Esercizi su polinomio di Taylor, metodi numerici per il calcolo di zeri di funzione, teoria generale dei metodi iterativi ad un passo

6 ottobre 2021

Nota: gli esercizi più impegnativi sono contrassegnati dal simbolo ($\star$).

Richiami di Analisi Matematica:

Teorema 1 (di Taylor)**.** *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Allora si ha:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ \forall\, x \in (a, b),$$

dove:

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n,$$

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1},\ c = c(x) \text{ appartenente all'intervallo di estremi } x \text{ e } x_0.$$

$T_n(x)$ è detto "polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0"; $R_n(x)$ è detto "resto di Lagrange".

Segue una tabella con i polinomi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ di alcune funzioni fondamentali:

$f(x)$	$T_n(x)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
$\log(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

Esempio 1. Una tipica applicazione del Teorema 1 è l'approssimazione di funzioni trascendenti (come la funzione esponenziale o le funzioni trigonometriche) con funzioni facilmente valutabili da un computer (i polinomi), stimando al tempo stesso l'errore commesso. Ad esempio, supponiamo di dover approssimare $\sin(0.1)$ a meno di un errore assoluto non più grande di 10^{-5}. Per fare ciò, possiamo utilizzare il polinomio di Taylor di $\sin(x)$ centrato in $x_0 = 0$. Per il Teorema di Taylor, possiamo scrivere:

$$\sin(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Approssimando $\sin(0.1)$ con $T_n(0.1)$, compiamo un errore assoluto pari a:

$$|\sin(0.1) - T_n(0.1)| = |R_n(0.1)|.$$

Per ottenere l'approssimazione desiderata è, quindi, sufficiente scegliere n abbastanza grande, tale che:

$$|R_n(0.1)| \leq 10^{-5}.$$

Le derivate di $\sin(x)$ sono funzioni trigonometriche della forma $\pm\sin(x)$ o $\pm\cos(x)$, tutte limitate in valore assoluto da 1. Dunque, si ha:

$$|R_n(0.1)| \leq \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

per ogni n ed indipendentemente dal punto ξ_x (che, ricordiamo, è sconosciuto). Non ci resta che cercare il più piccolo intero naturale n per cui si ha:

$$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5}.$$

La tabella:

n	$(0.1)^{n+1}/(n+1)!$
1	$1/200 = 5.0 \times 10^{-3}$
2	$1/6000 \approx 1.6 \times 10^{-4}$
3	$1/240000 \approx 4.6 \times 10^{-6}$

mostra che il valore cercato è $n = 3$. Essendo:

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

concludiamo che:

$$T_3(0.1) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} \approx 0.09983$$

approssima $\sin(0.1)$ con un errore assoluto inferiore a 10^{-5}.
Seguendo il ragionamento appena esposto, approssimare:

1. $\sin(0.5)$ e $\sin(1.5)$ con un errore assoluto non più grande di 10^{-5},
2. $\cos(0.1)$ con un errore assoluto non più grande di 10^{-15},
3. $(\star)$ $\sqrt{e}$ con un errore assoluto non più grande di 10^{-6}.

Esempio 2. In modo simile a quanto visto nell'esempio 1, il polinomio di Taylor può essere usato per approssimare numericamente il valore di un integrale definito. Supponiamo di dover calcolare:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx,$$

a meno di un errore assoluto non più grande di 10^{-4}. Per il teorema di Taylor:

$$\sin(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Dividendo per x si ha:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{T_n(x)}{x} + \frac{R_n(x)}{x}\,.$$

Integrando ambo i membri fra 0 ed 1:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_n(x)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}\,dx\,.$$

Dunque, l'errore assoluto che compiamo nell'approssimare $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ con $\int_0^1 \frac{T_n(x)}{x}\,dx$ è pari a:

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{T_n(x)}{x}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}\,dx\right|\,.$$

Dobbiamo stimare questo errore assoluto. Prima osserviamo che:

$$\left|\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_n(x)}{x}\right|\,dx\,.$$

Poi, essendo:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,, \forall\, x \in (0,1)\,,$$

con $|\sin^{(n+1)}(\xi_x)| \leq 1$ (vedi Esempio 1), abbiamo che:

$$\left|\frac{R_n(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{x^n}{(n+1)!}\right| = \frac{x^n}{(n+1)!}\,.$$

