Теория вероятностей

Случайные события

Кафедра СМиМ

2022

Теория вероятностей

"Probability theory is nothing but common sense reduced to calculation"

— Pierre-Simon Laplace

План

Теория вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий *закономерности* случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними

Теория вероятностей

- Анализ азартных игр (кости, рулетка, ...)
- Начало теории вероятности – набор эмпирических фактов
- XVII век - формализация знаний и применение математического аппарата

Теория вероятностей

- Как связать вероятность возникновения события и частоту его возникновения?
- Что если одно случайное событие является причиной другого?
- Как по возникновению одного случайного события узнать произошло ли другое?
- Что если повторять опыты в которых происходят случайные события?

Вероятность

Вероятность — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

- Безразмерная величина
- Лежит на отрезке [0,1]

Outline

События

- Достоверные Ω
- Случайные
  Обозначаются большими латинскими буквами: $A, B, \dots$
- Невозможные $\varnothing$

Случайные события

Примеры

- Выпадение 6 очков на игральной кости
- Выпадание 1 или 2 очков на игральной кости
- Выпадение более 3-х очков на игральной кости
- Начало пары вовремя (с точностью до минуты)
- Присутствие всей группы СУС-15 на паре по сопротивлению материалов
- Выпадение 5 сантиметров снега в Чите в феврале 2019 года
- Разрушение кубика бетона класса B30 под действием под давлением 30 МПа в результате испытания на прочность.

События

- Примеры достоверных событий?

События

- Примеры достоверных событий?
- Примеры невозможных событий?

Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно[1]?

[1] порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно[1]?

Практически невозможным событием называют событие, вероятность которого не выше определённой наперёд заданной величины.

Можно считать, что практически невозможное событие не произойдёт в *единичном* испытании.

[1] порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в ***единичном*** *испытании это событие не наступит.*

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определённой задаче) событие можно считать практически невозможным, называют **уровнем значимости**.

На практике обычно в ряде задач принимают уровни значимости, заключенные между вероятностями 0,01 и 0,05.

Испытание

Испытанием в теории вероятностей называют какой-нибудь эксперимент (не обязательно научный).

Испытание – это эксперимент, проводимый над объектом в комплексе определенных условий.

В испытании могут происходить (или не происходить) *события*.

Бросок монетки – *испытание*, выпадение орла - *событие*.

Виды событий

- Несовместные
  Появление одного события исключает появление других в одном и том же испытании
- Полная группа событий
  в результате испытания появится хотя бы одно из событий
- Равновозможные
  ни одно из событий не является объективно более возможным чем другое

Случаи (шансы) - несовместные, образующие полную группу, равновозможные события.

Виды событий

Примеры?

- Несовместные
- Полная группа событий
- Равновозможные

Outline

Классическая формула вероятности

Элементарный исход – каждый из возможных результатов испытания

Классическая формула вероятности

Элементарный исход – каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Классическая формула вероятности

Элементарный исход – каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Примеры события:

- Выпадение 1 очка на игральной кости
- Выпадение более 4-х очков на игральной кости
- Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары
- Присутствие от 10 до 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Классическая формула вероятности

$$P = \frac{M}{N}$$

N - общее число испытаний
M - число благоприятствующих исходов

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

- Обозначим события:
  - A – вынут белый шар;
  - B – вынут чёрный шар;

Классическая формула вероятности

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

- Обозначим события:
  - A – вынут белый шар;
  - B – вынут чёрный шар;
- $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
  $P(B) = \frac{3}{5} = 0.6;$

Outline

Комбинаторика

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий всевозможные перестановки элементов.

Комбинаторика

- Сколько возможно создать паролей из букв и цифр длинной 8?
- Сколько различных сандвичей можно приготовить в subway?
- Сколькими способам можно рассадить группу из 28 человек в аудитории?

