Esercizi su algebra lineare, fattorizzazione LU e risoluzione di sistemi lineari

9 dicembre 2021

Nota: gli esercizi più impegnativi sono contrassegnati dal simbolo ($\star$).

Esercizio 1. Considerato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 = -2 \\ -x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

1) portare la matrice completa del sistema lineare $[A, \mathrm{b}]$ in forma triangolare superiore $[U, \mathrm{c}]$ mediante il metodo di eliminazione di Gauss;

2) risolvere il sistema lineare $U\mathrm{x} = \mathrm{c}$ mediante la tecnica della sostituzione all'indietro.

Esercizio 2. Ripetere l'esercizio 1 per il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6 \\ -6x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 6 \\ 2x_1 - 8x_2 - 9x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinare le *matrici elementari di Gauss* M_1, M_2 e la matrice triangolare superiore U tali che

$$M_2 M_1 A = U.$$

Sfruttando la proprietà

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \text{ per ogni } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{1}$$

calcolare il determinante di A.

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -6 & -5 & -18 \end{bmatrix}.$$

Determinare le matrici elementari di Gauss M_1, M_2, M_3 e la matrice triangolare superiore U tali che

$$M_3 M_2 M_1 A = U.$$

Sfruttando la proprietà (1) a pagina 1, calcolare il determinante di A.

Esercizio 5. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 6 & 14 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1) determinare la fattorizzazione LU di A,

2) risolvere il sistema lineare $A\,\mathrm{x} = \mathrm{b}$ sfruttando la fattorizzazione LU di A,

3) calcolare il determinante di A sfruttando la fattorizzazione LU di A.

Esercizio 6. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 32 & 15 & 16 & 34 \\ -16 & 20 & 23 & 15 \\ 16 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ 33 \\ -50 \\ 29 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ -39 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

1) determinare la fattorizzazione LU di A,

2) risolvere il sistema lineare $A\,\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$ sfruttando la fattorizzazione LU di A,

3) risolvere il sistema lineare $A\,\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ sfruttando la fattorizzazione LU di A,

4) calcolare il determinante di A sfruttando la fattorizzazione LU di A.

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & -8 & -13 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinare la fattorizzazione LU di A.

Esercizio 8. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1) determinare la fattorizzazione LU di A,

2) risolvere i sistemi lineari $A\,\mathrm{x}_1 = \mathrm{e}_1$, $A\,\mathrm{x}_2 = \mathrm{e}_2$, $A\,\mathrm{x}_3 = \mathrm{e}_3$ sfruttando la fattorizzazione LU di A,

3) ($\star$) denotata con X la seguente matrice partizionata per colonne

$$X = [\mathrm{x}_1\,\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}_3]\ ,$$

calcolare il prodotto AX. Commentare il risultato ottenuto. Dedurne che il metodo di eliminazione di Gauss fornisce un modo per calcolare l'inversa di una matrice.

4) risolvere il sistema lineare $A\,\mathrm{x} = \mathrm{b}$ con

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

e confrontare il vettore soluzione x così ottenuto con il vettore $\mathrm{x}_1 + 2\,\mathrm{x}_2 + 3\,\mathrm{x}_3$. Giustificare e generalizzare quanto si osserva.

Esercizio 9. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) verificare che A non ammette una fattorizzazione LU senza l'utilizzo del pivoting parziale,

2) determinare la fattorizzazione LU con pivoting parziale di A,

3) dato

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix},$$

risolvere il sistema lineare $A\,\mathrm{x} = \mathrm{b}$ sfruttando la fattorizzazione LU con pivoting parziale di A.

Esercizio 10. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determinare la fattorizzazione LU con pivoting parziale di A.

Esercizio 11. Ripetere l'esercizio 10 per le seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -12 & 19 & 3 \\ -9 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 12. Scrivere una function Python che implementi la risoluzione di un sistema lineare $L\mathrm{x} = \mathrm{b}$, con L matrice quadrata triangolare inferiore speciale, mediante l'algoritmo della sostituzione in avanti. La function deve avere come dati di input la matrice L ed il vettore dei termini noti b, come dato di output il vettore soluzione x. ($\star$) Dimostrare che tale algoritmo richiede all'incirca n^2 operazioni floating point. A tale scopo, puó risultare utile dimostrare che la somma dei primi n numeri interi dispari è pari a n^2:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \ .$$

Esercizio 13. Scrivere una function Python che implementi la risoluzione di un sistema lineare $U\mathrm{x} = \mathrm{b}$, con U matrice quadrata triangolare superiore, mediante l'algoritmo della sostituzione all'indietro. La function deve avere come dati di input la matrice U ed il vettore dei termini noti b, come dato di output il vettore soluzione x. ($\star$) Dimostrare che tale algoritmo richiede all'incirca n^2 operazioni floating point.

