COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico
SECONDA PROVA DI ESONERO
Corso di Laurea Triennale in Informatica
19 dicembre 2019

problema 1	
problema 2	
problema 3	
totale	

Problema 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 6 & -9 & 12 \\ 4 & -13 & 13 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -27 \\ -35 \end{bmatrix}.$$

1) Calcolare la fattorizzazione LU di A **senza** uso del pivoting parziale;
2) calcolare la fattorizzazione LU di A **con** uso del pivoting parziale;
3) risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione calcolata al punto 2);
4) calcolare il determinante di A facendo uso della fattorizzazione calcolata al punto 2);

(BONUS) siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$, con A invertibile che ammetta una fattorizzazione $A = LU$; proporre una procedura per calcolare la soluzione del sistema lineare $A^T A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione LU di A, *senza* formare esplicitamente la matrice $A^T A$; indicare il costo computazionale di tale procedura, e confrontarlo con il costo della procedura che prevede il calcolo di $A^T A$ e della sua fattorizzazione $A^T A = LU$.

Problema 2.

1) Definire cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$;
2) siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ nel senso dei minimi quadrati;

3) la soluzione trovata al punto 2) è anche soluzione nel senso classico? Giustificare la risposta.

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

problema 1	
problema 2	
problema 3	
totale	

Calcolo Numerico

SECONDA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

20 dicembre 2018

Problema 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1) Calcolare la fattorizzazione LU di A con pivoting parziale;
2) risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
3) calcolare il determinante di A facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
4) verificare che A non ammette una fattorizzazione LU *senza* pivoting parziale, giustificandone il motivo in termini di ipotesi del Teorema di esistenza della fattorizzazione LU per matrici quadrate $n \times n$;

(BONUS) siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$, con A invertibile che ammetta una fattorizzazione $A = LU$; proporre una procedura per calcolare la soluzione del sistema lineare $A^2\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione LU di A, *senza* calcolare il quadrato di A; indicare il costo computazionale di tale procedura, e confrontarlo con il costo della procedura che prevede il calcolo di A^2 e della sua fattorizzazione $A^2 = LU$.

Problema 2.

1) Definire cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$;
2) considerati i seguenti dati (x_i, y_i), $i = 1, \dots, 5$:

$$(-2,-5)\,,\ (-1,-3)\,,\ (0,-2)\,,\ (1,-1)\,,\ (2,-4)$$

effettuarne la regressione lineare (ovvero, calcolare l'equazione della retta $y = mx + q$ di miglior approssimazione per i dati nel senso dei minimi quadrati) e calcolare la norma euclidea del residuo;

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

problema 1	
problema 2	
problema 3	
totale	

Calcolo Numerico

SECONDA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

22 dicembre 2017

Problema 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1) Calcolare la fattorizzazione LU di A con pivoting parziale;
2) risolvere i sistemi lineari $A\mathrm{x}_k = \mathrm{e}_k$ per $k = 1, 2, 3$ facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
3) calcolare il determinante di A facendo uso della fattorizzazione appena calcolata.

Sia $X = \left[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\right]$, partizionata per colonne.

4) Mostrare che X è l'inversa di A;
5) calcolare il numero di condizionamento di A in norma $\|\cdot\|_1$.

Problema 2.

1) Definire cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$;
2) considerati i seguenti dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$:

$$(-1, -3)\,, \ (0, -2)\,, \ (1, -3)\,, \ (2, -1)\,, \ (3, -1)$$

effettuarne la regressione lineare (ovvero, calcolare l'equazione della retta $y = mx + q$ di miglior approssimazione per i dati nel senso dei minimi quadrati) e calcolare la norma euclidea del residuo;

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico

SECONDA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

13 gennaio 2017

Problema 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(1) Calcolare la fattorizzazione LU di A con pivoting parziale;
(2) risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
(3) calcolare il determinante di A facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
(4) spiegare i vantaggi apportati dal pivoting parziale all'algoritmo di eliminazione di Gauss.

Problema 3.

(1) Definire cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$;
(2) considerati i seguenti dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$:

$$(-1, -3)\,,\ (0, -2)\,,\ (1, -3)\,,\ (2, -1)\,,\ (3, -3)$$

effettuarne la regressione lineare (ovvero, calcolare l'equazione della retta $y = mx + q$ che meglio approssima i dati in norma euclidea) e calcolare la norma euclidea del residuo.

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico

SECONDA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

21 dicembre 2015

Problema 1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(1) Calcolare la fattorizzazione LU di A con pivoting parziale;
(2) risolvere il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
(3) calcolare il determinante di A facendo uso della fattorizzazione appena calcolata;
(4) spiegare i vantaggi apportati dal pivoting parziale all'algoritmo di eliminazione di Gauss.

Problema 3.

(1) Definire cosa si intende per *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$;
(2) considerati i seguenti dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$:

$$(-1,-1)\,,\ (0,-3)\,,\ (1,-5)\,,\ (2,-7)\,,\ (3,-7);$$

effettuarne la regressione lineare (ovvero, calcolare l'equazione della retta $y = mx + q$ che meglio approssima i dati in norma euclidea) e calcolare la norma euclidea del residuo.