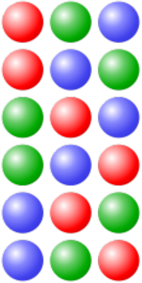
Перестановки

Множество всевозможных комбинаций полученных путём перестановки из n элементов.

$$P_n = A_n^n = n!$$

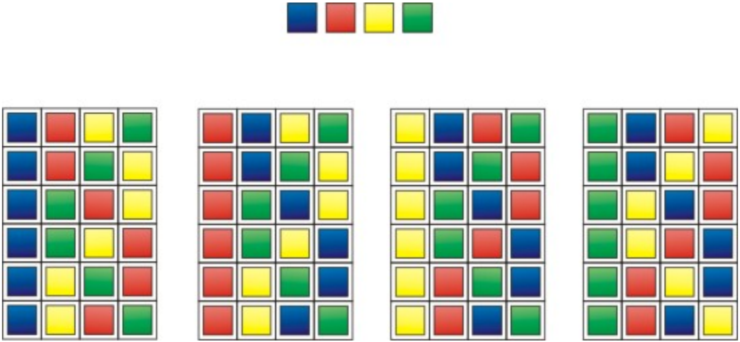
- Одна комбинация от другой отличается только порядком элементов
- Состав одинаковый
- Элементы при перестановке не повторяются

Перестановки



Перестановки 4 элементов

Перестановки



Перестановки

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?

Перестановки

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?

$$P = 5! = 150$$

Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

Легко перейти от произвольного размещения в пространстве к размещению линейному (в ряд) если пронумеровать все места в пространстве от 1 до k.

Сочетания

Множество всевозможных комбинаций из n элементов по k элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Порядок элементов не важен
- Элементы не повторяются

В англ. литературе и ПО сочетания обозначается как *nCr*

Сочетания

Сочетания из 4 по 2

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

Сочетания

Пример

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

$$C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25}{2! \cdot 23!} = 300$$

Размещения

Число всевозможных комбинаций из n элементов по k

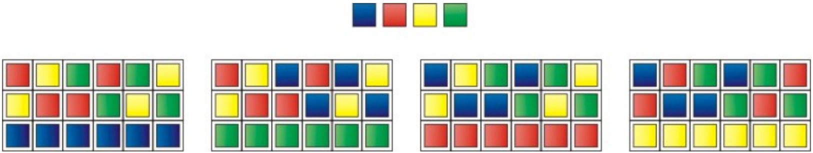
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Комбинации отличаются друг от друга порядком
- Элементы не повторяются

Размещения - это сочетания, где порядок элементов имеет значение

В англ. литературе и ПО размещения обозначается как *nPr*

Размещения



Размещения из 4 по 3

Варианты размещений приведены в столбцах

Размещения

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

Размещения

Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

$$A_{18}^{3} = \frac{18!}{(18-3)!} = 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896$$

Размещения с повторениями

Число всевозможных комбинаций из n элементов по k

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

- Комбинации отличаются друг от друга составом
- Комбинации отличаются друг от друга порядком
- Элементы могут повторятся

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2{\cdot}10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2 \cdot 10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

А что если длинна пароля 8 - цифр?

Размещения с повторениями

Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длинной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.
Сколько существует возможных паролей?
$n = 10$ $k = 12$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью $2 \cdot 10^6$?

$10^{12}/2000000 = 500000.0$ секунд ≈ 139 дней

А что если длинна пароля 8 - цифр?

$$A_{10}^{8} = 10^{8}$$

$10^{8}/2000000 = 50$ секунд

Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- В сочетаниях важен состав, а не порядок
- Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- В сочетаниях важен состав, а не порядок
- Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

Правило сложения (правило «или»)

Если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A **или** B можно n + m способами.

Правило умножения (правило «и»)

Если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то **пару** (A, B) можно выбрать *nm* способами.

Outline

Парадокс дней рождения

Вероятность совпадения дней рождения в группе из n человек хотя бы у двоих больше, чем кажется.

В группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения (число и месяц) хотя бы у двух людей превышает 0.5

Парадокс дней рождения

- Рассмотрим год длинной в 365 дней
- Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- Тогда дни рождения n человек можно представить последовательностью из n чисел
- Сколько возможно таких последовательностей?

  размещения с повторениями:

Парадокс дней рождения

- Рассмотрим год длинной в 365 дней
- Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- Тогда дни рождения n человек можно представить последовательностью из n чисел
- Сколько возможно таких последовательностей?

  размещения с повторениями:

$$\bar{A}_{365}^{n} = 365^{n}$$

Парадокс дней рождения

- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются

Парадокс дней рождения

- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^{n} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

- Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

Парадокс дней рождения

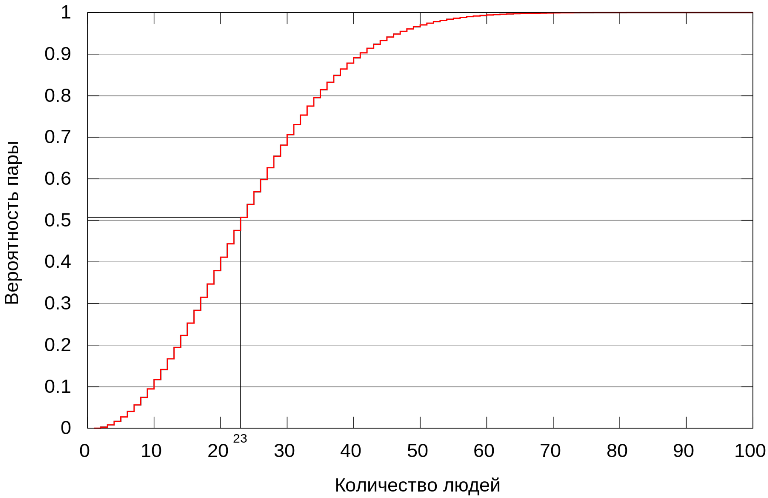
- Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^{n} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

- Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

$$P = \frac{\bar{A}_{365}^{n} - A_{365}^{n}}{\bar{A}_{365}^{n}}$$

Парадокс дней рождения



Outline

Геометрическая вероятность

- Если число всевозможных исходов бесконечно, то классическая формула вероятности неприменима
  например кубиковая прочность образца бетона может быть определена как 16.1 МПа, или 16.11, или 16.111 МПа и т.д.
- Тогда исход можно рассматривать как точку на отрезке
- Вместо числа благоприятствующих исходов можно используем отрезок содержащий значения соответствующих исходов
- Вместо общего числа исходов - отрезок содержащий значения всех возможных исходов

Геометрическая вероятность

$$P = \frac{l}{L}$$

l – длинна отрезка с благоприятствующими значениями
L – длинна отрезка со всеми возможными значениями.

Кроме того, вместо отрезков можно рассматривать площади, объёмы и т.д.

Геометрическая вероятность

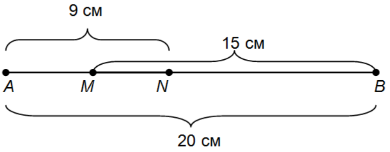
Пример

На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?

Геометрическая вероятность

Пример

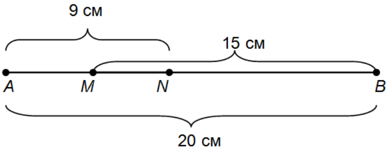
На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?



Геометрическая вероятность

Пример

На отрезке AB длиной 20 см наугад отметили точку C. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки A и не больше 15 см от точки B?



$$P = \frac{4}{20} = 0.2$$

Outline

Сложение

Суммой событий A и B называется событие C = A + B, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B, т. е. в наступлении события A, или события B, или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Полная группа событий

Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единице.

Противоположные события – два единственно возможных события образующих полную группу.

Независимые и зависимые события

Событие A называют **независимым** от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют **зависимым** от события B, если вероятность появления события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условная вероятность

Пусть A и B — зависимые события.
Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность события A, найденная в предположении, что событие B уже наступило.

Иногда условная вероятность обозначается так: $P_B(A)$

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?
$P(A|B)$

Условная вероятность

Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.
Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?
$P(A|B) = \frac{2}{4} = 0.5$

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример

Монету подбросили 2 раза.

Опишем элементарные события:
A_1 - выпадание решки в первом броске;
A_2 - выпадание решки в втором броске;

$\overline{A}_1$ – выпадание орла в первом броске;
$\overline{A}_2$ – выпадание орла в втором броске;

Тогда вероятности сложных событий

- $P(A_1 A_2) = 0.25$
- $P(A_1 \overline{A_2}) = 0.25$
- $P(\overline{A}_1 A_2) = 0.25$
- $P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = 0.25$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример

- $P(A_1A_2) = 0.25$
- $P(A_1\overline{A_2}) = 0.25$
- $P(\overline{A}_1A_2) = 0.25$
- $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = 0.25$

Тогда вероятность возникновения решки хотя бы один раз

$$P = P(A_1A_2) + P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A}_1A_2)$$

Все перечисленные выше события образуют полную группу, поэтому удобнее вычислить вероятность так:

$$P = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

$A_1, A_2, ..., A_n$ - независимые события;
Будем обозначать $\bar{A}_i$ - не появление события A_i

Тогда вероятность появления хотя бы одного событий $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 ... \bar{A}_n)$$

Outline

Монета подброшена 5 раз
Определить вероятность событий:

- A: результат всех бросков - "*оррор*"

  Все испытания – броски монеты, считаем независимыми.
  Пусть $p = 0.5$ – вероятность выпадения *решки*,
  тогда $q = 1 - p = 0.5$ – вероятность выпадения *орла*

Монета подброшена 5 раз
Определить вероятность событий:

- A: результат всех бросков - "*орроp*"

  Все испытания – броски монеты, считаем независимыми.
  Пусть $p = 0.5$ – вероятность выпадения *решки*,
  тогда $q = 1 - p = 0.5$ – вероятность выпадения *орла*

$$P(A) = qppqp = 0.5^5 = 0.03125$$

Стоит заметить, что задачу можно переформулировать, при этом решение не поменяется: было подброшено 5 пронумерованных монет, на первой выпал орёл, на второй решка, на третей решка, ...

Монета подброшена 5 раз
Определить вероятность событий:

- B: *орёл* выпал 2 раза

  Орёл мог выпасть 2 раза в серии испытаний в разное время в рамкох одной серии испытаний: *ooppp, opopp, oppop, opppo*, ...

  Применением формулу сложения вероятностей:
  $P(B) = P(ooppp) + P(opopp) + P(oppop) + P(opppo) + \dots$

Монета подброшена 5 раз
Определить вероятность событий:

- B: *орёл* выпал 2 раза

  Орёл мог выпасть 2 раза в серии испытаний в разное время в рамкох одной серии испытаний: *ooppp, opopp, oppop, opppo, ...*

  Применением формулу сложения вероятностей:
  $P(B) = P(ooppp) + P(opopp) + P(oppop) + P(opppo) + \dots$

  Все слагаемые в правой части формулы имеют одинаковые значение, подсчитаем их число.

Рассмотрим запись вида $x_1x_2x_3x_4x_5$, где x_i - либо $''p''$ либо $''o''$

Предположим, что все пять элементов - $''o''$. Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на $''p''$.

Рассмотрим запись вида $x_1x_2x_3x_4x_5$, где x_i - либо *"p"* либо *"o"*

Предположим, что все пять элементов - *"o"*. Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на *"p"*.

$$C_5^2 = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Рассмотрим запись вида $x_1x_2x_3x_4x_5$, где x_i - либо *"p"* либо *"o"*

Предположим, что все пять элементов - *"o"*. Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на *"p"*.

$$C_5^2 = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Наконец можно записать короткую формулу вероятности события B:

$$P(B) = C_5^2 p^2 (1-p)^3$$

Схема Бернулли

- Каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей.
- Независимость испытаний: результат очередного эксперимента не должен зависеть от результатов предыдущих экспериментов.
- Вероятность успеха должна быть постоянной (фиксированной) для всех испытаний.

Вероятность того, что в n испытаниях событие произойдёт ровно k раз

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

p – вероятность появления события в единичном испытании
q – вероятность *не* появления события в единичном испытании

Схема Бернулли

Пример 1

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.9.
В группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует 15 человек из 25.
Определить вероятность этого события.

Схема Бернулли

Пример 1

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.9.
В группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует 15 человек из 25.
Определить вероятность этого события.
$p = 0.9$ $q = 1 - p = 0.9$

$$P_{25}(15) = C_{25}^{15} \cdot 0.9^{15} \cdot 0.1^{10}$$

Схема Бернулли

Пример 2

Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.

Схема Бернулли

Пример 2

Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.

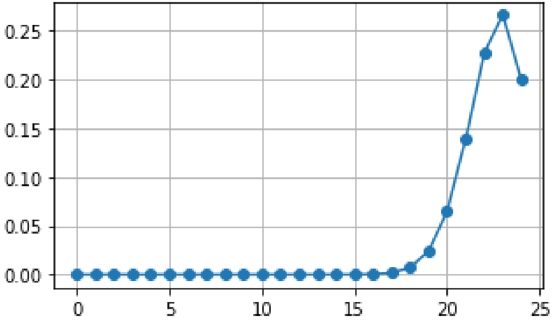
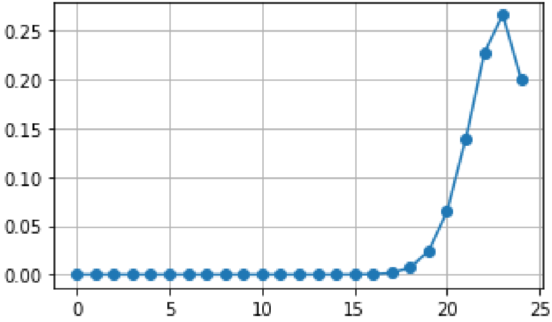


Схема Бернулли

Пример 2

Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.



Какое число присутствующих на занятии студентов наиболее вероятно?

Схема Бернулли

Пример 2

График для 100 человек

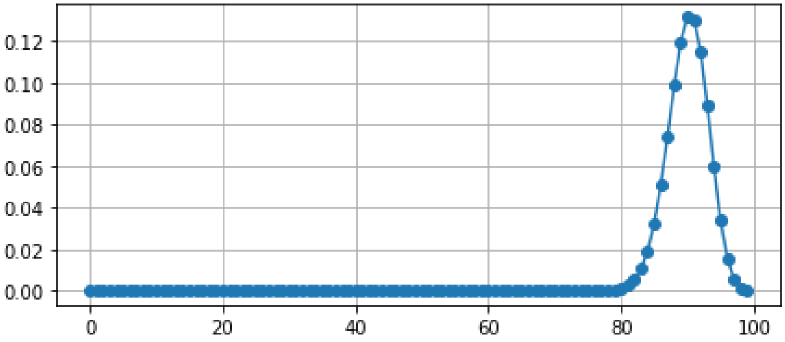
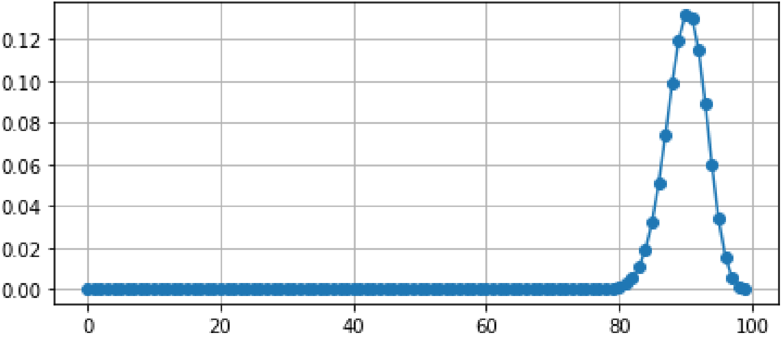


