Richiamo: $\{x^{(k)}\} \longrightarrow \alpha$ con O.d.C.

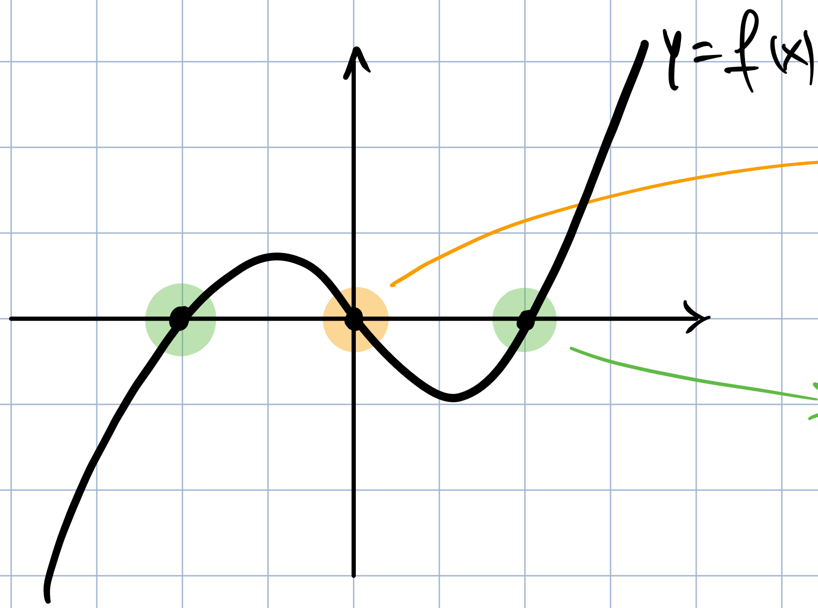
$p \geq 1$ se

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \longrightarrow C \neq 0$$

Esercizio: data $f(x) = x^3 - x$, determinare l'O.d.C. delle succ.ni generate dal metodo di Newton ai suoi zeri $\alpha = -1, 0, 1$.

Cominciamo da un grafico di f.

- $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$
- per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$
- per $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$



$$\left.\begin{array}{l} f'(0)\neq 0 \\ f''(0)=0 \end{array}\right\}$$ o.d.c. atteso è 3

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)\neq 0 \\ f''(1)\neq 0 \end{array}\right\}$$ o.d.c. atteso è 2

Verifichiamolo sfruttando la def. di o.d.c.

Newton: $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0.$$

$$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$$

Dunque

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^3 - x^{(k)}}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 1}$$

Partiamo da $\alpha = 1$.

Sottraggo $\alpha = 1$ e divido per $(x^{(k)} - \alpha)^p$,

dove p andrà scelto opportunamente.

$$x^{(k+1)} - 1 = x^{(k)} - 1 - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1} =$$

$$= \frac{3(x^{(k)})^3 - \cancel{x^{(k)}} - 3(x^{(k)})^2 + 1 - (x^{(k)})^3 \cancel{+ x^{(k)}}}{3(x^{(k)})^2 - 1} =$$

$$= \frac{2(x^{(k)})^3 - 3(x^{(k)})^2 + 1}{3(x^{(k)})^2 - 1} = \ldots$$

raccogliere al numeratore il fattore $(x^{(k)} - \alpha)$ tante volte quanto è possibile

Ruffini su $2x^3 - 3x^2 + 1$:

	2	-3	0	1
1		2	-1	-1
	2	-1	-1	//

$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(2x^2 - x - 1)$

Ruffini su $2x^2 - x - 1$

	2	-1	-1
1		2	1
	2	1	//

$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

$$\dots = \frac{(x^{(k)}-1)^{2}(2x^{(k)}+1)}{3(x^{(k)})^2-1}$$

dividiamo per $(x^{(k)}-1)^2$ e passiamo ai valori assoluti:

$$\frac{|x^{(k+1)}-1|}{|x^{(k)}-1|^{2}} = \frac{|2x^{(k)}+1|}{|3(x^{(k)})^2-1|} \xrightarrow[\substack{k\to+\infty \\ x^{(k)}\to 1}]{} 3/2 \, ,$$

dunque l'O.d.C. è 2.

Passiamo a $\alpha = 0$. Consideriamo ancora

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2-1}$$

Sottraggo α a entrambi i membri (questa volta senza effetto perché $\alpha = 0$) e divido per $(x^{(k)} - \alpha) = x^{(k)}$, con p da scegliere opportunamente.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^3 - x^{(k)}}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{3\left(x^{(k)}\right)^3 - \cancel{x^{(k)}} - \left(x^{(k)}\right)^3 + \cancel{x^{(k)}}}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{2\left(x^{(k)}\right)^3}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 1}$$

Da cui:

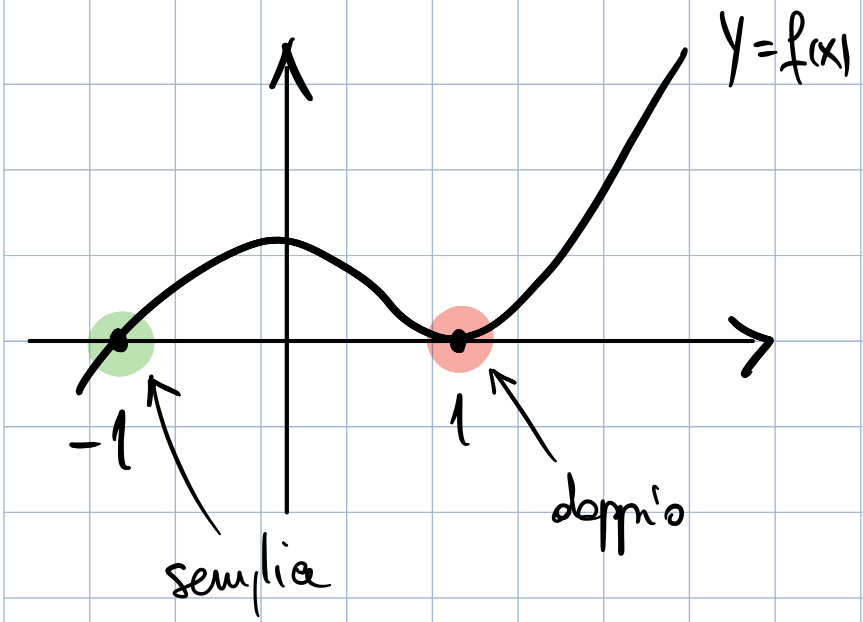
$$\frac{x^{(k+1)}}{\left(x^{(k)}\right)^3} \overset{\alpha=0}{=} \frac{x^{(k+1)}-\alpha}{\left(x^{(k)}-\alpha\right)^3} = \frac{2}{3\left(x^{(k)}\right)^2-1}.$$

Passo ai valori assoluti:

$$\frac{|x^{(k+1)}-\alpha|}{|x^{(k)}-\alpha|^3} = \frac{2}{|3(x^{(k)})^2-1|} \xrightarrow[\substack{k\to+\infty \\ x^{(k)}\to 0}]{} 2$$

Quindi l'O.d.C. è 3.

Esercizio: data $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ determinare l'O.d.C. delle succ.ni generate dal metodo di Newton ai suoi zeri $\alpha = -1, 1$.



$\alpha = -1$: o.d.c. atteso è 2

$\alpha = 1$: o.d.c. atteso 1 (poiché zero doppio)

Ripetere l'analisi fatta sopra ...

ARITMETICA DI MACCHINA

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono infiniti; quasi tutti i numeri in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ hanno sviluppo decimale (o binario) infinito.

Teorema (di rappresentazione in base)

Dati $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{N}, \beta \geq 2$, <u>esiste</u> un <u>unico</u> modo di rappresentare x come

$$x = \pm \sum_{i=0}^{\infty} d_i \beta^{-i} \times \beta^{p}, \text{ dove}$$

(1) $d_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d_i \leq \beta - 1, \forall i \geq 0.$

↳ cifre

(2) $d_0 \neq 0$ "normalizzazione"

↳ cifra più significativa

(3) $p \in \mathbb{Z}$

(4) $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ non definitivamente uguale a $\beta - 1$.

Osservazioni

- sulla (2):

$$3.14 = \cancel{0.314 \times 10} = \cancel{314 \times 10^{-2}}$$

- sulla (4) (garantisce l'unicità)

Esempio:

$$1 = 1.0 \times 10^{0} = 0.\overline{9} = \cancel{9.\overline{9} \times 10^{-1}}$$

Informalmente

$$X = \pm \sum_{i=0}^{\infty} d_i \beta^{-i} \times \beta^{p} = \boxed{\pm d_0 . d_1 d_2 \ldots \times \beta^{p}}$$

Per rendere l'insieme finito dovremo limitare il <u>numero di cifre</u> d_i e il <u>range per l'esponente</u> p.

Esempio:

$$(0.1)_{10} = (?)_2$$

$0.1 \times 2 = 0.2$

$0.2 \times 2 = 0.4$

$0.4 \times 2 = 0.8$

$0.8 \times 2 = 1.6$

$0.6 \times 2 = 1.2$

periodo

allora

$$(0.1)_{10} =$$

$$(0.0\overline{0011})_2 =$$

$$= \left(1.\overline{1001} \times 2^{-4}\right)_2$$

una cifra in base 10 ma ∞ cifre in base 2!

INSIEME DEI NUMERI DI MACCHINA

L'insieme dei numeri di macchina in base β a $t+1$ cifre significative e range per l'esponente (M_1, M_2) è costituito dai seguenti elementi

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pm \sum_{i=0}^{t} d_i \beta^{-i} \times \beta^{p}, \right.$$

dove $d_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_i \leq \beta - 1$

per $i = 0, 1, \ldots, t$, $d_0 \neq 0$

e $p \in \mathbb{Z}$ con $M_1 + 1 \leq p \leq M_2 - 1 \}$

Esso è denotato con

$$\mathbb{F}(\beta, t, M_1, M_2)$$

Osservazioni:

(1) $0 \notin \mathbb{F}$

(2) informalmente i numeri macchina hanno la seguente forma:

$$x = \pm\, d_0 . d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^{p}$$