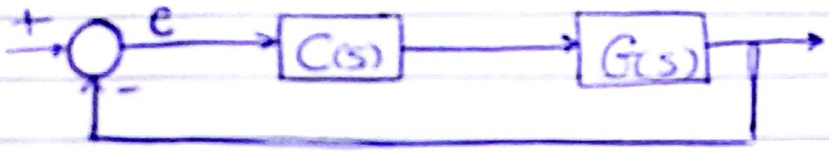
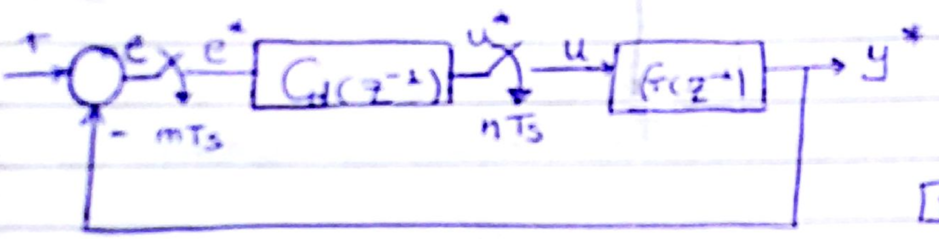
Ψηφιακά Συστήματα Ελέγχου



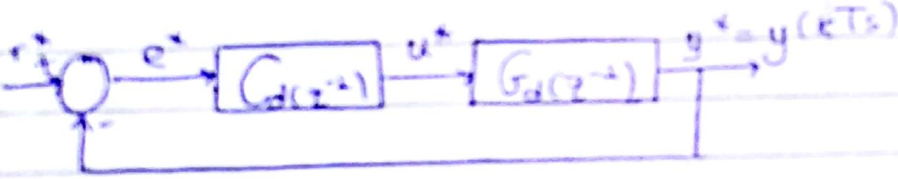


$m, n \in \mathbb{Z}^+$

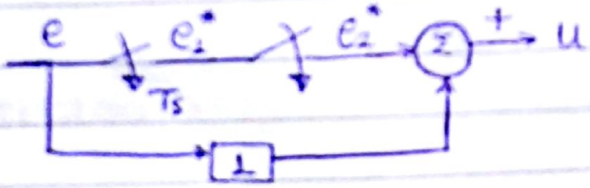
n, m (not prime)

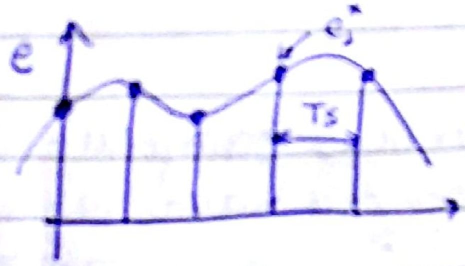
$\boxed{m = n = 1}$

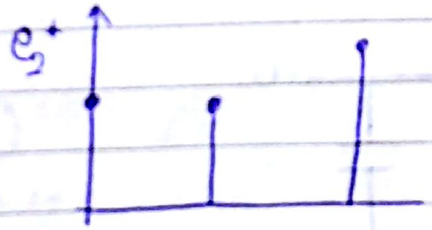
1. Discretize $C(s) \xrightarrow{T_s} C_d(z^{-1})$
2. Discretize $G(s) \xrightarrow{T_s} G_d(z^{-1})$

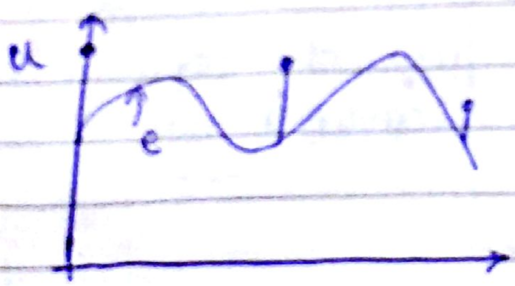


Παραδείγματα Δειγματοληψίας

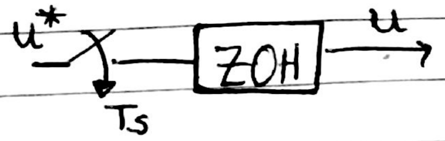


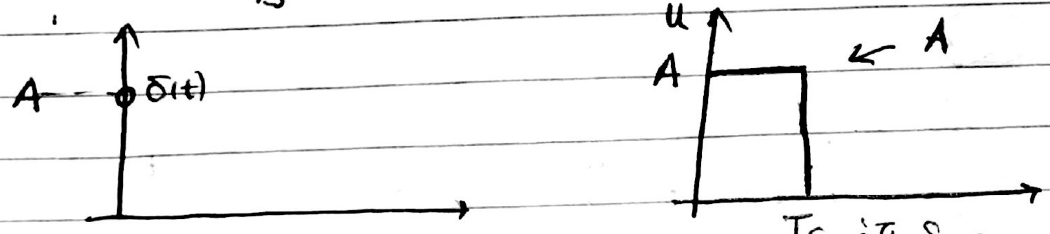






▶ Zero Order Hold: Δέχεται σαν είσοδο κρουστική και βγάζει έξοδο παλμό

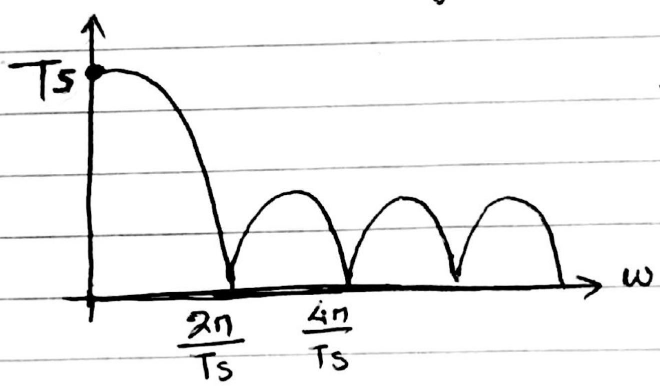




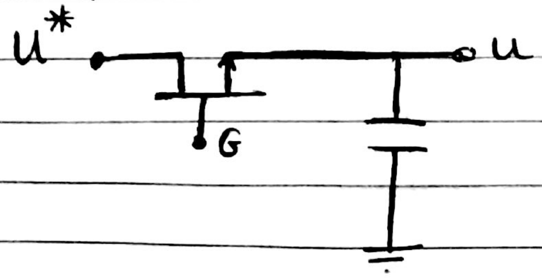
είσοδος   έξοδος

συνάρτηση μεταφοράς: $\frac{\text{έξοδος}}{\text{είσοδος}} = \frac{1-e^{-sT_s}}{s}$

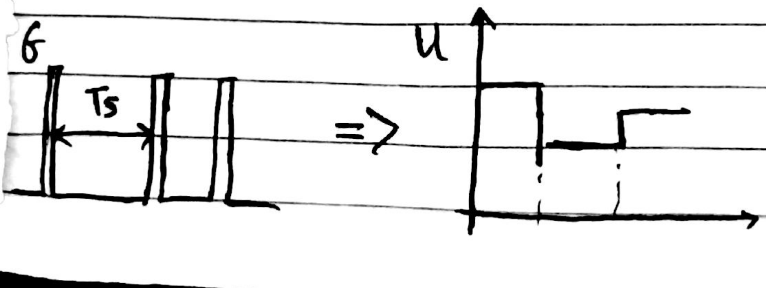
μέτρο της tf = $\left|\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega}\right|$



Υλοποίηση του ZOH



Ο πυκνωτής φορτίζεται κι αφού δεν έχει κάπου να εκφορτιστεί διατηρεί την τάση τ μέχρις ότου φορτιστεί με μια καινούρια τιμή.

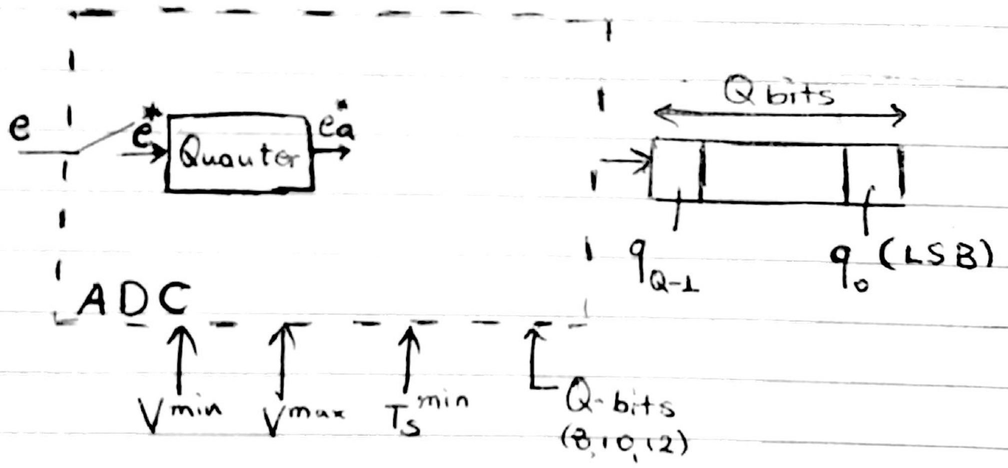


Tip: Ο πυκνωτής θα διατηρήσει την τιμή του. Όμως το ZOH θα συνδεθεί σε σειρά με την G(s) με αποτέλεσμα ο πυκνωτής να εκφορτίζεται. Η λύση είναι να συνδέσουμε ανάμεσα στο ZOH και την G(s) έναν inverter.

