

# Calcolo Numerico

## Zeri di funzione

- Metodo delle successive bisezioni
- Metodo di Newton

Problema: vogliamo risolvere  $f(x)=0$

## METODO DELLE SUCCESSIVE BISEZIONI.

Si poggia sul Teorema di Bolzano (o degli zeri):

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Allora  $\exists \alpha \in (a, b)$  tale che  $f(\alpha)=0$ .  $\alpha$  è detto *zero per f*.

Algoritmo:

Dichiariamo:  $a^{(0)} := a$ ;  $b^{(0)} := b$ ;  $x^{(0)} := \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2}$  ( $x^{(0)}$  punto medio)

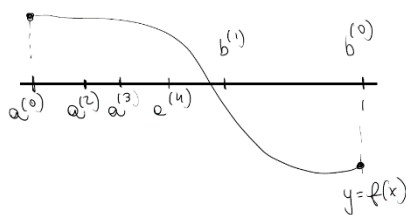
per  $k=0, 1, 2, \dots$

① se  $f(x^{(k)}) = 0$ , arresto l'algoritmo perché ho trovato la soluzione, che è  $x^{(k)}$ .

② se  $f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$ , poniamo  $a^{(k+1)} := a^{(k)}$ ,  $b^{(k+1)} := x^{(k)}$ ,

altrimenti  $a^{(k+1)} := x^{(k)}$ ,  $b^{(k+1)} := b^{(k)}$

fine



Se ① è verificata per qualche  $k$ , l'algoritmo si arresta in un numero finito di passi,

altrimenti genera tre successioni  $\{a^{(k)}\}$ ,  $\{b^{(k)}\}$ ,  $\{x^{(k)}\}$  tutte convergenti ad  $\alpha$  t.c.  $f(x)=0$ .

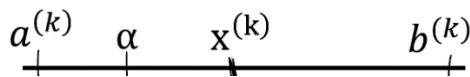
$x^{(k)}$   $\alpha$   
errore al passo  $k$ :  $|x^{(k)} - \alpha|$

Più  $x^{(k)}$  è vicino ad  $\alpha$ , migliore è l'approssimazione.

Notazioni:

$$I^{(k)} = [a^{(k)}, b^{(k)}]$$

$$|I^{(k)}| = \frac{1}{2} |I^{(k-1)}| = \frac{1}{4} |I^{(k-2)}| = \dots = \frac{b-a}{2^k}$$



$$|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |I^{(k)}| = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

Dato  $\varepsilon > 0$ , cerco  $k$  sufficientemente grande t.c.  $|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$

per studiare per quali valori di  $k$  l'errore è al di sotto della tolleranza

Risolvere:  $k > (\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}) - 1$  bisogna arrivare al più a questo numero di passi

Esempio:  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Se partiamo dall'intervallo  $[1, 2]$  che soddisfa l'ipotesi del teorema degli zeri e chiediamo la tolleranza di  $10^{-6} = 1/1000000$ , quanti passi dovremo fare?

$k > \log_2(10^6) - 1 = 6 \log_2(10) - 1 \approx 6 \cdot 3.32 - 1 \approx 18.93$ .

Sono sufficienti 19 passi (il più piccolo intero  $> 18.93$ ).

Pseudocodice:

input:  $a, b, f, \varepsilon$  ( $a, b$  estremi dell'intervallo,  $f$  funzione,  $\varepsilon$  tolleranza)

output:  $x$  tale che  $|x - \alpha| < \varepsilon$ , con  $\alpha$  zero per  $f$ .

①  $x \leftarrow \frac{1}{2}(a, b)$  (valore del punto medio dell'intervallo)

② se  $\frac{1}{2}(b-a) < \varepsilon$ , esci restituendo il valore di  $x$

③ se  $f(a)f(x) < 0$ ,  $b \leftarrow x$  altrimenti  $a \leftarrow x$

④ torna al punto ①

Osservazione: ogni volta che si torna al punto ①, la distanza  $b-a$  viene dimezzata, e via via dimezzando, prima o poi scenderà al di sotto di  $\varepsilon$ , qualsiasi sia  $\varepsilon$ .

