ESEMPIO

Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 20x_3 = -16 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Eliminazione di Gauss : Eq2 − 2Eq1 , Eq3 − 3Eq1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 14x_3 = -14 \\ 3x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$$

Adesso il metodo prevede di eliminare da Eq3 l'incognita x_2 aggiungendo a Eq3 un multiplo di Eq2 :

IMPOSSIBILE!

Se avessimo applicato l'algo. LU su A :

pivot nullo!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

Soluzione: scambio Eq2 con Eq 3 dopo il primo passo di eliminazione:

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=-1 \\ 14x_3=-14 \\ 3x_2-5x_3=8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+3x_3=-1 \\ 3x_2-5x_3=8 \\ 14x_3=-14 \end{cases}$$

Adesso posso risolvere per sostituzione all'indietro:

$$x_3=-1 \Rightarrow x_2=\tfrac{1}{3}(-5+8)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-1+3-1=1 .$$

Analogamente, avremmo risolto il problema del pivot nullo mediante uno scambio fra righe della matrice dei coefficienti. Formalizziamo:

DEFINIZIONE

$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ è detta "di permutazione" se la si può ottenere dall'identità mediante scambi di righe. Diremo anche che P è "una permutazione".

ESEMPIO

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{è di permutazione.}$$

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

da sinistra scambia le righe

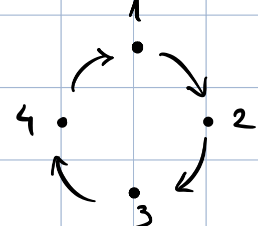
$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

da destra scambia le colonne

ESEMPIO

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{è una permutazione "ciclica":}$$

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} :$$



OSSERVAZIONI Se $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di permutazione.

(1) $\det(P) = \pm 1$
(2) P è invertibile
(3) $P^T P = P P^T = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$

A noi interessano delle particolari matrici di permutazione:

DEFINIZIONE $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta "di scambio" se è di permutazione e si ottiene dall'identità scambiando al più due righe.

NOTIAMO: P del primo esempio è di scambio, P del secondo NO!

Inserendo nel procedimento una matrice di scambio, rimuoveremmo l'elemento nullo dalla posizione pivotale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}}_{U}$$

Non sono solo i pivot nulli a causare problemi, ma anche quelli piccoli!
Si pensi all'esperimento Matlab.

pivot piccoli $\longrightarrow$ moltiplicatori grandi $\longrightarrow$ perdita di precisione

Solutione:

STRATEGIA DEL PIVOTING PER RIGHE
(O PARZIALE)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile. Poniamo $A^{(0)} := A$.

per $k = 1, 2, \dots, n-1$

- scambio la riga k di $A^{(k-1)}$ con la riga $r \geq k$ di $A^{(k-1)}$ in modo tale che, dopo lo scambio, si abbia:

$$|a_{kk}^{(k-1)}| \geq |a_{ik}^{(k-1)}| \quad , i = k, \dots, n$$

- effettuo il passo k dell'eliminazione di Gauss, in modo da ottenere $A^{(k)}$ t. c.

$$a_{ik}^{(k)} = 0 \quad \text{per } i = k+1, \dots, n$$

fine

In sostanza, ogni passo di eliminazione viene preceduto da uno scambio tra righe che ha l'obiettivo di portare in posizione pivotale il più grande elemento possibile (in valore assoluto).

ESEMPIO

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

scambio

ESEMPIO Applichiamo l'algoritmo su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primo passo di scambio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}}_{E_1 A^{(0)}}$$

Primo passo di eliminazione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}}_{E_1 A^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11/4 & -2 \\ 0 & -17/4 & -2 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

Secondo passo di scambio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11/4 & -2 \\ 0 & -17/4 & -2 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -17/4 & -2 \\ 0 & 11/4 & -2 \end{bmatrix}}_{E_2 A^{(1)}}$$

Secondo passo di eliminazione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11/17 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -17/4 & -2 \\ 0 & 11/4 & -2 \end{bmatrix}}_{E_2 A^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -17/4 & -2 \\ 0 & 0 & -56/17 \end{bmatrix}}_{A^{(2)} =: U}$$

Algebricamente abbiamo:

$$M_2 E_2 M_1 E_1 A = U,$$

o equivalentemente

$$\underbrace{M_2 E_2 M_1 E_2^T}_{=:R} \; \underbrace{E_2 E_1}_{=:P} A = U .$$

$$E_2^T E_2 = I$$

P è di permutazione (banale)

R è triang. inferiore speciale (meno banale)

Posto $L = R^{-1}$, si ha

$$PA = LU$$

fattorizzazione LU con pivoting parziale di A.

A parole, la strategia del pivoting parziale consiste nel far precedere ad ogni passo di eliminazione un passo di scambio, con l'obiettivo di portare in posizione pivotale l'elemento più grande in valore assoluto tra i candidati ad occupare la posizione pivotale. I candidati sono l'elemento in posizione pivotale e gli elementi lungo la stessa colonna al di sotto della diagonale.