Схема Бернулли

Пример 2

График для 100 человек



Какое число присутствующих наиболее вероятно?

Схема Бернулли

Пример 3

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.95. Определить вероятность события: в группе СУС-16 на занятии по строительной механике присутствует от 20 до 25 человек, при полном составе группы в 25 человек.

Схема Бернулли

Пример 3

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.95. Определить вероятность события: в группе СУС-16 на занятии по строительной механике присутствует от 20 до 25 человек, при полном составе группы в 25 человек.

$$P_{25}(20 \leq k \leq 25) = P_{25}(20)+P_{25}(21)+P_{25}(22)+P_{25}(23)+P_{25}(24)+P_{25}(25)$$

Outline

Локальная теорема Лапласа

Формулу Бернулли трудно применять при больших значениях n и m

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}$$

Локальная теорема Лапласа

Однако можно использовать выражение взамен:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)(1 + \alpha_n(m))$$

где $|\alpha_n(m)| < \frac{c}{\sqrt{n}}$,
$c = \text{const} > 0$,
$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$
При $n \to \infty$, $|\alpha_n(m)| \to 0$

Локальная теорема Лапласа

При $n \to \infty$ используем приближённую формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$

Локальная теорема Лапласа

При $n \to \infty$ используем приближённую формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$

рекомендуется применять при n > 100 и при m > 20

Локальная теорема Лапласа

Пример

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

- 200 раз;
- 225 раз

Локальная теорема Лапласа

Пример

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

- 200 раз;
- 225 раз

$n = 400$
$m = 200$
$p = 0.5$

$x_{200} = \frac{200-400 \cdot 0.5}{\sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}$

$$P_{400}(200) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 400 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} exp(-x_{200}^2/2)$$

функция Гаусса

Чтобы быстро вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

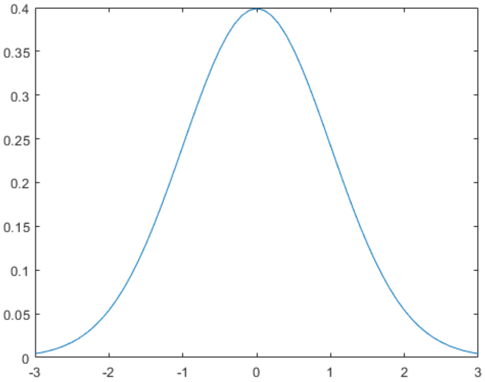
можно использовать таблицу значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

berdov.com/img/works/teorver/laplas_local/manual.68cb28.pdf

функция Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$



Для определения вероятности сложного события, например вероятности попадания экспериментально измеренного m_e в диапазон от m_1 до m_2 согласно теореме о сложении событий:

$$P(m_1 \leq m_e \leq m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} P_n(i)$$

Интегральная теорема Лапласа

Однако, если $npq > 10$ то можно использовать интегральную теорему Лапласа.

