Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika
Kaja Vezenšek,Mojca Žilavec

Poker

Seminarska naloga pri predmetu finančni praktikum
Ljubljana, 6.11.2017

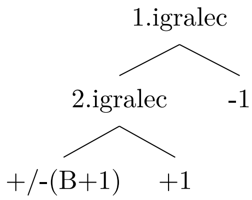
1 Uvod

Pri različici pokra z zveznimi vrednostmi igralci prejmejo naključne vrednosti z nekega intervala, ne pa tudi kart. V nadaljevanju bova predstavili modela z dvema igralcema, imenovana Borel in von Neumann. V teh modelih 1. igralec prejme vrednost X, ki ima enakomerno porazdelitev na intervalu [0,1], 2.igralec pa neodvisno vrednost Y z enako porazdelitvijo. Oba igralca poznata svoji vrednosti, nasprotnikove pa ne. Struktura igre je v obeh modelih enaka. Vsak igralec na začetku prispeva eno enoto (the ante). Nato se 1. igralec odloči ali bo stavil, in glede na njegovo odločitev se 2. igralec odloči ali stavo izenači (call) ali odstopi (fold). Če 2. igralec odstopi, 1. igralec zmaga in prejme eno enoto s strani 2. igralca. V primeru, če 2. igralec izenači, pride do razkritja vrednosti in zmaga tisti, ki ima večjo vrednost ter prejme znesek v višini B + 1, kjer B > 0 predstavlja znesek stave. Razlika med modeloma je v tem, kaj se zgodi, če 1. igralec odstopi, kar vam bova razložile v nadaljevanju.

Borelov model je prikaz slabega modela, saj 1. igralec takoj izgubi eno denarno enoto, če se odloči, da ne stavi (bet). Model von Neumann to točko izboljša. Presenetljivo pa je, da večina literature uporablja Borelov model, čeprav je von Neumannov model bolj učinkovit.

2 La Relance

V tej igri vsak igralec stavi eno enoto in prejme vrednost (hand) enakomerno porazdeljeno na intervalu [0,1]. 1. igralec lahko odstopi od igre in s tem preda igro ter izgubi eno denarno enoto, ali pa stavi znesek v višini B enot. Če 1. igralec stavi, ima 2. igralec dve možnosti, da odstopi in preda igro, ali pa izenači stavo. Temu sledi primerjava vrednosti, kjer zmaga tisti, ki drži »v rokah« višjo vrednost. Če velja X > Y zmaga 1. igralec, sicer zmaga 2. igralec. Primera, da sta X in Y enaka ne obravnavamo, saj je verjetnost, da imata igralca enaki vrednosti enaka 0.



Pravila igre najlažje predstavimo z drevesom igre. Na povezavah so zapisane odločitve, na koncu pa so zapisani zaslužki 1. igralca. V primeru zmage 1. igralca pri +/- vzamemo +, v nasprotnem primeru pa -.

Vrednost igre La Relance je $V(B)$ = - $\frac{B^2}{(B+2)^2}$. Ker je predznak negativen igra preferira 2. igralca. Optimalna strategija za 2. igralca je, da izenači, kadar je njegova vrednosti Y > c (pri čemer je $c \in [0, 1]$). Za 1. igralca je optimalno, da stavi, kadar je $X > c^2$. 2. igralec izbere tak c, da je 1. igralec, kadar ima vrednost X < c indiferenten med stavo in odstopom od igre. Če 1. igralec stavi glede na tak X, zasluži 2 enoti, če ima 2. igralec Y < c in izgubi B enot, če ima 2. igralec Y > c. Po drugi strani pa nič ne izgubi/pridobi, če odstopi. 1. igralec je indiferenten med stavo in odstopom, če velja 2c-B(1-c)=0. Iz tega sledi da je $c = \frac{B}{(B+2)}$.

Predpostavimo, da lahko 1. igralec za optimalno strategijo uporabi: če ima X > c, potem stavi, če pa ima X < c, potem se odloči med stavo in odstopom. Naj π predstavlja razmerje pri X < c, ko 1. igralec stavi/odstopi; potem je P(X < c|1. stavi) = cπ/(cπ+ (1-c)). 1. igralec izbere tak π, da bo 2. igralec indiferenten med odstopom in izenačenjem stave, ko ima Y = c. Če 2. igralec izenači stavo prejme B+2 enot z verjetnostjo P(X < c|1. stavi) in izgubi B enot z verjetnostjo P(X > c|1. stavi). Torej, če 2. igralec izenači, je njegov pričakovani zaslužek enak P(X < c|1. stavi)(B + 2) - P(X > c|1. stavi)B. Če odstopi ne dobi nič. 2. igralec je indiferenten, kadar velja (B + 2)cπ - B(1-c)=0. Rešitev enačbe je π = 1-c = 2/(B+2).

Če ima igra omejitev pologa (pot-limit), potem lahko igralec stavi oziramo poviša za največ toliko, kolikor je trenutno v pologu (pot). V La Relance-u je to največ B=2. Č je $c = \frac{1}{2}$, potem je optimalno za 1. igralca, da stavi v primeru X > $\frac{1}{4}$. 2. igralec stavi izenači, če je Y > $\frac{1}{2}$. Če 1.igralec stavi, kadar je X < c, ve, da bo v primeru izenačenja 2. igralca izgubil. Zato mora v tem primeru 1. igralec »blefirati« (bluff).

3 Von Neumannov model

V tem razdelku vam bova opisali von Neumannov model pokra. Med Borelovim in von Neumannovem modelom je glavna razlika ta da, če se 1. igralec odloči, da bo odstopil, to ne pomeni nujno, da izgubi že vloženo 1 denarno enoto. V tem modelu ima namreč 1. igralec namesto predaje, možnost primerjati svojo številko s številko 2. igralca, ali pa staviti B dodatnih enot. V primeru primerjave številk seveda zmaga tisti z višjo številko.

2. igralec ima tudi v tem modelu na razpolago enaki možnosti kot prej. Prva

je, da se preda in tako izgubi le 1 denarno enoto, druga pa je, da stavi in izenači stavo 1. igralca, pri čemer se nato njune številke primerjajo in tisti z boljšo zmaga.

Naš cilj je izvedeti optimalno strategijo za posameznega igralca. Vemo, da sta vhodna podatka slučajni spremenljivki X (za 1.igralca) in Y (za 2.igralca), pri čemer imata po naših predpostavkah obe enakomerno zvezno porazdelitev na intervalu [0,1]. Za 1. igralca iščemo optimalni števili a in b (pri čemer je a $<$ b). Igralec stavi dodatnih B enot v primeru, da je X $<$ a (v tem primeru uporabi strategijo blefiranja) ali pa X $>$ b (ko ima dejansko visoko številko). V primeru, ko a $<$ X $<$ b, pa igralec ne stavi in takoj primerja številko z nasprotnikom. Za 2. igralca bomo izračunali optimalno število c (pri čemer 0 $<$ a $<$ c $<$ b $<$ 1), ki bo povedalo kdaj bo iz igre odstopil (to bo naredil, če bo Y $<$ c), oziroma kdaj bo stavo 1. igralca izenačil in primerjal številki (to bo naredil, če bo Y $>$ c). 2. igralec se bo o svoji strategiji seveda odločal le v primeru, če je 1. igralec izbral, da bo stavo višal, v nasprotnem primeru se številki namreč takoj primerjata.

V primeru mejnih vrednosti a in b (t.j. X = a ali X = b) mora biti 1. igralec do obeh svojih strategij indiferenten, kar pomeni, da mu morata obe prinesti isti dobiček. Za 2.igralca imamo mejno vrednost samo eno (Y = c). Ob upoštevanju indiferenc posameznega igralca lahko dobimo enačbe, ki za posameznika določajo optimalno strategijo in so odvisne od vložene stave B:

$$a = \frac{B}{(B+1)(B+4)} \; b = \frac{B^2+4B+2}{(B+1)(B+4)} \; c = \frac{B(B+3)}{(B+1)(B+4)}$$

Iz zgornjih enačb lahko izračunamo tudi vrednost von Neumannove igre pokra v odvisnosti od višine stave. Dobimo naslednjo enačbo:

$$V(B) = \frac{B}{(B+1)(B+4)}$$

4 Nadaljnje delo

V nadaljevanju projekta, bova sprogramirali program, ki bo generiral naključne izide X in Y, pri čemer bosta imeli obe slučajni spremenljivki enakomerno porazdelitev intervalu [0,1]. Zanimalo naju bo, število zmag posameznega igralca pri velikem številu eksperimentov z različnimi višinami stav B, od katerih so odvisne same strategije obeh udeležencev. Prav tako, bova izračunali kakšna je pri posameznih vrednostih stav B, vrednost izplačila, ki ga dobi zmagovalec. S samim eksperimentom želiva dokazati, da von Neumannov model favorizira 1.igralca in Borelov model favorizira 2.igralca. To sklepava iz dejstva, da ima enačba za vrednost igre pozitiven/negativen predznak. Zanimivo je to, da lahko v Neumannovem modelu s pomočjo vrednosti V(B) izračunamo tudi optimalno stavo B za 1. igralca. To naredimo tako, da vrednost igre V(B) odvajamo in jo enačimo z nič. Iz dobljene enačbe nato izračunamo B in vidimo, da je rešitev te enačbe B=2. S pomočjo eksperimenta in programa bova poskusili dokazi, da taka stava 1. igralcu res prinaša največ dobička.

5 Literatura

- http://www.chrissnijders.com/eth/Ferguson.pdf