Il metodo di Newton richiede la valutazione di f' ad ogni passo. Ciò potrebbe impossibile oppure troppo oneroso.

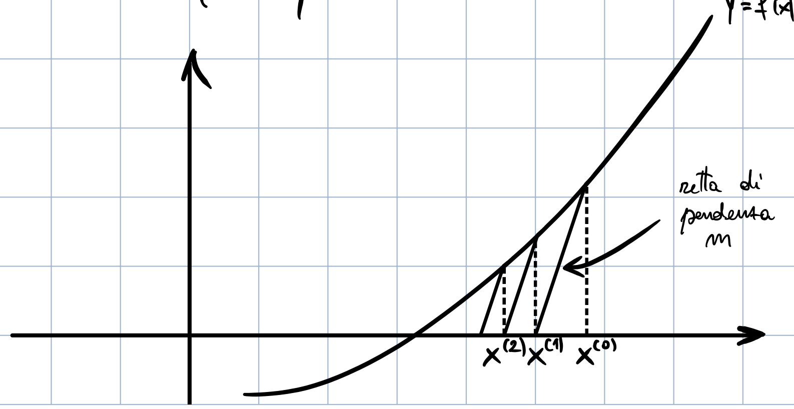
Es. $x \longrightarrow \boxed{\text{black box}} \longrightarrow f(x)$

Varianti "derivative free" del metodo di Newton:

(1) metodo delle corde:

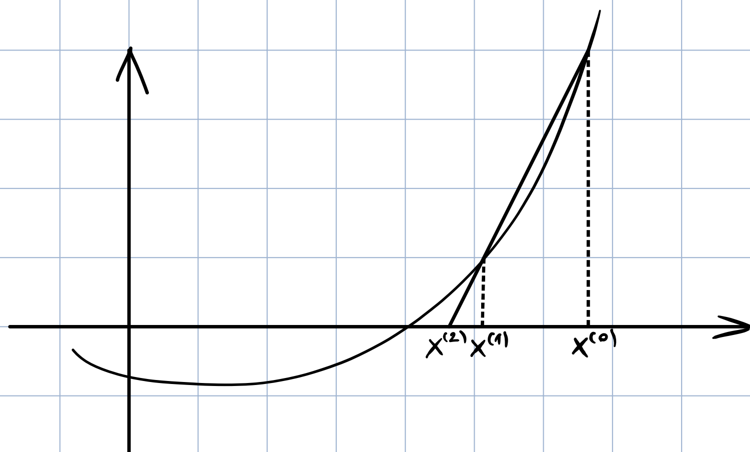
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{m}, \quad k \geq 0,$$

$m \neq 0$ costante



- è generalmente lineare
- scelta ricorrente: $m = f'(x^{(0)})$, tanto efficace quanto più $x^{(0)}$ è vicino a α

(2) metodo delle secanti:



Iterata generale:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}, \quad k \geq 1.$$

- Osserviamo che occorrono due stime iniziali: $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$.

- Si può dimostrare che, per $x^{(0)}, x^{(1)}$ suff. vicini a α zero semplice per f, il metodo genera una succ.ne $x^{(k)}$ che converge a α con o.d.c. (almeno) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6$

(3) quasi-Newton:

$$\begin{cases} d^{(k)} = \dfrac{f(x^{(k)}+h) - f(x^{(k)})}{h}, & h \neq 0 \text{ scelto "opportunamente" piccolo} \\ & k \geq 0 \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{d^{(k)}} & \end{cases}$$

- è "tecnicamente" lineare ma in pratica si comporta come il metodo di Newton se h è scelto opportunamente

Confronto fra i metodi

Consideriamo solo il costo computazionale delle valutazioni di funzione:

metodo	# valutazioni di funzione per passo	o.d.c. attese
bisezioni	$1f$	1
regula falsi	$1f$	1
Newton	$1f + 1f'$	2
corde	$1f$	1
secanti	$1f$	≈ 1.6
quasi-Newton	$2f$	1

si osserva ordine 2 per h scelto opportunamente

Newton vs secanti

Ipotesi: valutare f' costi tanto quanto valutare f. Allora

1 passo di Newton costa quanto 2 passi di secanti.

Osserviamo che, per secanti, si ha

$$|x^{(k+2)} - \alpha| \simeq C|x^{(k+1)} - \alpha|^{1.6} \simeq$$

dalla def. di O.d.C.

$$\simeq C\left(C|x^{(k)} - \alpha|^{1.6}\right)^{1.6}$$

$$= C^{2.6}|x^{(k)} - \alpha|^{2.56} \text{ quindi}$$

secanti "2 passi alla volta" ha ordine di convergenza 2.56, e quindi è "più veloce" di Newton.

