Il metodo di Newton

Problema: risolvere $f(x) = 0$.

<u>Idea</u>: "linearizziamo il problema" vicino alla soluzione.

Consideriamo $x^{(0)}$ vicino a α zero per f, e scriviamo il polinomio di Taylor:

$$f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) +$$
$$+ \underbrace{O\left((x - x^{(0)})\right)}_{\text{resto}}$$

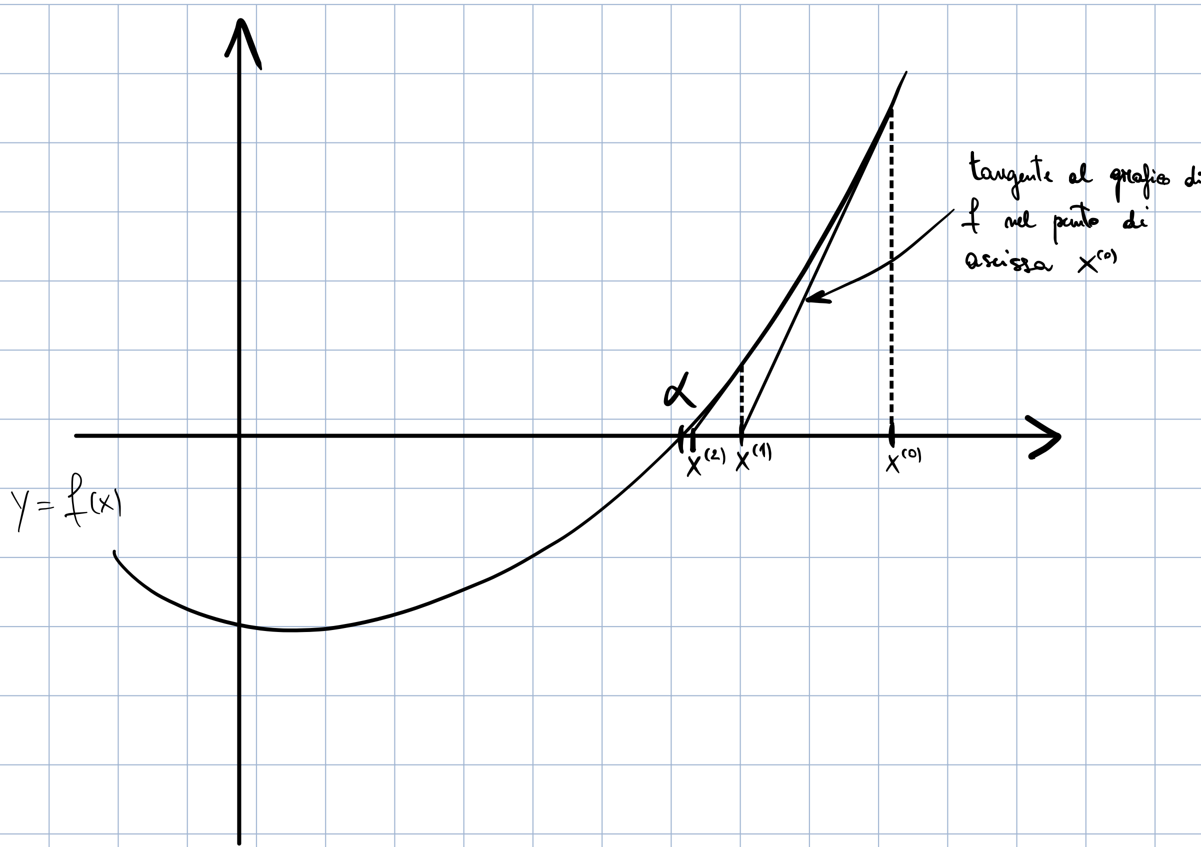
Trascuriamo il resto, e risolviamo

$$f(x^{(0)})+f'(x^{(0)})(x-x^{(0)})=0$$

rispetto a x, se $f'(x^{(0)})\neq 0$.
Denotiamo la soluzione con $x^{(1)}$: $x^{(1)}=x^{(0)}-f(x^{(0)})/f'(x^{(0)})$.

Procediamo analogamente per ottenere $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$

Questo procedimento ha la seguente interpretazione geometrica.



Per questo il metodo è anche detto "metodo delle Tangenti".

La generica iterata è

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0, \quad \text{se } f'(x^{(k)}) \neq 0.$$

Consideriamo il polinomio di Taylor di grado 1 di f con resto di Lagrange, centrato in $x^{(k)}$ e valutato in α zero per f:

$$f(\alpha) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) +$$

$$+ \frac{f''(c^{(k)})}{2}(\alpha - x^{(k)})^2,$$

con $c^{(k)}$ nell'intervallo di estremi α e $x^{(k)}$

Essendo $f(\alpha)=0$, dividendo per $f'(x^{(k)})$ e riarrangiando i termini:

$$\underbrace{x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}_{x^{(k+1)}} - \alpha = \frac{f''(c^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}(\alpha - x^{(k)})^2$$

Da cui segue

$$x^{(k+1)} - \alpha = \frac{f''(c^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}(\alpha - x^{(k)})^2 \quad [*]$$

Ciò suggerisce che, se il fattore $\frac{f''(c^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}$ si mantiene limitato per $k \to +\infty$, la succ.ne $x^{(k)}$ convergerà a α, e la convergenza sarà almeno quadratica.

Formalizziamo l'idea:

<u>Teorema</u> (di convergenza del metodo di Newton). Se $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in I intorno di α, e siano f, f', f'' continue in I. Sia α zero semplice per f $(f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0)$.

