LEZIONE 26/10/2020

Richiamo

Newton:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)})$$

Implementato

Abbiamo bisogno di sue osservazioni

(1) Verificare che $f(x^{(k)}) \neq 0$

(2) $dx^{(k)} = - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)})$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + dx^{(k)}$$

Come per dire che la nuova iterazione x (k+1) sia uguale alla vecchia iterazione + l'INCREMENTO(dx (k))

ABS= comando del valore assoluto

```
f=@(x) x.^2-2;
```

il .^ è un podcast ai vettori o matrici che viene applicato a tutti gli elementi (utile per i grafici)

Esempio 1

$f(x) = x^2 - 2$ in $[1 \;\; 2]$

```
f=@(x) x.^2-2;
df=@(x) 2*x;
pippo=1.5;%vicino alla soluzione(1.41)
tol=1e-6;
nitmax=10;
[x,nit,fx]=newton(f,df,pippo,tol,nitmax)
```

```
x =
     1.414213562373095e+00
nit =
     4
fx =
     4.510614104447086e-12
```

Se noti quando invoco la funzione la posso chiamare come mi pare;

Esempio 1

$f(x) = x^2 - 2$ in $[1\ \ 2]$

```
f=@(x) x.^2-2;
df=@(x) 2*x;
x0=1.5;%vicino alla soluzione(1.41)
tol=1e-8;
nitmax=10;
[x,nit,fx]=newton(f,df,x0,tol,nitmax)
format longe
disp([x,sqrt(2)])
```

```
x =
     1.414213562373095e+00
nit =
     4
fx =
     4.510614104447086e-12
     1.414213562373095e+00     1.414213562373095e+00
```

Creato un vettore di due elementi per confrontare la soluzione, si può vedere che la soluzione ha 16 cifre significative(il doppio di quelle richieste(la nostra tolleranza e' di 10^-8).

VEDERE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

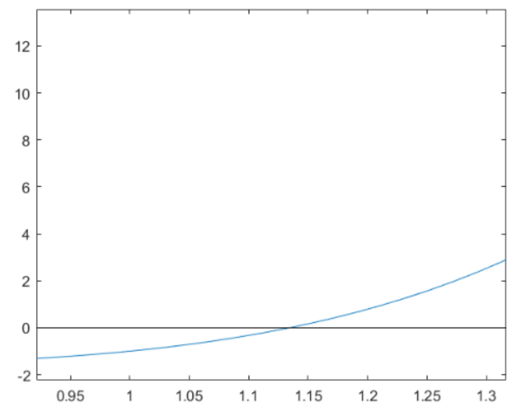
```
df=@(x) 2*x;
x0=1.5;%vicino alla soluzione(1.41)
tol=1e-8;
nitmax=10;
[x,nit,fx]=newton(f,df,x0,tol,nitmax)
format longe
disp([x,sqrt(2)])
```

Esercizio 2

Calcolare le prime 10 cifre significative dell'unico zero positivo di $f(x) = x^6 - x - 1$. Fornire una approssimazione iniziale che abbia almeno 2 cifre corrette.

```
f=@(x) x.^6-x-1;
x_mesh=linspace(0,2);
plot(x_mesh,f(x_mesh))%grafico della funzione
hold on
plot([0 2], [0 0], 'k') %asse ascisse
```

```
     4.510614104447086e-12
     1.414213562373095e+00     1.414213562373095e+00
```



Code

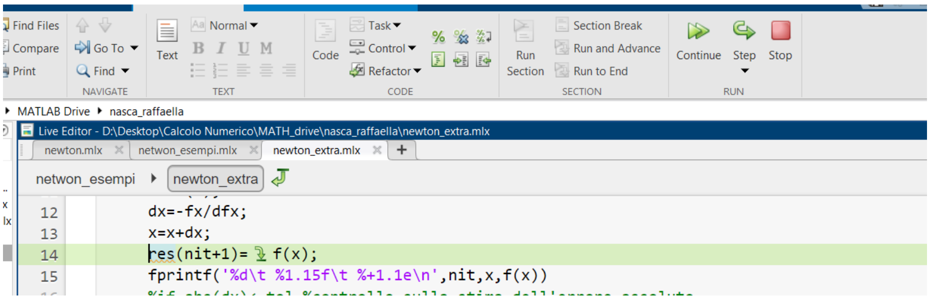
```
xlim([0.922 1.317])
ylim([-2.2 13.6])
```

Update Code Copy

Per avere una buona approssimazione del f(0) si può cliccare sul grafico e zoomare per vedere l'approssimazione di due cifre significative (come si puo' notare in questo caso e' 1.1 l'approssimazione giusta).

10^-6 E' la massima precisione che si può avere in matlab.

KEYBOARD comando che quando verrà trovato eseguirà le istruzioni della funzione passo dopo passo utile per il debugger.



e usare step per passare alle altre istruzioni poi è possibile anche vedere i risultati intermedi delle variabili solo posizionandoci sopra col mouse.

OSSERVAZIONI SUL VALORE ASSOLUTO

Interpretando l’ordine di grandezza dell’errore abbiamo il numero di cifre significative ad ogni iterata.

Possiamo notare che l’ordine di grandezza(numero di cifre significative) raddoppia ad ogni passo ed è ciò che ci dobbiamo attendere da un metodo che ha ordine di convergenza pari a 2.

L’errore viene “quadrato” ad ogni passo che corrisponde all’ordine di grandezza del metodo di newton.

0	1.100000000000000	-3.3e-01
1	1.137912585160440	+3.3e-02
2	1.134748520270514	+2.5e-04
3	1.134724139838480	+1.5e-08
4	1.134724138401519	-8.9e-16
5	1.134724138401519	-8.9e-16

Quindi se forniscono un’approssimazione a due cifre mi attendo che al primo passo ne avrò 4, al secondo 8, al terzo 16 e mi fermerò. Questo filosoficamente ma ci può essere un’iterazione in più o una in meno.

Quindi in newton mi aspetto quel tipo di ordine di grandezza dell’errore (vedi immagine).

(guarda immagine sotto)……

Supponiamo di far partire l’approssimazione iniziale con una cifra significativa (scrivendo solo 1).

Un controllo basato sulla derivata diversa da 0 è un controllo non adeguata alla situazione poiché quando abbiamo messo una cosa che ci avrebbe dato una derivata =0 non ce la da poiché ci sono degli arrotondamenti di macchina.

Scrivendo x0= (1/6)^(1/5);

```
>> x0

x0 =

     6.988271187715792e-01

>> df

df =

  function_handle with value:

    @(x)6*x.^5-1

>> df(x0)

ans =

    -2.220446049250313e-16
```

Cambiamo newton (il fatto della derivata diversa da 0)

```
dfx=df(x);
if dfx<1e-14
    nit=-1; %derivata troppo piccola
    return %col return si esce dalla funzione
end
```

Con la x0 di prima il metodo di newton si blocca qui (nel ciclo precedente).

STIMA SPERIMENTALE DELL'ORDINE DI CONVERGENZA

RICORDA che l'ordine di convergenza di una successione è p>=1 se

è $p \geq 1$ se

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \simeq C\,|x^{(k)} - \alpha|^p$$

Questa quasi uguaglianza è quasi più vera quando k è grande.

Passo ai logaritmi e ottengo che:

Passo ai logaritmi:

$$\log|x^{(k+1)} - \alpha| \simeq \log\left(C\,|x^{(k)} - \alpha|^p\right) =$$

$$= \log C + p \log|x^{(k)} - \alpha|$$

Usando le proprietà dei logaritmi.

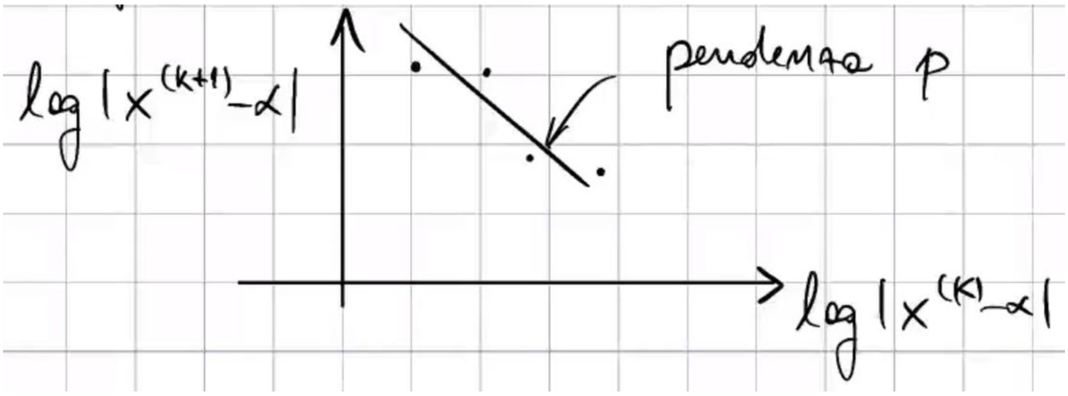
OSSERVAZIONI:

1. Graficamente, in doppia scala logaritmica

$$\underbrace{\log|x^{(k+1)}-\alpha|}_{Y} \simeq \log\left(C|x^{(k)}-\alpha|^{p}\right) = \underbrace{\log C}_{q} + \overbrace{p}^{m}\,\underbrace{\log|x^{(k)}-\alpha|}_{X}$$

E’ come se fosse una retta se noti Y=mx+q

Quindi graficamente si vede:



Vedremo i punti allinearsi più o meno come una retta.

2. Posso dividere il tutto con il logaritmo del valore assoluto al passo k ($\log|x^{(k)}-\alpha|$) otteniamo:

$$\frac{\log|x^{(k+1)}-\alpha|}{\log|x^{(k)}-\alpha|} \simeq p + \frac{\log C}{\log|x^{(k)}-\alpha|}$$

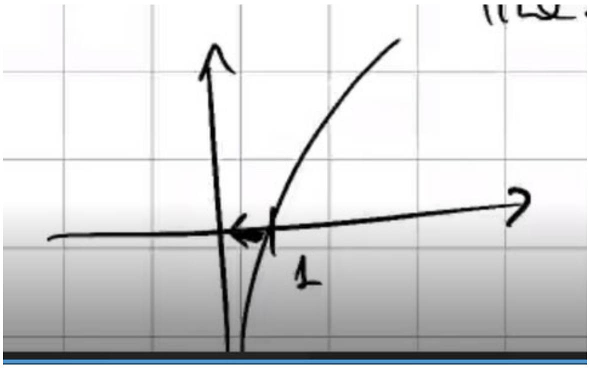
Per K grande (sufficientemente grande) sono quasi delle uguaglianze.

E per k grande quella quantità è trascurabile .

per k grandi

$$\frac{\log|x^{(k+1)}-\alpha|}{\log|x^{(k)}-\alpha|} \approx p + \underbrace{\frac{\log C}{\log|x^{(k)}-\alpha|}}_{\text{trascurabile}}$$

X con k – alfa sara vicino a zero e quindi il logaritmo tende a meno infinito



per k grandi

$$\frac{\log|x^{(k+1)}-\alpha|}{\log|x^{(k)}-\alpha|} \approx p + \underbrace{\frac{\log C}{\log|x^{(k)}-\alpha|}}_{\text{trascurabile}} \approx$$

$$\approx p$$