Chiaramente, più piccolo è  $\varepsilon$ , maggiore sarà il numero di passi da fare.

L'algoritmo si arresterà in un numero finito di passi, ma è buona norma porre un limite al numero massimo possibile di passi, ad esempio 50 o 100, per cui quando lo implementeremo, inseriremo anche un contatore del numero di passi, in modo tale che, se il numero di passi avrà superato un certo limite introdotto dall'utente, l'algoritmo dovrà comunque uscire una volta superato questo limite.

Nello pseudocodice manca un controllo che arresti l'algoritmo se  $x^{(k)}$  è esattamente uno zero per  $f$ , perché la probabilità che  $x^{(k)}$  sia esattamente uno zero della funzione è talmente bassa da non giustificare l'implementazione di quel controllo.

### Studio del condizionamento di un problema:

Problema:

dato  $x \rightarrow$  soluzione  $y$

dato  $\tilde{x} \rightarrow$  soluzione  $\tilde{y}$

Errori:

$x$  = dato "esatto"

$\tilde{x}$  = approssimazione di  $x$

$|x - \tilde{x}|$  = errore assoluto

$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$  = errore relativo (tiene conto degli ordini di grandezza) (più significativo)

Esempio:

|                 | $x = 1, \tilde{x} = 2$ | $x = 100, \tilde{x} = 101$ |
|-----------------|------------------------|----------------------------|
| errore assoluto | 1                      | 1                          |
| errore relativo | 1=100%                 | 0.01=1%                    |

$$x = e = 2.71828182$$

| $\tilde{x}$ | errore relativo     | n. cifre corrette |
|-------------|---------------------|-------------------|
| 2           | $2 \cdot 10^{-1}$   | 1                 |
| 2.7         | $6.7 \cdot 10^{-3}$ | 2                 |
| 2.71        | $3 \cdot 10^{-3}$   | 3                 |
| 2.718       | $1 \cdot 10^{-4}$   | 4                 |
| 2.7182      | $3 \cdot 10^{-5}$   | 5                 |
| 2.71828     | $6 \cdot 10^{-7}$   | 6                 |

Se  $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \approx 10^{-q}$  diremo che  $\tilde{x}$  possiede  $q$  cifre significative corrette di  $x$ .

Un problema è *ben condizionato* se a piccole perturbazioni del dato  $x$  corrispondono altrettanto piccole perturbazioni della soluzione  $y$  (perturbazione = errore), altrimenti il problema è detto *mal condizionato*.

### Numero di condizionamento:

dato  $x$ ,

$$k(x) = \sup_{\tilde{x} \approx x} \frac{\text{errore relativo su } y}{\text{errore relativo su } x} \quad \text{cioè} \quad \left[ k(x) = \sup_{\tilde{x} \approx x} \frac{\text{errore relativo sulla soluzione}}{\text{errore relativo sui dati}} \right]$$

Osservazione: "errore relativo sulla soluzione"  $\leq k(x) \cdot$  "errore relativo sui dati".

\*\*\*

$k(x)$  è la più piccola costante tale che:  $\frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} \leq k(x) \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$

A parole, l'errore relativo alla soluzione è minore o uguale a  $k$  volte l'errore relativo sui dati.

Se  $k(x) \approx 1$ , il problema è ben condizionato.

Se  $k(x) \gg 1$ , il problema è mal condizionato.

Il simbolo  $\gg$  denota gli ordini di grandezza.

In particolare, se  $k(x) \approx 10^q$ , allora è possibile una perdita di  $q$  cifre significative.

Esempio:

Se  $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \approx 10^{10}$  e  $k(x) = 10^6$  allora è possibile che  $\frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} \approx 10^{-4}$

c'è stata una perdita di precisione

(Il dato è corretto alla 10ª cifra decimale, la soluzione è corretta solo alla 4ª.)

