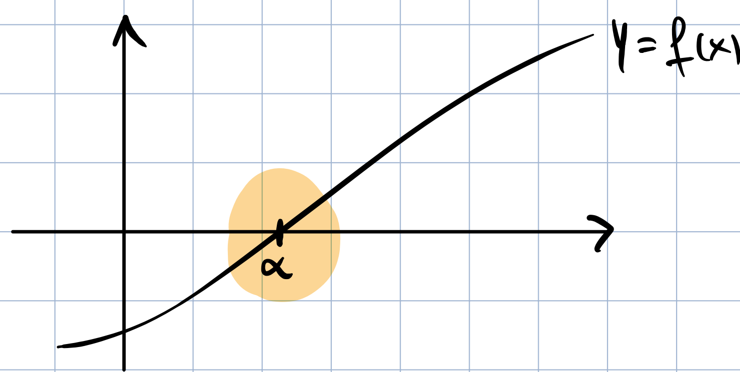
SOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI NON LINEARI

<u>Problema</u>: data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, calcolare $\alpha \in [a,b]$ t.c.

$$f(\alpha) = 0.$$

Graficamente cerchiamo l'intersezione del grafico di f con l'asse delle ascisse.



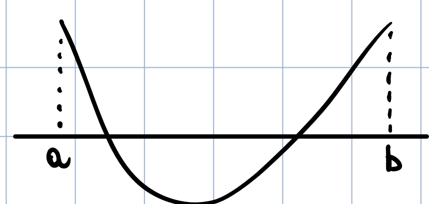
<u>Esempio</u>: calcolare x t.c. $\cos x - x = 0$.

<u>TEOREMA</u> (di Bolzano).
Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c. $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists\, \alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$.

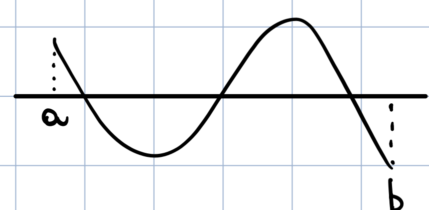
DEFINIZIONE: se $f(\alpha)=0$, allora diremo che α è "zero per f" oppure "zero di f".

Osservazioni:

1) $f(a)f(b)<0$ è condizione sufficiente ma non necessaria. Ad esempio, si pensi a



2) Le ipotesi non garantiscono l'unicità dello zero di funzione. Ad esempio, si pensi a



L'unicità può seguire da ipotesi supplementari. Ad esempio:

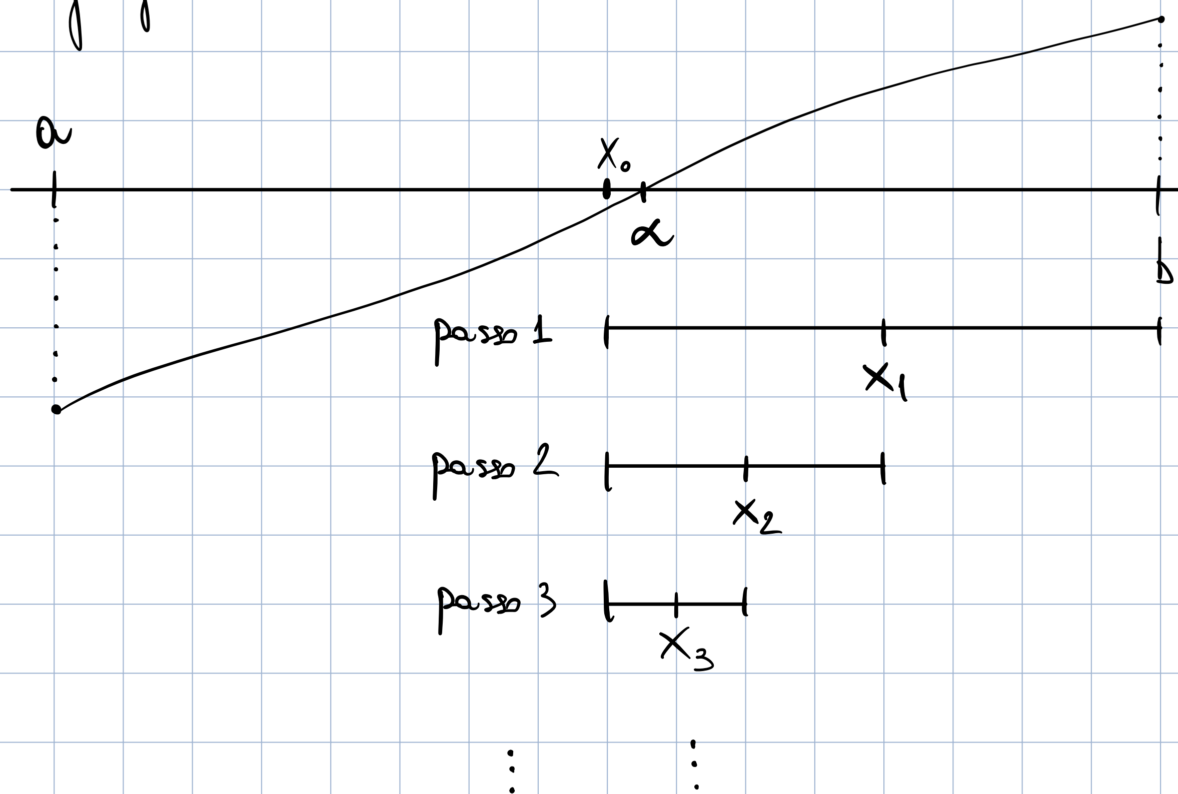
- f monotona in $[a,b]$
- $f(a)f(b)<0$ e f'' di segno costante in $[a,b]$

METODO DELLE SUCCESSIVE BISEZIONI

Ipotesi: f continua, $f(a)f(b)<0$.

<u>Idea</u>: ripetutamente si suddivide l'intervallo in 2 semi-intervalli e si conserva quello che verifica le ipotesi.

Graficamente:



$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ sono le successive approssimazioni di α generate dal metodo.

Formalmente:

dati f, a, b, poniamo:

$a^{(0)} := a$, $b^{(0)} := b$, $x^{(0)} := \dfrac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$ e iteriamo

per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$

① se $f(x^{(k)}) = 0$, poniamo $\alpha = x^{(k)}$ e usciamo dal ciclo

② se $f(a^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$,
poniamo $a^{(k+1)} := a^{(k)}$, $b^{(k+1)} := x^{(k)}$

altrimenti
poniamo $a^{(k+1)} := x^{(k)}$, $b^{(k+1)} := b^{(k)}$

③ poniamo $x^{(k+1)} := \dfrac{a^{(k+1)} + b^{(k+1)}}{2}$

fine

Osservazioni

L'algoritmo si arresta in un

numero finito di passi solo se per qualche K si ha $f(x^{(K)}) = 0$.

Altrimenti si generano tre succ. ni

$\{a^{(K)}\}_{K \in \mathbb{N}}$, $\{b^{(K)}\}_{K \in \mathbb{N}}$, $\{x^{(K)}\}_{K \in \mathbb{N}}$

tali che

- $\left.\begin{array}{l} a^{(K)} \leq x^{(K)} \leq b^{(K)} \\ \alpha \in [a^{(K)}, b^{(K)}] \end{array}\right\} \forall K \in \mathbb{N}$
- $a^{(K)} \xrightarrow[K \to +\infty]{} \alpha$ in modo monotòno crescente

  $b^{(K)} \xrightarrow[K \to +\infty]{} \alpha$ in modo monotòno decrescente

  $x^{(K)} \xrightarrow[K \to +\infty]{} \alpha$
- $f(\alpha) = 0$

La probabilità che si realizzi l'evento al punto 1 è trascurabile e rende il controllo superfluo.

È possibile prevedere a priori il numero di passi sufficiente a garantire una prederterminata qualità dell'approssimazione.

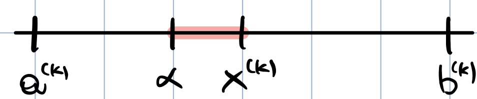
Vediamo come:

Siano $I^{(k)} := [a^{(k)}, b^{(k)}]$ e $|I^{(k)}| := |b^{(k)} - a^{(k)}|$, per ogni $k \geq 0$. Allora si ha:

lunghezza dell'int.llo $[a^{(k)}, b^{(k)}]$

1) $|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |b^{(k)} - a^{(k)}|$, $\forall k \geq 0$

(si rifletta sulla figura:



)

2) $$|I^{(k)}| = \frac{1}{2} |I^{(k-1)}| = \frac{1}{2}\frac{1}{2} |I^{(k-2)}| = \frac{1}{2^2} |I^{(k-2)}| = \ldots = \frac{1}{2^k} |I^{(0)}| = \frac{|b-a|}{2^k}$$

Unendo 1) e 2) si ottiene

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |I^{(k)}| = \ldots = \frac{1}{2^{k+1}} |b - a|$$

Supponiamo di voler calcolare una approssimazione $x^{(k)}$ di α tale che:

$$|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$$

tolleranza

(vogliamo che $x^{(k)}$ disti da α meno di ε)

$|x^{(k)} - \alpha|$ non è noto, ma possiamo scegliere k

tale che:

$$\frac{1}{2^{k+1}}|b-a| < \varepsilon \underset{\substack{\text{risolvendo} \\ \text{rispetto a } k}}{\iff} k > \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon} - 1$$

ESEMPIO: Siano $a=1$, $b=2$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

Allora si ha

$$k > \log_2 10^{10} - 1 = 10 \overbrace{\log_2 10}^{\approx 3.32} - 1 \approx$$
$$\approx 32.2$$

Ovvero sono sufficienti 33 passi a garantire che $x^{(k)}$ disti da α meno di 10^{-10}.

Come quantifichiamo l'errore associato ad una approssimazione?

DEFINIZIONI

Siano $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, con $\tilde{\alpha}$ approssimazione del "dato esatto" α. Definiamo

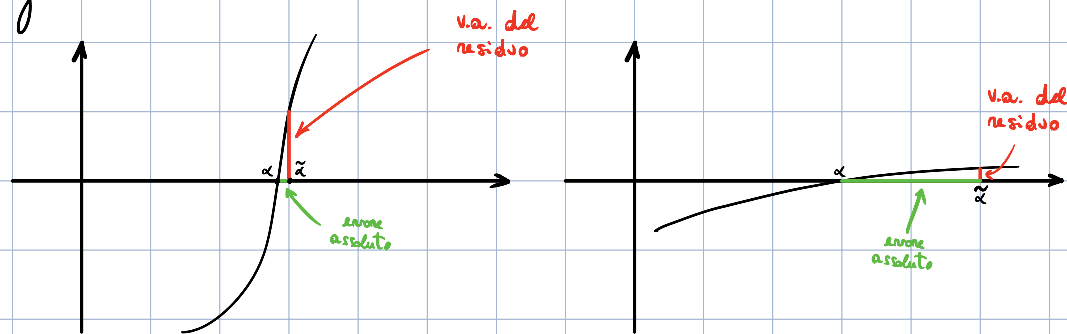
Errore assoluto: $E_A = |\alpha - \tilde{\alpha}|$ ← distanza di $\tilde{\alpha}$ da α sulla retta reale

Errore relativo : $E_R = \frac{|\alpha - \tilde{\alpha}|}{|\alpha|}$

Residuo : $f(\tilde{\alpha})$

(è legato al problema)

<u>Osservazione</u> : il valore assoluto del residuo può sovrastimare o sottostimare l'errore assoluto. Si rifletta sulle figure:



Il residuo sovrastima l'errore assoluto

Il residuo sottostima l'errore assoluto

CRITERI DI ARRESTO PER IL METODO DELLE SUCC.VE BISEZIONI

Ricordiamo che $|x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2}|b^{(k)} - a^{(k)}|$, $k \geq 0$,

dove $x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$.

1) stima errore assoluto:

$$\frac{1}{2}\left|b^{(k)}-a^{(k)}\right| < \varepsilon$$

tolleranza

2) stima errore relativo:

$$\frac{\frac{1}{2}\left|b^{(k)}-a^{(k)}\right|}{\left|x^{(k)}\right|} < \varepsilon ,$$

o equivalentemente

$$\frac{\left|b^{(k)}-a^{(k)}\right|}{\left|a^{(k)}+b^{(k)}\right|} < \varepsilon$$

3) Residuo:

$$\left|f(x^{(k)})\right| < \varepsilon$$

4) Errore misto assoluto/relativo:

$$\underbrace{\frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{|a^{(k)} + b^{(k)}| + 2}}_{} < \varepsilon$$

Vicino a $\frac{1}{2}|b^{(k)} - a^{(k)}|$ per α molto piccolo e a $\frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{|a^{(k)} + b^{(k)}|}$ per α molto grande; è una salvaguardia contro possibili problemi dovuti all'uso dell'errore relativo (risp. assoluto) quando α è molto piccolo (risp. grande).