Richiami e considerazioni:

1) possiamo trasformare $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in forma a gradini mediante una sequenza di operazioni elementari

2) ogni operazione elementare corrisponde alla premoltiplicazione per un'opportuna matrice invertibile

3) il prodotto di matrici invertibili è invertibile.

Conclusione: data $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\exists\, M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile t.c.

$$MA = U$$

Se partizioniamo A e U per colonne,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

Allora $u_1 = Ma_1, \ldots, u_n = Ma_n$

Per determinare una base per $\mathrm{Im}(A)$, basta ricordare che le matrici invertibili trasformano basi in basi.

<u>Esempio</u>

Le colonne pivotali di $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

costituiscono banalmente una base per $\mathrm{Im}(U)$.

Dunque le <u>corrispondenti colonne</u> di

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ costituiscono una base

per $\mathrm{Im}(A)$. Ovvero:

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ è base per $\mathrm{Im}(A)$.

TEOREMA Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Allora

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rank}(A) = n$$

Dimostrazione: è ovvio! (esempio precedente:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ ma si può generalizzare)}$$

contribuiscono a $\mathrm{rank}(A)$

contribuisce a $\mathrm{Ker}(A)$

Obiettivo: risolvere il sistema lineare

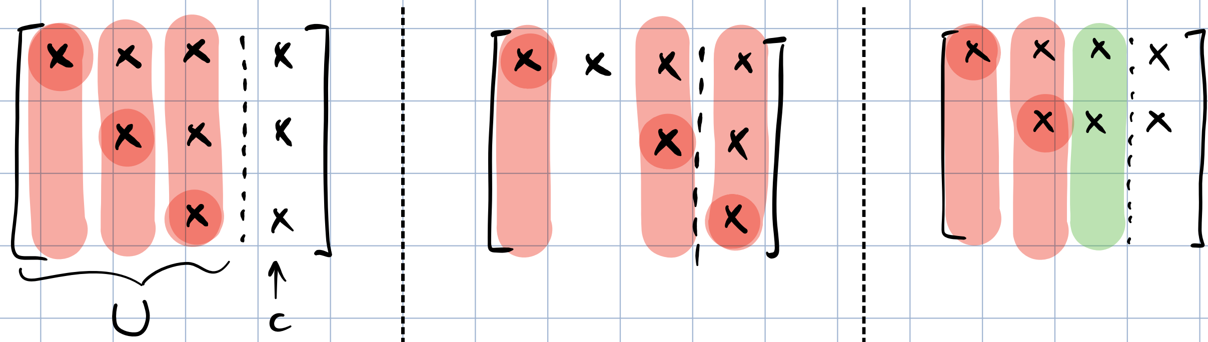
$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m.$$

Strategia:

(1) $$[A, b] \xrightarrow{\text{op. elem.}} \underbrace{[U, c]}_{\text{a gradini}}$$

(2) risolvo rispetto alle variabili pivotali il sistema $Ux = c$ per sostituzione all'indietro, dopo aver portato a destra del segno di uguaglianza le variabili non pivotali (che diventano parametri arbitrari della soluzione).

C sono 3 possibili scenari:



Tutte e sole le colonne di U sono pivotali

$\Downarrow$

$\exists!$ soluzione di $Ux = c$

$\operatorname{rank}(U) = \operatorname{rank}([U,c])$

$\operatorname{rank}(U) = n$

---

c'è un pivot nella colonna c

$\Downarrow$

ultima eq-ne è impossibile

$\Downarrow$

$\nexists$ soluzioni

$\operatorname{rank}(U) < \operatorname{rank}([U,c])$

---

nessun pivot in c, presenza di una colonna non pivotale in U

$\Downarrow$

$\exists \, \infty$ soluzioni

$\operatorname{rank}(U) = \operatorname{rank}([U,c])$

$\operatorname{rank}(U) < n$

Ricordiamo:

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(U)$$
$$\mathrm{rank}([A,b]) = \mathrm{rank}([U,c])$$

Raccogliamo tutto nel seguente

<u>TEOREMA</u> (Rouché-Capelli)
Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^{m}$. Allora:

(1) il sistema $Ax = b$ ammette soluzione se e solo se

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A,b])$$

(2) se $r := \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A,b])$. Allora

la soluzione di $Ax=b$ <u>è unica</u> se e solo se

$$n = r.$$

Altrimenti esistono ∞^{n-r} soluzioni, ovvero l'insieme delle soluzioni è parametrizzato da $n-r$ parametri arbitrari.