### Condizionamento sugli zeri di funzione:

dato:  $f$  (funzione della quale cerchiamo lo zero)

soluzione:  $\alpha \in \mathbb{R}$ , t.c.  $f(\alpha) = 0$

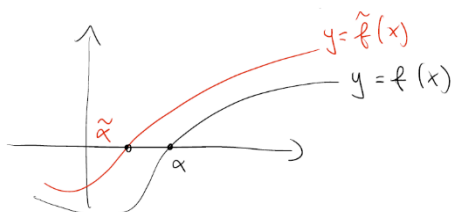
indichiamo:

dato esatto  $f$

dato perturbato  $\tilde{f}$

soluzione esatta  $\alpha$

soluzione perturbata  $\tilde{\alpha}$  (tale che  $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) = 0$ ).



Supponiamo che  $\tilde{f}(x) = f(x) + e(x)$  dove  $|e(x)| \leq \varepsilon$

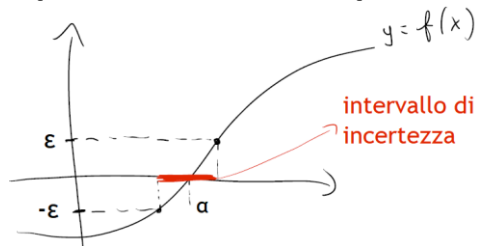
$e(x)$  = errore rappresentato come funzione;  $\varepsilon$  = maggiorazione dell'errore assoluto (tolleranza sull'errore)

## Osservazione

Se  $x$  è t.c.  $|f(x)| > \varepsilon$ , allora  $f(x)$  e  $\tilde{f}(x)$  hanno lo stesso segno.

Se invece  $|f(x)| \leq \varepsilon$ ,  $f(x)$  e  $\tilde{f}(x)$  potrebbero avere segno discorde.

In quest'ultimo caso c'è incertezza sulla posizione dello zero e non sappiamo praticamente niente della  $f$ .



## Definizione:

L'intervallo di incertezza per  $\alpha$  è il più grande intervallo  $[a, b]$  contenente  $x$  e tale per cui  $|f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ .

Obiettivo di un metodo numerico è portare l'approssimazione di  $\alpha$  all'interno di un intervallo di incertezza.

Possiamo dire che il problema è **mal condizionato** se:

“lunghezza dell'intervallo di incertezza”  $\gg \varepsilon$  (è molto maggiore di  $\varepsilon$ ).

Si quantifica l'ampiezza dell'intervallo applicando il Teorema di Taylor (centrato in  $\alpha$ ):

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha)$$

dove la notazione “o piccolo” denota i termini di ordine superiore (almeno  $(x - \alpha)^2$ ), trascurabili per  $x \approx \alpha$ .

Dunque, per  $x \approx \alpha$ ,  $f(x) \approx f'(\alpha)(x - \alpha)$

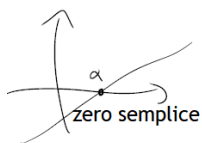
$$|f(x)| \leq \varepsilon \approx f'(\alpha)(x - \alpha) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \text{se } f'(\alpha) \neq 0, \text{ abbiamo } |x - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } f'(\alpha) \neq 0: x \in \left[ \alpha - \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}, \alpha + \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|} \right] \text{ (approssimazione dell'intervallo di incertezza)}$$

## Definizione:

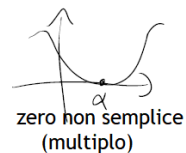
Sia  $f$  almeno derivabile in un intorno di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$\alpha$  è detto **zero semplice** per  $f$  se  $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ .



Piccole perturbazioni non creano problemi.

Se lo zero è semplice, piccole perturbazioni manterranno comunque uno zero da qualche parte dell'intervallo, per cui è un **problema ben posto**.



Se invece si perturba una funzione come questa, una perturbazione verso l'alto farebbe scomparire lo zero, mentre una perturbazione verso il basso genererebbe due zeri, per cui è un **problema mal posto**.