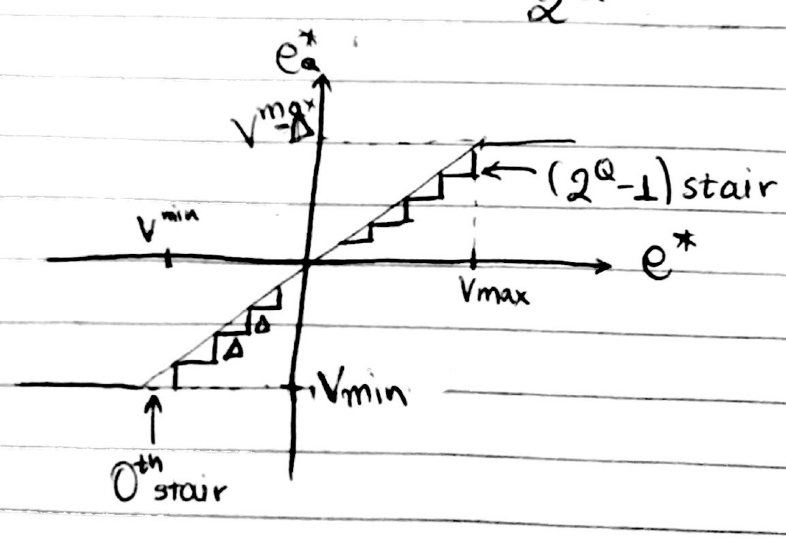
Συμπέρασμα: Ο ελεγκτής δεν καλείται να ελέγξει την G(s), αλλά την G(s) μαζί με το ZOH.

δηλαδή το σύστημα χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

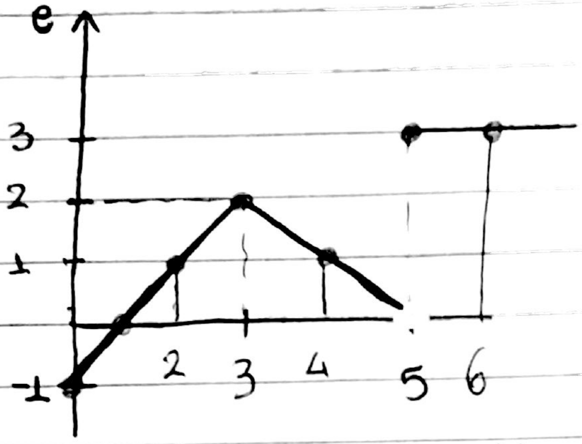
$$\boxed{\frac{1-e^{-sT_s}}{s}\cdot G(s)}$$



quantization step : $\Delta = \dfrac{V_{max} - V_{min}}{2^Q}$



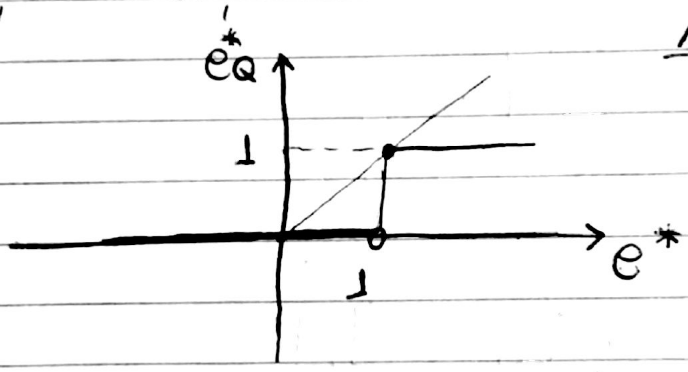
example



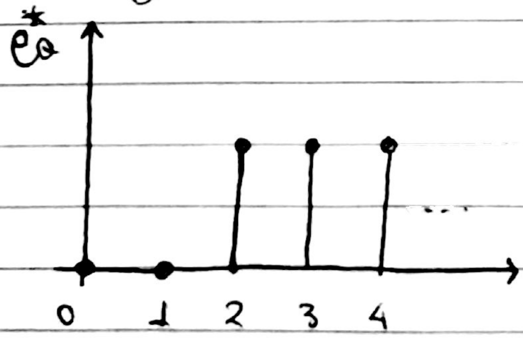
$T_s = 1$

Έστω ότι η είσοδος e "μπαίνει" σ' έναν ADC με τα χαρακτηριστικά
$V^{min} = \phi$, $V^{max} = 2$, $Q = 1$

$$\Delta = \frac{V^{max} - V^{min}}{2^Q} \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}$$



Άρα η έξοδος απ' τον quanter θα είναι:



$-1 \rightarrow 0$
$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 1$
$3 \rightarrow 1$
$\vdots$

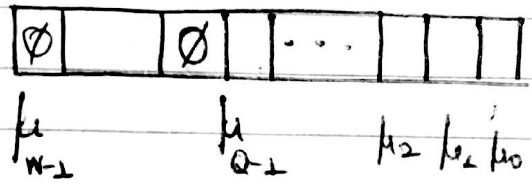
Τελικά

$$e^Q = V^{min} + \max\left(\frac{e-V^{min}}{\Delta}, 0\right)\Delta \quad \text{(ισχύει για } e\downarrow\text{)}$$

$$e^Q = \min\left(V^{max}-\Delta,\ V^{min} + \max\left(\frac{e-V^{min}}{\Delta}, 0\right)\Delta\right)$$

Μετά τον ADC η λέξη που παράγεται με Q-bits θα εισέλθει στον μικροεπεξεργαστή (microprocessor) ο οποίος δέχεται λέξεις των W bits.

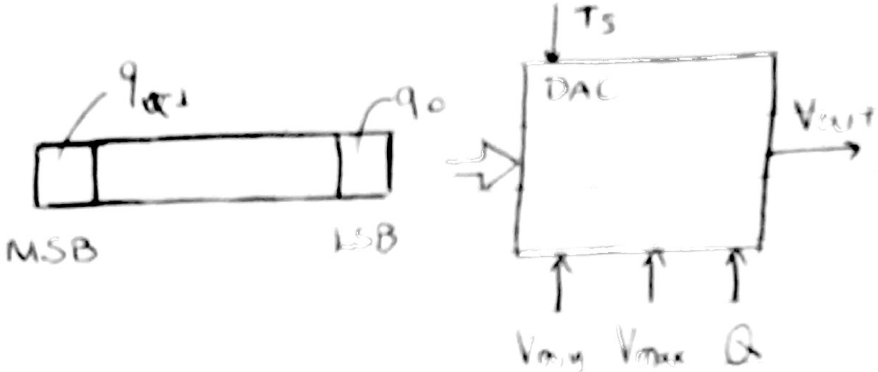
→ Αν $W \geq Q$, τότε για την τελική λέξη εισάγουμε μηδενικά πριν το μ_{Q-1}, δηλαδή:



→ Αν $Q \geq W$, τότε κρατάμε τα MSB που προέρχονται απ' τα quanter.

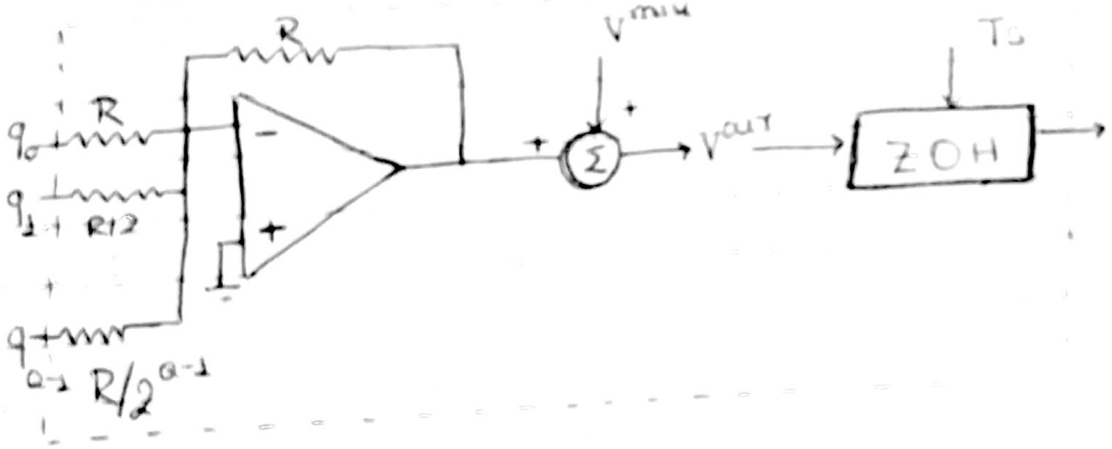
29/02/16

DAC

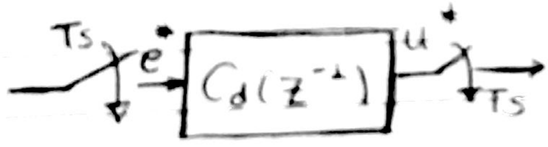


$$V_{out} = V^{min} + \frac{V^{max} - V^{min}}{2^Q} \cdot \sum_{i=0}^{Q-1} q_i 2^i$$

