Calcolo Numerico, corso M-Z
Prova di Laboratorio Matlab
1 febbraio 2021

Istruzioni:

(1) il tempo a disposizione per completare la prova è 1 ora;

(2) lo svolgimento della prova deve essere salvato in file denominati `cognomenome1.m`, `cognomenome2.m`, etc.;

(3) è fatto assoluto divieto di uscire dall'ambiente Matlab, pena l'immediata esclusione dalla prova;

(4) ai fini della valutazione contribuiscono correttezza ed efficienza del codice.

Esempi di quesiti:

**Quesito 1.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il metodo delle secanti per il calcolo degli zeri di funzione:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}\,, k \geq 2.$$

La funzione deve ammettere come dati di input $f$, punti iniziali $x_0$ e $x_1$ , tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output l'approssimazione dello zero, il numero di iterate effettuate ed il residuo finale $f(x_{\mathtt{end}})$. Si faccia uso di un criterio di arresto basato sul controllo dell'errore relativo.

Si usi la funzione creata per calcolare le prime 10 cifre significative dello zero di $f(x) = \cos(x) - x - \frac{x^2}{2}$; si scelgano $x_0 = 0.6$ e $x_1 = 0.7$ . [La soluzione è $0.62\ldots$.]

**Quesito 2.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il metodo di *sostituzione in avanti* per la risoluzione dei sistemi lineari con matrice dei coefficienti triangolare inferiore. Dati

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

La soluzione del sistema lineare $Ax = b$ è calcolata come segue:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right) \text{ per } i = 2, \ldots, n.$$

La funzione deve ammettere come dati di input la matrice $A$ triangolare inferiore ed il vettore $b$; come dati di output la soluzione $x$ del sistema $Ax = b$.

Si usi la funzione creata per calcolare la soluzione del sistema lineare con i seguenti dati:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 22 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Calcolo Numerico, corso M-Z
Prova di Laboratorio Matlab
1 febbraio 2021

Istruzioni:

(1) il tempo a disposizione per completare la prova è 1 ora;

(2) lo svolgimento della prova deve essere salvato in file denominati `cognomenome1.m`, `cognomenome2.m`, etc.;

(3) è fatto assoluto divieto di uscire dall'ambiente Matlab, pena l'immediata esclusione dalla prova;

(4) ai fini della valutazione contribuiscono correttezza ed efficienza del codice.

Esempi di quesiti:

**Quesito 1.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo numerico (detto di *Halley*) per il calcolo degli zeri di una funzione:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2\left[f'(x_k)\right]^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$

La funzione deve ammettere come dati di input $f$, $f'$, $f''$, punto iniziale $x_0$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output l'approssimazione dello zero, il numero di iterate effettuate ed il residuo $f(x_{\texttt{end}})$. Si faccia uso di un criterio di arresto basato sul controllo dell'errore relativo.

Si usi la funzione creata per calcolare le prime 10 cifre significative dello zero di $f(x) = \cos(x) - x - \frac{x^2}{2}$; si scelgano $x_0 = 0.6$. [La soluzione è $0.62\ldots$.]

**Quesito 2.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il metodo di *sostituzione all'indietro* per la risoluzione dei sistemi lineari con matrice dei coefficienti triangolare superiore. Dati

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ è calcolata come segue:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \quad \text{per } i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

La funzione deve ammettere come dati di input la matrice $A$ triangolare superiore ed il vettore $b$; come dati di output la soluzione $x$ del sistema $Ax = b$.

Si usi la funzione creata per calcolare la soluzione del sistema lineare con i seguenti dati:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 34 \\ 29 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolo Numerico, corso M-Z
Prova di Laboratorio Matlab
2 febbraio 2021

Istruzioni:

(1) il tempo a disposizione per completare la prova è 1 ora;

(2) lo svolgimento della prova deve essere salvato in file denominati `cognomenome1.m`, `cognomenome2.m`, etc.;

(3) è fatto assoluto divieto di uscire dall'ambiente Matlab, pena l'immediata esclusione dalla prova;

(4) ai fini della valutazione contribuiscono correttezza ed efficienza del codice.

Esempi di quesiti:

**Quesito 1.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo numerico *a due passi* (detto *metodo di Traub*) per il calcolo degli zeri di funzione. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, per ogni $k \geq 0$, si calcola:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.$$

La funzione deve ammettere come dati di input $f$, $f'$, punto iniziale $x_0$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output l'approssimazione dello zero, il numero di iterate effettuate ed il residuo $f(x_{\texttt{end}})$. Si faccia uso di un criterio di arresto basato sul controllo dell'errore relativo.

Si usi la funzione creata per calcolare le prime 10 cifre significative dello zero positivo di $f(x) = \cos(x) - x - \dfrac{x^2}{2}$; si scelga $x_0 = 0.5$. [La soluzione è $0.62\ldots$.]

**Quesito 2.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo, detto *metodo delle potenze*, per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo di una matrice quadrata. Dati una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ed un vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$, per ogni $k \geq 0$ si calcola:

$$y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2}, \; x_{k+1} = A\,y_k, \; \nu_{k+1} = y_k^T x_{k+1}\,.$$

Al termine della procedura, l'approssimazione dell'autovalore di massimo modulo sarà $\lambda_{\max} = \nu_{\texttt{end}}$, dove $\nu_{\texttt{end}}$ è l'ultimo valore di $\nu_k$ calcolato. La funzione deve ammettere come dati di input una matrice quadrata $A$, un vettore iniziale $x_0$ di dimensioni compatibili con $A$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output $\lambda_{\texttt{max}}$ ed il numero di iterate effettuate. Per ciò che riguarda il controllo dell'errore, si faccia uso del seguente criterio:

$$|\nu_{k+1} - \nu_k| < \texttt{tolleranza}\,|\nu_{k+1}|.$$

Si noti che sarà necessario effettuare almeno due iterate per poter implementare tale controllo. Per calcolare le norme vettoriali, si può utilizzare la funzione `norm`.

Si testi la funzione approssimando, con tolleranza $10^{-6}$, l'autovalore di massimo modulo di

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 22 \end{bmatrix}.$$

Si scelga

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[La soluzione esatta è $22.4\ldots$.]

Calcolo Numerico, corso M-Z
Prova di Laboratorio Matlab
2 febbraio 2021

Istruzioni:

(1) il tempo a disposizione per completare la prova è 1 ora;

(2) lo svolgimento della prova deve essere salvato in file denominati `cognomenome1.m`, `cognomenome2.m`, etc.;

(3) è fatto assoluto divieto di uscire dall'ambiente Matlab, pena l'immediata esclusione dalla prova;

(4) ai fini della valutazione contribuiscono correttezza ed efficienza del codice.

Esempi di quesiti:

**Quesito 1.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo numerico per il calcolo della radice $n$-esima di un numero $S > 0$:

$$x_0 = S, \; x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)\,x_k + \frac{S}{x_k^{(n-1)}}\right).$$

La funzione deve ammettere come dati di input $S$, $n$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output l'approssimazione di $\sqrt[n]{S}$ ed il numero di iterate effettuate. Si faccia uso di un criterio di arresto basato sul controllo dell'errore relativo.

Si testi la funzione calcolando le prime 10 cifre significative di $\sqrt[3]{2}$. [La soluzione è $\sqrt[3]{2} = 1.2\ldots$.]

**Quesito 2.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo numerico (detto *di Simpson*) per il calcolo degli integrali definiti. Dati una funzione a valori reali $f$ definita l'intervallo $[a, b]$, $n$ intero naturale pari, siano $h = (b - a)/n$ e $x_j = a + jh$, per ogni $j = 0, \ldots, n$. Allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_n\,,$$

dove

$$I_n = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right].$$

La funzione deve ammettere come dati di input funzione $f$, intervallo $[a, b]$ e numero di sottointervalli $n$; come dati di output l'approssimazione $I_n$.

Utilizzando la funzione appena creata, implementare la seguente procedura automatica per calcolare le prime 4 cifre significative di $\int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx$: raddoppiare progressivamente il valore di $n$, a partire da $n = 4$, fino a quando la differenza tra approssimazioni successive $I_n$ e $I_{n+1}$ sarà scesa sotto la tolleranza indicata. Il valore esatto dell'integrale è $\frac{\pi^2}{4}$.

Calcolo Numerico, corso M-Z
Prova di Laboratorio Matlab
4 febbraio 2021

Istruzioni:

(1) il tempo a disposizione per completare la prova è 1 ora;

(2) lo svolgimento della prova deve essere salvato in file denominati `cognomenome1.m`, `cognomenome2.m`, etc.;

(3) è fatto assoluto divieto di uscire dall'ambiente Matlab, pena l'immediata esclusione dalla prova;

(4) ai fini della valutazione contribuiscono correttezza ed efficienza del codice.

Esempi di quesiti:

**Quesito 1.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo, detto *quasi-Newton*, per il calcolo degli zeri di funzione:

$$x_k = x_{k-1} - h\frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}+h) - f(x_{k-1})}\,, k \geq 1$$

La funzione deve ammettere come dati di input $f$, punto iniziale $x_0$, incremento $h > 0$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output l'approssimazione dello zero, numero di iterate effettuate e residuo $f(x_{\texttt{end}})$. Si faccia uso di un criterio di arresto basato sul controllo dell'errore relativo.

Si usi la funzione creata per calcolare le prime 8 cifre significative dello zero di $f(x) = e^x - 1 - \cos(x)$; si scelga $x_0 = 0.5$ e $h = 10^{-6}$ . [La soluzione è $0.601\ldots$.]

**Quesito 2.** Si scriva una funzione Matlab che implementi il seguente metodo, detto *metodo delle potenze inverse*, per il calcolo dell'autovalore di minimo modulo di una matrice quadrata. Dati una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ed un vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$, per ogni $k \geq 0$:

$$\begin{gathered}\text{si pone } \; y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2},\\ \text{si risolve il sistema lineare } \; Ax_{k+1} = y_k,\\ \text{si pone } \; \nu_{k+1} = y_k^T x_{k+1}\,.\end{gathered}$$

Al termine della procedura, l'approssimazione dell'autovalore di minimo modulo sarà $\lambda_{\texttt{min}} = 1/\nu_{\texttt{end}}$, dove $\nu_{\texttt{end}}$ è l'ultimo valore di $\nu_k$ calcolato. La funzione deve ammettere come dati di input una matrice quadrata $A$, un vettore iniziale $x_0$ di dimensioni compatibili con $A$, tolleranza e numero massimo di iterate; come dati di output $\lambda_{\texttt{min}}$ ed il numero di iterate effettuate. Per ciò che riguarda il controllo dell'errore, si faccia uso del seguente criterio:

$$|\nu_{k+1} - \nu_k| < \texttt{tolleranza}\,|\nu_{k+1}|.$$

Si noti che sarà necessario effettuare almeno due iterate per poter implementare tale controllo. Si suggerisce di risolvere i sistemi lineari facendo uso dell'operatore *backslash* (`x=A\b` è la soluzione del sistema lineare $Ax = b$), e di calcolare la norma di un vettore (colonna) facendo uso della funzione `norm`.

Si testi la funzione approssimando, con tolleranza $10^{-6}$, l'autovalore di minimo modulo di

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 22 \end{bmatrix}.$$

Si scelga

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[La soluzione esatta è $0.27\ldots$.]