Índice

1. Definiciones y primeras propiedades

Sea A un anillo conmutativo.

Definición 1.1. El *conjunto de polinomios* en la indeterminada X con coeficientes en A es el conjunto de todas las sumas formales finitas

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Este conjunto se representa por $A[X]$.

Obsérvese que X *no es una variable*. Es un elemento nuevo, indeterminado que no representa a ningún elemento de A (Al final de la edad media y en el renacimiento le llamaban "la cosa", y los que manipulaban la cosa ,i.e. los algebristas, se llamaban "cosistas").

En el conjunto de polinomios definimos una suma y un producto: Sean

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$
$$g = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$$

dos polinomios. Supongamos que $m \leq n$, Tomamos $b_i = 0$ para todo $n \geq i > m$. Con este convenio definimos

$$f + g = (a_n + b_n)X^n + \cdots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0).$$
$$fg = a_n b_m X^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)X^{n+m-1} +$$
$$\cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)X + a_0 b_0.$$

Teorema 1.2. *El conjunto $A[X]$ con las dos operaciones definidas forma un anillo conmutativo que se llama* anillo de polinomios en X con coeficientes en A.

Lema 1.3. *La aplicación $\lambda : A \to A[X]$ definida por $\lambda(a) = a$ es un monomorfismo de anillos.*

Normalmente se identifica cada elemento $a \in A$ con el polinomio $\lambda(a) \in A[X]$, con lo que A es un subanillo de $A[X]$.

Definición 1.4. Para un polinomio $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \neq 0$ el mayor índice n tal que $a_n \neq 0$ se llama *grado de* f y se representa por $gr(f)$. Si $f = 0$ definimos $gr(f) = -\infty$.

Cada uno de los sumandos $a_i X^i$ se llama *monomio o término (de grado i)* del polinomio f.

El término no nulo de mayor grado se llama *término líder*. El coeficiente $a_n \neq 0$ del término líder se llama *coeficiente líder* y el término de grado cero a_0 se llama *término constante*.

Un polinomio $f = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ cuyo coeficiente líder vale 1 se llama *polinomio mónico*.

Un polinomio f se llama *constante* si $gr(f) \leq 0$, es decir, cuando $f \in \mathrm{Im}(\lambda)$.

Teorema 1.5. *Para cualquier anillo conmutativo A y cualesquiera polinomios $f, g \in A[X]$ se verifica*

$$gr(f + g) \leq \max(gr(f), gr(g)),$$
$$gr(fg) \leq gr(f) + gr(g).$$

Si $gr(f) \neq gr(g)$ se verifica

$$gr(f + g) = \max(gr(f), gr(g)).$$

Si A es un dominio de integridad se verifica

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g).$$

Corolario 1.6. *El anillo conmutativo A es un dominio de integridad si y sólo si $A[X]$ es un dominio de integridad.*

En cualquier dominio de integridad es importante determinar el grupo de unidades y los elementos irreducible y primos, para poder estudiar sus propiedades de divisibilidad. En este sentido los primeros resultados son los siguientes.

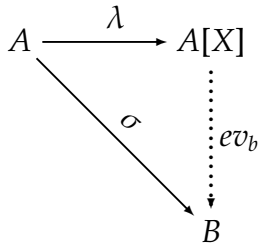
Proposición 1.7. 1. *Sea A un dominio de integridad. Los elementos invertibles de $A[X]$ son exactamente los invertibles de A.*

2. *Todo polinomio $X - a \in A[X]$ es irreducible.*

La propiedad más importante de un anillo de polinomios es la siguiente.

Teorema 1.8 (Propiedad universal del anillo de polinomios). *Sea A un anillo conmutativo, $\lambda : A \to A[X]$ la inclusión de A en el anillo de polinomios. Para todo anillo conmutativo B, todo homomorfismo de anillos $\sigma : A \to B$ y todo elemento $b \in B$ existe un único homomorfismo de anillos $ev_b : A[X] \to B$ tal que $(ev_b)\lambda = \sigma$ y $ev_b(X) = b$.*

Esta propiedad se visualiza mejor en un diagrama: Dadas λ y σ existe un único ev_b que hace el siguiente diagrama conmutativo y aplica X en b:



Demostración. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Definimos $ev_b(f) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) b^i$, es decir, aplicamos σ a todos los coeficientes de f, sustituimos X por b y realizamos en B las operaciones indicadas. Es rutina comprobar que ev_b es un homomorfismo de anillos, que

$$ev_b(X) = b$$

y que $ev_b \cdot \lambda = \sigma$.

Sea ahora $\tau : A[X] \to B$ otro homomorfismo de anillos que verifique las mismas propiedades y sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ arbitrario. Entonces

$$\tau(f) = \tau(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} \tau(a_i)\tau(X)^i = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) b^i = ev_b(f),$$

luego $\tau = ev_b$ es único. □

El morfismo ev_b del teorema anterior se llama *morfismo de evaluación en b*. Se aplica sobre todo cuando σ es una inclusión, es decir que para todo $a \in A$, $\sigma(a) = a$. En este caso $ev_b(a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0) = a_nb^n + \cdots + a_1b + a_0$ es el resultado de *evaluar f en b* y se representa por $ev_b(f) = f(b)$.

Definición 1.9. Un elemento $a \in A$ se llama *cero* o *raíz* de f si $f(a) = 0$.

Todo polinomio $f \in A[X]$ define una *aplicación polinómica* $\bar{f} : A \to A$ mediante $\bar{f}(a) = f(a)$. En general, distintos polinomios pueden definir la misma aplicación polinómica.

Ejemplo 1.10. Sea $A = \mathbb{Z}_2$ el anillo de las clases de restos módulo 2. Sean $f = 0$, $g = X^2 + X$, $h = X^3 + X$ polinomios de $\mathbb{Z}_2[X]$. Como polinomios son *distintos*, pero los tres definen la misma función polinómica $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, a saber la función que aplica todo elemento (sólo hay dos) de $\mathbb{Z}_2$ en el cero de $\mathbb{Z}_2$.

El proceso de construir el anillo de polinomios en una indeterminada puede aplicarse a cualquier anillo conmutativo, en particular a un mismo anillo de polinomios $A[X]$: Sea Y otra indeterminada. Definimos $A[X, Y] = A[X][Y]$, el anillo de polinomios en dos indeterminadas con coeficientes en A. Sus elementos son de la forma

$$f = \sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j,$$

donde la suma es finita (En lugar de ello se suele decir que tomamos la suma sobre todos los pares i, j pero con $a_{ij} = 0$ *para casi todo par* (i, j), es decir, para todos excepto un conjunto finito).

Mas generalmente, definimos inductivamente el anillo de polinomios en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ por la regla

$$A[X_1, \ldots, X_n] = A[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$$

. En otras palabras, consideramos a los elementos de $A[X_1, \ldots, X_n]$ como polinomios en X_n con coeficientes en $A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Naturalmente existe un monomorfismo $\lambda : A \to A[X_1, \ldots, X_n]$ y A se identifica con el subanillo $\mathrm{Im}(\lambda)$ de $A[X_1, \ldots, X_n]$.

Lema 1.11. *El anillo conmutativo A es un dominio de integridad si y sólo si lo es* $A[X_1, \ldots, X_n]$

Demostración. Inducción sobre n. □

De la definición tenemos que todo elemento f de $A[X_1, \ldots, X_n]$ se escribe de manera única como

$$f = \sum a_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

Aquí $a_{i_1 \ldots i_n}$ esta determinado de manera única como el coeficiente en f del monomio $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$. Formalmente la suma anterior es infinita, pero de hecho sólo un número finito de coeficientes son distintos de cero. Ya que las indeterminadas conmutan entre sí con los elementos de A, el anillo $A[X_1, \ldots, X_n]$ depende simétricamente de las X_i; así que X_n no juega ningún papel especial. Podíamos haber escrito f como un polinomio en X_1 con coeficientes en $A[X_2, \ldots, X_n]$ o escoger cualquier otra X_i.

Definición 1.12. Cada producto $M_i = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ se llama *monomio primitivo*; el término correspondiente $a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ se llama *monomio* o *término monomial*; su *grado total* (o sencillamente *grado*) es $\sum i_j$, y el *grado en* X_j es i_j. El *grado de* f es el máximo de los grados de sus términos no nulos.

Por ejemplo $f = 2X_1^5 X_2^3 X_3 - X_1^2 X_3^3 + 7X_2^6$ es de grado 5 en X_1, de grado 6 en X_2 y de grado 3 en X_3; el grado total de f es 9.

Definición 1.13. Un polinomio en el que todos los términos tienen el mismo grado total se llama *polinomio homogéneo* o también una *forma*. En una indeterminada las únicas formas son los monomios, pero ya para dos indeterminadas puede haber otros, por ejemplo las forma cuadráticas $aX^2 + bXY + cY^2$.

Un criterio práctico de homogeneidades es el siguiente

Lema 1.14. *El polinomio $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ es homogéneo de grado k si y sólo si para otra indeterminada t se verifica que*

$$f(tX_1, \dots, tX_n) = t^k f(X_1, \dots, X_n).$$

A veces es conveniente ordenar los monomios. Incluso para propósito tan sencillo como escribir la expresión total de un polinomio es necesario un orden total de los monomios. Con frecuencia se usa el *orden lexicográfico* definido de la siguiente forma. Entre monomios de distinto grado grado total, el de mayor grado precede al de menor grado. Entre monomios del mismo grado total, el monomio $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ precede a $X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ si la primera diferencia no nula $i_1 - j_1, \dots i_n - j_n$ es positiva.

Por ejemplo, $X_1^3 X_2 X_3^2$ precede a $X_1^3 X_3^3$ y es precedido por $X_1^3 X_2^2 X_3$. En cualquier polinomio, el primer término monomial (en el orden lexicográfico) entre los términos de grado máximo se llama el *término líder*

2. El algoritmo de la división con resto

Teorema 2.1 (Algoritmo general de división). *Sea A un anillo conmutativo y sean $f, g \in A[X]$ con el coeficiente líder de g invertible. Entonces existen únicos $q, r \in A[X]$ tales que $f = qg + r$ y $gr(r) < gr(g)$.*

Demostración. Inducción sobre $gr(f)$. Sean $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ y $g = b_m X^m + \dots + b_0$. Si $gr(f) < gr(g)$, tomamos $q = 0$ y $r = f$. Sea ahora $gr(f) = n \geq gr(g) = m$. Definimos

$$f_1 = f - (a_n b_m^{-1}) X^{n-m} g \tag{2.1}$$

Es inmediato que $gr(f_1) < gr(f)$ y por inducción existen $q_1, r \in A[X]$ tales que $f_1 = q_1 g + r$ con $gr(r) < gr(g)$. Despejando en 2.1 vemos que

$$f = (a_n b_m^{-1}) X^{n-m} g + f = ((a_n b_m^{-1}) X^{n-m} g + q_1) g + r.$$

Definimos $q = (a_n b_m^{-1}) X^{n-m} g + q_1$ y tenemos demostrada la existencia de cociente y resto.

Para ver la unicidad, sea $f = qg + r = q_1g + r_1$. Trasponiendo términos tenemos $(q - q_1)g = r_1 - r$. Como el coeficiente líder de g es invertible se verifica

$$gr(g) > \text{máx}(gr(r), gr(r_1) \geq gr(r - r_1) = gr((q - q_1)g) = gr(q - q_1) + gr(g),$$

lo que implica que $gr(q - q_1) = -\infty$ y $q - q_1 = 0$. Luego $q = q_1$ y por tanto $r = r_1$. □

Corolario 2.2. *Sea K un cuerpo. Entonces $K[X]$ es un anillo euclídeo*

Demostración. En un cuerpo, todo elemento no nulo es invertible. Así que para todo polinomio no nulo g el coeficiente líder es invertible. Por el teorema anterior, para cualesquiera polinomios f, g con $g \neq 0$ existen únicos q, r tales que $f = qg + r$ con $gr(r) < gr(g)$. Esta es la segunda condición en la definición de anillo euclídeo.

Por otro lado todo cuerpo es un dominio de integridad, así que para dos polinomios no nulos f, g se verifica $gr(fg) = gr(f) + gr(g) \geq gr(f)$. Ésta es la primera condición de dicha definición

Por tanto $K[X]$ es euclídeo respecto a la función grado. □

Corolario 2.3 (Teorema del resto). *Sea A un anillo conmutativo, a un elemento de A y $f \in A[X]$ un polinomio. Entonces existe un $q \in A[X]$ tal que*

$$f = (X - a)q + f(a)$$

y $(X - a)$ divide a f si y sólo si $f(a) = 0$.