Κυκλωματικη Υλοποιηση



Γενικη Μορφη για Ελεγκτη



Συναρτηση Μεταφορας :

$$\boxed{\frac{U}{E}(z^{-1}) = z^{-d} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i z^{-i}}}$$

$$U(z) = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i z^{-i} U(z) + z^{-d} \sum_{j=0}^{m-1} b_j z^{-j} E(z)$$

$\downarrow z^{-1}$

$$\boxed{u(k) = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i u(k-i) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j e(k-j-d)}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι θα πρέπει να έχουμε αποθηκευμένες τις τιμές από προηγούμενες χρονικές (με ένα buffer π.χ.), επίσης θα πρέπει να έχουμε υπόψιν @ time k
given $(u(k-1), \dots, u(k-n+1))$ & $(e(k-d), \dots, e(k-d-m+1))$
so as to compute $u(k)$

Internal Representation of #s

- unsigned integers

$= \sum_{i=0}^{w-1} q_i 2^i$

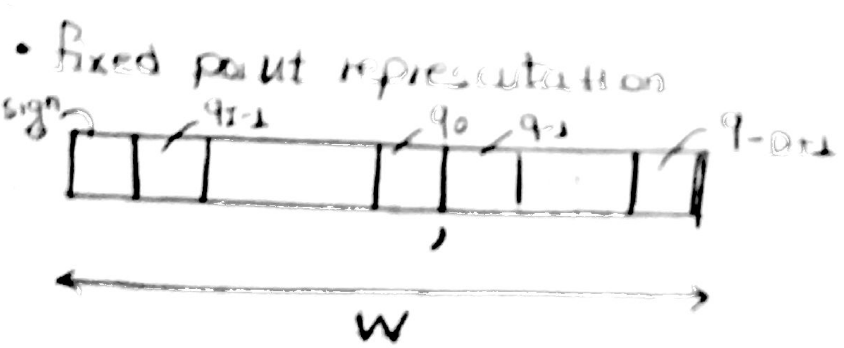
Dynamic range (DR) $= \dfrac{|\max \#|}{|\min \# \text{ (except } 0)|} = 2^w - 1$

- signed integer

$\pm \sum_{i=0}^{w-2} q_i 2^i$ 0: positive, 1: negative

$DR = \dfrac{\max \#}{\min(\text{in magnitude } \#)} = 2^{w-1} - 1$

- fixed point representation



$\pm \sum q_i 2^i$

3/03

▶ **Floating pt. arithmetic** (IEEE 755)

sign bit | m_{-1} | … | m_{-M+1} — MANTISSA, M-bits.

sign | e_{E-2} | … | e_1 | e_0 — EXPONENT, E-bits.

$m_{-1} = 1$ (forced!)

$$X_{10} = \pm \sum_{i=1}^{M-1} m_i 2^{-i}$$

$$E_{10} = \pm \sum_{j=0}^{E-2} e_j 2^j$$

$\min|x| = \boxed{x|1|0|0|\ldots|0} = 1/2$

($1/2$, $1/4$, …, 2^{-M+1})

$\max|x| = \boxed{x|1|1|1|\ldots|1}$

Αν συνδυάσω Mantissa & Exponent ο αριθμός θα ισούται με

$$\boxed{X_{10} 2^{E_{10}}}$$

<u>example</u>: Let $M=5$ & $E=3$ $(M+E=8)$

$\boxed{0|1|0|1|0}$ (S_M) $\boxed{1|0|1}$ (S_E)

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) \cdot 2^{-(1 \cdot 2^0)} = \ldots$$

<u>max number</u> (positive): $\boxed{0|1|1|1|1|1}$ MANTISSA $\boxed{0|1|1}$ EXPONENT

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) \cdot 2^{(1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1)} \rightarrow 7{,}5_{10}$$

min number

| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| 1 | 1 | 1 |

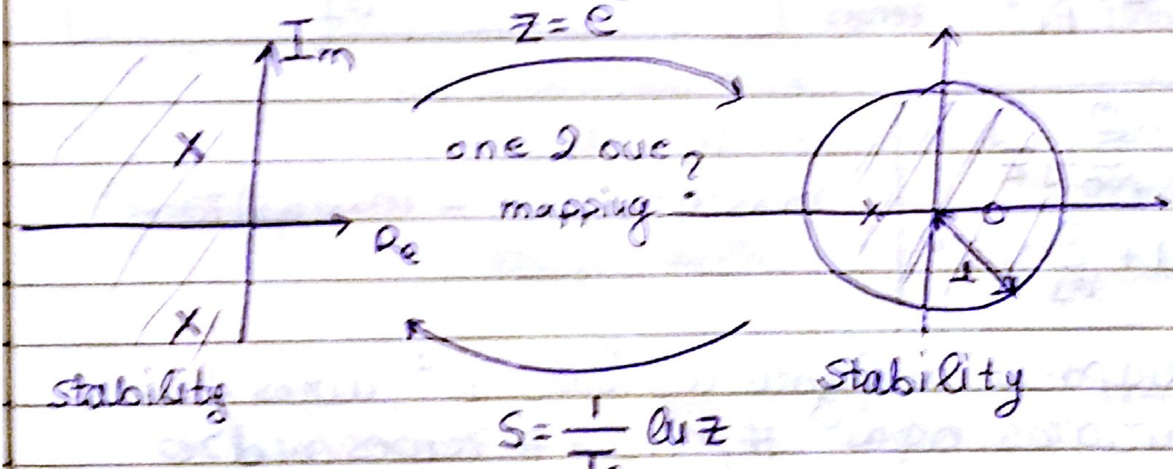
FORCED!

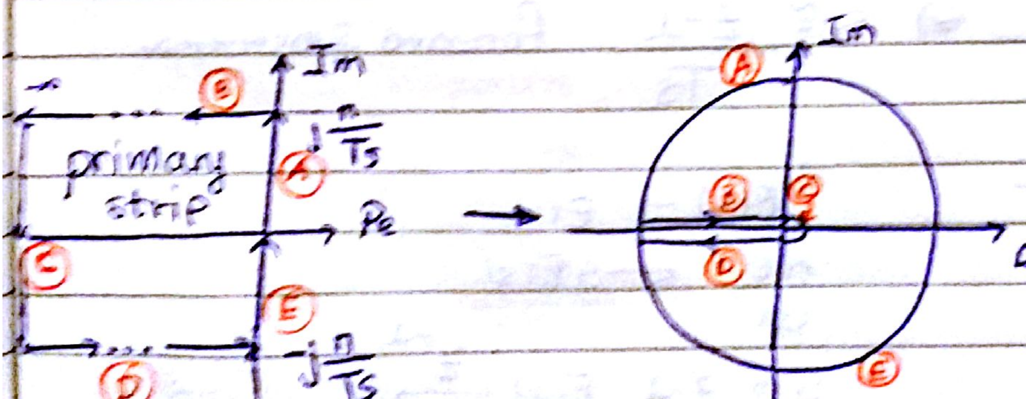
$$\min\# = (1\cdot 2^{-1})\cdot 2^{-(1\cdot 2^1+1\cdot 2^0)} = 2^{-4}$$

wrong thought for min number → | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | MANTISSA

for this course $m_{-1} = 1$: forced!

Μετάβαση από Laplace σε Z





• για το σημείο $0+j0$ θα έχαμε $z = e^{(0+j0)T_s} \to 1+j0$

▶ Αν επιλέξω ένα σημείο με συγκεκριμένο Re και Im ώστε ανήκει στο primary strip θα έχω την αντιστοιχία του στον μοναδιαίο κύκλο του Z. Αν κρατώ σου σταθερό το Re και το Im επιλεχθεί έτσι ώστε να είναι εντός του primary strip τότε το σημείο αυτό θα έχει την ΙΔΙΑ αντιστοιχία με το προηγούμενο σημείο στον μοναδιαίο κύκλο. Επομένως η μετάβαση από Laplace σε Z ΔΕΝ είναι one 2 one mapping!

Συμπέρασμα: Πρέπει να επιλέξω Ts τέτοια ώστε ολόκληρη η πληροφορία που περιγράφει ένα σύστημα να έχει one 2 one mapping!

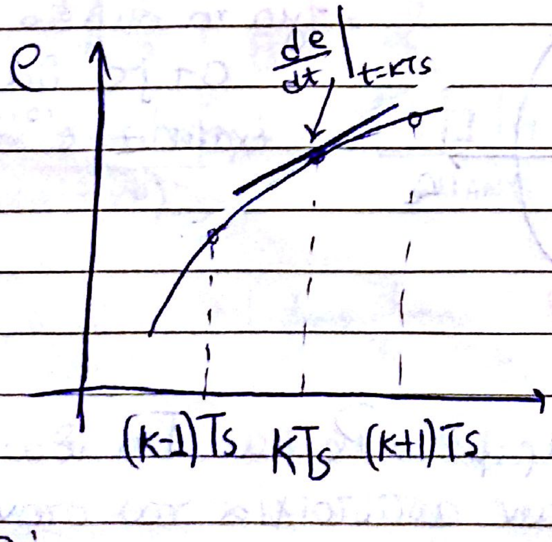
$$G(s) = K s^{\ell} \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{s}{z_j}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{s}{p_i}\right)} \xrightarrow[\text{with no excess zeroes}]{\text{pole-zero matching}} \boxed{G_d(z^{-1}) = K'(z-1)^{\ell} \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(z-e^{-z_j T_s}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(z-e^{-p_i T_s}\right)}}$$

$$\boxed{G_d(z^{-1}) = z^{-d} \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j z^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}}}$$

max(n,m) poles = max(m,n) zeroes

Δηλαδή, αν σχεδιάσω τον ελεγκτή ως προς z^{-1}, αυτός θα είναι ΠΑΝΤΑ αιτιατός αφού #poles = #zeroes αν $d>0$

$$z = e^{sT_s} \simeq 1 + sT_s \Rightarrow s \simeq \frac{z-1}{T_s} \quad \text{forward substitution}$$



$e(t) \rightarrow E(s)$

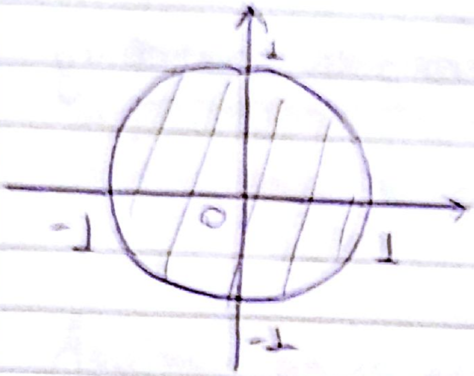
$\frac{de}{dt} \leftarrow s E(s)$

$$s \rightarrow \frac{z-1}{T_s} E(z) \xrightarrow{z^{-1}} \frac{e((k+1)T_s) - e(kT_s)}{T_s}.$$

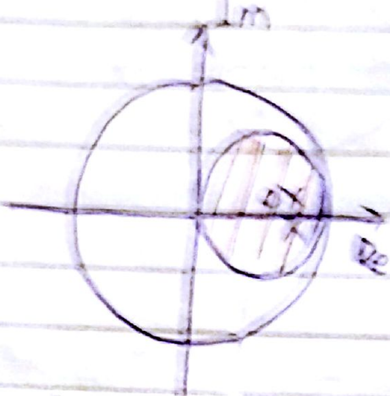
δηλαδή για να βρούμε την παράγωγο θα χρειαστεί να προβλέπω την επόμενη τιμή του e → δύσκολο.

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$ backward substitution

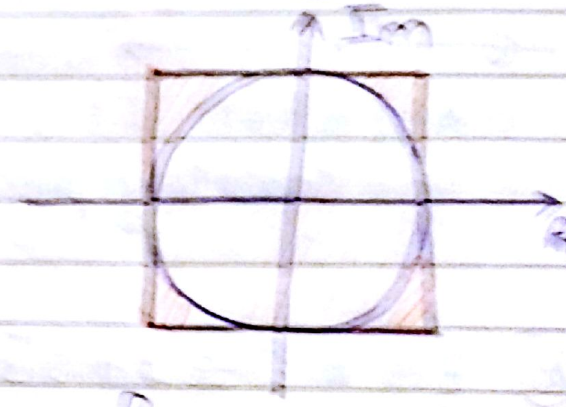
Με backward substitution από τα σχήματα προσεγγίζεις τελείως
→ πιο απλό στην υλοποίηση αλλά περισσότερες αλλαγές



επιθυμητή περιοχή
για ευστάθεια



backward
substitution
ευστάθεια μεν
αλλά αφού έχουμε
μικρότερη περιοχή
μπορεί να γίνει
zero-pole cancellation

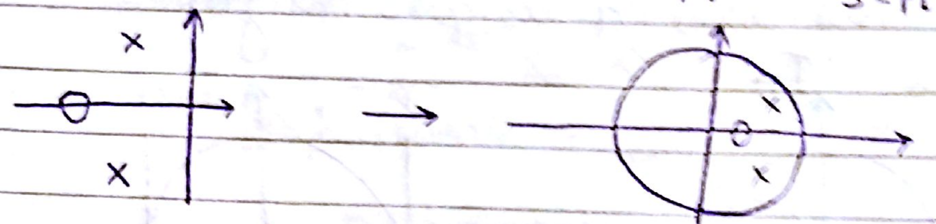


forward substitution

υπάρχει πιθανότητα
να έχουμε πόλους
εκτός του μοναδιαίου
κύκλου ⇒ ΑΣΤΑΘΕΙΑ

7/03/1[illegible]

① $C(s) = K s^{l} \dfrac{\prod (1 + \frac{s}{z_j})}{\prod (1 + \frac{s}{p_i})} \xrightarrow{z = e^{sT_s}}$ $s = z_j$, $s = 0$, $s = p_i$



Zero pole matching

Stability preservation

(2a) $z = e^{sT_s} \cong 1 + sT_s$

$s = \dfrac{z-1}{T_s}$ Forward Difference.

Έστω ότι ο ελεγκτής μας δίνεται υπό τη μορφή απλών κλασμάτων

$$C(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s+p_i} \longrightarrow C_d(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i'}{(z - e^{-p_i T_s})}$$

n poles
zeroes (unknown)

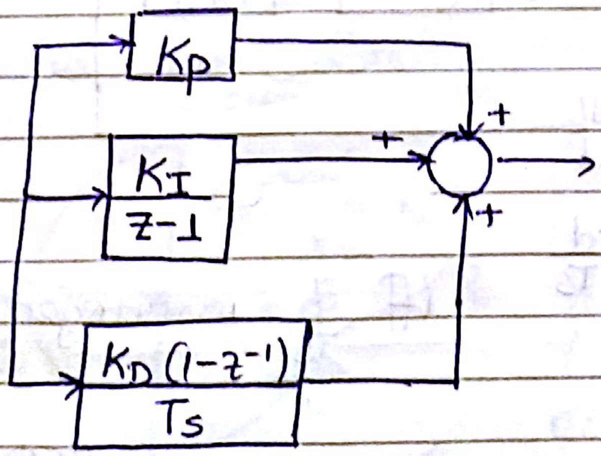
n poles
zeroes (unknown)
↑ may differ the # of zeroes that appear in $C(s)$

zeroes: need to be computed.

Ανάλογα με τη μέθοδο που θα διαλέξουμε μπορούμε από ένα μη αιτιατό αναλογικό ελεγκτή να καταλήξουμε σε αιτιατό διακριτό ελεγκτή.

example: $\longrightarrow \boxed{K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s} \longrightarrow$

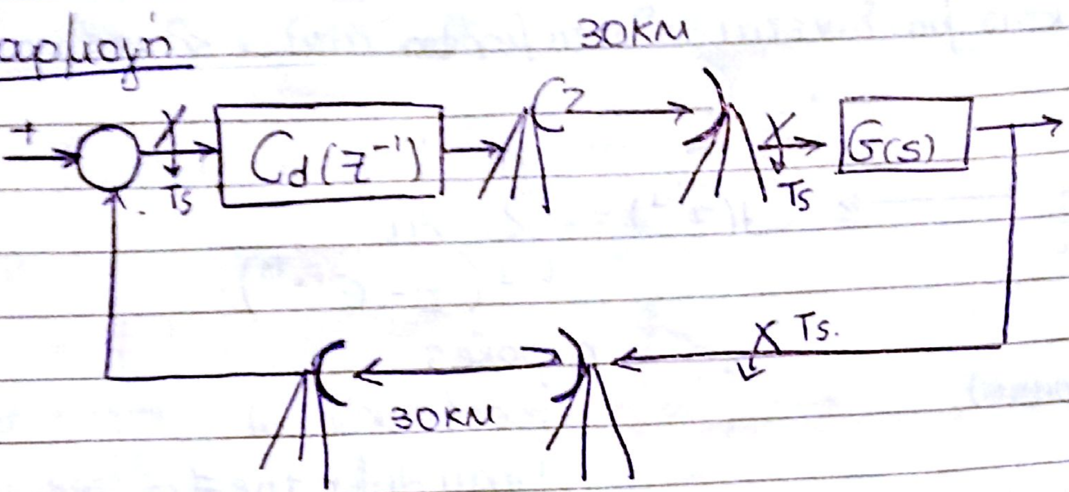
$$\downarrow Z$$



Ο $K_D s$ είναι μη αιτιατό μέρος ελεγκτή. Με τη μέθοδο backward difference βλέπουμε ότι προκύπτει ο $\frac{K_d(1-z^{-1})}{T_s}$ ο οποίος είναι αιτιατός!

→ Αιτιατότητα (στο z): Το σύστημα να ΜΗΝ εξαρτάται από μελλοντικές τιμές του z.

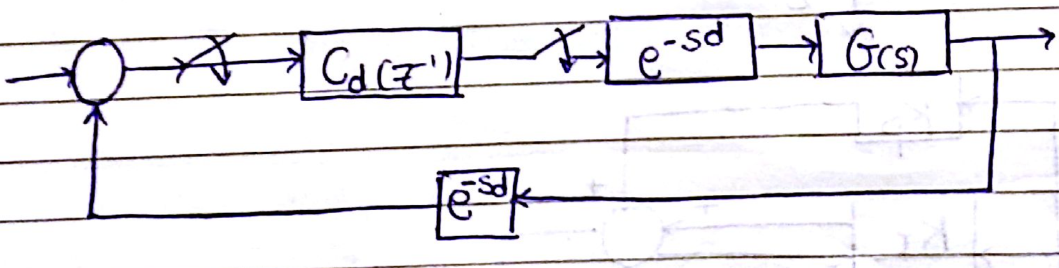
Εφαρμογή



Το σήμα από τον ελεγκτή θα χρειαστεί να διανύσει 30Km με την ταχύτητα του φωτός. Δηλαδή ο χρόνος που θα χρειαστεί για να μεταδοθεί το σήμα είναι $t = \frac{30km}{c}$. Αυτό στο Laplace αντιστοιχεί σε μία καθυστέρηση η οποία μαθηματικά εκφράζεται ως e^{-sd}

Let $G(s) = \frac{1}{s}$. Το σήμα μεταδίδεται μέσω RF.

$$d = \frac{30}{300000} = 100 \mu s$$



$$\mathcal{Z}(e^{-sd})\Big|_{T_s} \longrightarrow z^{-\frac{d}{T_s}} \quad \text{iff } \frac{d}{T_s} \text{ is integer}$$

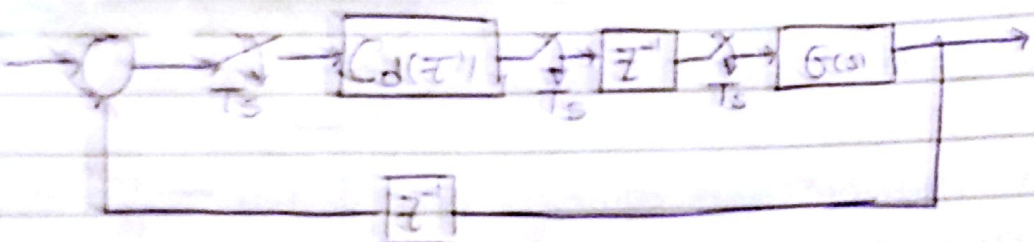
Αν $T_s = 100$ usec τότε θα έχαμε z^{-1000}
δηλαδή ανεξαρτήτως της $G(s)$ με αυτήν την επιλογή του T_s προσθέτω ήδη 1000 poles @ 0 → bad choice.

Αν $T_s > d$ τότε θα προκύψει μη ακέραιος στον εκθέτη του z και δεν έχουμε τις απαραίτητες γνώσεις για non integer exponent

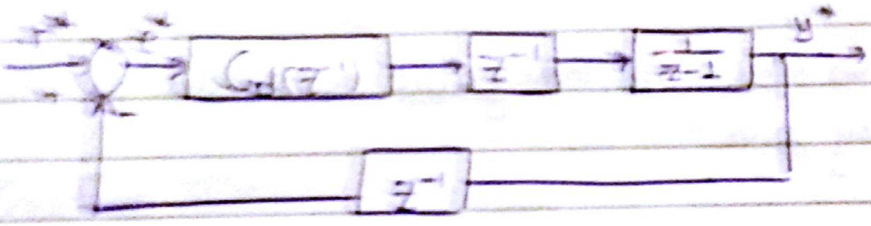
Αν $T_s \ll d$ εισάγω πολλούς πόλους στο σύστημα: undesirable

Αν $T_s = d$, τότε θα έχουμε z^{-1}, δηλαδή εισάγω <u>ΜΟΝΟ</u> ένα πόλο στο σύστημα

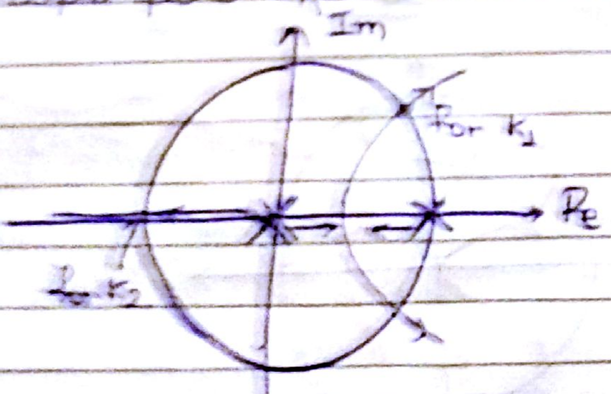
Για $\boxed{T_s = d}$ $\mathcal{Z}(e^{-sd}G(s)) = z^{-1}\mathcal{Z}(G(s))$



$G(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{z} \frac{1}{z-1}$



Το σύστημα μας έχει 2 πόλους στο 0 και 1 πόλο στο 1



Οι κανόνες για το R.locus είναι ίδιοι και στο z. Η συνθήκη ευστάθειας στο z είναι αυτή που διαφέρει σε σχέση με το Laplace.

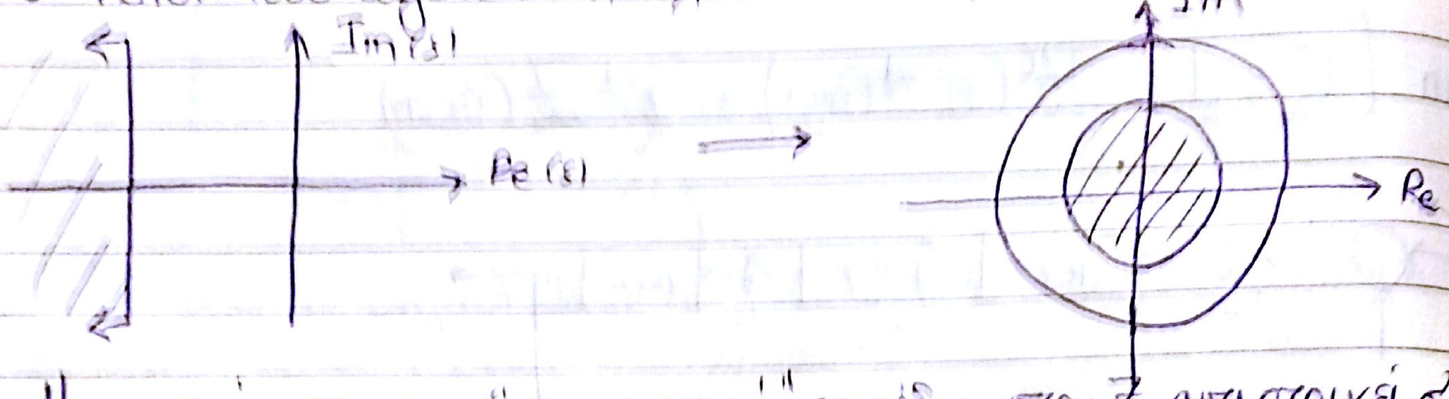
Έστω ότι $C_d(z^{-1}) = K$. Όσο το K αυξάνεται οι πόλοι κινούνται με βάση του γ.τ. Έστω ότι για K_1 οι πόλοι θα βρίσκονται στο σημειωμένο σημείο και για $K_2 \neq K_1$ στην άλλη θέση.

Από συνθήκη μέτρου καταλαβαίνουμε ότι $K_1 < K_2$

Άρα για $\forall K < K_1$ C.L system is stable

Ταχύτητα Απόκρισης

Στον Laplace λέγαμε ότι όσο πιο βαθιά στο LHP βρίσκονται οι πόλοι τόσο αυξάνεται η ταχύτητα απόκρισης

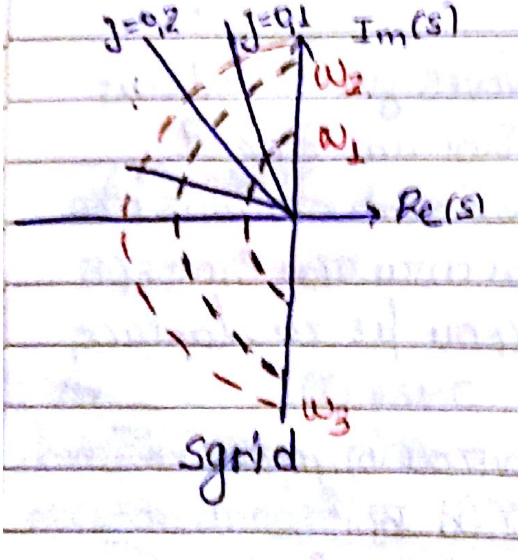


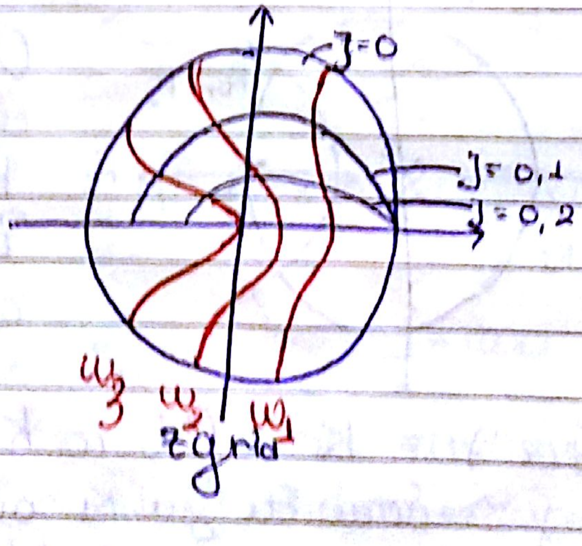
Η αντιστοίχιση του "πιο αριστερά" επιπέδου στο Z αντιστοιχεί σε ένα κύκλο με μικρότερη ακτίνα.

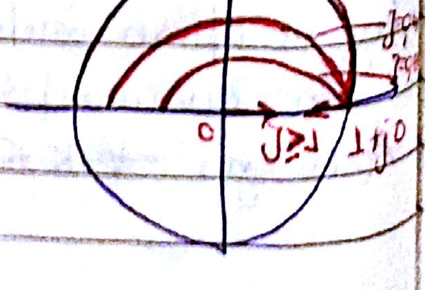
Επομένως: Στον Z η ταχύτητα απόκρισης είναι μεγαλύτερη όσο οι πόλοι βρίσκονται πιο κοντά στο 0!!!

Στην προηγούμενη εφαρμογή θα επιλέξαμε (το) K για το σημείο όπου οι πόλοι θα βρίσκονται στο breakaway point

Αντιστοιχία Laplace → Z (damping-natural frequency)







<u>Άσκηση</u>: Έστω $G(z) = \frac{z-0.5}{(z-0.8)(z-0.4)}$ Να φτιαχτεί ένας ελεγκτής έτσι ώστε το ανοιχτό να έχει ταχύτατη απόκριση και το $y(kT_s) \approx r(kT_s)$

$$r \rightarrow \boxed{G_d(z^{-1})} \rightarrow \boxed{\frac{(z-0.5)}{(z-0.8)(z-0.4)}} \rightarrow y$$

Επιλέγοντας $C_d = \frac{(z-0.8)(z-0.4)}{z(z-0.5)}$ τότε

$$\frac{y}{r} = C_d G = \frac{1}{z}$$

17/03/16

<u>Συστήματα Ανοιχτού Βρόχου</u>

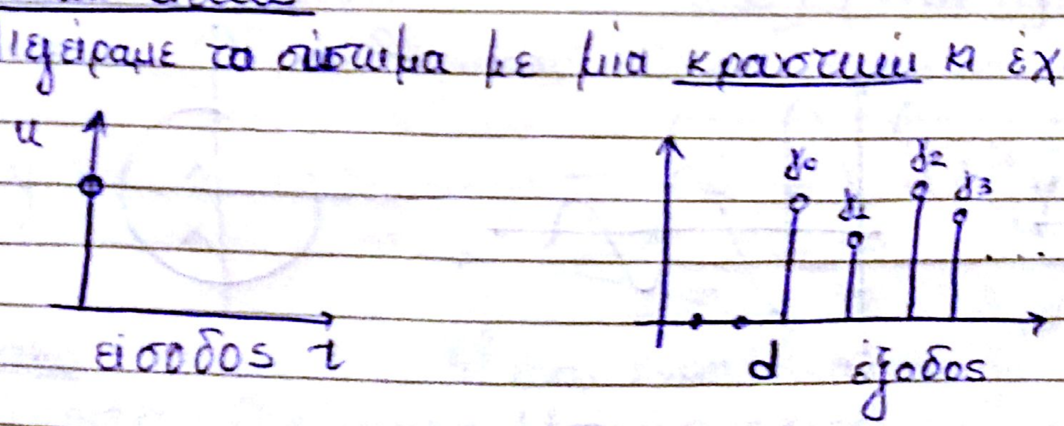
- System Identification

Έστω ότι έχουμε ΑΓΝΩΣΤΗ τη συνάρτηση μεταφοράς $G_d(z^{-1})$

$$u \rightarrow \boxed{G_d(z^{-1})} \rightarrow$$

<u>Κρουστική Είσοδος</u>

Διεγείραμε το σύστημα με μία <u>κρουστική</u> κι έχουμε



$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{1} = G_d(z^{-1}) = z^{-d}\left(y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + y_3 z^{-3} + \dots\right)$$

Προσοχή: Μόνο επειδή έχουμε κρουστική, η έξοδος ισούται με την $G_d(z^{-1})$

Σε ένα σύστημα συνεχές ή διακριτό, αν το διεγείρουμε με κρουστική η απόκριση **ποτέ** δεν θα μηδενιστεί κι έτσι κρουστική απόκριση έχει άπειρο μήκος.

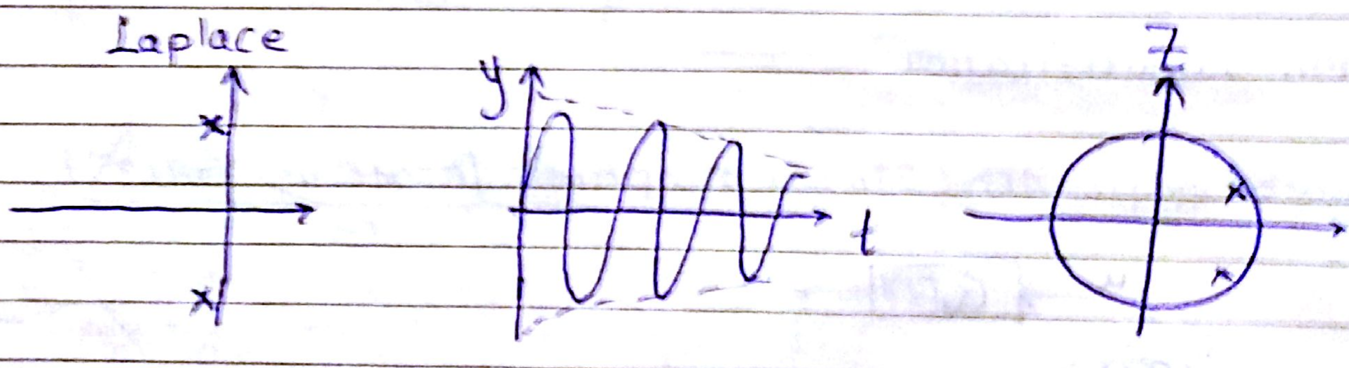
→ Τα συστήματα αυτά ονομάζονται IIR (Infinite Impulse Response)

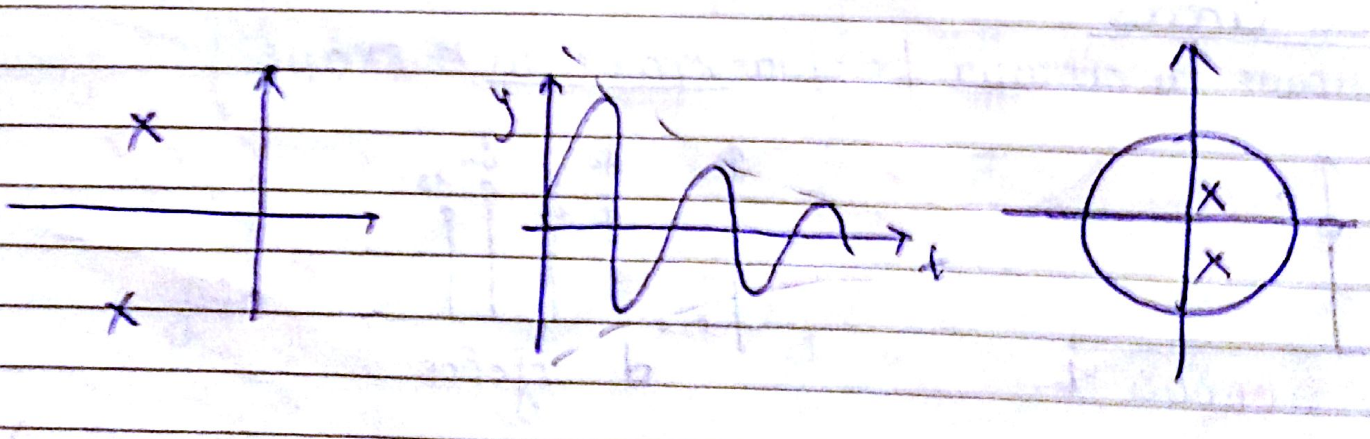
Αφού πάρουμε την έξοδο, καλούμαστε να επιλέξουμε πόσους όρους θα κρατήσουμε. Αν κρατήσουμε για παράδειγμα:

3 όρους: $G_d(z^{-1}) = \frac{1}{z^{d+3}} z^3(g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + g_3 z^{-3})$

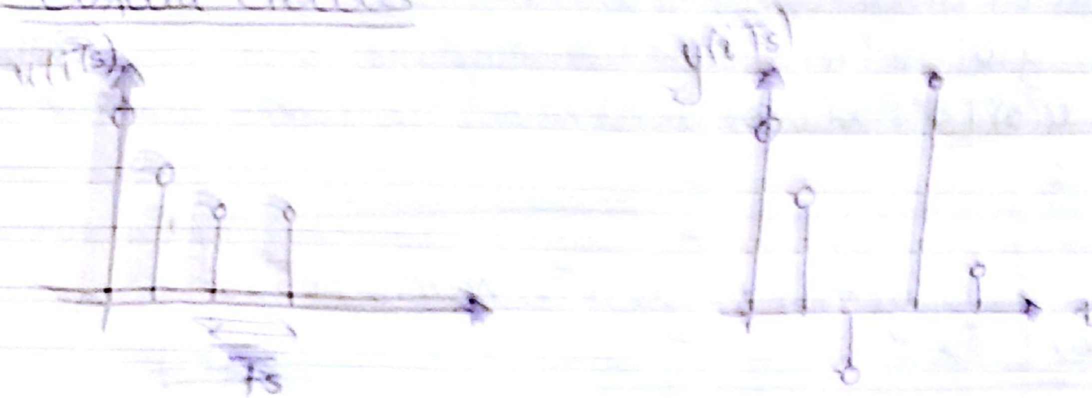
2 όρους: $G_d(z^{-1}) = \frac{1}{z^{d+2}} z^2(g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2})$

Επιλέγοντας δηλαδή όρους κάνω την υπόθεση ότι οι επόμενες τιμές της εξόδου μηδενίζονται. Δηλαδή η κρουστική απόκριση υποθέτουμε ότι μετά από ένα σημείο μηδενίζεται.
Προσεγγίζουμε δηλαδή ένα IIR σύστημα μ' ένα FIR σύστημα.





Τυχαία Είσοδος



Συνέλιξη : $\boxed{y(NT_s) = T_s \sum_{i=0}^{N} u(iT_s)\, w(NT_s - iT_s)}$

Διαδοχικές Εφαρμογές για διαδοχικά δείγματα

$y(0) = u(0)\,w(0)\,T_s$

$y(T_s) = [u(0)\,w(1T_s) + u(1\cdot T_s)\,w(0)]\,T_s$

$\vdots$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T_s) \\ \vdots \\ \\ y(NT_s) \end{bmatrix}}_{\text{γνωστά}} = T_s \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ u(2) & u(1) & u(0) \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ u(NT_s) & & & u(0) \end{bmatrix}}_{\text{γνωστά}} \underbrace{\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(NT_s) \end{bmatrix}}_{\text{άγνωστα}}$$

$\bar{y} = T_s\, U[\bar{w}] \rightarrow \boxed{\bar{w} = \frac{1}{T_s} U^{-1} \bar{y}}$

<u>Σχόλια</u> Ο πίνακας U είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας Sylvester. Ο πίνακας U αντιστρέφεται μόνο αν $\det(U) \neq 0$. Η ορίζουσα του U είναι $\det(U) = (u(0))^{N+1}$. Δηλαδή ο πίνακας U αντιστρέφεται μόνο εάν $u(0) \neq 0$. Αν είναι, ένα κόλπο είναι να καθυστερήσουμε την είσοδο, βάζοντας τα απαραίτητα μηδενικά στην έξοδο.

<u>ΟΜΩΣ</u>: Πρέπει να αποφεύγουμε τη χρήση δυναμικών! Παρατηρούμε ότι:

$y(0) = w(0)\,u(0)\,T_s \rightarrow$ υπολογίζουμε $w(0)$

$y(T_s) = [u(0)\,w(T_s) + u(T_s)\,w(0)]\,T_s \rightarrow$ υπολογίζουμε $w(T_s)$

$\vdots$

$$\boxed{w(NT_s) = \frac{1}{u(0)}\left[\frac{1}{T_s}\,y(NT_s) - \sum_{i=1}^{N} u(iT_s)\,w(NT_s - iT_s)\right]}$$

Τελικά: $G_d(z^{-1}) = w(0) + w(1)z^{-1} + \dots + w(N)z^{-N}$ (1)

επιθυμητή μορφή: $G_d(z^{-1}) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}}$ (2)

Ποια η σχέση μεταξύ N, n_a, n_b?

Let $n_a = n_b = n$

Τότε η (1) έχει $N+1$ coeffs ενώ η (2) έχει $(n_a + n_b + 1)$ coeffs

Άρα φαίνεται να ισχύει η σχέση $N + \cancel{1} = n_a + n_b + \cancel{1}$

Όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στην (1) έχουμε αγνοήσει τους επόμενους όρους από τον N-οστό! Επομένως μπορεί τα n_a και n_b να είναι ανεξάρτητα του N

→ Given n, N, $w(i)$

$(1) = (2) \Rightarrow (w_0 + w(1)z^{-1} + \dots + w(n)z^{-n})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n$

$\Leftrightarrow w_0 + (w_1 + a_1 w_0)z^{-1} + \dots + (w_n + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{n-i})z^{-n} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n$

$$\begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & w_1 & w_0 & & 0 \\ & & & & \\ w_n & w_{n-1} & w_{n-2} & \cdots & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ΟΜΩΣ: Πρέπει να αποφεύγαμε τη χρήση δυνάμεων! Παρατηρήσαμε ότι

$$y(\phi) = w(\phi)\,u(\phi)\,T_s \rightarrow \text{υπολογίζουμε } w(\phi)$$
$$y(T_s) = [u(\phi)w(T_s) + u(T_s)w(\phi)]\,T_s \rightarrow \text{υπολογίζουμε } w(T_s)$$
$$\vdots$$

$$\boxed{W(NT_s) = \frac{1}{u(\phi)}\left[\frac{1}{T_s}y(NT_s) - \sum_{i=1}^{N} u(iT_s)\,w(NT_s - iT_s)\right]}$$

Τελικά: $G_d(z^{-1}) = w(0) + w(1)z^{-1} + \dots + w(N)z^{-N}$ (1)

επιθυμητή μορφή: $G_d(z^{-1}) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n_a}}$ (2)

Ποια η σχέση μεταξύ N, n_a, n_b?

Let $n_a = n_b = n$
Τότε η (1) έχει $N+1$ coeffs ενώ η (2) έχει $(n_a + n_b + 1)$ coeffs

Άρα φαίνεται να ισχύει η σχέση $N + \cancel{1} = n_a + n_b \cancel{+1}$
Όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στην (1) έχουμε αγνοήσει τους επόμενους όρους από τον N-οστό! Επομένως μπορεί το n_a και το n_b να είναι ανεξάρτητα του N.

→ Given n, N, $w(i)$

$(1) = (2) \Rightarrow (w_0 + w(1)z^{-1} + \dots + w(N)z^{-N})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})$

$\Leftrightarrow w_0 + (w_1 + a_1 w_0)z^{-1} + \dots + \left(w_n + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{n-i}\right)z^{-n} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$

$$\begin{bmatrix} w_0 & \phi & \phi & \dots & \phi \\ w_1 & w_0 & \phi & \dots & \phi \\ w_2 & w_1 & w_0 & \dots & \phi \\ & & & & \\ w_n & w_{n-1} & w_{n-2} & \dots & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Αν $N \geq 2n$ τότε απλοποιούνται οι διαφορές και τα b_i υπολογίζονται ανεξάρτητα των a_i Bezout Identity

21/03/16

$$G(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + \dots + w_{2n} z^{-2n} \quad (\text{FIR filter})$$

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}}, \quad n_a, n_b < n$$

Let $n_a = n_b = n$ → Πρέπει τα πολυώνυμα ως προς z να "πηγαίνουν" μέχρι $2n$. Οι επιπλέον όροι μηδενίζονται

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} = w_0 + (w_1 + a_1 w_0) z^{-1} + \dots + \left(w_n + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{n-i}\right) z^{-n} + \left(w_{2n} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{2n-i}\right) z^{-2n} \quad (m > n)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 \\ a_n & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Για όρους από $n+1$ μέχρι $2n$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ w_2 & w_3 & w_4 & \cdots & w_{n+1} \\ \vdots & & H_{Toeplitz} & & \\ \vdots & & & & \\ w_n & w_{n+1} & w_{n+2} & \cdots & w_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{n+1} \\ -w_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ -w_{2n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbb{H}\,\bar{a} = \begin{bmatrix} -w_{n+1} \\ \vdots \\ -w_{2n} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a} = \mathbb{H}^{-1} \begin{bmatrix} -w_{n+1} \\ \vdots \\ -w_{2n} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, από εξίσωση (1) υπολογίζω τα b_i

<u>example</u>:

$$\hat{G}(z^{-1}) = z^{-d}(w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3})$$

Η καθυστέρηση <u>πρέπει</u> να μεταφερθεί και στην προσέγγιση που θα πάρουμε

$$\hat{G}(z^{-1}) \cong z^{-d} \frac{\sum_{i=0}^{n_b} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^{n_a} a_i z^{-i}}$$

Πιθανοί συνδυασμοί των n_a & n_b:

$n_b = 3$ " $n_a = 0$

$n_b = 2$ " $n_a = 1$ 0

$n_b = 1$ " $n_a = 2$ 1 0

$n_b = 0$ " $n_a = 3$ 2 1 0

• let $n_b = 2$ & $n_a = 0$

$$\frac{z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1} = z^{-d}(w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3})$$

$b_i = w_i$ για $i = 0, 1, 2$

Για τα πρώτα 3 στοιχεία έχουμε μηδέν σφάλμα

Το τρίτο στοιχείο w_3 δεν λαμβάνεται υπόψην. Αν $w_3 = 0$, δεν υπάρχει πρόβλημα. Αν όμως $w_3 \neq 0$ δεν έχει αναγνωριστεί σωστά.

if $W_3 = 0 \Rightarrow n_b = 2$, $n_a = 0$

$n_b = 1$, $n_a = 1$

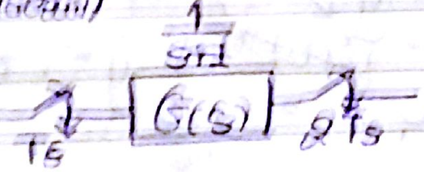
$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = W_0 + W_1 z^{-1} + W_2 z^{-2} + \underbrace{W_3}_{0} z^{-3}$$

$$\Leftrightarrow b_0 + b_1 z^{-1} + 0 z^{-2} + 0 z^{-3} = W_0 + (W_1 + a_1 W_0) z^{-1} + (W_2 + a_1 W_1) z^{-2} + (a_1 W_2) z^{-3}$$

Και τα 2 σετ παραμέτρων για $W_3=0$ προσεγγίζουν με μηδενικό σφάλμα την κρουστική απόκριση. Προτιμάμε όμως σε αυτήν την περίπτωση, το πρώτο σετ παραμέτρων καθώς οι πόλοι θα βρίσκονται μαζεμένοι στο μηδέν, ενώ με το 2ο σετ παραμέτρων οι πόλοι δεν βρίσκονται απαραίτητα στο μηδέν και να έχουμε αστάθεια.

