sigma_R$)
- ▶ Расчетная - 0.9986 ($R_{расч} = R - 3\sigma_R$)
Коэффициенты вариации
 - ▶ для стали – 0.03...0.05;
 - ▶ для бетона – 0.10...0.15.

Коэффициенты запаса

- ▶ для нагрузки

$$\gamma_F = \frac{F}{F + 3\sigma_F}$$

- ▶ для сопротивления

$$\gamma_R = \frac{R}{R - 3\sigma_R}$$

Outline

Марка и класс бетона

Надёжность

Характеристика безопасности

Пример

Надёжность системы

Дерево отказов и дерево событий

Метод Монте-Карло

Расчёт надёжности методом статистических испытаний

Ветровые и снеговые нагрузки

Метод экспертных оценок

Вопросы

Справочные сведения

Ссылки

- ▶ Пшеничкина, В. А. Вероятностные методы строительной механики и теория надёжности строительных конструкций [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков
http://vgasu.ru/attachments/oi_pshenichkina-03.pdf
- ▶ Начальная надёжность элементов строительных конструкций: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко.

- ▶ jupyter.org/try - Jupyter Online
Выбрать Try Jupyter with Python

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST