

# Теория вероятностей

## Случайные события

### Черновик

Кафедра СМиМ

2019

# План

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Теория вероятностей

**Теория вероятностей** - раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: *случайные события*, *случайные величины*, их свойства и операции над ними

# Теория вероятностей

- ▶ Анализ азартных игр (кости, рулетка, ... )
- ▶ Начало теории вероятности - набор эмпирических фактов
- ▶ XVII век - формализация знаний и применение математического аппарата

# Теория вероятностей

- ▶ Как связать вероятность возникновения события и частоту его возникновения?
- ▶ Что если одно случайное событие является причиной другого?
- ▶ Как по возникновению одного случайного события узнать произошло ли другое?
- ▶ Что если повторять опыты в которых происходят случайные события?

# Вероятность

**Вероятность** — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

- ▶ Безразмерная величина<sup>1</sup>
- ▶ Лежит на отрезке  $[0,1]$

---

<sup>1</sup>не проценты!

# Outline

## Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

- ▶ Достоверные  $\Omega$
- ▶ Случайные  
Обозначаются большими латинскими буквами:  $A, B, \dots$
- ▶ Невозможные  $\emptyset$



# Случайные события

## Примеры

- ▶ Выпадение 6 очков на игральной кости
- ▶ Выпадение 1 или 2 очков на игральной кости
- ▶ Выпадение более 3-х очков на игральной кости
- ▶ Начало пары вовремя (с точностью до минуты)
- ▶ Присутствие всей группы СУС-15 на паре по сопротивлению материалов
- ▶ Выпадение 5 сантиметров снега в Чите в феврале 2019 года
- ▶ Разрушение кубика бетона класса В30 под действием под давлением 30 МПа в результате испытания на прочность.

- ▶ Примеры достоверных событий?

# События

- ▶ Примеры достоверных событий?
- ▶ Примеры невозможных событий?

# Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно<sup>2</sup>?

---

<sup>2</sup>порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

# Случайные события

Что если событие случайно, но маловероятно<sup>2</sup>?

**Практически невозможным событием называют событие, вероятность которого не выше определённой наперёд заданной величины.**

Можно считать, что практически невозможное событие не произойдёт в *единичном* испытании.

---

<sup>2</sup>порог маловероятности события зависит от условий. Где важно меньше ошибиться, при подсчёте лампочек или парашютов?

# Случайные события

## Принцип практической невозможности маловероятных событий

*Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в **единичном** испытании это событие не наступит.*

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определённой задаче) событие можно считать практически невозможным, называют **уровнем значимости**.

На практике обычно в ряде задач принимают уровни значимости, заключенные между вероятностями 0,01 и 0,05.

# Испытание

Испытанием в теории вероятностей называют какой-нибудь эксперимент (не обязательно научный).

**Испытание** - это эксперимент, проводимый над объектом в комплексе определенных условий.

В испытании могут происходить (или не происходить) *события*.

Бросок монетки - *испытание*, выпадение орла - *событие*.

# Виды событий

- ▶ Несовместные  
Появление одного события исключает появление других в одном и том же испытании
- ▶ Полная группа событий  
в результате испытания появится хотя бы одно из событий
- ▶ Равновозможные  
ни одно из событий не является объективно более возможным чем другое

**Случаи (шансы)** - несовместные, образующие полную группу, равновозможные события.



# Виды событий

Примеры?

- ▶ Несовместные
- ▶ Полная группа событий
- ▶ Равновозможные

# Outline

Случайные события

**Классическая формула вероятности**

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Классическая формула вероятности

**Элементарный исход** - каждый из возможных результатов испытания

# Классическая формула вероятности

**Элементарный исход** - каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- ▶ Выпадение 1 очка на игральной кости
- ▶ Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

# Классическая формула вероятности

**Элементарный исход** - каждый из возможных результатов испытания

Примеры элементарного исхода:

- ▶ Выпадение 1 очка на игральной кости
- ▶ Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары

Примеры события:

- ▶ Выпадение 1 очка на игральной кости
- ▶ Выпадение более 4-х очков на игральной кости
- ▶ Присутствие 20 студентов в аудитории на момент начала пары
- ▶ Присутствие от 10 до 20 студентов в аудитории на момент начала пары

# Классическая формула вероятности

$$P = \frac{M}{N}$$

N - общее число испытаний

M - число благоприятствующих исходов

# Классическая формула вероятности

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

# Классическая формула вероятности

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

- ▶ Обозначим события:
  - ▶ A - вынут белый шар;
  - ▶ B - вынут чёрный шар;



# Классическая формула вероятности

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

► Обозначим события:

- A - вынут белый шар;
- B - вынут чёрный шар;

►  $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$   
 $P(B) = \frac{3}{5} = 0.6;$

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

**Некоторые формулы из комбинаторики**

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Комбинаторика

**Комбинаторика** (комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

**Комбинаторика** — раздел математики, изучающий всевозможные перестановки элементов.

# Комбинаторика

- ▶ Сколько возможно создать паролей из букв и цифр длиной 8?
- ▶ Сколько различных сэндвичей можно приготовить в subway?
- ▶ Сколькими способам можно рассадить группу из 28 человек в аудитории?

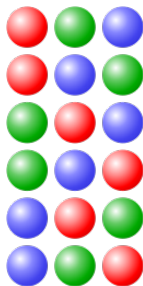
# Перестановки

Множество всевозможных комбинаций полученных путём перестановки из  $n$  элементов.

$$P_n = A_n^n = n!$$

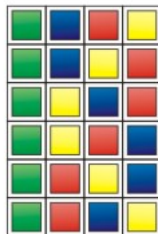
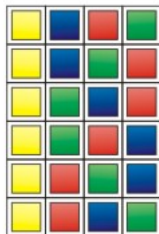
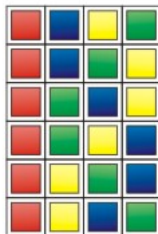
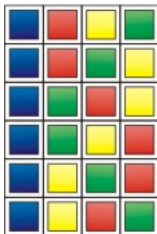
- ▶ Одна комбинация от другой отличается только порядком элементов
- ▶ Состав одинаковый
- ▶ Элементы при перестановке не повторяются

# Перестановки



Перестановки 4 элементов

# Перестановки



# Перестановки

## Пример

Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?



# Перестановки

## Пример

Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 пар?

$$P = 5! = 150$$

# Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

# Перестановки

Что если нужно разместить элементы в пространстве не в линейном порядке, а например на прямоугольной сетке?

Легко перейти от произвольного размещения в пространстве к размещению линейному (в ряд) если пронумеровать все места в пространстве от 1 до  $k$ .

# Сочетания

Множество всевозможных комбинаций из  $n$  элементов по  $k$  элементов

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- ▶ Комбинации отличаются друг от друга составом
- ▶ Порядок элементов не важен
- ▶ Элементы не повторяются

В англ. литературе и ПО сочетания обозначается как  $nCr$

# Сочетания



Сочетания из 4 по 2

# Сочетания

## Пример

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

# Сочетания

## Пример

Сколькими способами можно выбрать двух студентов из 25?

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25}{2! \cdot 23!} = 300$$

# Размещения

Число всевозможных комбинаций из  $n$  элементов по  $k$

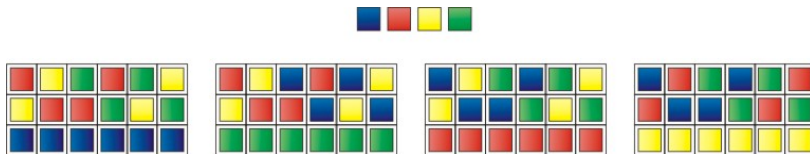
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ▶ Комбинации отличаются друг от друга составом
- ▶ Комбинации отличаются друг от друга порядком
- ▶ Элементы не повторяются

Размещения - это сочетания, где порядок элементов имеет значение  
В англ. литературе и ПО размещения обозначается как  $nPr$



# Размещения



Размещения из 4 по 3

Варианты размещений приведены в столбцах

# Размещения

## Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

# Размещения

## Пример

Сколькими способами можно составить расписание на один день недели, если на неделю предусмотрено 18 пар, а именно в день должно быть ровно 3 пары?

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896$$

# Размещения с повторениями

Число всевозможных комбинаций из  $n$  элементов по  $k$

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

- ▶ Комбинации отличаются друг от друга составом
- ▶ Комбинации отличаются друг от друга порядком
- ▶ Элементы могут повторяться

# Размещения с повторениями

## Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длиной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.

Сколько существует возможных паролей?

# Размещения с повторениями

## Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длиной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.

Сколько существует возможных паролей?

$$n = 10 \quad k = 12$$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью  $2 \cdot 10^6$ ?

$$10^{12} / 2000000 = 500000.0 \text{ секунд} \approx 139 \text{ дней}$$

# Размещения с повторениями

## Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длиной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.

Сколько существует возможных паролей?

$$n = 10 \quad k = 12$$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью  $2 \cdot 10^6$ ?

$$10^{12} / 2000000 = 500000.0 \text{ секунд} \approx 139 \text{ дней}$$

А что если длинна пароля 8 - цифр?

# Размещения с повторениями

## Пример

Пароль от WiFi сети вашего соседа длиной 12 символов и, как вы выяснили, состоит только из цифр.

Сколько существует возможных паролей?

$$n = 10 \quad k = 12$$

$$\bar{A}_{10}^{12} = 10^{12}$$

Сколько времени в худшем случае займёт перебор пароля если ваш компьютер способен подбирать их со скоростью  $2 \cdot 10^6$ ?

$$10^{12} / 2000000 = 500000.0 \text{ секунд} \approx 139 \text{ дней}$$

А что если длинна пароля 8 - цифр?

$$A_{10}^8 = 10^8$$

$$10^8 / 2000000 = 50 \text{ секунд}$$



# Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- ▶ В сочетаниях важен состав, а не порядок
- ▶ Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- ▶ То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

# Связь между размещениями, перестановками и сочетаниями

- ▶ В сочетаниях важен состав, а не порядок
- ▶ Если учесть порядок в каждом отдельном сочетании
- ▶ То получим сочетания с порядком, т.е. размещения

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

## Правило сложения (правило «или»)

Если элемент  $A$  можно выбрать  $n$  способами, а элемент  $B$  можно выбрать  $m$  способами, то выбрать  $A$  **или**  $B$  можно  $n + m$  способами.

## Правило умножения (правило «и»)

Если элемент  $A$  можно выбрать  $n$  способами, и при любом выборе  $A$  элемент  $B$  можно выбрать  $m$  способами, то **пару**  $(A, B)$  можно выбрать  $nm$  способами.

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Парадокс дней рождения

Вероятность совпадения дней рождения в группе из  $n$  человек хотя бы у двоих больше, чем кажется.

В группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения (число и месяц) хотя бы у двух людей превышает 0.5

# Парадокс дней рождения

- ▶ Рассмотрим год длиной в 365 дней
- ▶ Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- ▶ Тогда дни рождения  $n$  человек можно представить последовательностью из  $n$  чисел
- ▶ Сколько возможно таких последовательностей? размещения с повторениями:

# Парадокс дней рождения

- ▶ Рассмотрим год длиной в 365 дней
- ▶ Будем обозначать день рождения порядковым номером этого дня в году
- ▶ Тогда дни рождения  $n$  человек можно представить последовательностью из  $n$  чисел
- ▶ Сколько возможно таких последовательностей?  
размещения с повторениями:

$$\bar{A}_{365}^n = 365^n$$



# Парадокс дней рождения

- ▶ Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- ▶ Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- ▶ Число последовательностей где числа не повторяются

# Парадокс дней рождения

- ▶ Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- ▶ Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- ▶ Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^n = \frac{365!}{(365 - n)!}$$

- ▶ Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

# Парадокс дней рождения

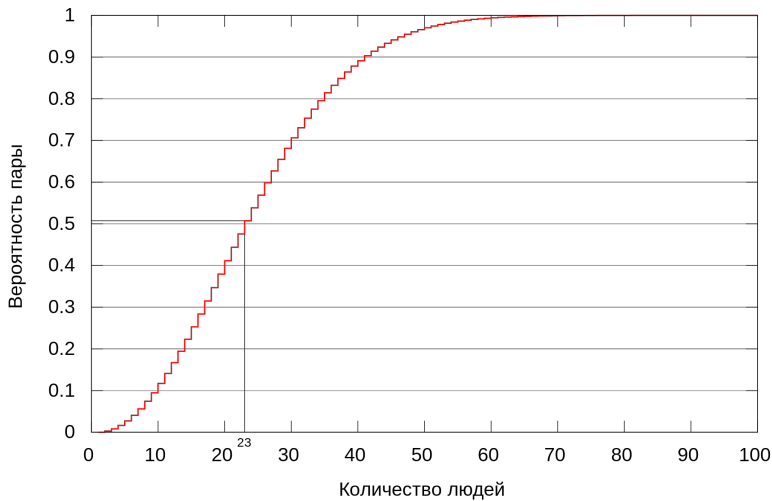
- ▶ Совпадение дней рождения означает, что два или более числа в последовательности повторяются
- ▶ Чтобы определить число таких последовательностей с повторениями, определим число последовательностей без повторений. Затем вычтем из общего числа
- ▶ Число последовательностей где числа не повторяются - это число размещений без повторений

$$A_{365}^n = \frac{365!}{(365 - n)!}$$

- ▶ Вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек

$$P = \frac{\bar{A}_{365}^n - A_{365}^n}{\bar{A}_{365}^n}$$

# Парадокс дней рождения



# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

**Геометрическая вероятность**

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Геометрическая вероятность

- ▶ Если число всевозможных исходов бесконечно, то классическая формула вероятности неприменима  
например кубиковая прочность образца бетона может быть определена как 16.1 МПа, или 16.11, или 16.111 МПа и т.д.
- ▶ Тогда исход можно рассматривать как точку на отрезке
- ▶ Вместо числа благоприятствующих исходов можно используем отрезок содержащий значения соответствующих исходов
- ▶ Вместо общего числа исходов - отрезок содержащий значения всех возможных исходов

# Геометрическая вероятность

$$P = \frac{l}{L}$$

$l$  - длина отрезка с благоприятствующими значениями

$L$  - длина отрезка со всеми возможными значениями.

Кроме того, вместо отрезков можно рассматривать площади, объёмы и т.д.

# Геометрическая вероятность

## Пример

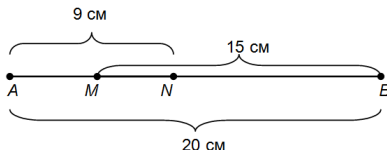
На отрезке АВ длиной 20 см наугад отметили точку С. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки А и не больше 15 см от точки В?



# Геометрическая вероятность

## Пример

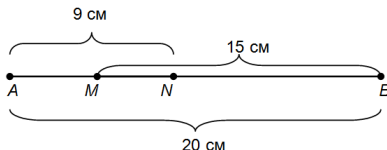
На отрезке  $AB$  длиной 20 см наугад отметили точку  $C$ . Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки  $A$  и не больше 15 см от точки  $B$ ?



# Геометрическая вероятность

## Пример

На отрезке АВ длиной 20 см наугад отметили точку С. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки А и не больше 15 см от точки В?



$$P = \frac{4}{20} = 0.2$$

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

Суммой событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C = A + B$ , состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий  $A$  или  $B$ , т. е. в наступлении события  $A$ , или события  $B$ , или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Вероятность суммы двух несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

# Полная группа событий

Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единице.

**Противоположные события** - два единственно возможных события образующих полную группу.

# Независимые и зависимые события

Событие  $A$  называют **независимым** от события  $B$ , если вероятность появления события  $A$  не зависит от того, произошло событие  $B$  или нет.

Событие  $A$  называют **зависимым** от события  $B$ , если вероятность появления события  $A$  меняется в зависимости от того, произошло событие  $B$  или нет.

# Условная вероятность

Пусть  $A$  и  $B$  — зависимые события.

Условной вероятностью  $P(A|B)$  события  $A$  называется вероятность события  $A$ , найденная в предположении, что событие  $B$  уже наступило.

Иногда условная вероятность обозначается так:  $P_B(A)$

# Условная вероятность

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.



# Условная вероятность

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- ▶  $A$  - вынут белый шар;
- ▶  $B$  - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?

# Условная вероятность

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- ▶ A - вынут белый шар;
- ▶ B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?

$$P(A|B)$$

# Условная вероятность

## Пример

В урне 2 белых шара и 3 чёрных. Определить вероятность вынуть белый шар и вынуть черный шар.

Найти вероятность вынуть белый шар, если перед ним был вынут чёрный.

Обозначим события:

- ▶ A - вынут белый шар;
- ▶ B - вынут чёрный шар;

Как обозначить вероятность условного события?

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = 0.5$$

# Умножение

## Зависимые события

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

# Умножение

## Независимые события

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

# Вероятность появления хотя бы одного события

## Пример

Монету подбросили 2 раза.

Опишем элементарные события:

$A_1$  - выпадание решки в первом броске;

$A_2$  - выпадание решки в втором броске;

$\bar{A}_1$  - выпадание орла в первом броске;

$\bar{A}_2$  - выпадание орла в втором броске;

Тогда вероятности сложных событий

►  $P(A_1 A_2) = 0.25$

►  $P(A_1 \bar{A}_2) = 0.25$

►  $P(\bar{A}_1 A_2) = 0.25$

►  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 0.25$

# Вероятность появления хотя бы одного события

## Пример

- ▶  $P(A_1 A_2) = 0.25$
- ▶  $P(A_1 \bar{A}_2) = 0.25$
- ▶  $P(\bar{A}_1 A_2) = 0.25$
- ▶  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 0.25$

Тогда вероятность возникновения решки хотя бы один раз

$$P = P(A_1 A_2) + P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2)$$

Все перечисленные выше события образуют полную группу, поэтому удобнее вычислить вероятность так:

$$P = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2)$$

## Вероятность появления хотя бы одного события

$A_1, A_2, \dots, A_n$  - независимые события;

Будем обозначать  $\bar{A}_i$  - не появление события  $A_i$

Тогда вероятность появления хотя бы одного событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$P = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)$$



# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

**Схема Бернулли**

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

Монета подброшена 5 раз  
Определить вероятность событий:

- ▶ А: результат всех бросков - "*оррор*"

Все испытания - броски монеты, считаем независимыми.  
Пусть  $p = 0.5$  - вероятность выпадения *решки*,  
тогда  $q = 1 - p = 0.5$  - вероятность выпадения *орла*

Монета подброшена 5 раз  
Определить вероятность событий:

- ▶ A: результат всех бросков - "*оррор*"

Все испытания - броски монеты, считаем независимыми.  
Пусть  $p = 0.5$  - вероятность выпадения *решки*,  
тогда  $q = 1 - p = 0.5$  - вероятность выпадения *орла*

$$P(A) = qrrqr = 0.5^5 = 0.03125$$

Стоит заметить, что задачу можно переформулировать, при этом решение не поменяется: было подброшено 5 пронумерованных монет, на первой выпал орёл, на второй решка, на третьей решка, ....

Монета подброшена 5 раз  
Определить вероятность событий:

- В: *орёл* выпал 2 раза

Орёл мог выпасть 2 раза в серии испытаний в разное время в рамках одной серии испытаний: *oorrrr, ororrr, orrror, orrrro, ...*

Применением формулу сложения вероятностей:

$$P(B) = P(oorrrr) + P(ororrr) + P(orrror) + P(orrrro) + \dots$$

Монета подброшена 5 раз  
Определить вероятность событий:

- В: *орёл* выпал 2 раза

Орёл мог выпасть 2 раза в серии испытаний в разное время в рамках одной серии испытаний: *oorrrr, ororrr, orrror, orrrro, ...*

Применением формулу сложения вероятностей:

$$P(B) = P(oorrrr) + P(ororrr) + P(orrror) + P(orrrro) + \dots$$

Все слагаемые в правой части формулы имеют одинаковые значение, подсчитаем их число.

Рассмотрим запись вида  $x_1x_2x_3x_4x_5$ , где  $x_i$  - либо "р" либо "о"

Предположим, что все пять элементов - "о". Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на "р".

Рассмотрим запись вида  $x_1x_2x_3x_4x_5$ , где  $x_i$  - либо "р" либо "о"

Предположим, что все пять элементов - "о". Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на "р".

$$C_5^2 = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Рассмотрим запись вида  $x_1x_2x_3x_4x_5$ , где  $x_i$  - либо "р" либо "о"

Предположим, что все пять элементов - "о". Нужно подсчитать, сколькими способами можно выбрать 2 элемента чтобы изменить их на "р".

$$C_5^2 = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Наконец можно записать короткую формулу вероятности события В:

$$P(B) = C_5^2 p^2 (1-p)^3$$



# Схема Бернулли

- ▶ Каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей.
- ▶ Независимость испытаний: результат очередного эксперимента не должен зависеть от результатов предыдущих экспериментов.
- ▶ Вероятность успеха должна быть постоянной (фиксированной) для всех испытаний.

Вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие произойдёт ровно  $k$  раз

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$p$  - вероятность появления события в единичном испытании

$q$  - вероятность *не* появления события в единичном испытании

# Схема Бернулли

## Пример 1

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.9.

В группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует 15 человек из 25.

Определить вероятность этого события.

# Схема Бернулли

## Пример 1

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.9.

В группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует 15 человек из 25.

Определить вероятность этого события.

$$p = 0.9 \quad q = 1 - p = 0.9$$

$$P_{25}(15) = C_{25}^{15} \cdot 0.9^{15} \cdot 0.1^{10}$$

# Схема Бернулли

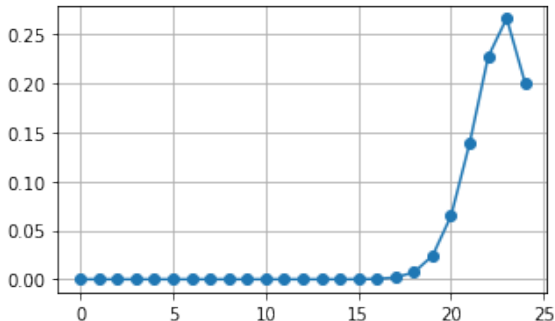
## Пример 2

Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.

# Схема Бернулли

## Пример 2

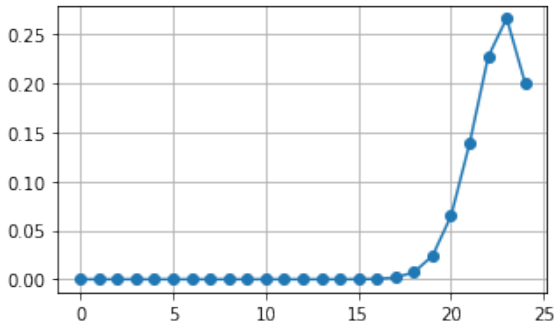
Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.



# Схема Бернулли

## Пример 2

Определить вероятность для всех возможных значений числа студентов.

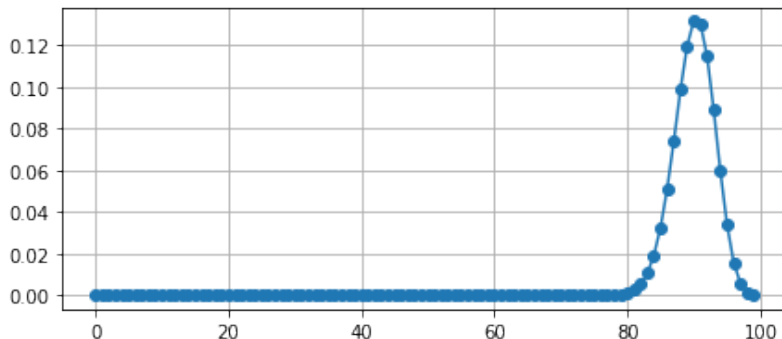


Какое число присутствующих на занятии студентов наиболее вероятно?

# Схема Бернулли

## Пример 2

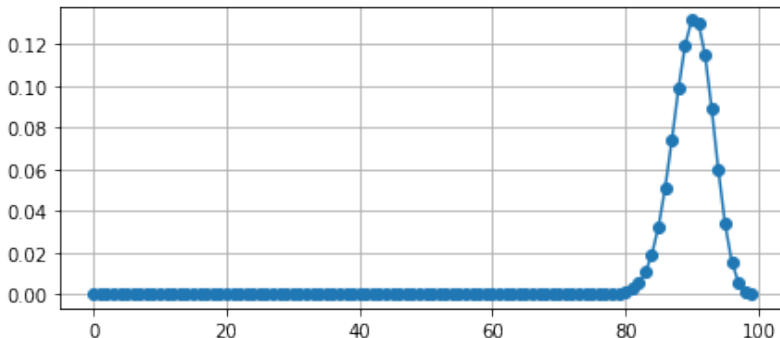
График для 100 человек



# Схема Бернулли

## Пример 2

График для 100 человек



Какое число присутствующих наиболее вероятно?



# Схема Бернулли

## Пример 3

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.95.

Определить вероятность события: в группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует от 20 до 25 человек, при полном составе группы в 25 человек.

# Схема Бернулли

## Пример 3

Пусть посещения отдельными студентами занятия - события независимые, вероятность каждого из которых равна 0.95.

Определить вероятность события: в группе СУС-15 на занятии по строительной механике присутствует от 20 до 25 человек, при полном составе группы в 25 человек.

$$P_{25}(20 \leq k \leq 25) = P_{25}(20) + P_{25}(21) + P_{25}(22) + P_{25}(23) + P_{25}(24) + P_{25}(25)$$

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Локальная теорема Лапласа

Формулу Бернулли трудно применять при больших значениях  $n$  и  $m$

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

# Локальная теорема Лапласа

Однако можно использовать выражение взамен:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right) (1 + \alpha_n(m))$$

где  $|\alpha_n(m)| < \frac{c}{\sqrt{n}}$ ,

$c = \text{const} > 0$ ,

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

При  $n \rightarrow \infty$ ,  $|\alpha_n(m)| \rightarrow 0$

# Локальная теорема Лапласа

При  $n \rightarrow \infty$  используем приближённую формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

# Локальная теорема Лапласа

При  $n \rightarrow \infty$  используем приближённую формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

рекомендуется применять при  $n > 100$  и при  $m > 20$

# Локальная теорема Лапласа

## Пример

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

- ▶ 200 раз;
- ▶ 225 раз



# Локальная теорема Лапласа

## Пример

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

- ▶ 200 раз;
- ▶ 225 раз

$$n = 400$$

$$m = 200$$

$$p = 0.5$$

$$x_{200} = \frac{200 - 400 \cdot 0.5}{\sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}$$

$$P_{400}(200) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 400 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \exp(-x_{200}^2/2)$$

# функция Гаусса

Чтобы быстро вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

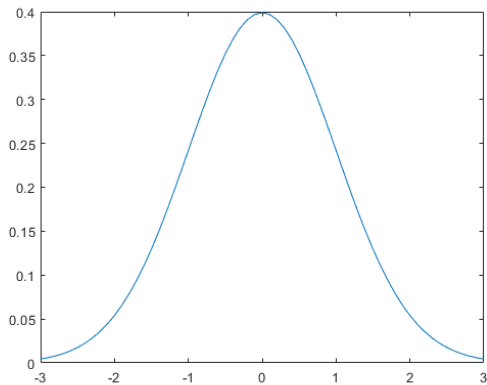
можно использовать таблицу значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$$

[berdov.com/img/works/teorver/laplas\\_local/manual.68cb28.pdf](http://berdov.com/img/works/teorver/laplas_local/manual.68cb28.pdf)

# функция Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$$



Для определения вероятности сложного события, например вероятности попадания экспериментально измеренного  $m_e$  в диапазон от  $m_1$  до  $m_2$  согласно теореме о сложении событий:

$$P(m_1 \leq m_e \leq m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} P_n(i)$$

# Интегральная теорема Лапласа

Однако, если  $npq > 10$  то можно использовать интегральную теорему Лапласа.

Если вероятность появления случайного события в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что в испытаниях событие наступит не менее и не более раз (от до раз включительно), приближённо равна:

$$P(m_1 < m_e < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где  $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x)$  - функция Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

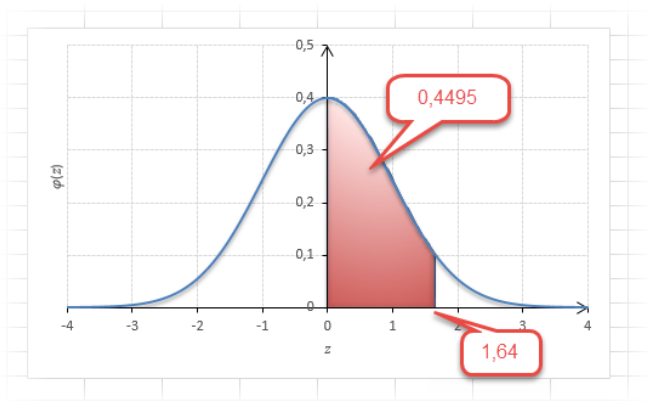
# функция Лапласа

Если изменить пределы интегрирования

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

[github.com/VetrovSV/ST/blob/master/z\(phi0\).pdf](https://github.com/VetrovSV/ST/blob/master/z(phi0).pdf)

# Функция Гаусса и функция Лапласа



Синяя кривая - функция Гаусса

Красная площадь под кривой - функция Лапласа

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

**Формула полной вероятности**

Теорема Байеса

Ссылки

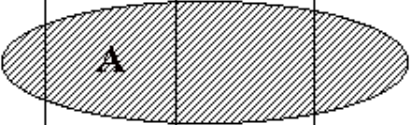


# Гипотезы

Пусть событие  $A$  может произойти только при выполнении одного из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , которые образуют полную группу несовместных событий.

Эти события будем называть **гипотезами**.

## Гипотезы и событие

$H_1$	$H_2$	$H_3$	$\dots H_n$
			

# Формула полной вероятности

Вероятность события  $A$ , которое может произойти только вместе с одним из событий  $H_1, H_1, \dots, H_n$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_i) \mathbb{P}(H_i)$$

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Продукция была закуплена у трёх предприятий.  
Процентный состав этой продукции на складе следующий:
  - ▶ 20% - продукция первого предприятия,
  - ▶ 30% - продукция второго предприятия,
  - ▶ 50% - продукция третьего предприятия;
- ▶ Каждое предприятие производит продукцию разного качества (высшего и обычного)
  - ▶ 10% продукции первого предприятия высшего сорта,
  - ▶ на втором предприятии - 5%
  - ▶ на третьем - 20% продукции высшего сорта.
- ▶ Найти вероятность того, что случайно выбранная со склада продукция окажется высшего сорта.

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Событие  $A$ : куплена продукция высшего сорта
- ▶ Гипотезы:
  - ▶  $H_1$  - выбрана продукция первого предприятия
  - ▶  $H_2$  - выбрана продукция второго предприятия
  - ▶  $H_3$  - выбрана продукция третьего предприятия
- ▶ Вероятности гипотез:

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Событие A: куплена продукция высшего сорта
- ▶ Гипотезы:
  - ▶  $H_1$  - выбрана продукция первого предприятия
  - ▶  $H_2$  - выбрана продукция второго предприятия
  - ▶  $H_3$  - выбрана продукция третьего предприятия
- ▶ Вероятности гипотез:
  - ▶  $P(H_1) = 0.2$
  - ▶  $P(H_2) = 0.3$
  - ▶  $P(H_3) = 0.5$

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Событие A: куплена продукция высшего сорта
- ▶ Гипотезы:
  - ▶  $H_1$  - выбрана продукция первого предприятия
  - ▶  $H_2$  - выбрана продукция второго предприятия
  - ▶  $H_3$  - выбрана продукция третьего предприятия
- ▶ Вероятности гипотез:
  - ▶  $P(H_1) = 0.2$
  - ▶  $P(H_2) = 0.3$
  - ▶  $P(H_3) = 0.5$
- ▶ Условные вероятности события A:
  - ▶  $P(H_1|A) = 0.1$
  - ▶  $P(H_2|A) = 0.05$
  - ▶  $P(H_3|A) = 0.2$

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Вероятности гипотез:



# Формула полной вероятности

## Пример

► Вероятности гипотез:

►  $P(H_1) = 0.2$

►  $P(H_2) = 0.3$

►  $P(H_3) = 0.5$

# Формула полной вероятности

## Пример

- ▶ Вероятности гипотез:
  - ▶  $P(H_1) = 0.2$
  - ▶  $P(H_2) = 0.3$
  - ▶  $P(H_3) = 0.5$
- ▶ Условные вероятности события A:
  - ▶  $P(A|H_1) = 0.1$
  - ▶  $P(A|H_2) = 0.05$
  - ▶  $P(A|H_3) = 0.2$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \mathbb{P}(H_i)$$

# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

# Теорема Байеса

- ▶ Часто бывает необходимо выяснить не полную вероятность события, а по факту свершившегося события узнать какое из событий (гипотез) к этому привело.
- ▶ В результатах испытаний бывают ошибки. Методы исследований выявляют то, чего нет (ложноположительный результат), и не выявляют то, что есть (ложноотрицательный результат)  
пример: результат анализа на рак
- ▶ Ложноположительные результаты искажают картину. Предположим, что требуется выявить какой-то очень редкий феномен (1 случай на 1000000). Вероятнее всего, положительный результат метода будет на самом деле ложноположительным.

# Теорема Байеса

Нужно учесть, что на вероятность некоторого события влияет не только вероятность его возникновения в эксперименте на одном объекте, но и вероятность встретить объект с проверяемыми свойствами.

Если тест на наличие алкоголя в крови выше заданного значения ошибается в 5% случаев, а выпивший водитель попадает в одном случае из 500, то какова вероятность того, что тест ошибётся на трезвом водителе?

# Теорема Байеса

Вероятность того, что событие  $H_i$  из множества возможных  $H_1, H_2, \dots, H_n$  стало причиной возникновения события  $A$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A|H_j)}$$

# Теорема Байеса

## Пример

На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов первого завода составляет 25%, второго - 60%, третьего - 15%. Известно также, что средний процент телефонов без брака для первой фабрики составляет 2%, второй - 4%, третьей - 1%.

Найти вероятность того, что наугад выбранный телефон изготовлен на первом заводе, если он бракованный

- ▶ Событие  $A$  - телефон бракованный
- ▶ Гипотезы:
  - ▶  $H_1$  - выбранный телефон изготовлен на заводе 1
  - ▶  $H_2$  - выбранный телефон изготовлен на заводе 2
  - ▶  $H_3$  - выбранный телефон изготовлен на заводе 3

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A|H_j)}$$

# Теорема Байеса

## Пример

► Вероятности гипотезы:

►  $P(H_1) = 0.25$

►  $P(H_2) = 0.6$

►  $P(H_3) = 0.15$

Условная вероятность события А если верна гипотеза

► ►  $P(A|H_1) = 0.25$

►  $P(A|H_2) = 0.6$

►  $P(A|H_3) = 0.15$



# Outline

Случайные события

Классическая формула вероятности

Некоторые формулы из комбинаторики

Парадокс дней рождения

Геометрическая вероятность

Сложение и умножение вероятностей

Схема Бернулли

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Формула полной вероятности

Теорема Байеса

Ссылки

- ▶ Теория вероятностей и математическая статистика. Гмурман В.Е. [biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095](http://biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431095)
- ▶ Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В. Е. Гмурман. — 11-е изд., Издательство Юрайт, 2019. — 406 с [www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0](http://www.biblio-online.ru/book/02E0C1D3-4EEA-43AA-AA6B-5E25C4991D0)

Материалы курса

[github.com/VetrovSV/ST](https://github.com/VetrovSV/ST)