Richiami di algebra lineare e introduzione ai sistemi lineari

Alessandro Pugliese

novembre 2021

Dati due interi positivi n e m, una matrice A con m righe e n colonne è una tabella di $m \times n$ elementi a_{ij}, con $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, rappresentata nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

In maniera compatta scriveremo $A = (a_{ij})$ oppure $A = \{a_{ij}\}$. Se gli elementi di A sono numeri reali, scriveremo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se $m = n$, la matrice si dirà *quadrata* di dimensione n. Altrimenti (se $m \neq n$) sarà detta *rettangolare*. Se $n = 1$, la matrice è costituita da una sola colonna ed è detta *vettore colonna*. Se $m = 1$, la matrice è costituita da una sola riga ed è detta *vettore riga*. L'insieme dei vettori di n elementi reali sarà denotato con $\mathbb{R}^n$. Se $m = n = 1$, la matrice è costituita dal un solo elemento ed è detta *scalare*. In assenza di esplicite indicazioni, per "vettore" intenderemo un vettore colonna.

Solitamente le matrici saranno denotate con lettere maiuscole mentre i vettori e gli scalari saranno denotati con lettere minuscole.

Esempi:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Data una matrice quadrata A di dimensione n, si chiama *diagonale principale* di A il vettore:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una matrice quadrata A è detta:

- *diagonale* se tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$;
- *triangolare superiore* se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0 \; \forall \; i > j$;
- *triangolare inferiore* se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0 \; \forall \; i < j$.

Esempi:

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Alle matrici possiamo estendere in modo naturale alcune operazioni elementari.

Somma fra matrici: se $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, allora la somma di A e B è la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 3 & -8 & -4 \\ -8 & -7 & 5 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -4 \\ -5 & -3 & 2 \\ -6 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

La somma fra matrici è commutativa. L'elemento neutro per la somma fra matrici è la *matrice nulla*:

$$0_{m\times n} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad A + 0 = 0 + A = A, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Prodotto matrice-scalare: se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora il prodotto di A per λ è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -2, \quad \lambda A = \begin{bmatrix} -8 & -14 & -4 \\ 16 & -10 & -12 \\ -4 & -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Trasposta di una matrice: Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si dice *trasposta* di A la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne (e viceversa). Essa è indicata con A^T:

$$A^T = (a_{ji}).$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -3 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente:

- se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, allora $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$;
- $(A^T)^T = A$.

Sottomatrici (o matrici estratte): se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una *sottomatrice* di A è una matrice ottenuta eliminando da A alcune sue righe e colonne.
Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Le seguenti matrici sono sottomatrici di A:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, F = [\,].$$

Sottomatrici principali: una sottomatrice di A si dice *principale* se i suoi elementi diagonali sono anche elementi diagonali di A.
Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

B è una sottomatrice principale di A.

Sottomatrici principali di testa: una sottomatrice di A si dice *principale di testa* se si ottiene da A considerandone solo le prime k righe e colonne.
Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

A_1 e A_2 sono sottomatrici principali di testa di A di ordine (rispettivamente) 1 e 2. Anche $A_3 = A$ può essere considerata una sottomatrice principale di testa di A.

Partizionamento di matrici: una matrice A può essere scomposta in sue sottomatrici. Siano

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right],$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}.$$

Allora possiamo scrivere $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. In questo caso A si dice *partizionata a blocchi* (e A_{ij} sono detti blocchi).

In particolare, A si può partizionare *per righe* o *per colonne*. Ad esempio:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ - & r_3 & - \end{bmatrix},$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Prodotto scalare: Se $u, v \in \mathbb{R}^n$, si definisce *prodotto scalare* di u per v il seguente scalare:

$$u \cdot v = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Esempio:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u^T v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Prodotto tra matrici: se $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, la matrice $C = AB$ è una matrice appartenente a $\mathbb{R}^{m\times n}$ i cui elementi sono così definiti:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,, \quad i = 1,\ldots,m\,,\ j = 1,\ldots,n.$$

Se partizioniamo A per righe e B per colonne,

$$A = \begin{bmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ - & r_3 & - \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

allora si ha che

$$c_{ij} = r_i \cdot c_j\,, \quad i = 1,\ldots,m\,,\ j = 1,\ldots,n.$$

Esempio:

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{-1} & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \text{-1} & 3 \\ \text{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \text{-1} \\ 2 & 1 & \text{-2} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} r_1 \cdot c_1 & r_1 \cdot c_2 & r_1 \cdot c_3 \\ r_2 \cdot c_1 & r_2 \cdot c_2 & r_2 \cdot c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -6 \\ 3 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Notare: non è possibile effettuare il prodotto BA.

Esempio:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right], \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$x^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right], \quad x^T A = \begin{bmatrix} -11 & -13 & -15 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazione: se A e B sono quadrate e della stessa dimensione, AB e BA hanno entrambe senso e hanno le stesse dimensioni; tuttavia l'ultimo esempio mostra che, in generale, ci dobbiamo attendere che $AB \neq BA$. Ovvero, il prodotto tra matrici *non gode della proprietà commutativa*. Valgono invece le proprietà di associatività di somma rispetto a prodotto, e viceversa.

Trasposta di un prodotto: se $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, allora $(AB)^T = B^T A^T$.

Un'altro modo di interpretare la moltiplicazione fra matrici:

1. Prodotto matrice-vettore

Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ vettore colonna. Partizioniamo A per colonne:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} .$$

Allora

$$Ax = \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix} x_n .$$

In tal caso si dice che Ax è una *combinazione lineare* delle colonne di A e gli x_i sono i *coefficienti* della combinazione lineare.

Esempio:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right], \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ -17 \end{bmatrix}$$

2. Prodotto vettore-matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ vettore colonna. Partizioniamo A per righe:

$$A = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \\ - & a_2 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{bmatrix}.$$

Allora

$$x^T A = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} - & a_2 & - \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} - & a_n & - \end{bmatrix} x_n .$$

In tal caso si dice che $x^T A$ è una combinazione lineare delle righe di A.

Esempio:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right], \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^T A = -1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -13 & -15 \end{bmatrix}$$

3. Prodotto matrice-matrice

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Partizioniamo A per righe e B per colonne:

$$A = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \\ - & a_2 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Allora

$$AB = \begin{bmatrix} - & a_1 B & - \\ - & a_2 B & - \\ & \vdots & \\ - & a_n B & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Dunque il prodotto AB può essere interpretato come:

- combinazione lineare delle righe di B usando come coefficienti gli elementi delle righe di A;
- combinazione lineare delle colonne di A usando come coefficienti gli elementi delle colonne di B.

L'elemento neutro per il prodotto matriciale è la matrice *identica* (anche detta *identità*):

$$I_n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}; \quad AI = IA = A,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Inversa di una matrice: se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A si dice *invertibile* se esiste una matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$AX = XA = I.$$

In tal caso, X è detta *inversa* di A ed è denotata con A^{-1}.
Osservazioni:

- se esiste, l'inversa di una matrice è unica,
- se A è invertibile, allora si ha
$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
- se A e B sono invertibili e della stessa dimensione, allora si ha
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Determinante di una matrice: se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e denotiamo con A_{ij} la sottomatrice di A ottenuta sopprimendo i-esima riga e j-esima colonna, si definisce *determinante* di A il seguente numero definito ricorsivamente:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{se } n > 1,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Tale formula va sotto il nome di *regola di Laplace*. Il risultato non dipende dalla riga i scelta. La sommatoria può essere anche sviluppata "lungo le colonne":

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{se } n > 1,\ \forall\, j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Casi speciali:
Se $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, si ha $\det(A) = a_{11}$.
Se $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, si ha $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, si ha

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Esempi:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -15 + 2 = -13$$

Regola di Laplace lungo la prima colonna:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 30 + 60 - 12 = 78$$

Regola di Laplace lungo la prima riga:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 30 + 48 = 78$$

Regola di Sarrus (solo per matrici 3×3):

$$\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 36 - 12 + 0 - 0 - 6 + 60 = 78$$

Alcune proprietà del determinante:

- $\det(A) = \det(A^T)$,
- se B è ottenuta da A scambiando due righe (o colonne), allora $\det(B) = -\det(A)$,
- se B è ottenuta da A moltiplicando una riga (o colonna) per uno scalare α, allora $\det(B) = \alpha \det(A)$,
- se A ha dimensione n, allora $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$,
- se A e B hanno le stesse dimensioni, allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$,
- se A è una matrice triangolare, allora

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Esistenza dell'inversa: una matrice A si dice *non-singolare* se $\det(A) \neq 0$, altrimenti A è detta *singolare*. Si definisce matrice *aggiunta* di una matrice $A = (a_{ij})$ la matrice, denotata con $\mathrm{agg}(A)$, i cui elementi sono dati da:

$$(\mathrm{agg}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \,.$$

Il numero $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ è detto *complemento algebrico* di a_{ij}, per cui $\mathrm{agg}(A)$ è la trasposta della matrice dei complementi algebrici di A.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{agg}(A) = \begin{bmatrix} -28 & 2 & -33 \\ 8 & -24 & -14 \\ -24 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema: *una matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *è invertibile se e soltanto se è non-singolare. Inoltre si ha:*

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(A)}{\det(A)}\,.$$

Esempi:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{164}\begin{bmatrix} -28 & 2 & -33 \\ 8 & -24 & -14 \\ -24 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ se } ad - bc \neq 0.$$

Sistemi lineari: un sistema lineare di n equazioni in n incognite ha la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Se poniamo $A = (a_{ij})$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T$, il sistema può essere scritto nella seguente forma *matriciale*:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove A è detta *matrice dei coefficienti*, $\mathbf{x}$ *vettore delle incognite* e $\mathbf{b}$ *vettore dei termini noti*.

Se A è non-singolare ($\det(A) \neq 0$), allora possiamo pre-moltiplicare l'equazione precedente per A^{-1}, ottenendo:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Si ha, dunque, il seguente

Teorema: *se la matrice dei coefficienti di un sistema lineare di n equazioni in n incognite è non-singolare, allora il sistema ammette unica soluzione per ogni scelta dei termini noti.*

Regola di Cramer: denotiamo con $A \stackrel{i}{\leftarrow} \mathbf{b}$ la matrice ottenuta da A rimpiazzandone la i-esima colonna con il vettore $\mathbf{b}$. Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, allora

$$A\,(I \stackrel{i}{\leftarrow} \mathbf{x}) = A \stackrel{i}{\leftarrow} \mathbf{b}\,,$$

da cui, sfruttando la regola sul determinante del prodotto, si ha

$$\det(A)\; x_i = \det(A \stackrel{i}{\leftarrow} \mathbf{b}) \;\Longrightarrow\; x_i = \frac{\det(A \stackrel{i}{\leftarrow} \mathbf{b})}{\det(A)}\,,\;\; \text{per } i = 1, \ldots, n\,.$$

Determinante, inversa, regola di Cramer, etc. hanno utilità più teorica che pratica.

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il calcolo di $\det(A)$ mediante la regola di Laplace ha un costo computazionale circa pari a $2.7\, n!$ operazioni floating point.

Il *IBM Summit* è il più veloce supercomputer attualmente disponibile[1], ed è capace di sostenere una velocità di circa 200 *petaFLOPS* (1 petaFLOP $= 10^{15}$ FLoating point Operations Per Second). Supponendo di poter disporre di tale computer, il calcolo del determinante di una matrice quadrata d'ordine 25 mediante la regola di Laplace richiederebbe oltre 6 anni. Oggigiorno, alcune applicazioni del calcolo scientifico richiedono di operare con matrici dell'ordine dei milioni.

Conclusione: la regola di Cramer è del tutto impraticabile. Studieremo un approccio più efficiente al problema della risoluzione di sistemi lineari.

[1] fonte: wikipedia 2019