Если вероятность появления случайного события в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что в испытаниях событие наступит не менее и не более раз (от до раз включительно), приближённо равна:

$$P(m_1 < m_e < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$
$\Phi(x)$ - функция Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$$

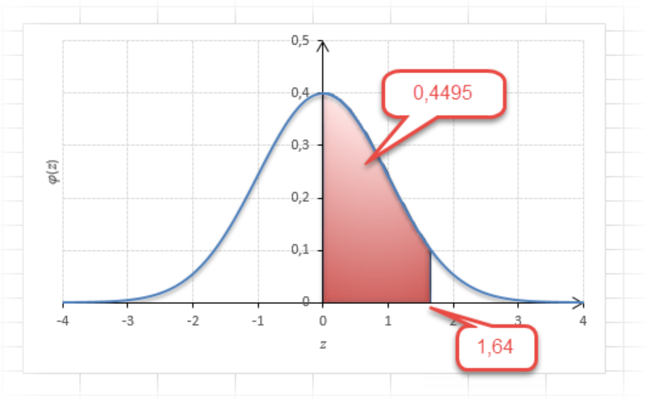
функция Лапласа

Если изменить пределы интегрирования

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

github.com/VetrovSV/ST/blob/master/z(phi0).pdf

Функция Гаусса и функция Лапласа



Синяя кривая - функция Гаусса
Красная площадь под кривой - функция Лапласа

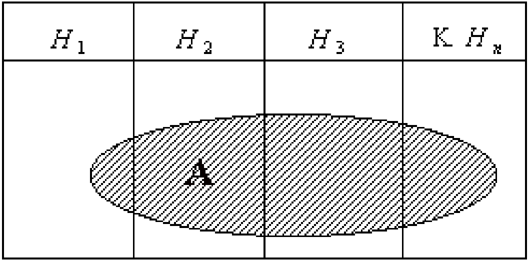
Outline

Гипотезы

Пусть событие может произойти только при выполнении одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу несовместных событий.

Эти события будем называть **гипотезами**.

Гипотезы и событие



Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может произойти только вместе с одним из событий $H_1, H_1, \ldots, H_n$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

Формула полной вероятности

Пример

- Продукция была закуплена у трёх предприятий.
  Процентный состав этой продукции на складе следующий:
  - 20% - продукция первого предприятия,
  - 30% - продукция второго предприятия,
  - 50% - продукция третьего предприятия;
- Каждое предприятие производит продукцию разного качества (высшего и обычного)
  - 10% продукции первого предприятия высшего сорта,
  - на втором предприятии - 5%
  - на третьем - 20% продукции высшего сорта.
- Найти вероятность того, что случайно выбранная со склада продукция окажется высшего сорта.

Формула полной вероятности

Пример

- Событие А: куплена продукция высшего сорта
- Гипотезы:
  - H_1 - выбрана продукция первого предприятия
  - H_2 - выбрана продукция второго предприятия
  - H_3 - выбрана продукция третьего предприятия
- Вероятности гипотез:

Формула полной вероятности

Пример

- Событие A: куплена продукция высшего сорта
- Гипотезы:
  - H_1 - выбрана продукция первого предприятия
  - H_2 - выбрана продукция второго предприятия
  - H_3 - выбрана продукция третьего предприятия
- Вероятности гипотез:
  - $P(H_1) = 0.2$
  - $P(H_2) = 0.3$
  - $P(H_3) = 0.5$

Формула полной вероятности

Пример

- Событие А: куплена продукция высшего сорта
- Гипотезы:
  - H_1 - выбрана продукция первого предприятия
  - H_2 - выбрана продукция второго предприятия
  - H_3 - выбрана продукция третьего предприятия
- Вероятности гипотез:
  - $P(H_1) = 0.2$
  - $P(H_2) = 0.3$
  - $P(H_3) = 0.5$
- Условные вероятности события А:
  - $P(H_1|A) = 0.1$
  - $P(H_2|A) = 0.05$
  - $P(H_3|A) = 0.2$

Формула полной вероятности

Пример

- Вероятности гипотез:

Формула полной вероятности

Пример

- Вероятности гипотез:
  - $P(H_1) = 0.2$
  - $P(H_2) = 0.3$
  - $P(H_3) = 0.5$

Формула полной вероятности

Пример

- Вероятности гипотез:
  - $P(H_1) = 0.2$
  - $P(H_2) = 0.3$
  - $P(H_3) = 0.5$
- Условные вероятности события A:
  - $P(A|H_1) = 0.1$
  - $P(A|H_2) = 0.05$
  - $P(A|H_3) = 0.2$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

Outline

Теорема Байеса

- Часто бывает необходимо выяснить не полную вероятность события, а по факту свершавшегося события узнать какое из событий (гипотез) к этому привело.
- В результатах испытаний бывают ошибки. Методы исследований выявляют то, чего нет (ложноположительный результат), и не выявляют то, что есть (ложноотрицательный результат)
  пример: результат анализа на рак
- Ложноположительные результаты искажают картину.
  Предположим, что требуется выявить какой-то очень редкий феномен (1 случай на 1000000). Вероятнее всего, положительный результат метода будет на самом деле ложноположительным.

Теорема Байеса

Предположим, существует редкое смертельное заболевание, которое встречается в среднем у одного человека из миллиарда.

Существует лабораторный тест на наличие болезни:
$P(\text{тест } +|\text{болен}) = 0.999$
$P(\text{тест } +|\text{здоров}) = 0.001$

Теорема Байеса

Предположим, существует редкое смертельное заболевание, которое встречается в среднем у одного человека из миллиарда.

Существует лабораторный тест на наличие болезни:
$P(\text{тест } +|\text{болен}) = 0.999$
$P(\text{тест } +|\text{здоров}) = 0.001$

Плохая новость: тест показывает, что вы больны.

Теорема Байеса

Предположим, существует редкое смертельное заболевание, которое встречается в среднем у одного человека из миллиарда.

Существует лабораторный тест на наличие болезни:
$P(\text{тест } + | \text{болен}) = 0.999$
$P(\text{тест } + | \text{здоров}) = 0.001$

Плохая новость: тест показывает, что вы больны.
Стоит волноваться?

Теорема Байеса

Нужно учесть, что на вероятность некоторого события влияет не только вероятность его возникновения в эксперименте на одном объекте, но и вероятность встретить объект с проверяемыми свойствами.

Теорема Байеса

Вероятность того, что событие H_i из множества возможных $H_1, H_2, ..., H_n$ стало причиной возникновения события A

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Теорема Байеса

Пример

На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов первого завода составляет 25%, второго - 60%, третьего - 15%. Известно также, что средний процент телефонов без брака для первой фабрики составляет 2%, второй - 4%, третьей - 1%.

Найти вероятность того, что наугад выбраннный телефон изготовлен на первом заводе, если он бракованный

- Событие A - телефон бракованный
- Гипотезы:
  - H_1 - выбранный телефон изготовлен на заводе 1
  - H_2 - выбранный телефон изготовлен на заводе 2
  - H_3 - выбранный телефон изготовлен на заводе 3

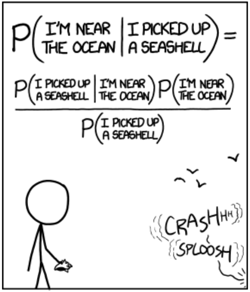
$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Теорема Байеса

Пример

- Вероятности гипотезы:
  - $P(H_1) = 0.25$
  - $P(H_2) = 0.6$
  - $P(H_3) = 0.15$
- Условная вероятность события A если верна гипотеза
  - $P(A|H_1) = 0.25$
  - $P(A|H_2) = 0.6$
  - $P(A|H_3) = 0.15$

Теорема Байеса



STATISTICALLY SPEAKING, IF YOU PICK UP A SEASHELL AND *DON'T* HOLD IT TO YOUR EAR, YOU CAN PROBABLY HEAR THE OCEAN.

Outline

Источники

- Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095
- Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0

Ссылки

Материалы курса

github.com/VetrovSV/ST