Considerata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

mediante operazioni elementari abbiamo trasformato A in

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

U ha una struttura detta "a gradini".

<u>DEFINIZIONE</u> $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è detta <u>"a gradini"</u> se: (1) il primo elemento non nullo di ogni riga si trova a destra del primo elemento non nullo della riga precedente; (2) eventuali righe nulle si trovano in fondo

alla matrice. Formalmente:

(1) $\forall\, i \geq 2: \ \min\{ j : U_{ij} \neq 0 \} > \min\{ j : U_{i-1,j} \neq 0 \}$

(2) se $\{ j : U_{ij} \neq 0 \} = \emptyset$, allora

$$\{ j : U_{kj} \neq 0 \} = \emptyset \text{ per ogni } k > i$$

__DEFINIZIONE.__ Se U è in forma a gradini, il primo elemento non nullo di ciascuna riga è detto __pivot__ oppure __elemento pivotale__.
Formalmente, per ogni $i \geq 1$,

$$U_{ij} \text{ è pivot se } j = \min\{ k : U_{kj} \neq 0 \}, \text{ dove }$$

$$\{ k : U_{kj} \neq 0 \} \neq \emptyset .$$

pivot

ESEMPIO: $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

gradini

DEFINIZIONI. Se U è a gradini, le colonne di U che contengono un pivot sono dette <u>colonne pivotali</u>. Le altre sono dette colonne <u>non pivotali</u>.

ESEMPIO PRECEDENTE
$$\begin{cases} \text{colonne pivotali} : 1, 2, 4 \\ \text{colonne non pivotali} : 3 \end{cases}$$

DEFINIZIONE. Se $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è a gradini ed è stata ottenuta da $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mediante operazioni elementari (fra righe), allora diremo che U è <u>una</u> forma a gradini di A.

↳ non è unica

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{operazioni elementari}} U = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & & \times \\ & & & \end{bmatrix}$$

pivot

È evidente che il rango di U

è dato dal numero di pivot di U.

Ne deriva il seguente:

TEOREMA: Se $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una forma a gradini di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, allora

$$\operatorname{rank}(A) = \# \text{ di pivot di } U.$$

Dim $A \xrightarrow{\text{operazioni elementari}} U$, e le operazioni elementari conservano il rango.

ESEMPIO PRECEDENTE:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dunque $\operatorname{rank}(A) = 3$.

DEFINIZIONE Siano V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $W \subset V$ sottospazio di V. Se $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ una base di W. Allora si ha

$$W = \underbrace{\left\{ v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p \,,\ \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Questa rappresentazione è detta parametrizzazione di (o per) W.

Viceversa, se $W = \left\{ v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p \,,\ \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$ e $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono lin. indp, allora $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ è una base per W.

$$\text{base} \rightleftarrows \text{parametrizzazione}$$

Base per Ker(A)

ESEMPIO Siano A e U tali che:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{op. elem.}} U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sappiamo che $Ker(A) = Ker(U)$, ovvero

$$Ax = 0 \iff Ux = 0, \text{ con } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$Ker(U) = \{ \text{soluzioni del sist. lin. } Ux = 0 \}$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

x_1, x_2, x_4 variabili pivotali

x_3 variabile NON pivotale

La variabile non pivotale x_3 diventa

parametro arbitrario del problema e le spostiamo a destra del segno di uguaglianza:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -2x_3 \\ -x_2 - x_4 = -x_3 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

assimilati al termine noto

Adesso risolviamo il sist. lin. rispetto a x_1, x_2, x_4 per "sostituzione all'indietro":

$$\begin{array}{l} \text{Eq1} \\ \text{Eq2} \\ \text{Eq3} \end{array} \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

, quindi l'insieme delle soluzioni di $Ux = 0$ è

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\} .$$

Conclusione: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è base per $Ker(A)$.