Teorema 2.4. *Sea A un dominio de integridad y sea $f \in A[X]$. Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ elementos distintos tales que $f(a_i) = 0$ para $i = 1, \ldots m$. Entonces $((X - a_1) \ldots (X - a_m))$ divide a f.*

Demostración. Inducción sobre m. Para $m = 1$ esto es parte del teorema del resto. Sea $m > 1$. Por inducción $f = (X - a_1) \ldots (X - a_{m-1})g$ con $g \in A[X]$. Evaluamos en a_m:

$$0 = f(a_m) = (a_m - a_1) \ldots (a_m - a_{m-1})g(a_m)$$

Como los a_i distintos, $a_m - a_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots m - 1$. Como A es un dominio de integridad, $g(a_m) = 0$. Por el teorema del resto $g = (X - a_m)g_1$. Sustituyendo en la expresión de f nos queda $f = (X - a_1) \ldots (X - a_{m-1})(X - a_m)g_1$ y por tanto el producto $((X - a_1) \ldots (X - a_m))$ divide a f. □

Corolario 2.5. *Sea A un dominio de integridad y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. El número de raíces de f en A es menor o igual al grado de f.*

Ejemplo 2.6. El teorema y corolarios anteriores son falsos para anillos conmutativos generales: Sea $f = X^2 - 1 \in \mathbb{Z}_8[X]$. En $\mathbb{Z}_8$ el polinomio f tiene cuatro raíces distintas: $1, 3, 5, 7$. Además $(X - 1)(X - 3)$ no divide a f.

Corolario 2.7. *Sea A un dominio de integridad, $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elementos distintos de A y $f, g \in A[X]$ tales que $gr(f), gr(g) \leq n$ y $f(a_i) = g(a_i)$ para $i = 1, \ldots n + 1$. Entonces $f = g$.*

Demostración. El polinomio $f - g$ tiene grado menor o igual a n y tiene $n + 1$ raíces distintas. Luego tiene que ser el polinomio cero. □

Corolario 2.8. *Sea A un dominio de integridad infinito y sean $f, g \in A[X]$ tales que para todo $a \in A$ se verifica $f(a) = g(a)$. Entonces $f = g$.*

Este último corolario nos dice que si A es un dominio de integridad infinito, la correspondencia entre polinomios y funciones polinómicas es biyectiva.

El anterior corolario se generaliza a varias indeterminadas:

Teorema 2.9. *Sea A un dominio de integridad infinito y sea $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ tal que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ se verifica $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Entonces $f = 0$.*

Demostración. Inducción sobre n. □

Corolario 2.10 (Principio de irrelevancia de desigualdades algebraicas)**.** *Sea A un dominio de integridad infinito y sean $f, g, h \in A[X]$, $h \neq 0$ tales que para $a_1, \ldots, a_n \in A$, $h(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$. Entonces $f = g$.*

Demostración. El polinomio $(f - g)h$ se anula sobre todos los $a_1, \ldots, a_n \in A$. Luego $(f - g)h = 0$. Como $A[X_1, \ldots, X_n]$ es un dominio de integridad y $h \neq 0$, necesariamente $f - g = 0$. □

El principio de irrelevancia de desigualdades algebraicas se llama también *propiedad de densidad*, por su interpretación en geometría algebraica.

3. Factorización

Sea K un cuerpo. El anillo $K[X]$ es un dominio euclídeo y por tanto también es un dominio de factorización única.Vamos ahora a estudiar la factorización de polinomios en ese anillo. En primer lugar caracterizamos los elementos invertibles.

Lema 3.1. *Las unidades de $K[X]$ son los polinomios constantes no nulos.*

El primer teorema proporciona algunos polinomios irreducibles:

Teorema 3.2. *Los polinomios de grado uno son irreducibles en $K[X]$.*
Estos son los únicos irreducibles si y sólo si todo polinomio de $K[X]$ de grado positivo tiene una raíz en K.

Demostración. El primer resultado se deduce del teorema del grado.

Supongamos que todo polinomio irreducible es de grado uno. El anillo $K[X]$ es un dominio de factorización única, por tanto todo polinomio f no constante es divisible por un irreducible, así que existe un $b_1X - b_0$ con $b_1 \neq 0$ tal que $f = (b_1X - b_0)q$. Pero entonces $f(b_0/b_1) = 0$ y f tiene una raíz $b_0/b_1 \in K$.

A la inversa, si todo polinomio no constante tiene una raíz en K, sea f un polinomio irreducible y sea $a \in K$ tal que $f(a) = 0$. Por el teorema del resto $X - a$ divide a f. Como f es irreducible, debe ser asociado a $X - a$ y por tanto es de grado uno. □

Definición 3.3. Un cuerpo en que todo polinomio no constante tiene una raíz se llama *algebraicamente cerrado*.

El llamado *teorema fundamental del álgebra* dice que el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado. Este hecho fue conjeturado por D'Alembert y demostrado por primera vez por el gran Gauss en su tesis doctoral. Dicha demostración tenía una laguna, pero a lo largo de su vida Gauss proporcionó cinco demostraciones correctas distintas. Sin embargo todas esas demostraciones utilizan bastante maquinaria analítica (como es propio, porque la construcción de $\mathbb{C}$ se basa en $\mathbb{R}$ que es el objeto de estudio del análisis matemático). Desde un punto de vista puramente algebraico, el hecho de que $\mathbb{C}$ sea algebraicamente cerrado es relativamente poco importante. Es más importante demostrar que todo cuerpo K es un subcuerpo de otro cuerpo $\bar{K}$ algebraicamente cerrado.

La factorización de polinomios con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado (como $\mathbb{C}$) es muy sencilla: Todo polinomio no constante es un producto de polinomios de grado uno.

Sobre los números reales es casi igual de fácil: Todo polinomio no constante es un producto de polinomios irreducibles de grado uno y dos. Sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales la situación es muy diferente: Existen polinomios irreducibles de todos los grados y para un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ dado puede ser penoso hallar sus factores. El resto de esta sección y las dos siguientes van encaminadas a intentar factorizar polinomios en $\mathbb{Q}[X]$.

Vamos a establecer los teoremas en un contexto más general. Sea A un dominio de factorización única y sea K su cuerpo de fracciones.

Definición 3.4. Para todo polinomio no nulo $f = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ llamamos *contenido de* f a $c(f) = \text{m. c. d.}(a_n, \ldots, a_0)$.

Un polinomio $f \in A[X]$ se llama *primitivo* si $c(f) = 1$.

Lema 3.5. *Todo polinomio $f \in A[X]$ se expresa como $f = c(f)f_1$ con f_1 primitivo.*

Teorema 3.6 (Lema de Gauss)**.** *El producto de dos polinomios primitivos es primitivo.*

Demostración. Sean $f = a_nX^n + \cdots + a_0$, $g = b_mX^m + \cdots + b_0$ dos polinomios primitivos de $A[X]$. Sea $p \in A$ un primo de A arbitrario. Como f, g son primitivos, $\text{m. c. d.}(a_n, \ldots, a_0) = 1 = \text{m. c. d.}(b_m, \ldots, b_0)$ y en cada uno de ellos existe por lo menos un coeficiente no divisible por p. Sean a_i y b_j los primeros coeficientes no divisibles por p, de forma que para todo $k > i$, p divide a a_k y para todo $l > j$, p divide a b_l. En el polinomio producto fg consideramos el coeficiente del término de grado $i + j$:

$$c_{i+j} = (a_{i+j}b_0 + \cdots + a_{i+1}b_{j-1}) + a_ib_j + (a_{i-1}b_{j+1} + \cdots + a_0b_{i+j}$$

Todos los términos del primer paréntesis (que puede ser vacío) son divisibles por p, como también lo son todos los términos del segundo paréntesis (que también puede ser vacío). Así que $c_{i+j} = q_1 p + a_i b_j + q_2 p$ con $q_1, q_2 \in A$. Si p dividiese a c_{i+j}, necesariamente $p \mid a_i b_j$ y como p es primo, dividiría a uno de los factores, lo cual es imposible. Luego p no divide a c_{i+j}.

Hemos demostrado que para todo primo $p \in A$ existe un coeficiente del producto $h = fg$ que no es divisible por p. Luego el máximo común divisor de los coeficientes de h es 1 y h es primitivo. □

Corolario 3.7. *Para dos polinomios $f, g \in A[X]$, el contenido del producto es el producto de los contenidos, es decir $c(fg) = c(f)c(g)$.*

Teorema 3.8. *Sea $f \in A[X]$ primitivo. Entonces f es irreducible en $A[X]$ si y sólo si es irreducible en $K[X]$.*

Demostración. Supongamos que $f = gh$ es una factorización de f en $K[X]$. Multiplicando por un denominador común obtenemos $k = af = bg_1h_1$, donde $a, b \in A$ y los polinomios g_1, h_1 son primitivos. Por el lema de Gauss el producto g_1h_1 también es primitivo. Luego a y b son ambos contenidos del polinomio k, luego son asociados. Sea $b = ua$ con u invertible. Sustituyendo y simplificando nos queda $f = (uf_1)g_1$ donde $uf_1, g_1 \in A[X]$ son primitivos y $gr(uf_1) = gr(f)$, $gr(g_1) = gr(g)$. Luego f es factorizable en $A[X]$.

A la inversa, sea $f = gh$ una factorización en $A[X]$. Los polinomios f, g no son constantes y tienen sus coeficientes en K, luego esa misma es una factorización en $K[X]$.

Hemos visto que f es reducible en $A[X]$ si y sólo si es reducible en $K[X]$. El contrarrecíproco es el resultado buscado. □

Corolario 3.9. *Los elementos irreducibles en $A[X]$ son de uno de los siguientes tipos:*

1. *Polinomios de grado cero que son irreducibles en A*
2. *Polinomios primitivos que son irreducibles en $K[X]$.*

Teorema 3.10. *Sea A un dominio de integridad. El anillo A es un dominio de factorización única si y sólo si $A[X]$ es un dominio de factorización única.*

Demostración. En primer lugar supongamos que $A[X]$ es un dominio de factorización única. Los elementos de A pertenecen a $A[X]$ y por tanto descomponen de manera única como producto de irreducibles en $A[X]$, necesariamente todos de grado cero. Por tanto todo $a \in A$ descompone de manera única como producto de irreducibles en A. Luego A es un dominio de factorización única.

A la inversa sea A un dominio de factorización única. Sea $f \in A[X]$ no cero. Descomponemos $f = c(f)f_1$ con f_1 primitivo. Descomponemos $c(f) = p_1 \dots p_t$ en producto de irreducibles en A y $f_1 = q_1 \dots q_s$ en producto de primitivos irreducibles en $K[X]$. Entonces $f = p_1 \dots p_t q_1 \dots q_s$ es una descomposición de f en producto de irreducibles en $A[X]$.

Sea ahora p un irreducible en $A[X]$ y sean $f, g \in A[X]$ tales que p divide al producto fg.

Si $gr(p) = 0$, entonces p es irreducible y primo en A y p divide al contenido $c(fg) = c(f)c(g)$. Luego p divide a $c(f)$ (en cuyo caso divide a f) o divide a $c(g)$ (en cuyo caso divide a g. Luego p es primo.

Si $gr(p) > 0$, entonces p es un polinomio primitivo irreducible y por tanto primo en $K[X]$. Luego p divide a f o a g en $K[X]$. Sea q un polinomio en $K[X]$ tal que $f = pq$. Extrayendo contenidos, vemos que q pertenece a $A[X]$ y por tanto p divide a f en $A[X]$. Luego p es primo en $A[X]$.

Hemos demostrado que todo polinomio de $A[X]$ descompone como producto de irreducibles y que todo irreducible es primo. Luego $A[X]$ es un dominio de factorización única. □

Corolario 3.11. *Sea A un dominio de integridad. Entonces A es un dominio de factorización única si y sólo si $A[X_1, \dots, X_n]$ es un dominio de factorización única.*

Corolario 3.12. *Sea K un cuerpo. El anillo $K[X_1, \dots, X_n]$ es un dominio de factorización única.*

4. Criterios de irreducibilidad

En esta sección A es un dominio de factorización única y K es su cuerpo de fracciones, salvo mención expresa en contrario.

La factorización en el anillo de polinomios $A[X]$ presenta dos problemas prácticos relacionados entre sí.

1. Dado un polinomio $f \in A[X]$ determinar si es reducible o irreducible.
2. Si f es reducible, factorizarlo en irreducibles.

