Condizionamento della valutazione di funzione.

$x \in \mathbb{R}$, f definita in un intorno di x

$$x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{"esatta"}$$

$$x \longmapsto fl\left(f\left(fl(x)\right)\right) \in \mathbb{F} \qquad \text{"di macchina"}$$

Si ha:

$$f(x)\left(1+\varepsilon_{f(x)}\right) = f\left(x(1+\varepsilon_x)\right)$$

Calcoliamo:

$$f(x) + f(x)\varepsilon_{f(x)} = f\left(x + x\varepsilon_x\right) \iff$$

$$f(x)\varepsilon_{f(x)} = f(x + \underbrace{x\varepsilon_x}) - f(x)$$

denotiamo con $h := x\varepsilon_x$, possiamo supporre che $|h| \ll |x|$

Allora

$$f(x)\,\varepsilon_{f(x)} = f(x+h) - f(x) =$$

$$= \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) h \approx$$

divido e moltiplico per h

$$\approx f'(x)\,h = f'(x)\,x\,\varepsilon_x$$

Dunque

$$f(x)\,\varepsilon_{f(x)} = f'(x)\,x\,\varepsilon_x \implies$$

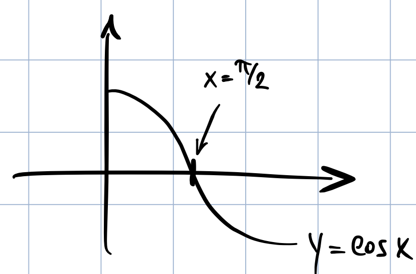
$$|\varepsilon_{f(x)}| = \boxed{\left|\frac{x\,f'(x)}{f(x)}\right|}\,|\varepsilon_x|$$

$$K = K(x)$$ (dipende da x)

La valutazione di funzione è mal condizionata laddove $K(x) \gg 1$.

Esempio

$f(x) = \cos x$ vicino a $x = \pi/2$



Esercizio (da fare da soli)

definire in Matlab

x0=pi/2 e x1=1.57;

Confrontare x0 con x1 e

cos(x0) con cos(x1) (err. rel.)

Esercizio (svolto in aula il 3 nov. 2021)

Consideriamo $\mathbb{F}(10, 6, -11, 11)$ e

$$x = 123457.1467$$
$$y = 123456.659$$

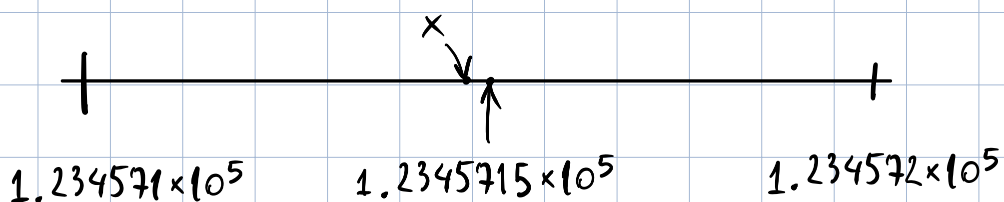
Confrontare $x-y$ in aritmetica esatta con $x-y$ in aritmetica di macchina.

Aritmetica esatta: $x-y = 0.4877$

Aritm. di macchina: $x, y \notin \mathbb{F}$

cifre in eccesso

$$x = 1.234571\,|\,\underbrace{467}_{\text{cifre in eccesso}} \times 10^5$$



dunque $fl(x) = 1.234571 \times 10^5$

Analogamente

$$y = 1.234566\,\vdots\,59 \times 10^5$$

dunque $\quad fl(y) = 1.234567 \times 10^5$

Adesso calcoliamo la differenza

$$x - y = \begin{array}{r} 1.234571 \times 10^5 \quad - \\ 1.234567 \times 10^5 \quad = \\ \hline 0.000004 \times 10^5 \end{array}$$

Ovvero, in aritm. finita:

$$x - y = 0.4 =$$

$$= 4.0 \times 10^{-1} \in \mathbb{F}$$

Ricapitolando:

$x - y$ in aritm. esatta: 4.877×10^{-1}

$x - y$ in aritm. finita: 4.0×10^{-1}

il risultato in aritm. di macchina ha solo 1 cifra corretta! Il max errore relativo commesso nell'arrotondamento è $\frac{1}{2} \beta^{-t} = \frac{1}{2} 10^{-6} = 5 \times 10^{-7}$

Abbiamo perso 6 cifre!

$7 - 1$

Stimiamo il numero di condizionamento:

$$K = \frac{|x| + |y|}{|x - y|} \approx \frac{1.2 \times 10^5 + 1.2 \times 10^5}{4.8 \times 10^{-1}} \approx$$

$$\approx \frac{2.4 \times 10^5}{4.8 \times 10^{-1}} = \frac{1}{2} \times 10^6 =$$

$$= 5 \times 10^5$$

La perdita di precisione è giustificata dal mal condizionamento! Si è verificato il cosiddetto errore di cancellazione

<u>ESERCIZIO</u> (problema 1, primo esonero 2020/2021)

Consideriamo $\mathbb{F}(2, 12, -7, 8)$

(1)

$$\text{realmin} = \beta^{m_1+1} = 2^{-6}$$

(2) realmin "denormale" =

$$= \beta^{m_1+1-t} = 2^{-18}$$

(3)

$$a = 0.d_1 \cdots d_t \times \beta^{m_1+1} \quad \text{denormale}$$

successivo: $a + 0.\underbrace{0 \cdots 01}_{t \text{ cifre}} \times \beta^{m_1+1}$

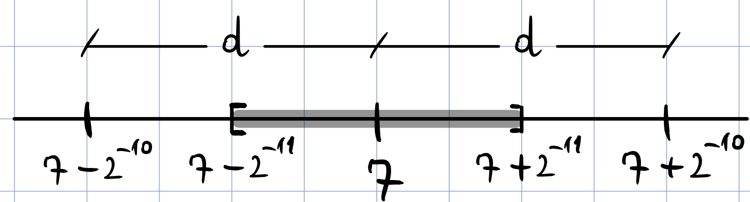
$$\text{dist} = 0.\underbrace{0 \cdots 01}_{t \text{ cifre}} \times \beta^{m_1+1} = \beta^{m_1+1-t} = 2^{-18}$$

(4)

$$7 \in [4,8] = [2^2, 2^3] \qquad p = 2$$

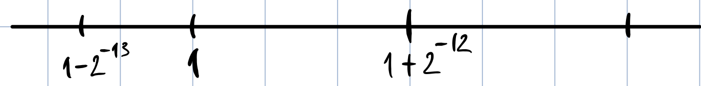
$a < 7 < b \in F$ consecutivi

allora $d = b - 7 = 7 - a = \beta^{p-t} = 2^{-10}$



Risposta: $[7 - 2^{-11}, 7 + 2^{11}]$

(5)



se $0 \le p \le 12$, $1+2^{-p} \in \mathbb{F}$ e quindi

$$(1+2^{-p})-2^{-p}=1$$

se $p=13$, $1+2^{-13} \notin \mathbb{F}$ e $fl(1+2^{-13})=1$,

ma $1-2^{-13} \in \mathbb{F}$, per cui

$$(1+2^{-p})-2^{-p}<1 \quad (\text{in } \mathbb{F})$$

se $p \geq 14$, verificare che

$$(1+2^{-p})-2^{-p}=1 \quad (\text{in } \mathbb{F})$$

RISPOSTA: $p=13$

(6)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{segno} & : 1 \text{ bit} \\ \text{mantissa} & : 12 \text{ bit} \\ \text{esponente} & : 4 \text{ bit } (16=2^4) \end{array}\right\} 17 \text{ bit}$$

(7)

$$\mathbb{F} = \left\{ \pm 1.d_1 \dots d_t \times 2^p, \; p \in \mathbb{Z}, \; -6 \le p \le 7 \right\}$$

$$\# \mathbb{F} = 2 \cdot 2^{12} \cdot 14$$

(8)

$$7 = (111)_2 = (1.11 \times 2^2) \Rightarrow$$

$$t = 2$$

(9)

realmax per $\mathbb{F}(2, 12, -7, M+1)$:

$$2^M (2 - 2^{-12}) \simeq 2^{M+1}$$

se $M = 8$: realmax $\simeq 512$

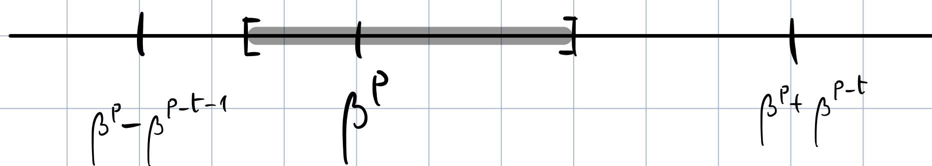
se $M = 9$: realmax $\simeq 1024$

risposta : $M = 8$

Ulteriori considerazioni:

in $\mathbb{F}(\beta, t, M_1, M_2)$

- $\{ x \in \mathbb{R} : fl(x) = \beta^p \}$ non è un intorno simmetrico di β^p



$$\left[\beta^p - \tfrac{1}{2}\beta^{p-t-1}, \beta^p + \tfrac{1}{2}\beta^{p-t} \right]$$

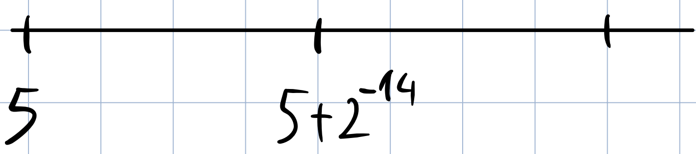
- $\{ x \in \mathbb{R} : fl(x) = \beta^p + \beta^{p-t} \}$ è aperto

(non contiene gli estremi)

<u>ESERCIZIO</u> In $\mathbb{F}(2, 16, -63, 64)$ determinare il più grande $p \in \mathbb{N}$ per cui

$$fl(5 + 2^{-p}) > 5 .$$

$5 \in [2^2, 2^3]$, quindi



$p \geq 15 \Rightarrow fl(5+2^{-p}) = 5$

$p = 14 \Rightarrow fl(5+2^{-14}) > 5$

risposta: $p = 14$

ESERCIZIO In IEEE 754 dp, uno tra $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ non è numero macchina. Quale? Perché?

risposta: $\frac{1}{3} = (0.\overline{01})_2 =$

$= (1.\overline{01} \times 2^{-2}) \notin \mathbb{F}$ (∞ cifre)

Si ha: $fl(\frac{1}{3}) = 1.\underbrace{0101 \cdots 01}_{52 \text{ cifre}} \times 2^{-2}$