Теория вероятностей

Случайные события

Черновик

Кафедра СМиМ

2019

План

Теория вероятностей

Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: *случайные события*, *случайные величины*, их свойства и операции над ними

Теория вероятностей

- Анализ азартных игр (кости, рулетка, ...)
- Начало теории вероятности - набор эмпирических фактов
- XVII век - формализация знаний и применение математического аппарата

Теория вероятностей

- Как связать вероятность возникновения события и частоту его возникновения?
- Что если одно случайное событие является причиной другого?
- Как по возникновению одного случайного события узнать произошло ли другое?
- Что если повторять опыты в которых происходят случайные события?

Вероятность

Вероятность — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

- Безразмерная величина[1]
- Лежит на отрезке [0,1]

[1] не проценты!

Outline

События

- Достоверные Ω
- Случайные
  Обозначаются большими латинскими буквами: $A, B, \ldots$
- Невозможные $\varnothing$

Случайные события

Примеры

- Выпадение 6 очков на игральной кости
- Выпадание 1 или 2 очков на игральной кости
- Выпадение более 3-х очков на игральной кости
- Начало пары вовремя (с точностью до минуты)
- Присутствие всей группы СУС-15 на паре по сопротивлению материалов
- Выпадение 5 сантиметров снега в Чите в феврале 2019 года
- Разрушение кубика бетона класса B30 под действием под давлением 30 МПа в результате испытания на прочность.

События

- Примеры достоверных событий?

События

- Примеры достоверных событий?
- Примеры невозможных событий?

Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно[2]?

[2] порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно[2]?

Практически невозможным событием называют событие, вероятность которого не выше определённой наперёд заданной величины.

Можно считать, что практически невозможное событие не произойдёт в *единичном* испытании.

[2] порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

*Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в **единичном** испытании это событие не наступит.*

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определённой задаче) событие можно считать практически невозможным, называют **уровнем значимости**.

На практике обычно в ряде задач принимают уровни значимости, заключенные между вероятностями 0,01 и 0,05.

Испытание

Испытанием в теории вероятностей называют какой-нибудь эксперимент (не обязательно научный).

Испытание - это эксперимент, проводимый над объектом в комплексе определенных условий.

В испытании могут происходить (или не происходить) *события*.

Бросок монетки - *испытание*, выпадение орла - *событие*.

Виды событий

- Несовместные
  Появление одного события исключает появление других в одном и том же испытании
- Полная группа событий
  в результате испытания появится хотя бы одно из событий
- Равновозможные
  ни одно из событий не является объективно более возможным чем другое

Случаи (шансы) - несовместные, образующие полную группу, равновозможные события.

Виды событий

Примеры?

- Несовместные
- Полная группа событий
- Равновозможные

Outline

Классическая формула вероятности

Элементарный исход - каждый из возможных результатов испытания

Классическая формула вероятности

Элементарный исход - каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Классическая формула вероятности

Элементарный исход - каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Примеры события:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Выпадение более 4-х очков на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары
- Присутствие от 10 до 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Классическая формула вероятности

$$P = \frac{M}{N}$$

N - общее число испытаний
M - число благоприятствующих исходов

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

- Обозначим события:
  - A - вынут белый шар;
  - B - вынут чёрный шар;

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

- Обозначим события:
  - A - вынут белый шар;
  - B - вынут чёрный шар;
- $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
  $P(B) = \frac{3}{5} = 0.6;$

Outline

Комбинаторика

Комбинаторика (комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

Комбинаторика — раздел математики, изучающий всевозможные перестановки элементов.

Комбинаторика

- Сколько возможно создать паролей из букв и цифр длинной 8?
- Сколько различных сандвичей можно приготовить в subway?
- Сколькими способам можно рассадить группу из 28 человек в аудитории?

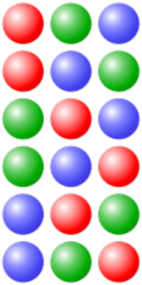
Перестановки

Множество всевозможных комбинаций полученных путём перестановки из n элементов.

$$P_n = A_n^n = n!$$

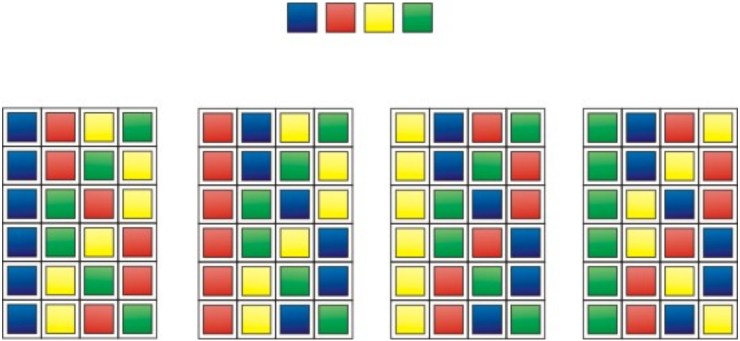
- Одна комбинация от другой отличается только порядком элементов
- Состав одинаковый
- Элементы при перестановке не повторяются

Перестановки



Перестановки 4 элементов

Перестановки



Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?

Перестановки
Пример

Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?

$$P = 5! = 150$$

Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

Легко перейти от произвольного размещения в пространстве к размещению линейному (в ряд) если пронумеровать все места в пространстве от 1 до k.