Para el primer caso muchas veces basta tener criterios suficientes (es decir, que si un polinomio satisface el criterio, es irreducible. Si no lo satisface no podemos decir nada). Evidentemente, una solución general del segundo punto incluiría criterios necesarios y suficientes para que un polinomio dado sea irreducible.

Empezamos determinando los factores de grado uno:

Proposición 4.1. *Sean $f = a_n X^n + \cdots + a_0, g = b_m X + b_0 \in A[X]$ con $a_n, b_m \neq 0$. Si g divide a f, necesariamente b_m divide a a_n y b_0 divide a a_0.*

Demostración. Sea $h = c_k X^k + \cdots + c_0 \in A[X]$ tales que $f = gh$. Entonces el coeficiente líder del producto es $a_n = b_m c_k$ y el término independiente es $a_0 = b_0 c_0$. □

Corolario 4.2 (Regla de Ruffini). *Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0$ y sea $a/b \in K$ tal que $\text{m. c. d.}(a, b) = 1$ y $f(a/b) = 0$. Entonces a divide a a_0 y b divide a a_n.*

La regla de Ruffini la describió ya Newton en su libro *Arithmetica Universalis* (publicado en 1707, cincuenta y ocho años antes del nacimiento de Ruffini), para determinar las raíces racionales y enteras de polinomios con coeficientes enteros. El corolario anterior permite usarla para hallar las raíces de polinomios con coeficientes en cualquier dominio de fatorización única.

Ejemplo 4.3. Sea $f = X^4 + 4 \in \mathbb{Z}[X]$. Cualquier raíz racional suya debe ser de la forma a/b con $b \mid 1$ y $a \mid 4$. Luego las posibles raíces racionales de f son $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Un cálculo rápido muestra que ninguno de estos números es raíz de f, luego el polinomio f no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 4.4. Sea ahora $f = X^4 + 4 \in \mathbb{J}[X]$. Los divisores de 4 son ahora $1, 1+i, 2, 2+2i, 4$ y sus asociados (todos los productos por las unidades $\pm 1, \pm i$). Un nuevo cálculo muestra que $f(1+i) = f(1-i) = f(-1+i) = f(-1-i) = 0$, luego f tiene cuatro raíces en $\mathbb{J}$ y factoriza como

$$X^4 + 4 = (X - (i+i))(X - (i-i))(X - (-i+i))(X - (-i-i)).$$

Un criterio de aplicación muy rápida es debido a un discípulo de Gauss.

Teorema 4.5 (Criterio de Eisenstein). *Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polinomio primitivo y sea $p \in A$ un primo tal que $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ para $i = n-1, \ldots, a_0$ y $p^2 \nmid a_0$. Entonces f es irreducible en $A[X]$.*

Demostración. Supongamos que f es reducible, $f = gh$ con $g = b_m X^m + \cdots + b_0$ y $h = c_r X^r + \cdots + c_0$ con $m, r \geq 1$ y $n = m + r$. Como p no divide a $a_n = b_m c_r$, necesariamente $p \nmid b_m$ y $p \nmid c_r$. Como p divide a $a_0 = b_0 c_0$, p debe dividir a uno de los factores, sea $p \mid b_0$. Entonces p no divide a c_0 porque $p^2 \nmid a_0 = b_0 c_0$. Sea i tal que $p \nmid b_i$ pero $p \mid b_j$ para todo $j < i$. El coeficiente en f del término de grado i es $a_i = b_i c_0 + (b_{i-1} c_1 + \cdots + b_0 c_i)$. Todos los términos del paréntesis son divisibles por p y $p \nmid b_i c_0$, luego $p \nmid a_i$. Pero $i \leq m < n$, luego por la hipótesis $p \mid a_i$, contradicción. □

Ejemplo 4.6. Sea $f = 2X^5 - 6X^3 + 9X^2 - 15 \in \mathbb{Z}[X]$. El polinomio f es primitivo porque m. c. d.$(2, -6, 9, -15) = 1$. El primo 3 divide a todos los coeficientes menos al líder, y $3^2 = 9$ no divide al término independiente, luego f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

Ejemplo 4.7. Sea $f = Y^3 + X^2 Y^2 + XY + X \in K[X, Y]$ con K un cuerpo arbitrario. Como $K[X, Y] = A[Y]$ con $A = K[X]$ dominio euclídeo, aplicando el criterio de Eisenstein con el primo $X \in A[X]$ vemos que f es irreducible en $K[X, Y]$.

A veces el polinomio dado no satisface las condiciones del criterio de Eisenstein pero un transformado sencillo sí las satisface. Del siguiente lema podemos deducir entonces la irreducibilidad del polinomio original.

Lema 4.8. *Sea A un dominio de integridad y sea $f \in A[X]$. Sea $a \in A$ arbitrario y sea $f_a(X) = f(X + a)$. Entonces f descompone como $f = gh$ con $gr(g), gr(h) > 0$ si y sólo si $f_a = g_a h_a$. En este caso $gr(g_a) = gr(g) > 0$ y $gr(h_a) = gr(h) > 0$.*

Demostración. Cálculo trivial. □

Corolario 4.9. *Sea A un dominio de factorización única y sea $f \in A[X]$ primitivo. Sea $a \in A$ arbitrario tal que f_a sea primitivo. Entonces f es irreducible si y sólo si f_a es irreducible.*

Ejemplo 4.10. Sea $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. No podemos aplicar directamente el criterio de Eisenstein a f. Pero

$$f_1 = f(X + 1) = (X + 1)^4 + 1 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2$$

satisface las condiciones del criterio de Eisenstein con $p = 2$. Luego f_1 es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ y por tanto también lo es f.

Ejemplo 4.11. (Este ejemplo se remonta a Gauss). Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. El polinomio

$$\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$$

se llama *p-ésimo polinomio ciclotómico*. Vamos a comprobar que Φ_p es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ (y por tanto en $\mathbb{Q}[X]$): Calculamos el desarrollo de $f = \Phi_p(X+1)$:

$$f = \frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1} = \frac{(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} X^i) - 1}{X} = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} X^{i-1}.$$

Ahora p no divide al coeficiente líder $\binom{p}{p} = 1$, p divide a $\binom{p}{i}$ para $i = p-1, \ldots 1$ y p^2 no divide al término independiente $\binom{p}{1} = p$. Luego f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ y por tanto también lo es Φ_p.

A veces se utiliza otra transformación del polinomio.

Definición 4.12. Sea $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} \cdots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ un polinomio con $a_n, a_0 \neq 0$. Se llama *polinomio recíproco de* f al polinomio

$$f_{rec} = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n = X^n f\left(\frac{1}{X}\right).$$

Lema 4.13. *Sea $f \in A[X]$ primitivo. Entonces f es irreducible en $A[X]$ si y sólo si f_{rec} es irreducible.*

Demostración. Los coeficientes de f_{rec} son los mismos que los de f, luego f_{rec} es primitivo. Sea ahora $f = gh$ con $m = gr(g), r = gr(h)$ y $n = gr(f) = m + r$. Entonces

$$f_{rec} = X^n f\left(\frac{1}{X}\right) = X^m X^r g\left(\frac{1}{X}\right) h\left(\frac{1}{X}\right) = g_{rec} h_{rec}.$$

□

Ejemplo 4.14. Sea $f = 6X^4 + 9X^3 - 3X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. El primo $p = 3$ divide a todos los coeficientes menos al término independiente y $3^2 = 9$ no divide al coeficiente líder, luego f es irreducible.

Cuando se puede aplicar, el criterio de Eisenstein es una prueba muy rápida de irreducibilidad. Pero son muy pocos los polinomios a los que es aplicable. Existe otro criterio que se puede aplicar a mas polinomios y aunque falle, los resultados que se obtienen en su aplicación son útiles para intentar posteriormente la factorización del polinomio.

Todo homomorfismo de anillos $\sigma : A \to B$ define un homomorfismo $A[X] \to B[X]$ que también se denota por σ de la siguiente forma: Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0$. Entonces $\sigma(f) = \sigma(a_n) X^n + \cdots + \sigma(a_0)$.

Proposición 4.15. *Sean A, B dos dominios de integridad con cuerpos de fracciones respectivos K y L. Sea $\sigma : A \to B$ un homomorfismo de anillos y sea $f \in A[X]$ un polinomio tal que $gr(\sigma(f)) = gr(f)$. Si $f = gh$, entonces $\sigma(f) = \sigma(g)\sigma(h)$ con $gr(\sigma(g)) = gr(g)$ y $gr(\sigma(h)) = gr(h)$.*

Corolario 4.16 (Criterio de reducción). *Si $\sigma(f)$ es irreducible en $L[X]$, entonces f es irreducible en $K[X]$.*

Usualmente este criterio se aplica con $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $B = L = \mathbb{Z}_p$ y $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ la proyección canónica que lleva cada entero n en su clase módulo p, o sea $\sigma(n) = \bar{n} = [n]_p$. En este caso se suele denotar $\sigma(f) = \bar{f}$.

Ejemplo 4.17. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. El polinomio $X^p - X - 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible, luego $f = X^p - X - 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

De la misma forma el polinomio $f = X^5 - 5X^4 - 6X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ (porque módulo 5, $\sigma(f) = X^5 - X - 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$).

El inverso del criterio de irreducibilidad es falso.

Ejemplo 4.18. El polinomio $f = X^3 - 3 \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible por el criterio de Eisenstein, pero módulo 2 $\sigma(f) = (X + 1)(X^2 + X + 1)$, luego puede ocurrir perfectamente que f sea irreducible y $\sigma(f)$ no lo sea.

La proposición 4.15 puede usarse combinando la información sobre los factores de f que se obtiene utilizando diversos primos.

Ejemplo 4.19. Sea $f = X^5 - 6X^4 + 5X^2 - X + 2$. Módulo 2 tenemos $\bar{f} = X^5 + X^2 + X = X(X^4 + X + 1)$ con ambos factores irreducibles. Si f es reducible, debe factorizar como producto de un polinomio de grado 1 por otro de grado 4.

Reduciendo módulo 3 queda $\bar{f} = X^5 - X^2 - X - 1 = (X^2 + 1)(X^3 - X - 1)$ con ambos factores irreducibles, así que si f fuese reducible debería factorizar como producto de un polinomio de grado 2 por otro de grado 3. Luego las factorizaciones módulo 2 y tres son incompatibles y f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

Ejemplo 4.20. Sea $f = X^4 - 22X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Reduciendo módulo 2 obtenemos $\bar{f} = X^4 + 1 = (X + 1)^4$, lo que no nos da información interesante. Módulo 3 es $\bar{f} = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$, luego si f factoriza en $\mathbb{Z}[X]$, debe hacerlo como producto de dos polinomios de grado 2, $f = gh$. Además los términos constantes de g y h deben ser divisores de 1 y congruentes con 1 módulo 3, luego ambos valen 1.

Supongamos que $f = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1) = X^4 + (a + b)X^3 + (ab + 2)X^2 + (a + b)X + 1)$. Comparando coeficientes debe ser $a + b = 0$ y $ab + 2 = -22$, así que $b = -a$ y $a^2 = 24$. Esta última ecuación no tiene solución con a entero, luego la factorización es imposible y f es irreducible.

5. Factorización en un número finito de pasos

Si el polinomio dado f es reducible, el problema es determinar los factores de f en un número finito de pasos (y en un tiempo razonable). En el libro *Arithmetica Universalis* citado antes, Newton describe cómo hallar los factores cuadráticos de un polinomio con coeficentes enteros. Esta es la traslación de dicho método a dominios de factorización única.

Sea A un dominio de factorización única con un número finito de unidades y sea $f = gh \in A[X]$ con

$$f = a_n X^n + \cdots + a_0$$
$$g = b_2 X^2 + b_1 X + b_0$$

Entonces b_2 divide a a_n, b_0 divide a a_0 y $g(1) = b_2 + b_1 + b_0$ divide a $f(1) = a_n + \cdots + a_0$. Estas condiciones limitan a un número finito las posibilidades para b_2, b_0 y b_1. Para cada una de las ternas (b_2, b_1, b_0) posibles construimos el polinomio g y probamos a dividir f por g. Así se determinan todos los factores cuadráticos de f.

Para limitar aún más el conjunto de posibles divisores se utiliza la condición de que $g(-1) = b_2 - b_1 + b_0$ divide a la suma alternada $(-1)^n f(-1) = a_n - a_{n-1} + \cdots \pm 1$. Además podemos utilizar la información que hayamos obtenido reduciendo diversos primos.

