Esercizi su spazi vettoriali e algebra lineare

10 dicembre 2021

Esercizio 1. Portare in *forma a gradini* mediante operazioni elementari tra righe ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinare, inoltre, il rango di ciascuna delle tre matrici.

Esercizio 2. Determinare almeno due soluzioni non banali distinte per ciascuno dei seguenti sistemi lineari.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Mostrare che i seguenti sistemi ammettono solo la soluzione banale.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

1) Determinare, se ne esistono, tutte le soluzioni del sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$,

2) determinare una base per $\mathrm{Im}(A)$,

3) determinare una base per $\mathrm{Ker}(A)$,

4) determinare il rango di A.

Esercizio 5. Ripetere l'esercizio 4 per:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6. Discutere, al variare del parametro α, il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3-\alpha & -6 \\ 1 & 1+\alpha & 4-\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 7. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2+\alpha \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori di α e β per cui il sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$:

1) non ammette alcuna soluzione,

2) ammette unica soluzione,

3) ammette infinite soluzioni.

Nel caso 3), determinare tutte le soluzioni del sistema lineare.

Esercizio 8. Rispondere *VERO* o *FALSO* a ciascuna delle seguenti domande:

1) un sistema lineare avente più incognite che equazioni ammette sempre almeno una soluzione,

2) un sistema lineare avente più equazioni che incognite non ammette mai soluzione,

3) se un sistema lineare avente più incognite che equazioni ammette almeno una soluzione, ne ammette infinite.

Ogni risposta va giustificata con una dimostrazione o con un controesempio.

Esercizio 9. Determinare quali condizioni devono essere soddisfatte da b_1, b_2, b_3 affinché il seguente sistema ammetta soluzione:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & b_2 \\ x_1 + 2x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

Esercizio 10 (Esonero AA 2016/2017)**.**

1) Enunciare la definizione di matrice in *forma a gradini*;

2) enunciare la definizione di *rango* di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;

3) enunciare il Teorema di Rouché-Capelli;

4) siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -9 & 19 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix};$$

determinare i valori di α e β per cui il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$:

a) non ammette soluzione;
b) ammette unica soluzione;
c) ammette infinite soluzioni;

5) una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si dice *fat* se $m < n$; giustificare o confutare la seguente affermazione: "se un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ammette infinite soluzioni per una particolare scelta del vettore b, allora A è fat".

Esercizio 11 (alcune domande sono state estratte da esoneri di AA passati)**.**

1) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si dice *skinny* se $m > n$; giustificare o confutare la seguente affermazione: "se un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ammette unica soluzione per una particolare scelta del vettore b, allora A è quadrata o skinny";

2) può un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ con matrice dei coefficienti di dimensione 3×4 ammettere unica soluzione per una opportuna scelta di b?;

3) può un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ con matrice dei coefficienti di dimensione 4×3 ammettere soluzione per ogni scelta di b?;

4) sia $A \in \mathbb{R}^{5\times 12}$; supponiamo che esista un vettore b tale che $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ammetta ∞^8 soluzioni. Qual'è il rango di A?

Ogni risposta va giustificata con una dimostrazione o con un controesempio.

Esercizio 12. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si dice che A e B *commutano* se $AB = BA$. Dimostrare che:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ se e soltanto se A e B commutano,

b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e soltanto se A e B commutano.

Esercizio 13. Dimostrare che il rango non è funzione continua dei coefficienti di una matrice. [Suggerimento: creare una famiglia di matrici $A(t)$ tale che $\operatorname{rank}(A(t)) = 2$ per ogni $t \neq 0$ ma $\operatorname{rank}(A(0)) = 1$. Considerare il limite di $\operatorname{rank}(A(t))$ per $t \to 0$ e riflettere sulla definizione di continuità.]

Esercizio 14. Dimostrare o confutare ciascuna la seguente affermazione:

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio 15. Dimostrare le seguenti proprietà del rango di una matrice:

1. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è invertibile, allora $\operatorname{Ker}(AT) = \operatorname{Ker}(A)$;
2. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è invertibile, allora $\operatorname{Im}(AT) = \operatorname{Im}(A)$;
3. Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono invertibili, allora $\operatorname{rank}(SA) = \operatorname{rank}(AT) = \operatorname{rank}(SAT) = \operatorname{rank}(A)$. Ovvero: moltiplicazioni a destra e a sinistra per matrici invertibili lasciano invariato il rango;
4. Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Il rango di A è k se e soltanto se esistono due matrici $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibili tali che $SAT = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 16. Fornire un esempio di matrici $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tali che $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$ e $\operatorname{rank}(AB) = 0$

Esercizio 17. Dimostrare quanto segue:

1. Una matrice quadrata A è invertibile se e soltanto se $\operatorname{Ker}(A)$ è banale;
2. Per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile, le trasformazioni $A \leftarrow MA$ e $b \leftarrow Mb$ lasciano invariato l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$;
3. Se nella trasformazione al punto precedente M non fosse invertibile, l'insieme delle soluzioni potrebbe risultare modificato. Che relazione c'è in generale tra l'insieme delle soluzioni prima e dopo la trasformazione?