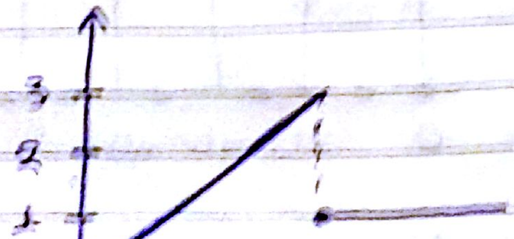
24/03/16

Άσκηση (Θέμα Εξετάσεων)



$u(t) = t\mathbb{1}(t) - (t-3)\mathbb{1}(t-3) - 2\mathbb{1}(t-3)$

α) Να σχεδιασθεί το $u(t)$



Από 0 μέχρι 3 έχουμε μια ράμπα με κλίση t. Τη χρονική στιγμή $t=3$ εισάγεται μια αρνητική ράμπα με κλίση -1 η οποία μηδενίζει την προηγούμενη ράμπα.

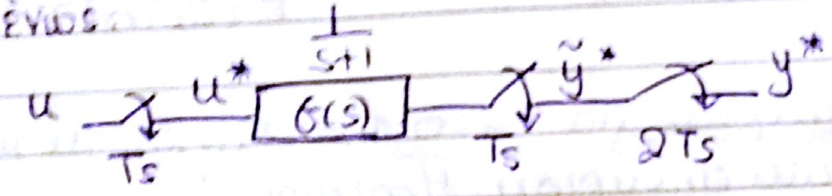
β) Αν $T_s = 0{,}5$ να υπολογισθούν τα δείγματα της εισόδου

$u(0 \cdot T_s) = 0$, $u(1 \cdot T_s) = 0{,}5$, $u(2 \cdot T_s) = 1$, $u(3 \cdot T_s) = 1{,}5$, ..., $u(6 \cdot T_s) = 1$

Για να βρω τα δείγματα της εξόδου παρατηρώ ότι η έξοδος έχει διαφορετική περίοδο δειγματοληψίας

<u>Κανόνας</u>: Αν η έξοδος έχει διαφορετική T_s από την εισόδου εισάγω έναν <u>εικονικό</u> δειγματολήπτη μεταξύ της G και του κανονικού δειγματολήπτη, με περίοδο δειγματοληψίας ίση με αυτή της εισόδου.

Επομένως:



1) Μεταβαίνω από Laplace στο Z.

$$\frac{\tilde{Y}^*}{U^*}(z) = \frac{z}{z-e^{-0,5}} \Leftrightarrow \tilde{Y}^*(z)\left(z-e^{-0,5}\right) = z\,U^*(z) \quad (1)$$

2) μεταβαίνω στο χρόνο

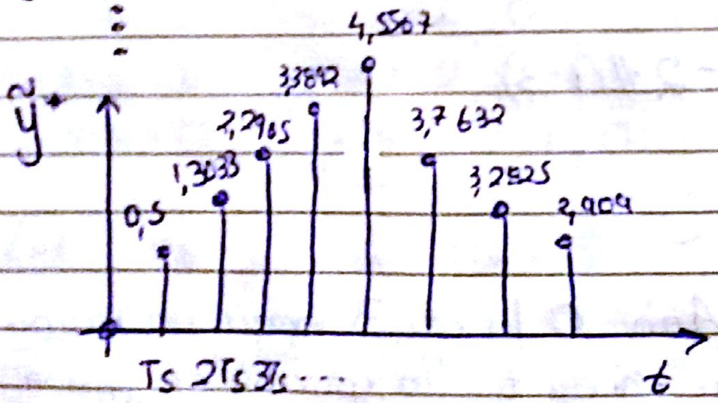
$$(1) \overset{Z^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{\tilde{y}^*(kT_s) = u^*(kT_s) + e^{-0,5}\,\tilde{y}^*[(k-1)T_s]}$$

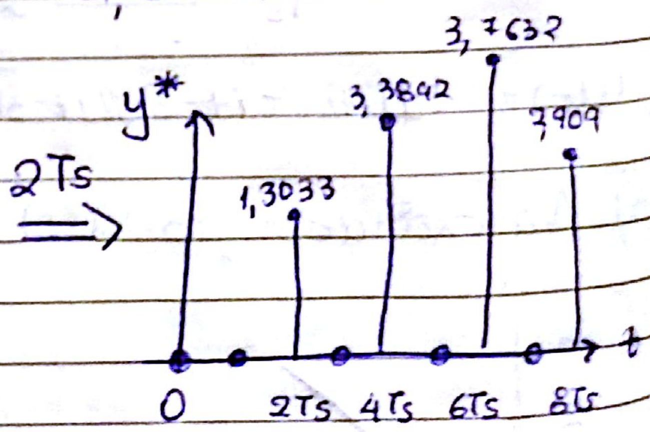
$$\tilde{y}^*(0T_s) = u^*(0) + e^{-0,5}\,\cancel{\tilde{y}(-T_s)}^{\,0} \rightarrow \tilde{y}^*(0T_s) = 0$$

$$\tilde{y}^*(1T_s) = u^*(T_s) + e^{-0,5}\,\cancel{\tilde{y}(0)}^{\,0} \Rightarrow \tilde{y}^*(T_s) = 0,5$$

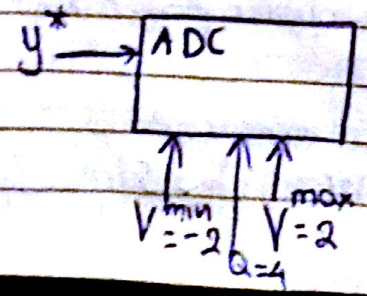
$$\tilde{y}^*(2T_s) = 1 + e^{-0,5}\cdot 0,5 = 1,3033$$

$\vdots$





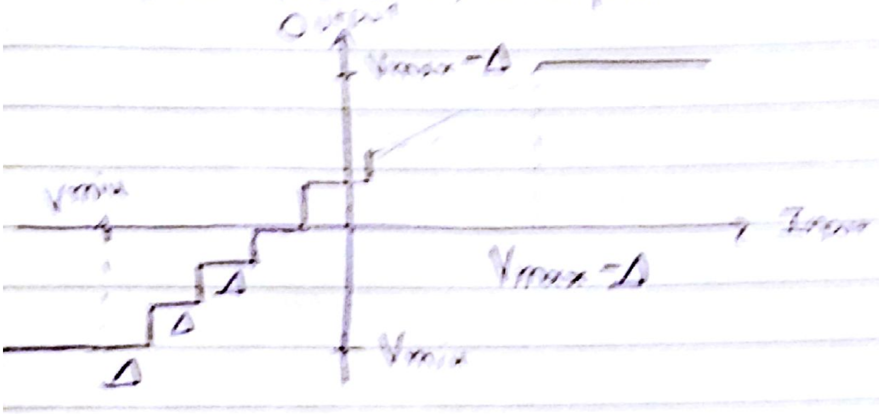
γ) Οι τιμές αυτές μπαίνουν σ' έναν ADC. Να βρεθούν οι έξοδοι



Για τις τιμές που ξεπερνάνε το 2 ο ADC θα δώσει την μεγαλύτερή του έξοδο δηλαδή $\boxed{1|1|1|1} \rightarrow 15_{10}$

$$\Delta = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^{Q}} = 0,25$$

Χαρακτηριστική Μετατροπέα



if $y^* \geq V^{max} - \Delta$ then
$y^o = V^{max} - \Delta$

if $y^* \leq V^{min}$ then
$y^o = V^{min}$

3,3899 → 1,75
3,7632 → 1,75
2,9909 → 1,75

• Οι έξοδοι γενικώς θα πρέπει να είναι ακέραια πολλαπλάσια του βήματος Δ.
• Οι έξοδοι θα πρέπει να'ναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή της εισόδου

1,3 → 1,25 → $\boxed{1101}$ *
0 → 0 που αντιστοιχεί στο μέσο της κλίμακας από Vmax & Vmin είναι συμμετρικά όσο σε binary $\boxed{1000}$

* Υπάρχει τύπος για τον υπολογισμό σε binary. Παρατηρώ βέβαια, ότι το 1,25 είναι 2 σκαλοπάτια κάτω απ'το 1,75. Επομένως σε binary το 1,25 θα είναι $\boxed{1101}$

Να προσεγγιστούν οι τιμές που εξάγαμε απ'τον ADC από έναν 5bits αριθμό κινητής υποδιαστολής με M=2 & E=3

$0_{10} \mapsto \overset{M}{00}\ \overset{E}{000}$
$1,25_{10} \mapsto 01\ 001 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{+(1-2^{1})} = 1_{10}$ ← κρατάμε αυτό επειδή είναι πιο κοντά στο $1,25_{10}$
$01\ 010 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{+(1-2^{1})} = \cancel{3/2}$
$1,75_{10} \mapsto 01\ 010 \rightarrow 2_{10}$