Ejemplo 5.1. Sea $f = X^4 + 4 \in \mathbb{Z}[X]$. Usando la regla de Ruffini vemos que f no tiene raíces enteras. Sea $g = b_2X^2 + b_1X + b_0$ un factor de f Como f es mónico, podemos tomar $b_2 = 1$. Reduciendo módulo 2 tenemos $\bar{f} = X^4 = \bar{g}\bar{h}$, luego los términos constantes de g y del cociente h son pares. Como su producto es 4, necesariamente $b_0 = \pm 2$. Módulo 3 tenemos $\bar{f} = X^4 + 1 = (X^2 + X - 1)(X^2 - X - 1)$, luego $b_0 \equiv -1 \pmod 3$, lo que nos deja $b_0 = 2$.

Ahora $1 + b_1 + 2 = b_1 + 3$ divide a $f(1) = 5$, lo que se verifica sólo para $b_1 = -8, -4, -2, 2$ y $1 - b_1 + 2 = -b_1 + 3$ divide a $f(-1) = 5$, lo que reduce las posibilidades a $b_1 = -2, 2$. Así que los únicos divisores de grados dos posibles son $g_1 = X^2 + 2X + 2$ y $g_2 = X^2 - 2X + 2$. Un cálculo fácil muestra que $f = g_1 g_2$.

El anterior método de Newton fué extendido en 1793 por Friedrich von Schubert, quien mostró cómo hallar todos los factores de grado m en un número finito de pasos. Unos 90 años después Leopoldo Kronecker descubrió independientemente el método de Schubert. Desgraciadamente el método es muy ineficiente cuando $gr(f) \geq 5$ y es mejor utilizar métodos de reducción (descritos en [**?**] y [**?**]) . El método de Kronecker se describe en la siguiente demostración.

Teorema 5.2 (Kronecker)**.** *Sea A un dominio de factorización única con un número finito de unidades. Entonces es posible descomponer cualquier polinomio $f \in A[X]$ en factores irreducibles en un número finito de pasos.*

Demostración. Dado un polinomio $f \in A[X]$, el método consiste en determinar para cada $m < n/2$ un conjunto finito $\mathcal{S}$ de polinomios entre los que están todos los divisores de f de grado menor o igual a m. Posteriormente se prueba a dividir f por cada uno de los polinomios del conjunto $\mathcal{S}$ y así determinamos los divisores de grado menor o igual a m.

Si $f = gh$, para todo $a \in A$ se verifica que $f(a) = g(a)h(a)$, luego $g(a)$ divide a $f(a)$. Sean $a_0, \ldots, a_m \in A$ elementos distintos. Para cada $i = 0, \ldots, m$ sea D_i el conjunto de divisores de $f(a_i)$. Para cada sucesión $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_m) \in D_0 \times \cdots \times D_m$ sea $g_{\mathbf{b}}$ el único polinomio de grado menor o igual a m que verifica $g_{\mathbf{b}}(a_i) = b_i$, $i = 0, \ldots m$ (El polinomio $g_{\mathbf{b}}$ es el *polinomio de interpolación*, que se obtiene por uno de los métodos de Newton o de Lagrange). El conjunto $\mathcal{S} = \{g_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in D_0 \times \cdots \times D_m\}$ es finito y contiene a todos los divisores de f de grado menor o igual a m. □

En la práctica se achica bastante el conjunto $\mathcal{S}$ utilizando la información que hayamos obtenido por reducción módulo diversos primos, igual que hicimos antes en el ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.3. Sea $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Queremos encontrar los factores de grado menor o igual a tres, así que evaluamos f en cuatro (=3+1) puntos distintos. Elegimos los puntos $-2, -1, 0, 1$. Evaluamos: $f(-2) = 77$, $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$,

$f(1) = -1$. El conjunto $D_0 \times \cdots \times D_3 = \{\pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 77\} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$,así que en total hay que calcular $8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ polinomios. Usando los interpoladores de Lagrange, estos polinomios son

$$\begin{aligned} f_b &= b_0 \frac{(X+1)X(X-1)}{(-2+1)(-2)(-2-1)} + b_1 \frac{(X+2)X(X-1)}{(-1+2)(-1)(-1-1)}, \\ &+ b_2 \frac{(X+2)(X+1)(X-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)} + b_3 \frac{(X+2)(X+1)X}{(1+2)(1+1)(1)}, \\ &= b_0 \frac{X^3 - X}{-6} + b_1 \frac{X^3 + X^2 - 2X}{2} + b_2 \frac{X^3 + 2X^2 - X - 2}{-2} + b_3 \frac{X^3 + 3X^2 + 2X}{6}. \end{aligned}$$

Calculamos los 64 polinomios. La mitad de ellos no tiene coeficientes enteros y los restantes se agrupan de dos en dos salvo el signo. Eligiendo uno de cada par de opuestos, nos quedan dieciséis polinomios:

b_0	b_1	b_2	b_3	g_b,
1	1	1	1	1,
7	1	1	1	$-X^3 + X + 1$,
−11	1	1	1	$2X^3 - 2X + 1$,
−77	1	1	1	$13X^3 - 13X + 1$,
1	−1	1	1	$-X^3 - X^2 + 2X + 1$,
7	−1	1	1	$-2X^3 - X^2 + 3X + 1$,
−11	−1	1	1	$X^3 - X^2 + 1$,
−77	−1	1	1	$12X^3 - X^2 - 11X + 1$,
1	1	−1	1	$X^3 + 2X^2 - X - 1$,
7	1	−1	1	$2X^2 - 1$,
−11	1	−1	1	$3X^3 + 2X^2 - 3X - 1$,
−77	1	−1	1	$14X^3 + 2X^2 - 14X - 1$,
1	−1	−1	1	$X^2 + X - 1$,
7	−1	−1	1	$-X^3 + X^2 + 2X - 1$,
−11	−1	−1	1	$2X^3 + X^2 - X - 1$,
−77	−1	−1	1	$13X^3 + X^2 - 12X - 1$.

El polinomio f dado es mónico, así que buscamos factores mónicos. Repasando la lista anterior nos queda que sus posibles divisores mónicos de grado menor o igual que tres son

$$
\begin{aligned}
&1,\\
&X^3 - X - 1,\\
&X^3 + X^2 - 2X + 1,\\
&X^3 - X^2 + 1,\\
&X^3 + 2X^2 - X - 1,\\
&X^2 + X - 1,\\
&X^3 - X^2 - 2X + 1.
\end{aligned}
$$

El 1 es trivial. Probando a dividir sucesivamente por cada uno de los otros obtenemos la factorización

$$f = (X^3 - X - 1)(X^3 - X^2 + 1),$$

y los dos factores son irreducibles (son de grado 3 y no tienen raíces enteras).

6. Polinomios simétricos

Sea A un anillo conmutativo y sean $X_1, \dots, X_n$ indeterminadas. Sea S_n el grupo simétrico sobre $\{1, \dots, n\}$. Para toda permutación $\sigma \in S_n$ definimos

$$\sigma \cdot f(X_1, \dots, X_n) = f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

Por ejemplo, sea $f = X_1^2 X_2 - X_3$ y sean $\rho = (1\ 3)$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$. Entonces $\rho \cdot f = X_3^2 X_2 - X_1$ y $\sigma \cdot f = X_2^2 X_3 - X_1$.

Definición 6.1. Un polinomio $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ se llama *simétrico* si para toda permutación $\sigma \in S_n$ se verifica $\sigma \cdot f = f$.

Lema 6.2. *El conjunto de polinomios simétricos es un subanillo de $A[X_1, \dots, X_n]$ que contiene al anillo A.*

Sea Y otra indeterminada. Formamos el polinomio

$$
\begin{aligned}
F(Y, X_1, \dots, X_n) &= (Y - X_1) \dots (Y - X_n)\\
&= Y^n - s_1 Y^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n
\end{aligned}
$$

con coeficientes en $A[X_1, \dots, X_n]$. Los polinomios coeficientes $s_1 = X_1 + \dots + X_n, \dots, s_n = X_1 \dots X_n$ son polinomios simétricos, y se llaman *polinomios simétricos elementales*. Obsérvese que el polinomio s_i es homogéneo de grado i.

Definición 6.3. Sea $a_e X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ un monomio no nulo. Se llama *peso* del monomio al entero $e_1 + 2e_2 + \cdots + ne_n$.

Sea $g \in A[X_1, \dots, X_n]$. El *peso de* g es el mayor de los pesos de los monomios no nulos de g.

Teorema 6.4 (Teorema fundamental de los polinomios simétricos). *Sea A un dominio de integridad y sea $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio simétrico de grado d. Entonces existe un único polinomio $g \in A[X_1, \dots, X_n]$ de peso menor o igual a d tal que*

$$f(X_1, \dots, X_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

Demostración. Inducción sobre n y d.

Si $n = 1$, sólo hay una indeterminada, así que $s_1 = X_1$ y $g = f$ verifica las condiciones (el peso de f es igual al grado).

Sea ahora $n > 1$ y supongamos el teorema cierto para $n - 1$ indeterminadas. Si $d = 0$, el polinomio f es constante. Tomando $g = f$ se verifica el teorema (en este caso, el grado y el peso de f son ambos iguales a cero).

Finalmente sean $n > 1$, $d > 0$ y suponemos el teorema cierto para todo polinomio simétrico en n indeterminadas de grado menor que d. En el anterior polinomio F sustituimos $X_n = 0$. Obtenemos

$$\begin{aligned} F(Y, X_1, \dots, X_{n-1}, 0) &= (Y - X_1) \dots (Y - X_{n-1})Y \\ &= Y^n - (s_1)_0 Y^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}(s_{n-1})_0 Y, \end{aligned}$$

donde $(s_i)_0$ se obtiene sustituyendo $X_n = 0$ en s_i.

Es inmediato que $(s_1)_0, \dots, (s_{n-1})_0$ son precisamente los polinomios simétricos elementales en $X_1, \dots, X_{n-1}$.

El polinomio $f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ es simétrico. Por la hipótesis de inducción sobre n, existe un polinomio $g_1 \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ de peso menor o igual a d tal que $f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = g_1((s_1)_0, \dots, (s_{n-1})_0)$. El polinomio

$$f_1(X_1, \dots, X_n) = f(X_1, \dots, X_n) - g_1(s_1, \dots, s_{n-1})$$

es simétrico y tiene grado menor o igual a d. Además $f_1(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$, luego f_1 es divisible por X_n. Como es simétrico, también es divisible por $X_1, \dots, X_{n-1}$. Como estos factores son primos relativos, su producto divide a f_1. Luego $f_1 = s_n f_2(X_1, \dots, X_n)$ con un polinomio $f_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ que es simétrico y de grado estrictamente menor que d. Por la inducción sobre d, existe un $g_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ de peso menor o igual a $d - n$ tal que

$$f_2(X_1, \dots, X_n) = g_2(s_1, \dots, s_n).$$

Sustituyendo obtenemos

$$f(X_1, \dots, X_n) = g_1(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n g_2(s_1, \dots, s_n),$$

y cada término del miembro de la derecha tiene un peso menor o igual a d.

La unicidad se deduce del próximo teorema. □

Teorema 6.5. *Sea $g \in A[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces $g(s_1, \ldots, s_n) = 0$ si y sólo si $g(X_1, \ldots, X_n) = 0$.*

Demostración. Inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado es trivial.

Sea ahora $n > 1$ y suponemos el resultado cierto para $n-1$ indeterminadas. Sea $g \in A[X_1, \ldots, X_n]$ no nulo de grado mínimo tal que $g(s_1, \ldots, s_n) = 0$. Escribimos g como un polinomio en X_n con coeficientes en $X_1, \ldots, X_{n-1}$:

$$g = g_0 + \cdots + g_d \cdot X_n^d.$$

Sustituyendo X_i por s_i en el polinomio g tenemos

$$0 = g_0(s_1, \ldots, s_{n-1}) + \ldots g_d(s_1 \ldots, s_{n-1}) s_n^d$$

Sustituyendo ahora $X_n = 0$ obtenemos

$$0 = g_0((s_1)_0, \ldots, (s_{n-1})_0).$$

Pero los $(s_i)_0$ son los polinomios simétricos elementales en $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Por inducción $g_0(X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$.

Ya que $g_0 = 0$ podemos escribir $g = f \cdot X_n$ con $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ y por tanto $f(s_1, \ldots, s_n)s_n = 0$, luego $f(s_1, \ldots, s_n) = 0$ y f es de grado estrictamente menor que g, lo cual es imposible. □

Ejemplo 6.6. Sea $f = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) \in \mathbb{Z}[X_1, , X_2, X_3]$. Es fácil comprobar que f es un polinomio simétrico homogéneo de grado 3. Queremos encontrar un polinomio $g \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ de peso menor o igual a 3 tal que $f = g(s_1, s_2, s_3)$. Para ello aplicamos la construcción de la demostración:

1. $f(X_1, 0, 0) = 0$, luego $g_1 = 0$.
2. $f(X_1, X_2, 0) = (X_1 + X_2)X_1X_2$. El resto del proceso de la demostración es trivial: $f(X_1, X_2, 0) = g((s_1)_0, (s_2)_0) = (s_1)_0(s_2)_0$.
3. La demostración construye ahora el polinomio

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, X_3) &= f(X_1, X_2, X_3) - g(s_1, s_2) \\ &= (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) \\ &- (X_1 + X_2 + X_3)(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3) \\ &= (X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^3 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + 2X_1X_2X_3) \\ &- (X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + 3X_1X_2X_3) \\ &= -X_1X_2X_3, \end{aligned}$$

luego $f(X_1, X_2, X_3) = f_1(X_1, X_2, X_3) + X_1X_2X_3 = s_1s_2 - s_3$.

Para escribir los polinomios simétricos se ha desarrollado una notación especial. Llamamos $\sum X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ a la suma de todos los monomios distintos que se obtienen al aplicar todas las permutaciones de S_n al monomio $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$. Por ejemplo si $n = 3$,

$$\sum X_1^3 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$$

$$\sum X_1^2 X_2 = X_1^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_2^2 X_1 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_2 + X_3^2 X_1$$

. Un polinomio simétrico general es una combinación lineal de términos de la forma $\sum X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ con coeficientes en A.

Ejemplo 6.7. Sea $f = \sum X_1^2 X_2$ con $n = 3$. Calculamos $f(X_1, X_2, 0) = X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 = X_1 X_2 (X_1 + X_2) = (s_2)_0 (s_1)_0$.
Ahora $f_1 = f - s_2 s_1 = \sum X_1^2 X_2 - (\sum X_1 X_2)(\sum X_1) = -3 X_1 X_2 X_3$. Luego $\sum X_1^2 X_3 = s_1 s_2 - 3 s_3$.

Ejemplo 6.8. Seguimos tomando $n = 3$. Sea $f = \sum X_1^3$.
Entonces $f(X_1, 0, 0) = X_1^3 = (s_1)_{00}^3$.
El siguiente paso calcula $f(X_1, X_2, 0) - (s_1)_0^3 = -3(s_1)_0 (s_2)_0$.
Luego $f(X_1, X_2, 0) = (s_1)_0^3 - 3(s_1)_0 (s_2)_0$.
Finalmente calculamos $f_1(X_1, X_2, X_3) = f - (s_1^3 - 3 s_1 s_2) = 3 X_1 X_2 X_3$, así que $f = s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 3 s_3$.

Ejemplo 6.9. Sea $\Delta = \prod_{i<j} (X_i - X_j)$. El polinomio $d = \Delta^2$ es simétrico. Vamos a expresarlo en función de los polinomios simétricos elementales para $n = 3$.

1. En primer lugar $d(X_1, 0, 0) = ((X_1 - 0)((X_1 - 0)(0 - 0))^2 = 0$.

2. Ahora $d(X_1, X_2, 0) = ((X_1 - X_2) X_1 X_2)^2$. Luego $d(X_1, X_2) = s_2^2 \cdot f_1$ con $f_1(X_1, X_2) = (X_1 - X_2)^2$.
   $f_1(X_1, 0) = X_1^2$. Entonces
   $$f_1(X_1, X_2) - (s_1)_0^2 = (X_1 - X_2)^2 - (X_1 + X_2)^2 = -4 X_1 X_2$$
   y por tanto $f_1 = (s_1)_0^2 - 4(s_2)_0$.

3. Finalmente tenemos
   $$\begin{aligned} g_1(X_1, X_2, X_3) &= d(X_1, X_2, X_3) - s_2^2 (s_1^2 - 4 s_2) \\ &= s_3 \cdot f_2 \end{aligned}$$
   con $f_2 = 6 \sum X_1^2 X_2 - 4 \sum X_1^3 + 3 X_1 X_2 X_3$. Por los dos ejemplos anteriores,
   $$\begin{aligned} d &= s_1^2 s_2^2 - 4 s_2^3 + s_3 (6(s_1 s_2 - 3 s_3) - 4(s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 3 s_3) + 3 s_3) \\ &= s_1^2 s_2^2 - 4 s_2^3 - 4 s_1^3 s_3 + 18 s_1 s_2 s_3 - 27 s_3^2. \end{aligned}$$

Existen otros tres métodos para expresar un polinomio simétrico en función de los simétricos elementales. Quizá el más útil sea el *método de coeficientes indeterminados*. Descomponemos el polinomio simétrico dado en suma de polinomios simétricos homogéneos y expresamos cada uno de estos en función de los polinomios simétricos elementales. Para ello, expresamos cada uno de los polinomios homogéneos de grado d como suma con coeficientes indeterminados de todos los k monomios posibles en los s_i de peso d. Sustituimos las indeterminadas X_i por k conjuntos de valores concretos, lo que nos establece un sistema lineal de k ecuaciones en los coeficientes, sistema que resolvemos por los métodos de álgebra lineal.

Ejemplo 6.10. Sea $f = (X_1 + X_2 - X_3 - X_4)(X_1 - X_2 + X_3 - X_4)(X_1 - X_2 - X_3 + X_4)$. Es fácil comprobar que f es simétrico homogéneo de grado 3. La lista de todos los monomios posibles de peso 3 es la siguiente: s_1^3, s_1s_2, s_3. Así que expresamos

$$f = as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3.$$

Ahora consideramos tres conjuntos de valores para los X_i de manera que nos quede un sistema determinado de tres ecuaciones lineales en a, b, c. Por ejemplo los valores

X_1	X_2	X_3	X_4	s_1	s_2	s_3
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	2	1	0
1	1	1	0	3	3	1

nos dan el sistema

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= 1 = a, \\ f(1,1,0,0) &= 0 = 8a + 2b, \\ f(1,1,1,0) &= -1 = 27a + 9b + c, \end{aligned}$$

que tiene la solución $a = 1$, $b = -4$, $c = 8$. Luego

$$f = s_1^3 - 4s_1s_2 + 8s_3.$$

Otro tipo de polinomios interesantes son los definidos a continuación.

Definición 6.11. Un polinomio $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ se llama *alternado* si para toda permutación $\sigma \in s_n$ se verifica $\sigma \cdot f = sgn(\sigma)f$.

El polinomio alternado no nulo más sencillo es el producto de todas las diferencias

$$\Delta = \prod_{i<j}(X_i - X_j).$$

Cada par ordenado de índices $i < j$ aparece exactamente una vez, así que en total hay $n(n-1)/2$ factores lineales y Δ es un polinomio homogéneo de grado $n(n-1)/2$. Cuando aplicamos una trasposición $(i\ j)$ a Δ, los factores se permutan entre sí, excepto el factor $X_i - X_j$ que se transforma en $X_j - X_i$, luego Δ cambia de signo.

Teorema 6.12. *Sea A un dominio de integridad de característica distinta de 2. Todo polinomio f alternado de $A[X_1, \ldots, X_n]$ es de la forma $f = \Delta g$, donde g es simétrico.*

Demostración. Sustituyendo $X_2 = X_1$ obtenemos

$$f(X_1, X_1, \ldots, X_n) = -f(X_1, X_1, \ldots, X_n)$$

y como $car(A) \neq 2$, necesariamente $f(X_1, X_1, \ldots, X_n) = 0$, luego $(X_1 - X_2)$ divide a f. De la misma forma $X_i - X_j$ divide a f para todo par $i < j$. Como estos polinomios son primos relativos, su producto divide a f así que existe un $g \in A[X_1, \ldots, X_n]$ con $f = \Delta g$. Claramente $g = f/\Delta$ es un polinomio simétrico. □

Corolario 6.13. *Sea $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio alternado. Entonces $gr(f) \geq n(n-1)/2$.*

7. La resultante

7.1. Introducción

El problema fundamental de la teoría de eliminación es el siguiente: Dados dos polinomios con coeficientes en un cuerpo F:

$$\begin{aligned} f &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad a_n \neq 0, \\ g &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0, \qquad b_m \neq 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

determinar si tienen una raíz común en una extensión de F y en caso afirmativo hallarla. Para responder a esta cuestión, se busca una expresión que se anule sólo cuando f y g tienen una raíz común y que además sea calculable como función racional de los coeficientes de f y g. La más sencilla de tales expresiones es la resultante que vamos a definir y estudiar.

7.2. Definición

Sea K un cuerpo de descomposición para fg, así que en $K[X]$ tenemos:

$$\begin{aligned} f &= a_n(X - \alpha_1)\ldots(X - \alpha_n) = a_n \textstyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \\ g &= b_m(X - \beta_1)\ldots(X - \beta_m) = b_m \textstyle\prod_{j=1}^{m}(X - \beta_j). \end{aligned} \tag{7.2}$$

La *resultante de f y g* viene definida por

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j). \tag{7.3}$$

7.3. Propiedades

1. $R(f,g) = 0 \Leftrightarrow \exists i, j$ tales que $\alpha_i = \beta_j$ (i.e., sii f y g tienen una raíz en común).
2. $R(g,f) = (-1)^{nm} R(f,g)$.
3. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j)$.
4. $R(fg,h) = R(f,h)R(g,h)$, $R(f,gh) = R(f,g)R(f,h)$.
5. Si m = 0 (i.e. si $g = b$ es un escalar), $R(f,b) = b^n$.
6. $R(X^k, f) = a_0^k$; $R(f, X^k) = (-1)^{nk} a_0^k$.
7. Si $g = fq + r$, $R(f,g) = a_n^{gr(g)-gr(r)} R(f,r)$.
   Demostración: $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = a_n^m \prod_{i=1}^n (f(\alpha_i)q(\alpha_i) + r(\alpha_i)) = a_n^n \prod_{i=1}^n r(\alpha_i) = a_n^{m-gr(r)} R(f,r)$.
8. $R(X^k f, g) = b_0^k R(f,g)$; $R(f, X^k g) = (-1)^{nk} a_0^k R(f,g)$.
9. $R(f,g)$ es un polinomio simétrico de grado m en las α_i.
10. $R(f,g)$ es un polinomio simétrico de grado n en las β_j.
11. $R(f,g)$ es un polinomio homogéneo de grado m en las a_i.
    Demostración: Por la propiedad 9, $R(f,g)$ es expresable como un polinomio en los polinomios simétricos elementales $\sigma_i = (-1)^i \frac{a_i}{a_0}$. Por el factor a_0^m todos los denominadores se simplifican.
12. $R(f,g)$ es un polinomio homogéneo de grado n en las b_j.
13. El término $a_n^m b_0^n$ tiene coeficiente +1 en $R(f,g)$.
    Demostración: Dicho término sólo aparece al desarrollar $a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n (-\beta_n) = a_n^m b_0^n$.

8. El discriminante

El caso particular más importante de la resultante es cuando $g = f'$ (la derivada formal). En ese caso, $R(f, f') = 0 \Leftrightarrow f$ tiene raíces múltiples. Explícitamente, sean

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i),$$

$$f' = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \ldots + a_1 = a_n \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} (X - \alpha_i)$$

$$f'(\alpha_j) = a_n \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i),$$

$$R(f, f') = a_n^{n-1} \prod_{j=1}^{n} f'(\alpha_j) = a_n^{2n-1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i). \tag{8.1}$$

8.1. Definición

Llamamos *discriminante de* f a $D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$. Comparando con (8.1) obtenemos:

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(f). \tag{8.2}$$

8.2. Propiedades

1. $f_1, f_2 \in F[X] \Rightarrow D(f_1 f_2) = D(f_1) D(f_2) R(f_1, f_2)^2$.
2. $f_1, \ldots, f_r \in F[X] \Rightarrow D(f_1 \ldots f_r) = D(f_1) \ldots D(f_r) R^2$ con $R \in F$.

9. Métodos de cálculo

En esta sección nos planteamos encontrar una expresión explícita (o un método de cálculo) para $R(f, g)$ y $D(f)$ en función de los coeficientes de f y g. Para ello existen diversos métodos que pasamos a describir.

9.1. Cálculo directo

Las propiedades halladas para la resultante permiten calcular directamente el discriminante de polinomios particulares. Veamos algunos ejemplos:

1. Ejemplo: $f = X^n - 1 = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$, $f' = nX^{n-1}$.

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} n\alpha_i^{n-1} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n (\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i))^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)} n^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n.$$

   En particular si q es impar, $f = X^q - 1$, $D(f) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q^q$.

2. Ejemplo: $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ p primo impar. Sea $g = X - 1$. Entonces $fg = X^p - 1 \Rightarrow D(fg) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^p$,
   $g' = 1 \Rightarrow D(g) = R(g, g') = 1$ $R(f, g) = f(1) = p$.
   Luego $D(fg) = D(f)D(g)R(f, g)^2 \Rightarrow D(f) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$.

3. Ejemplo:

$$f = X^3 + aX + b = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3),$$
$$f' = 3X^2 + a, \qquad D(f) = -R(f, f'),$$
$$R(f, f') = \prod_{i=1}^{3}(3\alpha_i^2 + a) = \prod_{i=1}^{3} f'(\alpha_i).$$

   Pero $f'(\alpha_i) = 3\alpha_i^2 + a = \frac{3\alpha_i^3 + a\alpha_i}{\alpha_i} = \frac{-2a\alpha_i - 3b}{\alpha_i}$.
   Llamamos $\beta_i = 2a\alpha_i + 3b \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - 3b}{2a}$, así que β_i es raíz de $(\frac{X-3b}{2a})^3 + a\frac{X-3b}{2a} + b \Rightarrow \beta_1\beta_2\beta_3 = 8a^3(\frac{27b^3}{8a^3} + \frac{3b}{2} - b) = 27b^3 + 4a^3b$.

$$R(f, f') = \prod_{i=1}^{3} f'(\alpha_i) = -\frac{\prod_{i=1}^{3}(2a\alpha_i + 3b)}{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i} = -\frac{27b^3 + 4a^3b}{-b} = 27b^2 + 4a^3.$$

   y por tanto $D(f) = -(4a^3 + 27b^2)$.

4. Ejemplo:

$$f = X^3 + aX^2 + b = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3),$$
$$f' = 3X^2 + 2aX = X(3X+2a), \quad f'(\alpha_i) = \alpha_i(3\alpha_i + 2a).$$

Sea $\beta_i = 3\alpha_i + 2a \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - 2a}{3}$ y los β_i son raíces de $(\frac{X-2a}{3})^3 + a(\frac{X-2a}{3})^2 + b \Rightarrow \beta_1\beta_2\beta_3 = 3^3((\frac{2a}{3})^3 - a(\frac{2a}{3})^2 - b) = -(4a^3 + 27b)$.
Luego $R(f,f') = \prod_{i=1}^3 f'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^3 \alpha_i \prod_{i=1}^3 \beta_i = (-b)(-(4a^3+27b))$,
y $D(f) = -R(f,f') = -b(4a^3+27b)$.

5. Ejemplo:

$$f = X^5 + aX + b = \prod_{i=1}^5 (X-\alpha_i), \qquad f' = 5X^4 + a,$$
$$f'(\alpha_i) = 5\alpha_i^4 + a = \frac{5\alpha_i^5 + a\alpha_i}{\alpha_i} = \frac{-4a\alpha_i - 5b}{\alpha_i}.$$

Llamamos $\beta_i = 4a\alpha_i + 5b \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - 5b}{4a}$, así que β_i es raíz de $(\frac{X-5b}{4a})^5 + a\frac{X-5b}{4a} + b \Rightarrow \prod_{i=1}^5 \beta_i = (4a)^5((\frac{5b}{4a})^5 + \frac{5b}{4} - b) = (5b)^5 + 4^4a^5b$.

$$D(f) = R(f,f') = \prod_{i=1}^5 f'(\alpha_i) = -\frac{\prod_{i=1}^5 \beta_i}{\prod_{i=1}^5 \alpha_i} = 5^5b^4 + 4^4a^5.$$

6. Ejemplo:

$$f = X^5 + aX^4 + b = \prod_{i=1}^5 (X-\alpha_i),$$
$$f' = 5X^4 + 4aX^3 = X^3(5X+4a), \quad f'(\alpha_i) = \alpha_i^3(5\alpha_i + 4a).$$

Sea $\beta_i = 5\alpha_i + 4a \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - 4a}{5}$ y los β_i son raíces de $(\frac{X-4a}{5})^5 + a(\frac{X-4a}{5})^4 + b \Rightarrow \prod_{i=1}^5 \beta_i = 5^5((\frac{4a}{5})^5 - a(\frac{4a}{5})^4 - b) = -(4^4a^5 + 5^5b)$.
Luego $D(f) = R(f,f') = \prod_{i=1}^5 f'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^5 \alpha_i^3 \prod_{i=1}^5 \beta_i = b^3(4^4a^5 + 5^5b)$.

7. Ejemplo:

$$f = X^n + aX + b = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i), \qquad f' = nX^{n-1} + a,$$
$$f'(\alpha_i) = n\alpha_i^{n-1} + a = \frac{n\alpha_i^n + a\alpha_i}{\alpha_i} = \frac{-(n-1)a\alpha_i - nb}{\alpha_i}.$$

Llamamos $\beta_i = (n-1)a\alpha_i + nb \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - nb}{(n-1)a}$ así que β_i es raíz de $(\frac{X-nb}{(n-1)a})^n + a\frac{X-nb}{(n-1)a} + b \Rightarrow \prod_{i=1}^n \beta_i = (-1)^n((n-1)a)^n(((-1)^n\frac{nb}{(n-1)a})^n - \frac{nb}{n-1} + b)$ $= (nb)^n + (-1)^n(n-1)^{n-1}a^n(-b)$.

$$R(f, f') = \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) = (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n \beta_i}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} = n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n.$$

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n).$$

8. Ejemplo:

$$f = X^n + aX^{n-1} + b = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i), \qquad f' = nX^{n-1} + (n-1)aX^{n-2} =$$
$$X^{n-2}(nX + (n-1)a), \qquad f'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-2}(n\alpha_i + (n-1)a).$$

Sea $\beta_i = n\alpha_i + (n-1)a \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_i - (n-1)a}{n}$ y los β_i son raíces de $(\frac{X-(n-1)a}{n})^n + a(\frac{X-(n-1)a}{n})^{n-1} + b \Rightarrow \prod_{i=1}^n \beta_i = (-1)^n(n^n((-\frac{(n-1)a}{n})^n + a(-\frac{(n-1)a}{n})^{n-1} - b)) = -(n-1)^{n-1}a^n + (-1)^n n^n b$.
Luego $R(f, f') = \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{n-2} \prod_{i=1}^n \beta_i = (-b)^{n-2}(-(n-1)^{n-1}a^n + (-n)^n b)$,
y $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f') = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} b^{n-2}((n-1)^{n-1}a^n + (-1)^{n-1}n^n b)$.

9.2. Método modular

A partir de la propiedad 7 de la resultante puede desarrollarse un método muy económico para el cálculo de la resultante de algunos pares especiales de polinomios: En primer lugar, sean

$$f = a_n X^n + \ldots + a_0 \qquad g = X - b.$$

Dividiendo f entre g obtenemos:

$$f = gf_1 + f(b).$$

Por las propiedades de la resultante obtenemos:

$$R(f,g) = (-1)^n R(g,f) = (-1)^n R(g, f(b)) = (-1)^n f(b). \tag{9.1}$$

Sean ahora

$$f = a_n X^n + \ldots + a_0 \qquad g = b_m X^m + \ldots + b_0,$$

y sean p, q_i, r, s_j tales que

$$pg \prod_{i=1}^{k} (X - q_i) \equiv r \prod_{j=1}^{l} (X - s_j) \pmod{f}. \tag{9.2}$$

Entonces

$$R(f,p)R(f,g)R(f, \prod_{i=1}^{k}(X - q_i)) = a_n^{m+k-l} R(f,r) R(f, \prod_{j=1}^{l}(X - s_j)). \tag{9.3}$$

Pero por (9.1)

$$R(f,p) = p^n, \qquad R(f,r) = r^n,$$
$$R(f, \prod_{i=1}^{k}(X - q_i)) = \prod_{i=1}^{k} R(f, X - q_i)) = \prod_{i=1}^{k} (-1)^n f(q_i)$$
$$R(f, \prod_{j=1}^{l}(X - s_i)) = \prod_{j=1}^{l} R(f, X - s_i)) = \prod_{j=1}^{l} (-1)^n f(s_i).$$

Despejando en (9.3),

$$R(f,g) = (-1)^{n(k+l)} a_n^{m+k-l} \frac{r^n}{p^n} \frac{\prod_{j=1}^{l} f(s_i)}{\prod_{i=1}^{k} f(q_i)}.$$

Ejemplo: Sean

$$f = X^5 - X^2 + 15 \qquad g = f' = 5X^4 - 2X.$$

Tomamos $k = 1$, $l = 2$, $p_1 = 1$, $p_0 = 0$ y calculamos:

$$Xg = 5X^5 - 2X^2 = 5f + 3X^2 - 75 \equiv 3(X-5)(X+5) \pmod{f}.$$

$$D(f) = R(f,f') = (-1)^{5(1+2)}\frac{3^5 f(5)f(-5)}{f(0)} =$$
$$-3^5\frac{(5^5-5^2+15)((-5)^5-(-5)^2+15)}{15} = -3^5\frac{10^2-5^{10}}{15} = 3^4 5(5^8-4).$$

9.3. Por el algoritmo de Euclides

Dividiendo g por f obtenemos $g = fq + r$ con $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(f)$. Por las propiedades 7 y 2,

$$R(f,g) = a_n^{m-gr(r)}R(f,r) = (-1)^{mgr(r)}a_n^{m-gr(r)}R(r,f).$$

Por inducción sobre el grado llegamos a $\mathrm{gr}(r) = 0$ y aplicamos la propiedad 5.

1. Ejemplo:
$$f = aX + b,$$
$$f' = a,$$
$$R(f,f') = a,$$
$$D(f) = 1.$$

2. Ejemplo:
$$f = aX^2 + bX + c,$$
$$f' = 2aX + b,$$
$$f = (\tfrac{1}{2}X + \tfrac{b}{4a})f' + (c - \tfrac{b^2}{4a}),$$
$$R(f,f') = R(f',f) = (2a)^2R(f', c - \tfrac{b^2}{4a}) = (2a)^2(c - \tfrac{b^2}{4a}) = a(4ac - b^2),$$
$$D(f) = (-1)^{\frac{2-1}{2}}\tfrac{1}{a}R(f,f') = b^2 - 4ac.$$

3. Ejemplo:
$$f = X^3 + aX + b,$$
$$f' = 3X^2 + a,$$
$$f = \tfrac{1}{2}Xf' + r \qquad r = \tfrac{2a}{3}X + b,$$
$$f' = (\tfrac{9}{2a}X - \tfrac{27b}{4a^2})r + r_1 \qquad r_1 = \tfrac{27b^2+4a^3}{4a^2},$$
$$R(f,f') = R(f',f) = 3^2R(f',r) = 3^2R(r,f') = 3^2(\tfrac{2a}{3})^2R(r,r_1) = 4a^2\tfrac{27b^2+4a^3}{4a^2},$$
$$D(f) = -R(f,f') = -(4a^3 + 27b^2).$$

9.4. Determinante de Euler-Sylvester-Cayley

Multiplicando f sucesivamente por $1, X, \ldots, X^{m-1}$ y g por $1, X, X^{n-1}$ e igualando a cero nos queda el siguiente sistema de $(n+m)$ ecuaciones en las $(n+m)$ incógnitas $1, X, X^2, \ldots, X^{n+m-1}$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
X^{m-1}f & = & a_nX^{n+m-1} & + & a_{n-1}X^{n+m-2} & + & \ldots & + & a_0X^{m-1} & & & & & = & 0\\
X^{m-2}f & = & & & a_nX^{n+m-2} & + & \ldots & + & a_1X^{m-1} & + & a_0X^{m-2} & & & = & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1f & = & & & & & & & a_nX^n & + & \ldots & + & a_0 & = & 0\\
X^{n-1}g & = & b_mX^{n+m-1} & + & b_{m-1}X^{n+m-2} & + & \ldots & + & b_0X^{n-1} & & & & & = & 0\\
X^{n-2}g & = & & & b_mX^{n+m-2} & + & \ldots & + & b_1X^{n-1} & + & b_0X^{n-2} & & & = & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1g & = & & & & & & & b_mX^m & + & \ldots & + & b_0 & = & 0
\end{array}$$

Por el teorema de Rouché, este sistema tendrá solución si y sólo si el determinante de los coeficientes es cero. Este determinante se llama *resultante de Euler-Sylvester-Cayley*:

$$C(f,g) = \begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0\\
b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0
\end{vmatrix}$$

Vamos a ver que $C(f,g) = R(f,g)$: Como $C(f,g) = C(a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0)$ y los a_i y b_j son polinomios simétricos en α_i y β_j respectivamente, obtenemos que $C(f,g)$ es un polinomio simétrico en α_i y β_j. Por otra parte, si f y g tienen una raíz común, el anterior sistema lineal tiene solución, luego $\forall i,j\ (\alpha_i - \beta_j) \mid C(f,g) \Rightarrow R(f,g) \mid C(f,g)$. Contando grados vemos que el cociente tiene grado cero (i.e. es una constante). Luego $C(f,g) = \lambda R(f,g)$. Pero el término $a_n^m b_m^n$ aparece con coeficiente +1 en $C(f,g)$ y en $R(f,g) \Rightarrow \lambda = 1$.

1. Ejemplo: Tomando $f = aX^2 + bX + c, g = f' = 2aX + b$ tenemos:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a & b & c\\ 2a & b & 0\\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = a(4ac - b^2).$$

2. Ejemplo: $f = X^3 + aX + b, g = 3X^2 + a$.

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2.$$

9.5. Determinante de Bézout

La resultante de Cayley proporciona una expresión sencilla y elegante para $R(f,g)$. Sin embargo, el orden del determinante es $(m+n)$, muy alto para los cálculos prácticos. Vamos a desarrollar otro método basado en la misma idea pero donde el determinante que va a aparecer es de orden $\max(m,n)$. En primer lugar consideramos $m = n$, o sea que f y g son del mismo grado. Definimos los elementos:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_j b_i - a_i b_j & \text{si } 0 \le i, j \le n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que $c_{ij} = -c_{ij}$ y que $c_{ii} = 0$.

Si todos los c_{ij} son cero, existe un λ tal que $g = \lambda f$. En lo que sigue excluimos este caso. Consideremos ahora los polinomios:

$$h_i = b_i f - a_i g \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{9.4}$$

Si $c_{ij} \neq 0$, del sistema:

$$\begin{aligned} h_i &= b_i f - a_i g, \\ h_j &= b_j f - a_j g. \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_j}{c_{ij}} h_i - \frac{a_i}{c_{ij}} h_j, \\ g &= \frac{b_j}{c_{ij}} h_i - \frac{b_i}{c_{ij}} h_j, \end{aligned}$$

luego h_i, h_j tienen un cero en común si y sólo si f y g tienen un cero en común, y las raíces comunes de f y g son precisamente las raíces comunes a todos los h_i.

Formemos ahora los polinomios:

$$\begin{array}{lll} g_0 = h_n & = b_n f - a_n g & = \sum_i^{n-1} d_{0i} X^i, \\ g_1 = xg_0 + h_{n-1} & = (b_n X + b_{n-1}) f - (a_n X + a_{n-1}) g & = \sum_i^{n-1} d_{1i} X^i, \\ g_2 = xg_1 + h_{n-2} & = (b_n X^2 + b_{n-1} X + b_{n-2}) f - (a_n X^2 + a_{n-1} X + a_{n-2}) g & = \sum_i^{n-1} d_{2i} X^i, \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1} = xg_{n-2} + h_1 & = (b_n X^{n-1} + \ldots + b_1) f - (a_n X^{n-1} + \ldots + a_1) g & = \sum_i^{n-1} d_{n-1i} X^i. \end{array} \tag{9.5}$$

Los g_i tienen un cero en común $\Leftrightarrow$ los h_i tienen un cero en común $\Leftrightarrow$ f y g tienen un cero en común. Veamos la forma general de los coeficientes d_{ki}. Por construcción,
$d_{0i} = c_{ni}$, $\quad d_{ki} = d_{k-1,i-1} + c_{n-k,i}$. Demostraremos por inducción sobre k que

$$d_{ki} = \sum_{j=0}^{k} c_{n-j,i-k+j}. \tag{9.6}$$

Para $k = 0$ es trivial. Supongámoslo cierto para $k-1$. Entonces

$$d_{ki} = d_{k-1,i-1} + c_{n-k,i} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{n-j,i+j-k} + c_{n-k,i}$$

Las raíces comunes de f y g dan lugar a soluciones no triviales del sistema:

$$\begin{array}{r} d_{0n-1} X^{n-1} + \ldots + d_{01} X + d_{00} 1 = 0, \\ d_{1n-1} X^{n-1} + \ldots + d_{11} X + d_{10} 1 = 0, \\ \vdots \\ d_{n-1,n-1} X^{n-1} + \ldots + d_{n-1,1} X + d_{n-1,0} 1 = 0. \end{array}$$

Llamamos *resultante de Bézout de f y g* al determinante de este sistema:

$$B(f,g) = \begin{vmatrix} d_{0n-1} & \ldots & d_{00} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n-1,n-1} & \ldots & d_{n-1,0} \end{vmatrix}$$

Como cada c_{ij} es homogéneo de grado 1 en a_i y en b_j, d_{ki} también es homogéneo de grado 1 en ambos, y $B(f,g)$ es un polinomio homogéneo en las a_i y en las b_j de grado $2n$. Igual que para la resultante de Cayley, $B(f,g)$ es cero cuando f y g tienen una raíz en común, luego $B(f,g) = \lambda R(f,g)$ y contando grados, $\lambda \in F$.

Para determinar λ observamos el término $a_n^n b_0^n$. En la resultante de Cayley este término sólo aparece en el desarrollo de la diagonal principal y por tanto tiene coeficiente +1. En $B(f,g)$ aparece en el producto de todos los $c_{0n} = a_n b_0 - a_0 b_n$ de la diagonal secundaria, luego tiene coeficiente $sgn(\sigma)$ siendo $\sigma = (1\ n)(2\ n-1)\ldots$ luego $sgn(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ y por tanto $\lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $B(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f,g)$.

En caso de que $gr(g) = m \leq gr(f) = n$, tomamos $g_1 = X^{n-m}g$, formamos la resultante de Bézout de f y g_1 y utilizamos la propiedad 8 de $R(f,g)$:

$$B(f, X^{n-m}g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, X^{n-m}g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n(n-m)} a_0^{n-m} R(f,g).$$

Para calcular el discriminante de un polinomio, $g = f'$, $m = n-1$ y nos queda:

$$B(f, Xf') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n} a_0 R(f,f') = (-1)^n a_0 a_n D(f),$$

así que

$$D(f) = \frac{(-1)^n}{a_n a_0} B(f, Xf').$$

Además, en este caso los c_{ij} tienen una forma sencilla. Sean

$$f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0,$$
$$g = Xf' = na_n X^n + \ldots + a_1 X = b_n X^n + \ldots + b_1,$$

luego $b_i = ia_i$, $c_{ij} = (j-i)a_i a_j$, y

$$d_{ki} = \sum_{j=0}^{k} c_{n-j,i+j-k} = \sum_{j=0}^{k} (i+2j-k-n) a_{n-j} a_{i+j-k} = -\sum_{j=0}^{k} (n-i+k-2j) a_{n-j} a_{i+j-k},$$

y nos queda la expresión:

$$D(f) = \frac{1}{a_n a_0} \begin{vmatrix} -d_{0,n-1} & \ldots & -d_{0,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n-1,n-1} & \ldots & -d_{n-1,0} \end{vmatrix}$$

1. Ejemplo: $f = aX^2 + bX + c$.
$$D(f) = \frac{1}{ac}\begin{vmatrix} ab & 2ac \\ 2ac & bc \end{vmatrix} = b^2 - 4ac.$$

2. Ejemplo: $f = X^3 + aX + b$.
$$D(f) = \frac{1}{b}\begin{vmatrix} 0 & 2a & 3b \\ 2a & 3b & 0 \\ 3b & 0 & ab \end{vmatrix} = -(4a^3 + 27b^2).$$

3. Ejemplo: $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.
$$D(f) = \frac{1}{a_3a_0}\begin{vmatrix} a_3a_2 & 2a_3a_1 & 3a_3a_0 \\ 2a_3a_1 & 3a_3a_0 + a_2a_1 & 2a_2a_0 \\ 3a_3a_0 & 2a_2a_0 & a_1a_0 \end{vmatrix}$$

4. Ejemplo: $f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.
$$D(f) = \frac{1}{a_4a_0}\begin{vmatrix} a_4a_3 & 2a_4a_2 & 3a_4a_1 & 4a_4a_0 \\ 2a_4a_2 & 3a_4a_2 + a_3a_2 & 4a_4a_0 + 2a_3a_1 & 3a_3a_0 \\ 3a_4a_1 & 4a_4a_0 + 2a_3a_1 & 3a_3a_0 + a_2a_1 & 2a_2a_0 \\ 4a_4a_0 & 3a_3a_0 & 2a_2a_0 & a_1a_0 \end{vmatrix}$$

5. Ejemplo: $f = a_5X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.
$$D(f) = \frac{1}{a_5a_0}\begin{vmatrix} a_5a_4 & 2a_5a_3 & 3a_5a_2 & 4a_5a_1 & 5a_5a_0 \\ 2a_5a_3 & 3a_5a_2 + a_4a_3 & 4a_5a_1 + 2a_4a_2 & 5a_5a_0 + 3a_4a_1 & 4a_4a_0 \\ 3a_5a_2 & 4a_5a_1 + 2a_4a_2 & 5a_5a_0 + 3a_4a_2 + a_3a_2 & 4a_4a_0 + 2a_3a_1 & 3a_3a_0 \\ 4a_5a_1 & 5a_5a_0 + 3a_4a_1 & 4a_4a_0 + 2a_3a_1 & 3a_3a_0 + a_2a_1 & 2a_2a_0 \\ 5a_5a_0 & 4a_4a_0 & 3a_3a_0 & 2a_2a_0 & a_1a_0 \end{vmatrix}$$

10. Ejercicios

Ejercicio 1. Encontrar un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que: $f(0) = 6$, $f(1) = 12$ y $f(x) \equiv (3x + 3)\ mod\ (x^2 + x + 1)$.

Ejercicio 2. Demostrar que el DFU $\mathbb{Z}[x]$ no es un DIP viendo que el ideal suyo generado por 2 y x no es principal.

Ejercicio 3. Encontrar los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 4. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$:

a) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$

b) $x^4 + 15x^3 + 7$

c) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$

ch) $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $x^4 - 22x^2 + 1$

e) $x^3 + 17x + 36$

f) $x^5 - x^2 + 1$

g) $x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

h) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

i) $x^4 - x^2 - 2x - 1$

j) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 11$

k) $x^5 - 10x^4 + 36x^3 - 53x^2 + 26x + 1$

l) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

ll) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$

m) $x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

n) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x + 1$

ñ) $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 2x - 1$

o) $2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4$

p) $3x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

q) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x - 1$

r) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$

s) $3x^5 + 42x^3 - 147x^2 + 21$

t) $x^5 + 3x^4 + 10x^2 - 2$

u) $x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

v) $3x^6 + x^5 + 3x^2 + 4x + 1$

w) $2x^4 + x^3 + 5x + 3$

x) $2x^5 - 2x^2 - 4x - 2$

y) $3x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 6$

z) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

α) $6x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 1$

β) $2x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2$

γ) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

δ) $x^6 - x^5 + 3x^4 + x + 2$ sabiendo que reducido módulo 7, es producto de un polinomio de grado 1 por un irreducible de grado 5.

Ejercicio 5. Dado un anillo conmutativo y un elemento $a \in R$ demuestra que la aplicación $\Phi : R[x] \to R[x]$ dada por $\Phi(f(x)) = f(x+a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplica este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x+1)$.