Esercizio 14. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la soluzione x del sistema "esatto" $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ e la soluzione $\tilde{\mathrm{x}}$ del sistema "perturbato" $A\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{b}}$. Spiegare i risultati ottenuti alla luce dell'analisi del condizionamento della matrice A.

Esercizio 15. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare il valore (o i valori) del parametro t per cui:

1) il numero di condizionamento di A nella norma $\|\cdot\|_1$ è minimo.

2) la matrice A è fortemente malcondizionata nella norma $\|\cdot\|_1$.

Esercizio 16. ($\star$) Sia A una matrice reale $n \times n$, della quale si ha a disposizione la fattorizzazione $A = LU$. Proporre una procedura economica per risolvere il sistema lineare $A^2x = b$. Studiare il costo di questa procedura in termini di *FLOP*.

Esercizio 17. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ prima senza, e poi con, l'utilizzo del *pivoting parziale*, supponendo di lavorare in aritmetica di macchina in base 10 con 5 cifre significative. Confrontare e giustificare i risultati ottenuti.

Ancora esercizi su algebra lineare, fattorizzazione LU e risoluzione di sistemi lineari

20 dicembre 2021

Nota: gli esercizi più impegnativi sono contrassegnati dal simbolo ($\star$).

Esercizio 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 21 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 41 \\ 39 \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 40.9 \\ 39.1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la soluzione x del sistema "esatto" $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ e la soluzione $\tilde{\mathrm{x}}$ del sistema "perturbato" $A\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{b}}$. Spiegare i risultati ottenuti alla luce dell'analisi del condizionamento della matrice A.

Esercizio 2. Un proiettile è sparato in aria al tempo $t = 0$. È rilevata sperimentalmente la sua altezza h a certi istanti di tempo e i risultati sono riportati di seguito:

t (sec)	h (metri)
7.5	893
8	915
8.5	925
9	928
9.5	930
10	927
10.5	919
11	902

È noto che la traiettoria del proiettile è approssimativamente parabolica. Calcolare il polinomio $h(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati. Confrontare graficamente i dati sperimentali con la parabola ottenuta. Stimare il tempo di caduta del proiettile.

Esercizio 3. Una colonia di batteri è osservata in laboratorio, ad intervalli di un'ora. Sia p_0 la popolazione iniziale e p_n la popolazione dopo n ore. Supponiamo che i dati vengano collezionati per 8 ore, con i seguenti risultati per $p_0, p_1, \ldots, p_8$:

$$200, 260, 312, 401, 502, 643, 802, 990, 1253.$$

È noto che, con abbondante scorta di cibo ed ampio spazio a disposizione, la popolazione crescerà esponenzialmente, secondo la legge:

$$p_n = \alpha\, e^{\beta n}\,,$$

per certe costanti α, β. Per determinare queste costanti, applicare il logaritmo ad ambo i membri:

$$\log(p_n) = a + \beta n\,,$$

dove $a = \log(\alpha)$, e calcolare la retta di regressione per i dati $(n, \log(p_n))$. Confrontare graficamente i dati collezionati (n, p_n) con il modello di crescita esponenziale previsto $p(t) = \alpha\, e^{\beta t}$. Stimare il tempo necessario affinchè la popolazione raggiunga i 1500 individui.

Esercizio 4. ($\star$) Sia A una matrice reale $n \times n$, della quale si ha a disposizione la fattorizzazione $A = LU$. Proporre una procedura economica per risolvere il sistema lineare $A^T A x = b$. Studiarne il costo in termini di *FLOP*.

Esercizio 5. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sia x il vettore costituito da 100 punti linearmente equispaziati nell'intervallo $[-a, a]$. Sia y il vettore così definito: per $i = 1, \ldots, 100$, $y_i = \sin(x_i)$. Usando il metodo dei minimi quadrati, calcolare i coefficienti del polinomio $p_{a,n}(x)$ di grado n di migliore approssimazione ai punti (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 100$, per $n = 1$ e $a = 1, 0.1, 0.01$. Interpretare i risultati ottenuti. Ripetere l'esercizio per $n = 3$ e $n = 5$, con gli stessi valori di a. ($\star$) A cosa tende $p_{a,n}(x)$ quando a tende a 0?