Allora, se $x^{(0)}$ è sufficientemente

vicino a α, la succ.ne

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad , k \geq 0$$

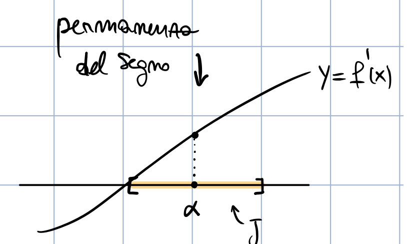
converge a α con O.d.C. almeno 2.

<u>Dimostrazione</u>:

Dato che f' è continua e $f'(\alpha) \neq 0$,

$\exists \; J = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ t.c.

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$



Consideriamo

$$M := \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in J} |f''(x)|}{\min_{x \in J} |f'(x)|} .$$

Sia $x^{(0)} \in J$ t.c. $M|x^{(0)}-\alpha|<1$.

Essendo $x^{(0)} \in J$, dall'eq.ne [*] segue che

$$|x^{(1)}-\alpha| \leq M\,|x^{(0)}-\alpha|^2,$$

da cui:

1) $|x^{(1)}-\alpha| \leq \underbrace{M\,|x^{(0)}-\alpha|}_{<1}\underbrace{|x^{(0)}-\alpha|}_{\leq \varepsilon} < \varepsilon$

2) $M\,|x^{(1)}-\alpha| \leq \left(M\,|x^{(0)}-\alpha|\right)^2 < 1$

Ne segue che $x^{(1)} \in J$ e $M|x^{(1)}-\alpha|<1$.

Per induzione possiamo provare che

$x^{(k)} \in J$ e $M|x^{(k)}-\alpha|<1$, $\forall\, k \geq 0$.

Dunque, ancora dalla [*]:

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq M\,|x^{(k-1)} - \alpha|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\,|x^{(k)} - \alpha| \leq \left(M\,|x^{(k-1)} - \alpha|\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(M\,|x^{(k-2)} - \alpha|\right)^4 \leq \dots \leq \left(\underbrace{M\,|x^{(0)} - \alpha|}_{<1}\right)^{2^k},$$

ovvero

$$0 \leq M\,|x^{(k)} - \alpha| \leq \underbrace{\left(M\,|x^{(0)} - \alpha|\right)^{2^k}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Possiamo dunque concludere che

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \alpha.$$

Ancora dalle [*] abbiamo:

$$\left|x^{(k+1)}-\alpha\right| = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{f''(c^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}\left|\alpha - x^{(k)}\right|^2$$

$\downarrow$ per $k \to +\infty$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|$$

(poiché f', f'' continue e $f'(\alpha) \neq 0$, e $\alpha \leftarrow c^{(k)} \leftarrow x^{(k)}$)

Ne segue che:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|}{\left|x^{(k)}-\alpha\right|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| ,$$

e quindi:

- $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ O.d.c. 2
- $f''(\alpha) = 0 \Rightarrow$ O.d.c. > 2

□

Criteri di arresto: come stimare l'errore assoluto?

Abbiamo visto che, scegliendo $x^{(0)}$ suff. vicino a α, si ha:

$$|x^{(K+1)} - \alpha| \leq M |x^{(K)} - \alpha|^2, \quad K \geq 0$$

dove $M = \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in J} |f''(x)|}{\min_{x \in J} |f'(x)|}$, J opportuno intorno di α (vedere Teo. di convergenza del metodo di Newton).

Unendo le due disuguaglianze:

aggiungo e sottraggo

$$|x^{(K)} - \alpha| = |x^{(K)} - x^{(K+1)} + x^{(K+1)} - \alpha| \leq$$

$$\leq |x^{(K)} - x^{(K+1)}| + |x^{(K+1)} - \alpha| \leq$$

$$\leq \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| + M\left|x^{(k)} - \alpha\right|^2$$

Riordinando:

$$\underbrace{\left(1 - M\left|x^{(k)} - \alpha\right|\right)}_{\substack{\text{sempre strettamente} \\ \text{positivo se } x^{(0)} \\ \text{è scelto opportunamente}}} \left|x^{(k)} - \alpha\right| \leq \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$$

Dunque:

$$\left|x^{(k)} - \alpha\right| \leq \frac{1}{\underbrace{1 - M\left|x^{(k)} - \alpha\right|}_{\substack{\text{Tende a } 1 \\ \text{per } k \to +\infty}}} \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$$

Quindi asintoticamente(*):

$$\underbrace{|x^{(k)}-\alpha|}_{\text{errore al passo } k} \underset{\approx}{\leq} |x^{(k+1)}-x^{(k)}|$$

passo corrente

"la stima ha un passo di ritardo"

(*) Formalmente:

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \; N\geq 0$ t.c.

$$|x^{(k)}-\alpha| \leq (1+\varepsilon)|x^{(k+1)}-x^{(k)}|,$$

per $k \geq N$

Criteri di arresto

1) $|x^{(k+1)}-x^{(k)}| \leq Tol$ (errore assoluto)

2) $$\frac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}|} \leq Tol$$ (errore relativo)

3) $$\frac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}| + 1} \leq Tol$$ (errore "misto")

si "polarizza" su errore relativo / assoluto per α grande / piccolo.

4) $$|f(x^{(k+1)})| \leq Tol$$ (residuo)

Ma sappiamo che può sottostimare o sovrastimare l'errore assoluto

Osservazioni pratiche

(1) verifichiamo che $f'(x^{(k)}) \neq 0$ (oppure $f'(x^{(k)})$ "non troppo piccolo") $\forall k \geq 0$

(2) Se "spezziamo" il passo in due:

$$\begin{cases} dx^{(k)} = -f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + dx^{(k)} \end{cases}$$

$dx^{(k)}$ ← incremento

notiamo: $|dx^{(k)}| = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$

↑ stima dell'errore assoluto