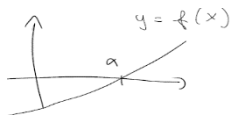
$$\text{ma } f(x) \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow \text{ampiezza} = 2\varepsilon \quad (\text{intervallo di incertezza sulla funzione})$$

$$\tilde{\alpha} \in \left[ \alpha - \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}, \alpha + \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|} \right] \rightarrow \text{ampiezza} = \frac{2\varepsilon}{|f'(\alpha)|} \quad (\text{intervallo di incertezza sullo zero})$$

$$k(\alpha) = \frac{2\varepsilon}{|f'(\alpha)|} = \frac{1}{|f'(\alpha)|} \quad k(\alpha) \text{ dipende da } \alpha$$

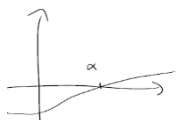
Quindi, se  $f'(\alpha) \geq 1$ , il problema è ben condizionato

se  $f'(\alpha) \ll 1$ , il problema è mal condizionato



zero ben condizionato

perché  $\alpha$  si sposta in maniera lieve ad ogni variazione



zero mal condizionato

perché ad ogni piccola variazione,  $\alpha$  si sposta di molto (essendo la tangente quasi orizzontale)

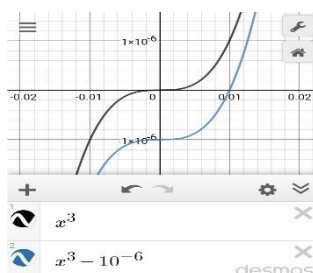
Esempio di zero non semplice:

$$f(x) = x^3$$

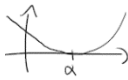
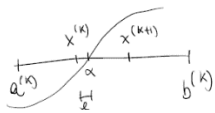
$$\tilde{f}(x) = x^3 - 10^{-6}$$

$$f(x) = 0 \text{ se } x = 0$$

$$\tilde{f}(x) = 0 \text{ se } x = 10^{-2}$$



Vantaggi e svantaggi del metodo delle successive bisezioni:

| VANTAGGI  | SVANTAGGI  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• semplicità di implementazione.</li> <li>• convergenza globale:<br/>è sufficiente che <math>f(a)f(b) &lt; 0</math></li> <li>• stima certa dell'errore ad ogni passo:<br/><math>\forall k, \alpha \in [a^{(k)}, b^{(k)}]</math><br/>questa proprietà viene chiamata "bracketing".</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• lentezza</li> <li>• è necessario che<br/><math>f(a)f(b) &lt; 0</math></li> </ul>  <p>non riusciamo ad applicare il metodo perché <math>f(a)</math> e <math>f(b)</math> sono sempre positive.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• può scartare buone approssimazioni della soluzione.</li> </ul>  |

### Definizione:

Sia  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  una successione t.c.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \alpha$  (o, in modo più compatto,  $x^{(k)} \rightarrow \alpha$ )

Diremo che  $x^{(k)} \rightarrow \alpha$  con ordine di convergenza  $p \geq 1$  se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \rightarrow c$$

Esempio:

$$x^{(0)} \text{ t.c. } |x^{(0)} - \alpha| \approx \frac{1}{10} \quad c \approx \frac{1}{10}$$

| $k$ | $p = 1$    | $p = 2$    | $p = 3$     |
|-----|------------|------------|-------------|
| 0   | $10^{-1}$  | $10^{-1}$  | $10^{-1}$   |
| 1   | $10^{-2}$  | $10^{-3}$  | $10^{-4}$   |
| 2   | $10^{-3}$  | $10^{-7}$  | $10^{-13}$  |
| 3   | $10^{-4}$  | $10^{-15}$ | $10^{-40}$  |
| 12  | $10^{-13}$ | $10^{-31}$ | $10^{-121}$ |

$$|x^{(k)} - \alpha| = c|x^{(k-1)} - \alpha|^p$$

$c$  è detto *fattore di convergenza*.

N.B.  $p \geq 1$  (condizione necessaria per avere la convergenza)

Infatti se  $p < 1$ , avremmo  $|x^{(k+1)} - \alpha| \approx c|x^{(k)} - \alpha|^p > c|x^{(k)} - \alpha|$

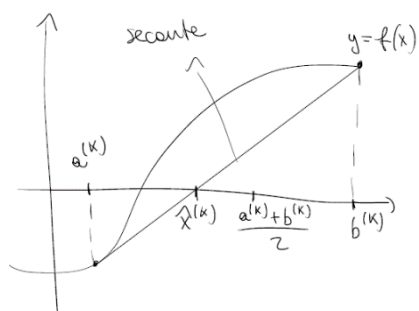
Tipi di convergenza:

|                          |                                  |
|--------------------------|----------------------------------|
| $p = 1 \wedge 0 < c < 1$ | lineare                          |
| $p = 1 \wedge c = 1$     | sub-lineare                      |
| $p > 1$                  | super lineare                    |
| $p = 2$                  | quadratica<br>(metodo di Newton) |
| $p = 3$                  | cubica                           |

Dato che per succ. bisezioni si ha mediamente  $\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} \approx \frac{1}{2}$

il metodo si comporta in modo lineare.

Metodo Regula Falsi (variante di successive bisezioni):



è necessario che  $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$

A differenza del metodo delle successive bisezioni che considera come approssimazione corrente il punto medio, questo metodo considera la retta secante per i punti  $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ ,  $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$

Si denota questo punto di ascissa con  $\hat{x}^{(k)}$ .

Il resto è uguale al metodo delle successive bisezioni.

Problema: vogliamo risolvere  $f(x)=0$

Idea: linearizziamo il problema

## METODO DI NEWTON.

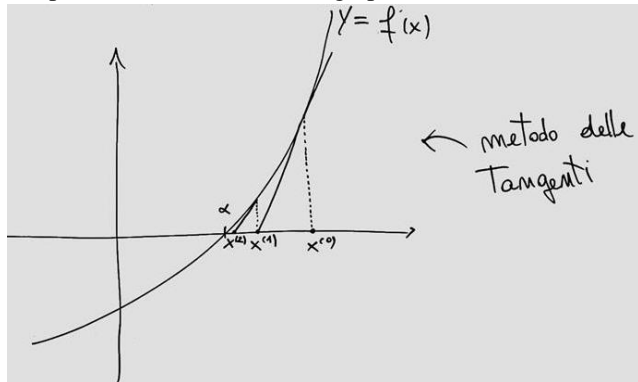
Si considera lo sviluppo di  $f(x)$  mediante polinomio di Taylor e lo si tronca al primo ordine:

Taylor:  $f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + o(x - x^{(0)})$  (resto di Peano)

dove l' "o piccolo" è trascurabile per  $x \rightarrow x^{(0)}$

Risolviamo  $f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$  rispetto a  $x$  e indichiamo con  $x^{(1)}$  la soluzione.

Poi procediamo in modo analogo per trovare  $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$  (approssimazioni dello zero)



Interpretazione grafica del procedimento.

Ad ogni passo, si sostituisce il problema originale (verosimilmente non lineare) con una sua versione lineare.

Si inizia prendendo un  $x^{(0)}$  non troppo lontano da  $\alpha$ .

A partire da esso, si costruisce la retta tangente al grafico al punto di ascissa  $x^{(0)}$ . L'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse sarà la nuova approssimazione  $x^{(1)}$ , e così via.

Per questo motivo, il metodo di Newton è anche detto "metodo delle tangenti".

Richiamo: (Teorema di Taylor con resto di Lagrange)

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile almeno  $p+1$  volte e con tutte le derivate fino alla  $(p+1)$ -esima continue.

Sia  $x_0 \in (a, b)$ . Allora possiamo scrivere:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}(x - x_0)^{p+1}$$

per qualche  $c$  in un intorno di  $x_0$ . Il punto  $x_0$  è detto *centro dell'approssimazione*.

Diremo "*polinomio di Taylor centrato in  $x_0$  e valutato in  $x$* ".

Torniamo alla linearizzazione: risolviamo rispetto a  $x^{(1)}$  l'equazione

$$f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = 0 \iff x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}(x - x^{(0)})$$

In generale: dato  $x^{(0)}$ , per ogni  $k=0, 1, 2, \dots$  (ciclo for)

poniamo  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ , se  $f'(x^{(k)}) \neq 0$ .

Fine iterazione.

$c$  dipende da  $x^{(0)}$  ed è il resto di Lagrange che quantifica l'errore commesso se si sostituisce la funzione  $f(x)$  con un suo polinomio di Taylor di grado  $p$ .

Con questo algoritmo si genera una successione  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$

Domanda:  $x^{(k)} \rightarrow \alpha$  t.c.  $f(\alpha) = 0$ ? (la successione converge ad  $\alpha$ ?)

Nel qual caso, con quale ordine di convergenza?

Scriviamo il polinomio di Taylor di  $f$  di grado 1 centrato in  $x^{(k)}$  e valutiamolo in  $\alpha$  t.c.  $f(\alpha) = 0$ .

$$f(\alpha) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(c^{(k)})(\alpha - x^{(k)})^2 \quad (\text{l'ultimo addendo è il resto di Lagrange})$$

con  $c^{(k)}$  nell'intervallo di estremi  $\alpha$  e  $x^{(k)}$ .

Dato che  $f(\alpha) = 0$ , dividiamo per  $f'(x^{(k)})$  (che supponiamo diverso da zero) e otteniamo:

$$0 = \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} + \alpha - x^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} (\alpha - x^{(k)})^2$$

Si raggruppano il primo e il terzo termine a destra in quanto la loro somma è equivalente all'opposto della reiterata  $k+1$ -esima.

$$0 = \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} + \alpha - x^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} (\alpha - x^{(k)})^2$$

$$= -x^{(k+1)}$$

Dunque

$$0 = \alpha - x^{(k+1)} + \frac{1}{2} \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} (\alpha - x^{(k)})^2$$

Riordini i termini e divido per  $(x^{(k)} - \alpha)^2$  e ottengo:  $\frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

Passo ai valori assoluti e ottengo:  $\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \right|$

RELAZIONE MOLTO IMPORTANTE

La relazione suggerisce che l'ordine di convergenza sia 2.

Se  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ ,  $k \geq 0$  (successione generata dal metodo di Newton)

allora (sotto opportune ipotesi di regolarità) si ha:  $|x^{(k+1)} - \alpha| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \right| |x^{(k)} - \alpha|^2$

dove  $c^{(k)}$  appartiene all'intervallo di estremi  $x^{(k)}$  e  $\alpha$ .

**TEOREMA** (di convergenza del metodo di Newton)

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile almeno due volte, con derivate  $f'$  fino alla seconda ( $f'$  e  $f''$ ) continue.

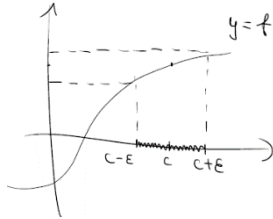
Sia  $\alpha \in I = (a, b)$  t.c.  $f(\alpha) = 0$ ,  $f'(\alpha) \neq 0$  (cioè  $\alpha$  è uno zero semplice).

Allora, scegliendo  $x^{(0)}$  sufficientemente vicino ad  $\alpha$ , la successione

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, k \geq 0 \quad \text{generata dal metodo di Newton}$$

converge ad  $\alpha$  con ordine di convergenza almeno 2.

Dimostrazione:



Per dimostrare il teorema, si richiama dapprima il teorema della permanenza del segno:

Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Sia  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) > 0$ .

Allora  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ .

Si applica il teorema della permanenza del segno a  $f'(\alpha)$ :

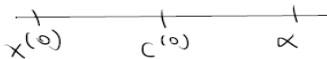
$\exists \varepsilon > 0$  tale che  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] =: I$

Sia  $M > 0$  così definito:  $M := \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{\min_{x \in I} |f'(x)|}$

Sia  $x^{(0)} \in I$  e tale che  $M|x^{(0)} - \alpha| < 1$

Se  $x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$ , allora abbiamo dimostrato che  $|x^{(1)} - \alpha| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \right| |x^{(0)} - \alpha|^2$ ,

$c^{(0)}$  compreso tra  $x^{(0)}$  e  $\alpha$



Dimostrazione:

Per com'è definito  $M$ , dato che  $c^{(0)} \in I$ , si ha:  $|x^{(1)} - \alpha| \leq M|x^{(0)} - \alpha|^2$  (\*)

osserviamo che

$$\textcircled{1} |x^{(1)} - \alpha| \leq \underbrace{M|x^{(0)} - \alpha|}_{<1} \underbrace{|x^{(0)} - \alpha|}_{<\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow x^{(1)} \in I$$

② moltiplicando (\*) per  $M$ , si ottiene che  $M|x^{(1)} - \alpha| \leq (M|x^{(0)} - \alpha|)^2 < 1$

Si può dimostrare per induzione che  $x^{(k)} \in I$  e  $M|x^{(k)} - \alpha| < 1$ ,  $\forall k \geq 0$

dunque:  $|x^{(k)} - \alpha| \leq M|x^{(k-1)} - \alpha|^2$ ,  $\forall k \geq 1$

Allora:  $M|x^{(k)} - \alpha| \leq (M|x^{(k-1)} - \alpha|)^2 \leq (M|x^{(k-2)} - \alpha|)^4 \leq \dots \leq (M|x^{(0)} - \alpha|)^{2^k} \Rightarrow$

dividendo tutto per  $M$  si ottiene che  $\Rightarrow 0 \leq |x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{1}{M} (M|x^{(0)} - \alpha|)^{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Quindi (per il teorema del confronto):  $|x^{(k)} - \alpha| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x^{(k)} \rightarrow \alpha$ .

Dimostrazione:

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$$

“fattore di convergenza”

Richiamo (continuità): se  $f$  è continua in  $x_0$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$

In particolare

- Se  $f''(\alpha) \neq 0$ , l'ordine di convergenza è 2
- Se  $f''(\alpha) = 0$ , l'ordine di convergenza è  $> 2$

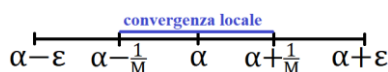
Infatti  $\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^2} \rightarrow 0$ ,  $|x^{(k+1)} - \alpha|$  ha ordine di infinitesimo superiore a  $|x^{(k)} - \alpha|^2$

per cui l'ordine di convergenza sarà maggiore di 2.

Cosa significa “ $x^{(0)}$  sufficientemente vicino ad  $\alpha$ ”?

Abbiamo supposto  $x^{(0)} \in I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

e  $M|x^{(0)} - \alpha| < 1 \Leftrightarrow |x^{(0)} - \alpha| < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x^{(0)} \in \left[\alpha - \frac{1}{M}, \alpha + \frac{1}{M}\right]$



### Stima dell'errore (assoluto)

$$\begin{aligned}
 |x^{(k)} - \alpha| &= |x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - \alpha| \leq |x^{(k+1)} - x^{(k)}| + |x^{(k+1)} - \alpha| \leq \\
 &\leq |x^{(k+1)} - x^{(k)}| + M|x^{(k)} - \alpha|^2
 \end{aligned}$$

aggiungo e sottraggo  $x^{(k+1)}$ 
disuguaglianza triangolare
dimostraz. precedente

da cui: asintoticamente positivo

$$|x^{(k)} - \alpha| \overbrace{(1 - M|x^{(k)} - \alpha|)}^{\text{asintoticamente 1}} \leq |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \Rightarrow |x^{(k)} - \alpha| \leq \left( \frac{1}{1 - M|x^{(k)} - \alpha|} \right) |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

quindi, asintoticamente:

$|x^{(k)} - \alpha| \leq |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$  l'errore assoluto al passo  $k$  è controllato dalla distanza tra iterazioni consecutive  
osserviamo che la stima è "un passo indietro" rispetto all'errore assoluto.

Potremmo utilizzare  $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq M|x^{(k)} - \alpha|^2$  e ottenere

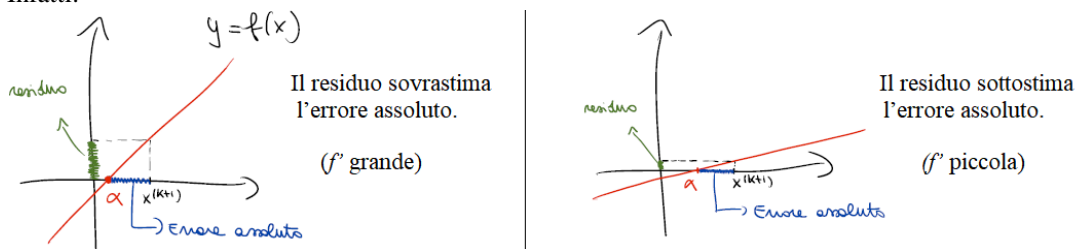
$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq M|x^{(k+1)} - x^{(k)}|^2 \text{ asintoticamente,}$$

ma questo porta ad altri problemi e visto che  $M$  è sconosciuta utilizziamo la formula precedente.

Ne derivano i seguenti criteri di arresto:

- |   |   |                 |  |
|---|---|-----------------|--|
| ① | $ x^{(k+1)} - x^{(k)}  < \varepsilon$                         | errore assoluto | può dare problemi per $\alpha$ grandi  |
| ② | $\frac{ x^{(k+1)} - x^{(k)} }{ x^{(k+1)} } < \varepsilon$     | errore relativo | può dare problemi per $\alpha$ piccoli   |
| ③ | $\frac{ x^{(k+1)} - x^{(k)} }{1 +  x^{(k+1)} } < \varepsilon$ | errore misto    | tende all'errore assoluto per $\alpha$ piccolo<br>relativo per $\alpha$ grande |
| ④ | $ f(x^{(k+1)})  < \varepsilon$                                | residuo         | può sottostimare o sovrastimare l'errore assoluto                              |

Infatti:



Se  $f'$  è né troppo grande né troppo piccola, il residuo rappresenta in maniera fedele l'errore assoluto.

### Pseudocodice (metodo di Newton):

$$\text{iterata generale } x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k+1)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$\text{o equivalentemennte } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \text{ dove } \Delta x^{(k)} = -\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \Leftrightarrow |\Delta x^{(k)}| = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

↑  
stima dell'errore assoluto

legenda:

- nit = numero di iterazioni
  - nitmax = numero massimo di iterazioni
  - input:  $f, f',$  stima iniziale  $x^{(0)}$ , tolleranza  $\varepsilon$ , nitmax
  - output: approssimazione di  $\alpha$  tale che  $f(\alpha) = 0$ , nit
- ① nit = 1
  - ② den  $\leftarrow f'(x^{(0)})$
  - ③ se den è nullo (o troppo piccolo), esci con un messaggio di errore.
  - ④  $\Delta x \leftarrow -\frac{f(x^{(0)})}{\text{den}}, x^{(1)} \leftarrow x^{(0)} + \Delta x$
  - ⑤ se  $|\Delta x| < \varepsilon$ , esci e restituisci  $x^{(1)}$  (approssimazione corrente) e nit.
  - ⑥ se nit = nitmax, esci con un messaggio di errore.
  - ⑦ nit  $\leftarrow$  nit+1,  $x^{(0)} \leftarrow x^{(1)}$
  - ⑧ torna al punto ②

L'algoritmo si arresta al raggiungimento della tolleranza richiesta o del numero massimo di iterate.