Сочетания

Множество всевозможных комбинаций из n элементов по k элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Порядок элементов не важен
- Элементы не повторяются

В англ. литературе и ПО сочетания обозначается как *nCr*

Сочетания

Сочетания из 4 по 2

Сочетания

Пример

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

Сочетания

Пример

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

$$C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25}{2! \cdot 23!} = 300$$

Размещения

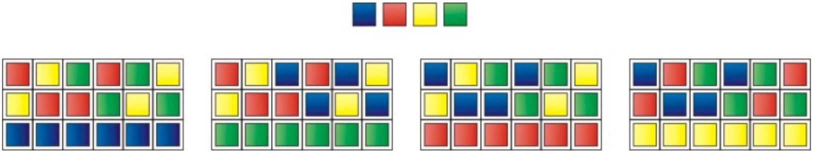
Число всевозможных комбинаций из n элементов по k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Комбинации отличаются друг от друга порядком
- Элементы не повторяются

Размещения - это сочетания, где порядок элементов имеет значение
В англ. литературе и ПО размещения обозначается как *nPr*

Размещения



Размещения из 4 по 3

Варианты размещений приведены в столбцах

Размещения

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

Размещения

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

$$A_{18}^{3} = \frac{18!}{(18-3)!} = 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896$$

Размещения с повторениями

Число всевозможных комбинаций из n элементов по k

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Комбинации отличаются друг от друга порядком
- Элементы могут повторятся

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2{\cdot}10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2{\cdot}10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

А что если длинна пароля 8 - цифр?

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2{\cdot}10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

А что если длинна пароля 8 - цифр?

$$A_{10}^{8} = 10^{8}$$

$10^{8}/2000000 = 50$ секунд

Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- В сочетаниях важен состав, а не порядок
- Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- В сочетаниях важен состав, а не порядок
- Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

Правило сложения (правило «или»)

Если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A **или** B можно n + m способами.

Правило умножения (правило «и»)

Если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то **пару** (A, B) можно выбрать nm способами.

Outline

Парадокс дней рождения

Вероятность совпадения дней рождения в группе из n человек хотя бы у двоих больше, чем кажется.

В группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения (число и месяц) хотя бы у двух людей превышает 0.5

Парадокс дней рождения

- Рассмотрим год длинной в 365 дней
- Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- Тогда дни рождения n человек можно представить последовательностью из n чисел
- Сколько возможно таких последовательностей?

  размещения с повторениями:

Парадокс дней рождения

- Рассмотрим год длинной в 365 дней
- Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- Тогда дни рождения n человек можно представить последовательностью из n чисел
- Сколько возможно таких последовательностей?

  размещения с повторениями:

$$\bar{A}_{365}^{n} = 365^{n}$$

Парадокс дней рождения

- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются

Парадокс дней рождения

- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^{n} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

- Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

Парадокс дней рождения

- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^{n} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

- Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

$$P = \frac{\bar{A}_{365}^{n} - A_{365}^{n}}{\bar{A}_{365}^{n}}$$

Outline

Геометрическая вероятность

- Если число всевозможных исходов бесконечно, то классическая формула вероятности неприменима
  например кубиковая прочность образца бетона может быть определена как 16.1 МПа, или 16.11, или 16.111 МПа и т.д.
- Тогда исход можно рассматривать как точку на отрезке
- Вместо числа благоприятствующих исходов можно используем отрезок содержащий значения соответствующих исходов
- Вместо общего числа исходов - отрезок содержащий значения всех возможных исходов

Геометрическая вероятность

$$P = \frac{l}{L}$$

l - длинна отрезка с благоприятствующими значениями
L - длинна отрезка со всеми возможными значениями.

Кроме того, вместо отрезков можно рассматривать площади, объёмы и т.д.

Геометрическая вероятность

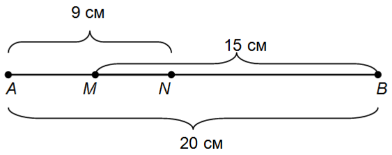
Пример

На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?

Геометрическая вероятность

Пример

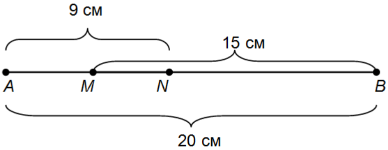
На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?



Геометрическая вероятность

Пример

На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?



$$P = \frac{4}{20} = 0.2$$

Outline

Сложение

Суммой событий A и B называется событие C = A + B, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B, т. е. в наступлении события A, или события B, или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Полная группа событий

Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единице.

Противоположные события - два единственно возможных события образующих полную группу.

Независимые и зависимые события

Событие A называют **независимым** от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют **зависимым** от события B, если вероятность появления события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условная вероятность

Пусть A и B — зависимые события.
Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность события A, найденная в предположении, что событие B уже наступило.

Иногда условная вероятность обозначается так: $P_B(A)$

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?
$P(A|B)$

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?
$P(A|B) = \frac{2}{4} = 0.5$

Умножение

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Outline

Гипотезы

Формула полной вероятности

Outline

Теорема Байеса

Вероятность того, что событие H_i из множества возможных $H_1, H_2, ..., H_n$ стало причиной возникновения события A

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Теорема Байеса

Пример

Вероятность того, что событие H_i из множества возможных $H_1, H_2, ..., H_n$ стало причиной возникновения события А

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Outline

Вероятность появления хотя бы одного события

Формула Бернулли

Вероятность того, что в n испытаниях событие произойдёт ровно k раз

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-1}$$

p - вероятность появления события в единичном испытании
q - вероятность *не* появления события в единичном испытании

Формула Бернулли

Пример

Outline

Интегральная теорема Лапласа

Локальная теорема Лапласа

Outline

Источники

- Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095
- Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0

Ссылки

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST