найдутся два числа, при одном из которых $\left\{\left(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0\right), \left(-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0\right)\right\} = C_3$, а при другом $\left\{\left(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0\right), \left(-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0\right)\right\} = C_4$. Рассмотрим случай 1) (остальные рассматриваются аналогично).

Действительно, в случае 1) достаточно положить $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$ (при этом $|c_0| = \tau^{-1/A_2}$, $\tau = |c_0|^{-A_2} = (c_0)^{-A_2}$). Тогда, учитывая то, что в силу $u_0 = (c_0)^{e_1}(d_0)^{e_2} = |c_0|^{e_1}(d_0)^{e_2}$, выполняется $(u_0)^{\frac{1}{A_1}} = (u_0)^{\frac{1}{e_2}} = d_0|c_0|^{\frac{e_1}{e_2}} = d_0|c_0|^{-\frac{A2}{A1}}$, получаем, что для $\tilde{c_0} = \pm c_0\tau^{1/A_2}, \tilde{d}_0 = d_0\tau^{1/A_1}$ справедливо: $|\tilde{c_0}| = |c_0|\tau^{1/A_2} = 1, \tilde{d}_0 = d_0\tau^{1/A_1} = d_0|c_0|^{-\frac{A_2}{A_1}} = (u_0)^{\frac{1}{A1}} = (u_0)^{\frac{1}{e_2}}$.

Вернемся к задаче проверки условия $(У4)_{A,u_0}$ для некоторых $A \in \mathbf{A}_p, u_0 \in U(A)$ Покажем, что эту проверку достаточно проводить для конечного числа наборов $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ таких, что $u_0 = (c_0)^{e_1}(d_0)^(e_2) \in U(A)$.

Воспользуемся тем, что для вектора $A \in \mathbf{A}_p$ выполняется один из перечисленных ранее случаев относительно четности или нечетности его компонент. Пусть, например, выполняется случай 1) (когда $e_1 = -A_2$ является четным, а $e_2 = A_1$ нечетным). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предположим, что для некоторого $u_0 \in U(A)$ выполняется условие $(У4)_{A,u_0}$. Тогда существует $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ такие, что для многочленов вида(20), выполняются условия: (21), $u_0 = (c_0)^{e_1}, (d_0)^{e_2}$, и справедливо (23). Рассмотрим подстановку: $t = \left(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\right)\tilde{t}, \tau > 0$. Тогда, учитывая(21), получаем

$$p(x(t), y(t)) = p\left(x\left(\left(\tau^{\frac{1}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\right)\right), y\left(\left(\tau^{\frac{1}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\right) = \tilde{g}_0\tilde{t}^{\sigma}, \text{где } \tilde{g}_0 = g_0\tau^{\frac{\sigma}{\nu_0 A_1 A_2}} < 0,$$

При этом

$$x(t) = x\left(\tau^{\frac{1}{\nu_0 A_1 A_2}}\tilde{t}\right) = c_0\left(\tau^{\frac{\nu_1}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\tilde{t}^{\nu_1} + c_1\left(\tau^{\frac{\nu_1+1}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\tilde{t}^{\nu_1+1} + o(\tilde{t}^{v_1+1})$$
$$y(t) = y\left(\tau^{\frac{1}{\nu_0 A_1 A_2}}\tilde{t}\right) = c_0\left(\tau^{\frac{\nu_2}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\tilde{t}^{\nu_1} + c_1\left(\tau^{\frac{\nu_2+1}{\nu_0 A_1 A_2}}\right)\tilde{t}^{\nu_2+1} + o(\tilde{t}^{v_1+1})$$

Заметим, что $\tilde{c}_0 = c_0\left(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\right) = c_0\tau^{1/A_2}$, $\tilde{d}_0 = d_0\left(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\right) = d_0\tau^{1/A_1}$, а следовательно, при выборе $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$ (как было показано при рассмотрении случая 1)) выполняется: $\left(\tilde{c}_0, \tilde{(d)}_0\right) \in C_1 = \left\{\left(1, (u_0)^{1/e_2}\right), \left(-1, (u_0)^{1/e_2}\right)\right\}$. т.е. $\tilde{d}_0 = (u_0)^{\frac{1}{e_2}}$ выбирается однозначно, а $\tilde{c}_0 \in \{1, -1\}$. Таким образом, мы показали, что при проверке для некоторых $A \in \mathbf{A}_p, u_0 \in U(A)$ условия $(У4)_{A,u_0}$ в случае 1) на многочлены вида (20), удовлетворяющие (21), можно наложить дополнительное условие $(c_0, d_0) \in C_1$, которое из бесконечного числа случаев выполнения $u_0 = (c_0)^{e_1}(d_0)^{e_2}$ позволяет ограничиться рассмотрением лишь двух из них. Аналогичная ситуация имеет место и для остальных двух случаев. Таким образом вместо условия $(У4)_{A,u_0}$ можно рассматривать эквивалентное ему условие

$(\tilde{У}4)_{A,u_0}$ Существуют $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$ такие, что для многочленов вида (20), выполняются условия: (21), (23) и при этом в случае 1) $(c_0, d_0) \in C_1$, в случае 2) $(c_0, d_0, \in C_2)$, а в случае 3) $(c_0, d_0) \in C_3$ (или $(c_0, d_0) \in C_4$; выбираем любое из этих условий).

Рассмотрим теперь вопрос о выборе для многочленов вида (20), вектора $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2$ при проверке условаия $(У4)_{A,u_0}$ или $(\tilde{У}4)_{A,u_0}$. Одним из ограничений является условие (23) при выполнении которого должно найтись число $\nu \in \mathbb{N}$ такое, что $(\nu_1, \nu_2) = \nu A$. В связи с этим возникает вопрос: можно ли при этом обойтись случаем $\nu = 1$? Следующий пример показывает, что при применении метода подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами не всегда можно ограничиться значением $\nu = 1$.

Пример 1. Пусть $p(x,y)=(x-y)^6-(x-y)^2x^5+x^8$. Тогда для $A=(A_1,A_2)=(1,1) p(x,y)=\phi_1^A(x,y)+\phi_2^A(x,y)+\phi_3^A(x,y)$, где
$\phi_1^A(x,y)=(x-y)^6=x^6g_1^A(u), g_1^A(u)=(1-u)^6, B_1=6$,
$\phi_2^A(x,y)=(x-y)^2x^5=x^7g_2^A(u), g_2^A(u)=(1-u)^2, B_2=7$,
$\phi_3^A(x,y)=x^8=x^8g_3^A(u), g_3^A(u)=1, B_1=8$. Характеристический многочлен $g_1^A(u)=(1-u)^6$ имеет единственный действительный корень $u_0=1$. Заметим, что $A=(A_1,A_2)=(1,1)\in\mathbf{A}_p$, и при проверке условия $(\tilde{У}4)_A$ в общем случае должны рассматривать многочлены $x(t),y(t)$ вида

$$x(t)=c_0t^\nu+c_1t^{\nu+1}+o(t^{\nu+1}), y(t)=d_0t^\nu+d_1t^{\nu+1}+o(t^{\nu+1}), \text{ где } \nu\in\mathbb{N} \tag{1}$$

Здесь имеет место случай 3) (когда оба числа $e_1=-A_2=-1, e_2=A_1=1$ являются нечетными), и в этом случае числа c_0,d_0 можно выбирать из множества $C_3=(1,1),(-1,-1)$. В случае $\nu=1$ при $c_0=1,d_0=1$ многочлены (23) имеют вид (для простоты обознпчаем $c_1=c, d_1=d$)

$$x(t)=t+ct^2+o(t^2), y(t)=t+dt^2+o(t^2). \tag{2}$$

Тогда $\phi_1^A(x(t),y(t))=(x(t)-y(t))^6=(c-d)^6t^12+o(t^12)$,
$\phi_2^A(x(t),y(t))=-(x(t)-y(t))^2\,[x(t)]=-(c-d)^2t^9+o(t^9), \phi_3^A(x(t),y(t))=[x(t)]^8=t^8+o(t^8)$.
Таким образом, $p(x(t),y(t))=(c-d)^6t^12+o(t^12)-(c-d)^2t^9+o(t^9)+t^8+o(t^8)$,
а следовательно, для любых многочленов вида (25) выполняется $p(x(t),y(t))=t^8+o(t^8)$.
Совершенно аналогично в случае выбора $c_0=-1,d_9=-1$, т.е. для многочленов вида $x(t)=-t+ct^2+o(t^2), y(t)=-t+dt^2+o(t^2)$ также выполняется $p(x(t),y(t))=t^8+o(t^8)$.

Рассмотрим теперь многочлены вида (24) при $\nu=2, c_0=1, d_0=1$ (снова для простоты обозначаем $c_1=c, d_1=d$):

$$x(t)=t^2+ct^3+o(t^3), y(t)=t^2+dt^3+o(t^3).$$

Тогда $\phi_1^A(x(t),y(t))=(x(t)-y(t))^6=(c-d)^6t^{18}+o(t^{18}), \phi_2^A(x(t),y(t))=-(x(t)-y(t))^2x^5(t)=$ $=-(c-d)^2t^{16}+t^{16}, \phi_3^A(x(t),y(t))=x^8(t)=t^{16}+o(t^{16}), p(x(t),y(t))=(c-d)^6t^{18}+o(t^{18})-$ $-(c-d)^2t^{16}+o(t^{16})+t^{16}+o(t^{16})$, а следовательно, например, при $c=2,d=0$ для многочленов $x(t)=t^2+2t^3$, $y(t)=t^2$ выполнется $p(x(t),y(t))=2^6t^{18}-2^4t^{16}+t^{16}=-15t^15+o(t^{16})$. Таким образом, рассмотрение многочленов вида (26) показало, что $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$, т.е. рассмотрение только многочленов вида (25), соответствующих случаю $\nu=1$, оказалось недостаточным. Отметим, что при использовании алгоритма 1 мы не получим ответа на вопрос, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ из этого примера.

Замечание 1. Все используемые в этом разделе утверждения остаются в силе и для степенного ряда $p(x,y)$ [6], а следовательно могут быть применены к $p(x,y)$ и в этом случае.

1. Случай, когда $p(x,y)$ является суммой двух квазиоднородных форм.

Рассмотрим теперь один частный случай, когда полином $p(x,y)$ удовлетворяющий условиям утверждения 8, является суммой двух квазиоднородных форм. Покажем, что в этом случае с помощью простых вычислительных процедур можно однозначно ответить на вопрос, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума $p(x,y)$.

Нам потребуются следующие утверждения

Утверждение 1. Пусть для некоторого $A\in\mathbb{N}_0^2$ разложение (6), (7) полинома $p(x,y)$ состоит из двух А-квазиоднородных форм, т.е. имеет вид $p(x,y)=\phi_1^A(x,y)+\phi_2^A(x,y)$. Тогда не существует вектора $\overline{A} \in \mathbb{N}_0^2$ такого, что $\overline{A} \neq A$, и главная $\overline{A}$-квазиоднородная форма $\phi^{\overline{A}(x,y)}$ полинома $p(x,y)$ содержит более двух членов (мономов).

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\overline{A} = (\overline{A_1}, \overline{A_2}) \in \mathbb{N}_0^2$ главная $\overline{A}$- квазоидная форма $\phi_1^{\overline{A}}(x,y)$ полинома содержит по крайней мере три члена (монома). При этом по крайней мере два из них принадлежат одной из двух форм $\phi_1^A(x,y)$ или $\phi_2^A(x,y)$. Поскольку прямая на плоскости однозначно определяется любыми двумя точками, находящимися на этой прямой, то принадлежность двух мономов любой из этих форм означает, что $\overline{A} = A$ (поскольку $A, \overline{A} \in \mathbb{N}_0^2$), т.е. пришли к противоречию с $\overline{A} \neq A$.

Утверждение 2. Пусть $A = (A_1, A_2 \in \mathbb{N}_0^2)$, $u_0 \in 0$, l - четное натуральное число, $p(x,y), \overline{p}(x,y)$ - полиномы, $p(x,y) = (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^l \overline{p}(x,y)$. Тогда $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ тогда и только тогда, когда она является точкой локального минимума полинома $\overline{p}(x,y)$.

Доказательство. Действительно, пусть $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$. Тогда найдется последовательность точек $(x(n), y(n)), n = 1, 2, \ldots,$ таких, что $p(x(n), y(n)) = \Big[\big(y(n)\big)^{A_1} - u_0\big(x(n)\big)^{A_2}\Big]^l \overline{p}(x(n), y(n)) < 0, (x(n), y(n)) \to 0_{(2)}$ при $n \to \infty$. Из этих условий, используя четность l, получаем:

$$[y(n)]^{A_1} - u_0\,[x(n)]^(A_2) \neq 0, \overline{p}((x(n), y(n))) < 0, n = 1, 2, \ldots,$$

($u_0 \neq 0$ - не требуется!) т.е. $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $\overline{p}(x,y)$.

В обратную сторону. Пусть $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $\overline{p}(x,y)$. Тогда найдется последовательность точек $(x(n), y(n)), n = 1, 2, \ldots,$ таких, что $\overline{p}((x(n), y(n))) < 0, (x(n), y(n)) \to 0_{(2)}$ при $n \to \infty$. При этом в силу непрерывности $\overline{p}(x,y)$ можно считать, что $x(n) \neq 0, y(n) \neq 0, n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что, если для некоторых $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, u_0 \neq 0$ выполняется $y_0^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} = 0$, то $\forall \nu \in (0,1) (\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} \neq 0$. Действительно, если $(\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} \neq 0, \neq> 0$, то $(\nu y_0)^{A_1} = y_0^{A_1}$, откуда $\nu^{A_1} = 1$, что противоречит условию $\nu \in (0,1)$. Но тогда, используя непрерывность $\overline{p}(x,y)$, для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ можно подобрать такое число $\nu_n \in (1 - 1/n, 1]$, такое, что $\overline{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, (\nu_n y(n))^{A_1} - u_0 (x(n))^{A_2} \neq 0$ (если $(y(n))^{A_1} - u_0\,(y(n))^{A_2} \neq 0$, то полагаем $\nu_n = 1$). Таким образом, получаем:

$$p(x(n), \nu_n y(n)) = \Big[\big(\nu_n y(n)\big)^{A_1} - u_0\big(x(n)\big)^{A_2}\Big]^l \overline{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, n = 1, 2, \ldots,$$

и при этом $(x(n), \nu_n y(n)) \to 0_{(2)}$ при $n \to \infty$, т.е. $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$.

Приведем некоторые сведения относительно произвольной А-квазиоднородной формы $\phi_1^A(x,y)$, где $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$, вида (2)-(4). Пусть, как и ранее, $e = (-A_2, A_1), u = x^{e_1} y^{e_2} = x^{-A_2} y A_1$,

$$\phi_1^A(x,y) = \sum_{i=1}^{s} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_1} = x^{\alpha_i} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_i} y^{\beta_1} g_1^A(x^{e_1} y^{e_2}) = x^{\alpha_i} y^{\beta_1} g_1^A(u),$$

$$r_1 = \deg g_1^A(u) = \nu_s = (\alpha_1 - \alpha_s)/A_2, \alpha_1 = \alpha_s + r_1 A_2, \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s$$

($\deg g(u)$ - степень многочлена $g(u)$). Пусть, далее, u_0 - корень кратности $k \in \mathbb{N}$ многочлена $g_1^A(u)$, т.е. $g_1^A(u) = (u - u_0)^k \overline{g}_1^A$, где $\overline{g}_1^A(u)$ - многочлен, $\overline{g}_1^A(u_0) \neq 0, \overline{r}_1 = \deg \overline{g}_1^A(u) = r_1 - k$. Тогда

$$\phi_1^A(x,y) = x^{\alpha_i} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_i} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1} - u_0)^k \overline{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) =$$

$$= (y^{A_1} - u_0 x A_2)^k x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} \left[x^{\overline{r}_1 A_2} \overline{g}_1^A (x^{-A_2} y^{A_1}) \right] = (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k \overline{\phi}_1^A (x, y), \qquad (3)$$

где полином

$$\overline{\phi}_1^A(x, y) = x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} \left[x^{\overline{r}_1 A_2} \overline{g}_1^A (x^{-A_2} y^{A_1}) \right] = x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} y^{\beta_1} \overline{g}_1^A (x^{-A_2} y^{A_1}) \qquad (4)$$

имеет члены вида $\overline{a}_i x^{\overline{\alpha}_i} y^{\overline{\beta}_i} = \overline{a}_i x^{\alpha_1 - kA_2} y^{\beta_1} (x^{-A_2} y^{A_1})^{\overline{\nu}_i} = \overline{a}_i x^{\alpha_1 - (k + \overline{\nu}_i) A_2} y^{\beta_1 + A_1 \overline{\nu}_i}, \overline{\nu}_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \overline{\nu}_i \leq \overline{r}_1$, где $\overline{\alpha}_i = \alpha_1 - (k + \overline{\nu}_i) A_2 \geq \alpha_1 - (k + \overline{r}_1) A_2 = \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s \geq 0, \overline{\beta}_i = \beta_1 + A_1 \overline{\nu}_i \geq \beta_1$,

$$B_1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 = A_1 (\alpha_s + r_1 A_2) + A_2 \beta_1 = r_1 A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1,$$

$$A_1 \overline{\alpha}_i + A_2 \overline{\beta}_1 = A_1 \left[\alpha_1 - (k + \overline{\nu}_i) A_2 \right] + A_2 (\beta_1 + A_1 \overline{\nu}_i) = A_1 \left[\alpha_1 - k A_2 \right] + A_2 \beta_1 =$$

$$= A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 - k A_1 A_2 = B_1 - k A_1 A_2 = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geq 0.$$

Таким образом $\overline{\phi}_1^A(x, y)$ также является А-квазиоднородной полиномиальной формой, для членов $a_i x^{\overline{\alpha}_i} y^{\overline{\beta}_i}$ которой выполняется

$$\overline{B}_1 = A_1 \overline{\alpha}_i + A_2 \overline{\beta}_i = B_1 - k A_1 A_2 = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geq 0,$$

и при этом $\overline{B_1} = 0 \implies r_1 = k, \alpha_s = 0, \beta_1 = 0$. Если $\overline{B_1} = 0$, то равенство $r_1 = k$ означает, что многочлен $\overline{g}_1^A(u)$ имеет степень $r_1 - k = 0$, т.е. является константой $G \neq 0$ (поскольку $\overline{g}_1^A(u) \neq 0$), и тогда

$$\overline{\phi}_1^A(x, y) = x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} \overline{g}_1^A(u) (x^{-A_2} y^{A_1}) = G x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} = G x^{\alpha_s + r_1 A_2 - k A_2} y^{\beta_1} = G x^0 y^0 = G,$$

т.е. А-квазиоднородная форма $\overline{\phi}_1^A(x, y)$ является этой же константой.

Пусть $p(x, y)$ - полином, для которого выполнены условия утверждения 8: $p(x, y) \neq 0$,$p(0, 0) = 0$, $p'(0, 0) = 0^{(2)}$ (т.е. $0^{(2)}$ является стационарной точкой), все главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$ из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле, и при этом $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$,$A = (A_1, A_2) = (1, 1) \in \mathbf{A}_p$. Пусть, далее,

$$p(x, y) = \phi_1^A(x, y) + \phi_2^A(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u) + x^{\gamma_1} y^{\eta_1} g_2^A(u),$$

где $\phi_1^A(x, y)$ удовлетворяет условиям (2)-(4), а $\phi_2^A(x, y)$ - условиям (8)-(10). Как это следует из утверждения 9, в этом случае $\mathbf{A}_p = \{A\}$.

Пусть $u_0 \in U_p(A)$, и при этом кратность корня u_0 в многочлене $g_1(u)$ равна четному натуральному числу $k \in 2\mathbb{N}$ (см. утверждение 6.1), а кратность корня u_0 в многочлене $g_2(u)$ равна $l \in \mathbb{N} \cup 0$. Тогда $g_1^A(u) = (u - u_0)^k \overline{g}_1^A(u), g_2^A(u) = (u - u_0)^l \overline{g}_2^A(u)$, где $\overline{g}_1^A(u_0) > 0, \overline{g}_2^A(u_0) \neq 0$. Пусть $r_1 = \deg g_1^A(u), \overline{r}_1 = \deg \overline{g}_1^A(u), r_2 = \deg g_2^A(u), \overline{r}_2 = \deg \overline{g}_2^A(u)$.
Возмодны следующие 4 случая.

1) Пусть $k \geq 2$ четно и $\mathrm{l} = 0$, т.е. $g_2^A(u_0) \neq 0$.
2) Пусть $l < k$ l четно.
3) Пусть $k \leq l$.
4) Пусть $l < k$ l нечетно.

Используя утверждение 10, нетрудно от полинома $p(x, y)$ перейти к полиному $\tilde{p}(x, y) = \tilde{\phi}_1^A(x, y) + \tilde{\phi}_2^A(x, y)$, также являющемуся суммой двух А-квазиоднородных форм, такому, что $U_{\tilde{p}}(A) \subseteq U_p(A)$, полином $\tilde{\phi}_1^A(x, y)$ является неотрицательным и для нового полинома $\tilde{p}(x, y)$ для любого $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$ будут выполняться только случаи 1), 4) и при этом в случае 4) $l = 1$. Если при этом выполняется только случай 1), то мы находимся в области применимости алгоритма 1, используя который, получим однозначный ответ, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $\tilde{p}(x, y)$ (а тем самым и $p(x, y)$).