Adesso stimiamo la lunghezza dell'int.llo di incertezza. Vorremmo risolvere la disuguaglianza $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Polinomio di Taylor di grado 1 di f centrato in α:

$$f(x) = \underbrace{\cancel{f(\alpha)}}_{=0} + f'(\alpha)(x-\alpha) + \underbrace{R_1(x)}_{\substack{\text{trascurabile} \\ \text{per } x \simeq \alpha}}$$

Da cui

$$f(x) \simeq f'(\alpha)(x-\alpha), \text{ per } x \simeq \alpha.$$

Dunque per $x \simeq \alpha$ rimpiazziamo $|f(x)| \leq \varepsilon$ con $|f'(\alpha)|\,|x-\alpha| \leq \varepsilon$.

Per risolverla bisogna supporre $f'(\alpha) \neq 0$.

Introduciamo una

<u>Definizione</u>: Siano $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivabile in (a,b) e α t.c. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

Allora α è detto **zero semplice** per f.

Continuiamo il ragionamento. Sia α zero semplice per f. Allora

$$|f'(\alpha)|\,|x-\alpha| \leq \varepsilon \iff |x-\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|} \iff$$

$$\iff x \in \underbrace{\left[\alpha - \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}, \alpha + \frac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}\right]}_{\text{stima dell'intervallo di incertezza}}$$

Sintetizziamo:

incertezza su f : ε

incertezza su α : $\dfrac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}$

Ne segue che il fattore di condizionamento (rispetto all'errore assoluto) è

$$K(\alpha) = 1/|f'(\alpha)|$$

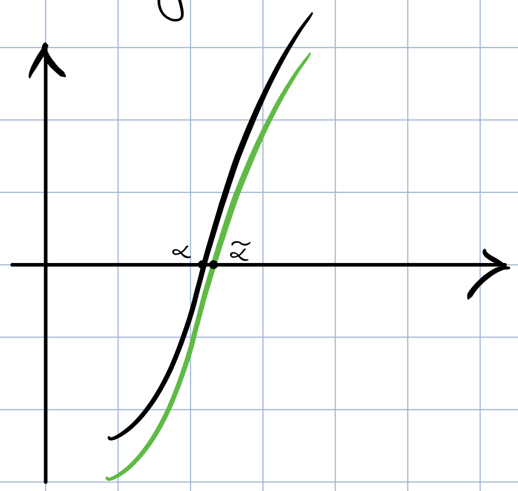
Conclusione:

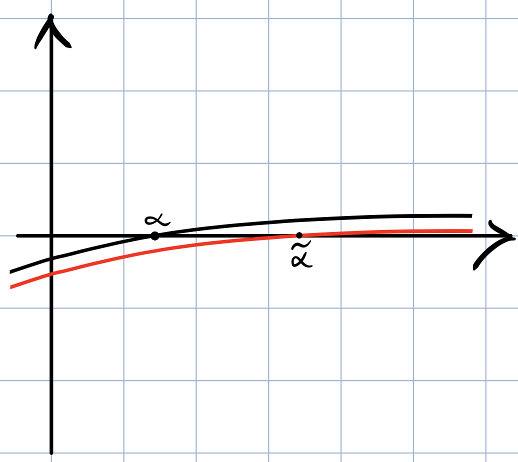
$$|f'(\alpha)| \gg 1 \quad : \text{ zero ben condizionato}$$

"molto più piccolo di"

$$|f'(\alpha)| \ll 1 \quad : \text{ zero mal condizionato}$$

Si riflette sulle figure:

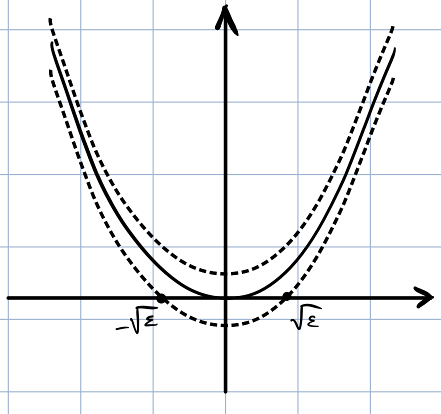




Cosa succederebbe se α non fosse zero semplice?

<u>ESEMPIO</u>:

$$f(x) = x^2$$
$$\tilde{f}(x) = x^2 - \varepsilon$$



Per $\varepsilon < 0$ non c'è più soluzione!

Per $\varepsilon > 0$ abbiamo: $\alpha = 0$, $\tilde{\alpha} = \pm\sqrt{\varepsilon}$.

Errore assoluto su f : ε

Errore assoluto su α : $\sqrt{\varepsilon}$

Se $0 < \varepsilon < 1$, si ha $\sqrt{\varepsilon} > \varepsilon$.

Se, ad esempio, avessimo $\varepsilon = 10^{-6}$,

allora avremmo $\sqrt{\varepsilon} = 10^{-3}$, cioè

"errore assoluto sulla soluzione" = 1000 "errore assoluto sul dato",

ovvero problema mal condizionato!

Adesso studiamo un modo per quantificare la "velocità" di un metodo iterativo per il calcolo degli zeri di funzione.

ORDINE DI CONVERGENZA

Sia $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \alpha \in \mathbb{R}.$$ Diremo che

$$\underbrace{x^{(k)} \longrightarrow \alpha}_{\text{si legge "}x^{(k)}\text{ converge a }\alpha\text{"}}$$ con ordine di convergenza

(OdC) $p \geq 1$ se $\exists\ 0 < C < +\infty$ t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = C.$$ In tal caso,

C è detto fattore asintotico di convergenza.

Si utilizza la seguente nomenclatura:

p	C	Convergenza
1	$0 < C < 1$	lineare
1	$C = 1$	sublineare
> 1	qualsiasi	superlineare
2	qualsiasi	quadratica
3	qualsiasi	cubica

<u>Osservazioni</u>: per "K suff. grande" si ha

$$|x^{(K+1)} - \alpha| \simeq C |x^{(K)} - \alpha|^p .$$

Per noi $|x^{(K)} - \alpha|$ è sempre un numero piccolo molto minore di 1, per cui $|x^{(K)} - \alpha|^p$ è tanto più piccolo quanto più grande è p.

<u>ESEMPIO</u>: supponiamo $|x^{(0)} - \alpha| = 10^{-1}$ e $C = 10^{-1}$. Allora:

passo	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
0	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}
1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
2	10^{-3}	10^{-7}	10^{-13}
3	10^{-4}	10^{-15}	
$\vdots$	$\vdots$		
12	10^{-13}		

Se avessimo impostato una Tolleranza $\varepsilon = 10^{-13}$, i tre metodi avrebbero raggiunto l'appr.ne richiesta in 12, 3 e 2 passi, rispettivamente. In sostanza (trascurando l'effetto di C),

maggior OdC $\Longrightarrow$ minor numero di passi

<u>Nota</u>: ovviamente conta anche il costo computazionale per passo.

<u>Domanda</u>: qual è l'ordine di convergenza associato alle succ.ni generate dal metodo delle succ.ve bisezioni?

Si può dimostrare che generalmente accade che
$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|}$$
sia arbitrariamente grande/piccolo per infiniti valori di k, per cui non esistono $p \geq 1$ e $C > 0$ t.c.
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = C.$$

Per un metodo lineare $(p=1)$ si può facilmente dimostrare che $\exists$ $c>0$ t.c., per k sufficientemente grande,

$$|x^{(k)}-\alpha| \leq c\,|x^{(k-1)}-\alpha| \leq$$
$$\leq c^2\,|x^{(k-2)}-\alpha| \leq \dots$$
$$\dots \leq c^k\,|x^{(0)}-\alpha|,$$

una relazione simile a quella dimostrata per il metodo delle succ.ve bisezioni:

$$|x^{(k)}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Per questo motivo diremo che "il metodo delle succ.ve bisezioni è un metodo lineare".

Attenzione: quando attribuiremo (impropriamente) un OdC ad un metodo, lo faremo intendendo che quello è l'OdC esibito generalmente dalle succ.ni generate da quel metodo.