Un ragionamento più sofisticato porta a conclusione che secanti è più "efficiente" di Newton se: "costo f'" > 44% "costo f"

Cenni sui metodi iterativi ad un passo (one-step).

Il metodo di Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0$$

è un caso particolare di "metodo iterativo ad un passo":

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k \geq 0$$

in cui si "itera" sempre la stessa funzione g. Per Newton:

$$g(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Più precisamente, a partire da $x^{(0)}$, data una funzione g, definiamo per ricorrenza la succ.ne

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k \geq 0.$$

Diremo che $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ è definita "iterando" la funzione g, che è detta "funzione iteratrice".

Osservazioni:

(1) supponiamo che $x^{(k)} \longrightarrow \alpha$,

e g sia continua in α.

Passiamo al limite per $k \to +\infty$:

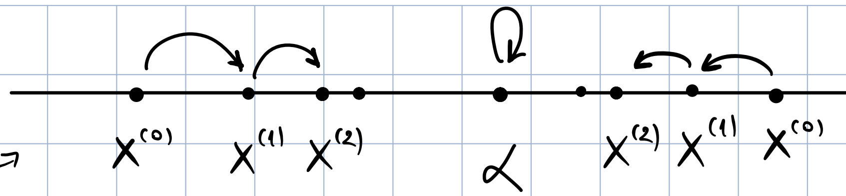
$$\begin{array}{ccc} x^{(k+1)} & = & g(x^{(k)}) \\ \swarrow & & \searrow \text{continuità} \\ \alpha & & g(\alpha) \end{array}$$

Ne deduciamo che

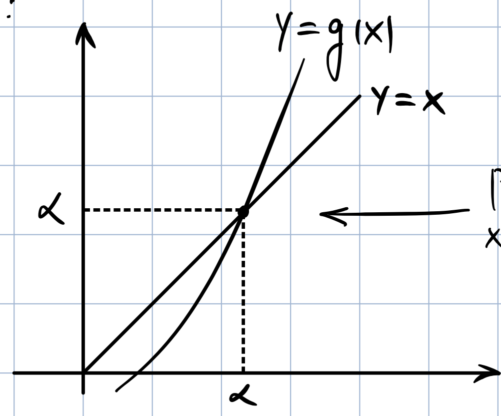
$$\alpha = g(\alpha).$$

nel qual caso α è detto: "punto fisso per g". Perché? Interpretare la seguente figura.

"dinamica della succ.ne"



Graficamente:



p.to fisso: $x = g(x) \iff \begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$ Intersezione tra grafico di g e bisettrice I-III quadrante

Ci sono molti modi di tradurre il problema $f(x) = 0$ in un problema equivalente $g(x) = x$.

Esempi: $f(x) = x^2 - 2$.

(1) $f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff$

$$\iff \underbrace{x^2 + x - 2}_{g(x)} = x \iff g(x) = x$$

(2) $x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \overset{\text{se } x \neq 0}{\iff}$

$$\iff x = \underbrace{2/x}_{g(x)} \iff g(x) = x$$

(3) $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$; dimostrare

per esercizio che

$$g(x) = x \underset{\text{se } x \neq 0}{\iff} x^2 - 2 = 0$$

<u>OSSERV.</u> sulla funzione iteratrice del metodo di Newton:

$$\underbrace{x = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}_{x \text{ p.to fisso per } g} \iff f(x) = 0$$

se $f'(x) \neq 0$

Mettiamo i 3 metodi alla prova

K	(1)	(2)	(3)
0	2	2	2
1	4	1	$3/2 = 1.5$
2	18	2	$17/12 = 1.41\bar{6}$
3	340	1	$\frac{577}{408} = 1.414215\ldots$
$\vdots$	$\downarrow$	"ciclo periodico"	$\downarrow$
	$+\infty$		$\sqrt{2} = 1.414213\ldots$

La scelta di g è fondamentale. Notare che il metodo (3) esibisce convergenza quadratica... quindi è il metodo di Newton!

<u>Considerazioni Teoriche</u>: affinché $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ sia ben definita, occorre che $x^{(k)}$ sia nel dominio di g $\forall k \geq 0$.

Formalizziamo. Sia $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$, diremo che "g manda $[a,b]$ in se stesso", e scriveremo $g([a,b]) \subset [a,b]$.

Se g manda $[a,b]$ in se stesso e $x^{(0)} \in [a,b]$, la succ.ne $\{x^{(k+1)} = g(x^{(k)})\}_{k \geq 0}$ è ben definita.

TEOREMA (esistenza del pto fisso)
Sia $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua che mandi $[a,b]$ in se stesso. Allora $\exists \alpha$ in $[a,b]$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$.

Dimostrazione si applichi il Teorema di Bolzano a $f(x) = g(x) - x$. $\square$

"proof by picture"

$g(a), g(b) \in [a,b]$