<u>Esempio precedente</u>: $Ux = 0$ ammette ∞^1 soluzioni perché $\mathrm{Ker}(U)$ è parametrizzato mediante un solo parametro. Infatti

$$\#\text{ colonne di } U - \mathrm{rank}(U) =$$

$$3 - 2 = 1$$

ESERCIZIO

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & \alpha \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \beta \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determinare i valori di α e β per i quali il sistema $Ax = b$:

(a) NON ammette soluzione,

(b) ammette unica soluzione,

(c) ammette infinite soluzioni.

Per i valori di α e β al punto (c), determinare:

(1) Tutte le possibili soluzioni del sist. lin. $Ax = b$,

(2) una base per $\mathrm{Im}(A)$,

(3) una base per $\mathrm{Ker}(A)$,

(4) il rango di A.

SOLUZIONE

Formiamo la matrice completa:

$$[A \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & \beta \\ -2 & 2 & \alpha & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow R_1 \\ \leftarrow R_2 \\ \leftarrow R_3 \end{array}$$

La portiamo in forma a gradini:

$$
\begin{array}{r}
\\
R_2+R_1 \rightarrow \\
R_3-R_1 \rightarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc:c}
2 & -1 & 1 & \beta \\
0 & 1 & \alpha+1 & \beta-6 \\
0 & -2 & -2 & 8-\beta
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
R_3+2R_2 \rightarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc:c}
2 & -1 & 1 & \beta \\
0 & 1 & \alpha+1 & \beta-6 \\
0 & 0 & 2\alpha & \beta-4
\end{array}\right]
$$

(a) pivot lungo la colonna dei termini noti :

$$\alpha = 0 \;, \; \beta \neq 4$$

(b) $\qquad \alpha \neq 0$

(c) $\qquad \alpha = 0 \;, \; \beta = 4$

Sia $[U \vdots c] = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\quad \underbrace{}_{U} \; \underbrace{}_{c}$

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$; x_3 è NON pivotale

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 - x_3 \\ x_2 = -2 - x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = x_2 + 4 - x_3 = -2 - x_3 + 4 + \\ \qquad - x_3 = 2 - 2x_3 \\ x_2 = -2 - x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = -2 - x_3 \end{cases}$$

Soluzioni : $\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1-x_3 \\ -2-x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \ \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{parametrizzazione dell'insieme delle soluzioni}}$.

(2) base per $Im(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

(3) base per $Ker(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

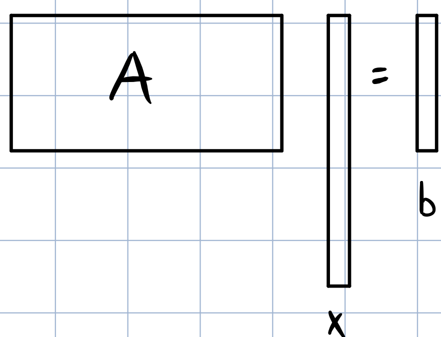
(4) $rank(A) = 2$

PREMESSA

Sia $Ax = b$ sist. lin. con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

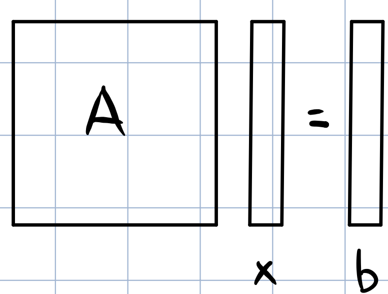
Possibilità: Aspettativa:

A "fat", $m < n$:



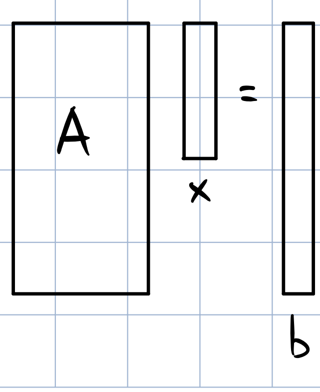
ci attendiamo ∞ soluzioni

A quadrata, $m = n$:



ci attendiamo UNICA soluzione

A "skinny", $m > n$:



Non ci attendiamo soluzioni