Si può dimostrare facilmente il seguente

TEOREMA: $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset W$ è base per il sottosp. vett. W **se e solo se**

$\forall v \in W \; \exists ! \; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ scalari t.c.

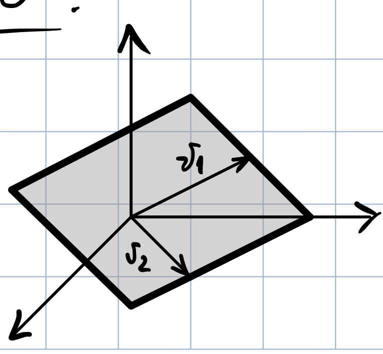
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p .$$

esistenza : (2)
unicità : (1)

Dimostrazione

Esistenza : banale
Unicità : per assurdo sfruttando la lineare indipendenza (esercizio)

ESEMPIO:



$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ non paralleli ; consideriamo $W = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$

Allora $\{v_1, v_2\}$ è base per W, e

$$\dim(W) = 2.$$

<u>ESEMPIO</u>: i vettori $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots,$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^n$, detta <u>base canonica</u> di $\mathbb{R}^n$. In particolare,

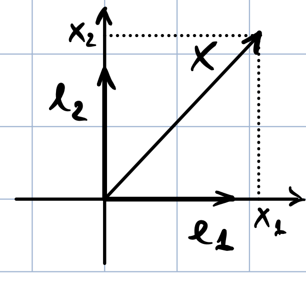
$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è base per $\mathbb{R}^2$.

Infatti: sia $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Allora

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

sono gli α_i



Domanda: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ è base per $\mathbb{R}^2$?

Ovvero, preso $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, esiste un unico modo di scrivere x come combinazione lineare di $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$?

Scriviamo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo α_1, α_2 t.c.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \underset{\text{sommo/sottraggo}}{\iff} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\alpha_1 \\ x_1 - x_2 = 2\alpha_2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Risposta: sì, $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ è base per $\mathbb{R}^2$!

ESEMPIO:

$x = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, allora

$$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

TEOREMA: Sia W spazio vett., $\dim(W) = p$.

Allora:

1. p è il più grande numero di vettori lin. indip. di W;
2. p è il più piccolo numero di generatori di W.

OSSERVAZIONI:

(1) La base non è unica (vedi esempio precedente), ma due basi qualsiasi devono essere costituite dallo stesso numero di elementi! (ciò giustifica la def. di dimensione)

(2) $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ (poichè $\{1, x, x^2\}$ ne costituisce una base)

$\dim(\{\text{polinomi di grado arbitrario}\}) = \infty$

poichè $\{1, x, x^2, \dots, x^k, \dots\}$ ne è base!

Indichiamo l'insieme dei polinomi di di grado arbitrario con $\mathbb{P}_\infty$.