Dunque, la nostra stima dell'errore assoluto è:

$$\left|\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)!}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}$$

La tabella:

n	$1/((n+1)\,(n+1)!)$
1	$1/4 = 2.5 \times 10^{-1}$
2	$1/18 \approx 5.5 \times 10^{-2}$
3	$1/96 \approx 1.0 \times 10^{-2}$
4	$1/600 \approx 1.6 \times 10^{-3}$
5	$1/4320 \approx 2.3 \times 10^{-4}$
6	$1/35280 \approx 2.8 \times 10^{-5}$

mostra che è sufficiente prendere $n = 6$ per ottenere l'approssimazione richiesta. Essendo:

$$T_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,,$$

concludiamo che:

$$\int_0^1 \frac{T_6(x)}{x}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\,dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0.9461$$

approssima:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}$$

con un errore assoluto inferiore a 10^{-4}.
Seguendo il ragionamento appena esposto:

1. ($\star$) approssimare:
$$\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx\,,$$
con un errore assoluto non più grande di 10^{-5},

2. ($\star$) approssimare:
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\,,$$
con un errore assoluto non più grande di 10^{-5}.

Esercizio 1. Implementare, sotto forma di funzione Matlab, i seguenti metodi:

1. metodo delle successive bisezioni,

2. metodo della regula falsi,

3. metodo di Newton,

4. metodo delle corde (o della direzione costante):
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{m} \quad (\text{con } m \neq 0 \text{ da scegliere opportunamente})\,,$$

5. metodo delle secanti:
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}\,,$$

6. metodo quasi-Newton:
$$\begin{aligned} m^{(k)} &= \frac{f\left(x^{(k)}+h\right) - f\left(x^{(k)}\right)}{h} \quad (\text{con } h \neq 0 \text{ da scegliere opportunamente}) \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{m^{(k)}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Esercizio 2. Utilizzare i metodi dell'esercizio 1 per calcolare le prime 6 cifre significative di tutte le soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni:

1. $x^3 - 2x - 5 = 0$ (l'equazione sulla quale Newton illustrò il suo metodo),

2. $x - e^{-x} = 0\,,$

3. $\cosh(x) + \cos(x) = 2\,,$

4. $\cosh(x) + \cos(x) = 3\,,$

5. $e^x = 1 + \frac{x^2}{2}.$

Per ciascuna equazione, confrontare il comportamento dei vari metodi a parità di qualità della stima iniziale, e ($\star$) valutare sperimentalmente l'ordine di convergenza. [$\cosh(x)$ è il coseno iperbolico di x]

Per valutare sperimentalmente l'ordine di convergenza, si può procedere come segue:

1. Considerare la relazione

$$\left|x^{(k+1)} - \alpha\right| \approx c\left|x^{(k)} - \alpha\right|^p\,,\ c > 0\,,$$

valida per k sufficientemente grande se la successione $\{x^{(k)}\}$ converge a α con ordine di convergenza $p \geq 1$;

2. Passare ai logaritmi e manipolare l'espressione in modo da ottenere

$$p \approx \frac{\log\left|x^{(k+1)} - \alpha\right|}{\log\left|x^{(k)} - \alpha\right|}\,,$$

anch'essa valida per k sufficientemente grande; [C'era un altro addendo a destra del segno $\approx$, ma può essere trascurato per k grande. Perchè?]

3. Per ogni accoppiata metodo/equazione, produrre una tabella che mostri i valori della quantità a destra del segno $\approx$ al punto precedente all'aumentare delle iterate, sostituendo l'errore assoluto $\left|x^{(k)} - \alpha\right|$ con un'opportuna sua stima; generalmente, per k sufficientemente grande, questi valori rifletteranno l'ordine di convergenza p della successione. [Si suggerisce di utilizzare le stime $\left|x^{(k+1)} - \alpha\right| \approx \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$ e $\left|x^{(k)} - \alpha\right| \approx \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right|$.]

Esercizio 3. Osservare, servendosi di un grafico, che la funzione

$$f(x) = e^x - 2x^2$$

ha tre zeri reali, $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2, \alpha_3 > 0$. Per quali valori di $x^{(0)}$ il metodo di Newton converge a α_1?

Esercizio 4. Il metodo di Newton può richiedere che il punto iniziale sia molto vicino alla soluzione affinchè si abbia convergenza. Verificarlo mediante il seguente esercizio. Sia

$$f(x) = \arctan(c(x-1)) + \frac{\sin(c^2 x)}{c}\,,$$

con $c = 10$. Questa funzione possiede un unico zero α in $\mathbb{R}$. Utilizzando il metodo di Newton, calcolare le prime 10 cifre significative di α. Inoltre, stimare sperimentalmente gli estremi del più grande intorno $[a, b]$ di α per cui si ha che le iterazioni $x^{(k)}$ convergono ad α ogniqualvolta $x^{(0)} \in [a, b]$. Spiegare il motivo di una tale sensibilità alla scelta del punto iniziale. [Suggerimento: aiutarsi mediante un grafico di f nell'intervallo [0, 2].]

Esercizio 5. Utilizzando la definizione di ordine di convergenza, dimostrare che il metodo di Newton applicato alla funzione:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

genera una successione che converge allo zero $\alpha = 1$ con ordine di convergenza 1, per ogni $x^{(0)} \in \mathbb{R}$. Perché la convergenza non risulta quadratica?

Esercizio 6. Facendo uso dei risultati sull'ordine di convergenza delle successioni definite per ricorrenza, dimostrare che il metodo di Newton applicato alla funzione:

$$f(x) = \sin(x)$$

genera una successione che converge allo zero $\alpha = 0$ con ordine di convergenza 3, per $x^{(0)}$ sufficientemente vicino ad α. [Suggerimento: si ricordi che il metodo di Newton si può interpretare come metodo per il calcolo di un punto fisso per un'opportuna funzione iteratrice g.]

Esercizio 7. Si considerino il metodo di Newton e la seguente sua variante (metodo di Newton modificato):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Per entrambi i metodi, determinare l'ordine di convergenza allo zero $\alpha = 1$ dell'equazione $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Verificare il risultato ottenuto mediante esperimenti al calcolatore.

Esercizio 8. Per ognuna delle seguenti iterazioni, stabilire se si ha convergenza al punto fisso α indicato per $x^{(0)}$ sufficientemente vicino a α. Laddove si ha convergenza, stabilire l'ordine di convergenza; se la convergenza è lineare, determinare il fattore di convergenza.

1. $x^{(k+1)} = -16 + 6x^{(k)} + \dfrac{12}{x^{(k)}}$, $\alpha = 2$,
2. $x^{(k+1)} = \dfrac{2}{3}x^{(k)} + \dfrac{1}{\left(x^{(k)}\right)^2}$, $\alpha = 3^{1/3}$,
3. $x^{(k+1)} = \dfrac{12}{1 + x^{(k)}}$, $\alpha = 3$.

Esercizio 9. Per ognuna delle seguenti iterazioni, si determini per quali valori di c si ha convergenza al punto fisso α indicato per $x^{(0)}$ sufficientemente vicino a α e si stabilisca se c'è qualche valore di c per cui la convergenza è almeno quadratica.

1. $x^{(k+1)} = 2 - (1 + c)x^{(k)} + c\left(x^{(k)}\right)^3$, $\alpha = 1$,
2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{c}{2}\tan(x^{(k)})$, $\alpha = 0$.

Esercizio 10. Utilizzando il metodo di Newton, costruire un algoritmo per il calcolo della radice quadrata di un numero reale $a > 0$. Si faccia lo stesso per il calcolo della radice cubica di a.

Esercizio 11. ($\star$) Dimostrare che il metodo di Newton converge linearmente nel caso di zeri di molteplicità $m \geq 2$, e che in tal caso il fattore di convergenza è $1 - 1/m$. [Suggerimento: se α è zero di f di molteplicità $m \geq 2$, allora $f(x) = g(x)(x - \alpha)^m$, con $g(\alpha) \neq 0$.]

Esercizio 12. ($\star$) Per ognuna delle seguenti funzioni, studiare il comportamento delle iterate generate dal metodo di Newton partendo da un valore di $x^{(0)}$ vicino a 0:

(i) $f(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$,

(ii) $f(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt[3]{x^2}$,

(iii) $f(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt[3]{|x|}$.

Giustificare i comportamenti osservati. [sign è la *funzione segno*: $\operatorname{sign}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sign}(x) = -1$ se $x < 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$.]