Ejercicio 6. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x, y]$ y en $\mathbb{Q}[x, y]$:

a) $y^3 + x^2y^2 + xy + x$

b) $(y^5 - y^4 - 2y^3 + y - 1) + x(y - 2y^3) + x^2(y^4 + y^3 + 1) + x^3y^3$

c) $(x^4 + x + 1) + (1 - 2x - x^3)y + (x^3 + x)y^2$

d) $yx^3 + (-y^2 + y - 1)x^2 + (-y^2 + y - 1)x + (y^3 - y^2 - 1)$

e) $x^3y^2 + (x^2 + 1)y - x^2 - 1$

f) $y^2x + yx - y^2 + x - y - 1$

g) $2x^2y^3 + x^2y + x^2 + xy^4 + y^4 + 2y^3 + y + 1$

h) $2x^2y^2 + xy^3 + y^2 + x^2 + 1 + x^4y^2 - y - x^2y$

i) $x^3 + yx^2 + y^2x + y + 2x^2 - 4x$

Ejercicio 7. Sea I el ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ generado por x^2+2x+2. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/I$ es un cuerpo y hallar el inverso de $(ax + b) + I$.

Ejercicio 8. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. en $\mathbb{Z}_5[x]$ de los polinomios $x^7+2x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+2x+1$ y $3x^6+4x^4+4x^3+4x^2+3x+1$.

Ejercicio 9. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x + 1)$.
Calcular también el inverso de la clase del polinomio $2x + 1$ en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + 2x^2 + 4x - 2)$

Ejercicio 10. Demostrar que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4+x+1)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x^2 + 1$.

Ejercicio 11. Considerar el polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$:

- Probar que $f(x)$ es irreducible.
- Calcular el inverso de la clase $[x^2 + x + 2]$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/f(x)\mathbb{Z}_3[x]$.
- ¿Es el polinomio $x^3 + 9x^2 - x + 244$ irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$?.

Ejercicio 12. Probar que el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-2x-3)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x + 1$.

Ejercicio 13. Calcular las unidades de los anillos cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1)$, $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2)$.

Ejercicio 14. Hallar la intersección, la suma y el producto de los ideales de $\mathbb{Q}[x]$ generados por los polinomios $x^2 + x - 2$ y $x^2 - 1$.

Ejercicio 15. Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{Z}[x]$ formado por los polinomios con coeficientes de grado uno par es un subanillo. Comprobar que en este subanillo los elementos 2 y $2x$ tienen m.c.d. y no tienen m.c.m.

Ejercicio 16. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cociente $K[x]/I$:

a) $K = \mathbb{Q}$; $I = (x^2 + 2)$

b) $K = \mathbb{R}$; $I = (x^2 + 2)$

c) $K = \mathbb{Q}$; $I = (x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12)$

d) $K = \mathbb{Z}_3$; $I = (x^2 + x + 1)$

Ejercicio 17. Factorizar los siguientes polinomios como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$:

1. $x^6 - x^5 - 10x^2 + 15x - 5$.
2. $3x^4 - 5x^3 - 101$.
3. $2x^4 + 4x - 1$.

Ejercicio 18. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios:

1. $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
2. $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$.
3. $x^5 - 4x + 1$.

Ejercicio 19. Para tres variables, expresar los siguientes polinomios simétricos como polinomios en los polinomios simétricos elementales:
$\sum x_i^2$; $\sum x_i^3$; $\sum x_i^4$; $\sum x_i^5$.

Ejercicio 20. Expresar como polinomios en los polinomios simétricos elementales los polinomios siguientes que sean simétricos:

a) $(x + y)(y + z)(z + x)$

b) $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$

c) $(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 2)(z^2 + z + 3)$

d) $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)$

e) $(x + y + z)^3 + (x + y + t)^3 + (x + z + t)^3 + (y + z + t)^3$

f) $x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y + xyz$

Ejercicio 21. Determinar el polinomio simétrico en tres variables de menor grado que es múltiplo de $x - 2y$. Expresarlo como polinomio en los polinomios simétricos elementales.

Ejercicio 22. Si α_1, α_2, α_3 son las raices del polinomio $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, calcular el valor de la siguiente expresión:$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 - \alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_3^2(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)$.

Ejercicio 23. Sea $f(x) = x^3 - 7x^2 - 8x + 9 \in \mathbb{Q}[x]$. Si α_1, α_2, α_3 son las raices de $f(x)$, determinar el valor de $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2$.

Ejercicio 24. Estudiar si los polinomios de $\mathbb{Q}[x]$, $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ y $x^5 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ tiene algun factor común no constante.

Ejercicio 25. Demostrar que el discriminante de la cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ es $b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$.

Ejercicio 26. Hallar el discriminante de las siguientes cuárticas:

a) $x^4 + ax^3 + bx + c$

b) $x^4 + ax^2 + bx + c$

c) $x^4 + ax^3 + bx^2 + c$

Ejercicio 27. Se considera el polinomio $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + k \in \mathbb{Z}[x]$. Hallar k para que $f(x)$ tenga una raiz doble y calcular para ese valor de k las raices del polinomio $f(x)$.

Ejercicio 28. Demostrar que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + k \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible si k es impar. Demostrar que $f(x)$ no tiene raices múltiples cualquiera que sea el valor de k. Si k es impar ¿Son cuerpos los anillos cociente $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ y $\mathbb{R}[x]/(f(x))$?.

Ejercicio 29. Encuentra tres números cuya suma es 2, la suma de sus cuadrados es 2 y la de sus cubos es 8.

Ejercicio 30. Sean α_1, α_2 y α_3 las raíces del polinomio $x^3 + 2x^2 - x + 3$. Halla el polinomio cuyas raíces son $(\alpha_1\alpha_2)^{-1}$, $(\alpha_1\alpha_3)^{-1}$ y $(\alpha_2\alpha_3)^{-1}$.

Ejercicio 31. Halla el valor de k para que el polinomio $x^3 - 3x + k$ tenga una raíz doble.

Ejercicio 32. Halla el valor de k para que las raíces α_1, α_2 y α_3 del polinomio $x^3 + 2x^2 - 7x + k$ verifiquen la relación $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

Ejercicio 33. ¿Existe un valor entero para k de forma que $x^2 - kx + 1$ y $x^3 + x^2 + 1$ tengan raíces comunes?

Ejercicio 34. Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $x^3 + 2x - 2$. Calcular $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{2}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$.

Ejercicio 35.

1. Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 19 \in \mathbb{Q}[x]$. Si α_1, α_2 y α_3 son las raíces de $f(x)$, determinar el valor de $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2$.
2. Demostrar que $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + k \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible si k es impar. Demostrar que $f(x)$ no tiene raíces múltiples para ningún valor entero de k.

11. Polinomios usando GAP

11.1. Coeficientes

Como ya hemos visto con anterioridad, para empezar a trabajar con polinomios, tenemos que especificar las variables y qué anillo de coeficientes vamos a considerar. GAPpor defecto expande las expresiones que introducimos, a diferencia de MATHEMATICA.

```
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> (x+1)*(x-1);
x^2-1
```

Si queremos obtener una lista de los coeficientes de un polinomio en una variable, podemos usar lo siguiente.

```
gap> CoefficientsOfUnivariatePolynomial(x^2+x-1);
[ -1, 1, 1 ]
```

Y el polinomio líder lo obtenemos con `LeadingCoefficient`.

```
gap> LeadingCoefficient(x^2+x-1);
1
```

Definamos una función para encontrar el término líder de un polinomio respecto de una variable. En ella usamos funciones que son alternativa a las que acabamos de ver para más de una variable.

```
terminolider:=function(p,x)
    local grado;
    grado:=DegreeIndeterminate(p,x);
    return PolynomialCoefficientsOfPolynomial(p,x)[grado+1]*x^grado;
end;

gap> terminolider(x^2+x-1,x);
x^2
gap> terminolider(3*x^2+x-1,x);
3*x^2
gap> y:=Indeterminate(Rationals,"y");
y
gap> terminolider(y*x^2+y^4*x-1,x);
x^2*y
```

11.2. División

Si el anillo de coeficientes que consideramos es un cuerpo, entonces sabemos que el anillo de polinomios sobre una sola variable es un dominio euclídeo. Por tanto, podemos usar las funciones que ya conocemos para calcular el cociente y resto de una división.

```
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> QuotientRemainder(x^3-x+1,2*x^2-3);
[ 1/2*x, 1/2*x+1 ]
```

Si nuestro anillo de polinomios no es un dominio euclídeo, entonces no podemos usar estas funciones.

```
gap> y:=Indeterminate(Rationals,"y");
y

gap> QuotientRemainder((x^3-x+1)*(y-1),y-1);
Error, no method found! For debugging hints type ?Recovery from NoMethodFound
Error, no 2nd choice method found for ‘QuotientRemainder’ on 3 arguments calle\
d from
QuotientRemainder( DefaultRing( [ r, m ] ), r, m ) called from
<function>( <arguments> ) called from read-eval-loop
Entering break read-eval-print loop ...
you can 'quit;' to quit to outer loop, or
you can 'return;' to continue
brk>
```

Ahora bien, si que podemos usar la función `Quotient` que nos da el cociente, en caso de que éste pertenezca a nuestro anillo de polinomio, y `fail` en caso contrario.

```
gap> Quotient((x^3-x+1)*(y-1),y-1);
x^3-x+1

gap> Quotient(2,3);
fail
```

(Esta última instrucción viene a decir que el cociente de dos entre tres no es entero, pues considera los argumentos de la función como enteros.)

11.3. Factorización

Si lo que queremos es factorizar polinomios, primero tenemos que definir la variable, e indicar cuál es el anillo de coeficientes para nuestros polinomios. Luego se usa `Factors` igual que antes.

```
gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(5),"x");
x
gap> Factors(x^2+1);
[ x+Z(5), x+Z(5)^3 ]
gap> Int(Z(5));
2
gap> Int(Z(5)^3);
3
```

Si cambiamos el anillo base, el resultado puede verse alterado.

```
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> Factors(x^2+1);
[ x^2+1 ]

gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> Factors(x^3-1);
[ x-1, x^2+x+1 ]
gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(3),"x");
x
gap> Factors(x^3-1);
[ x-Z(3)^0, x-Z(3)^0, x-Z(3)^0 ]
```

Lo mismo ocurre con las raices y con el hecho de ser irreducible.

```
gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(3),"x");
x
gap> RootsOfUPol(x^3-1);
[ Z(3)^0, Z(3)^0, Z(3)^0 ]
```

```
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> RootsOfUPol(x^3-1);
[ 1 ]

gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(3),"x");
x
gap> IsIrreducible(x^2+1);
true

gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(2),"x");
x
gap> IsIrreducible(x^2+1);
false
```

Veamos ahora a modo de ejemplo cómo calcular todos los polinomios irreducibles hasta un determinado grado en $\mathbb{Z}_m$. Empezamos definiendo una función que nos genere todos los polinomios hasta un determinado grado.

```
polshastagradomodm:=function(n,x,m)
    local ps;
    if (n=0) then
        return [0..(m-1)];
    fi;

    ps:=polshastagradomodm(n-1,x,m);
    return List(Cartesian(ps,List([0..(m-1)],i->i*x^n)),Sum);
end;
```

Así todos los polinomios en $\mathbb{Z}_3$ de grado menor o igual que dos son:

```
gap> polshastagradomodm(2,x,3);
[ 0*Z(3), x^2, -x^2, x, x^2+x, -x^2+x, -x, x^2-x, -x^2-x, Z(3)^0, x^2+Z(3)^0,
  -x^2+Z(3)^0, x+Z(3)^0, x^2+x+Z(3)^0, -x^2+x+Z(3)^0, -x+Z(3)^0,
  x^2-x+Z(3)^0, -x^2-x+Z(3)^0, -Z(3)^0, x^2-Z(3)^0, -x^2-Z(3)^0, x-Z(3)^0,
  x^2+x-Z(3)^0, -x^2+x-Z(3)^0, -x-Z(3)^0, x^2-x-Z(3)^0, -x^2-x-Z(3)^0 ]
```

De entre ellos podemos escoger los que son irreducibles.

```
gap> Filtered(last,IsIrreducible);
[ x, -x, x^2+Z(3)^0, x+Z(3)^0, -x^2+x+Z(3)^0, -x+Z(3)^0, -x^2-x+Z(3)^0,
  -x^2-Z(3)^0, x-Z(3)^0, x^2+x-Z(3)^0, -x-Z(3)^0, x^2-x-Z(3)^0 ]
```

Y si queremos quedarnos con un representante salvo asociados, podemos usar lo siguiente.

```
gap> Set(last,StandardAssociate);
[ x, x+Z(3)^0, x-Z(3)^0, x^2+Z(3)^0, x^2+x-Z(3)^0, x^2-x-Z(3)^0 ]
```

Para finalizar esta sección, implementamos una función que da los primos que se pueden aplicar en el criterio de Eisenstein para un polinomio en una variable.

```
eisenstein:=function(p)
    local lc,fp;
    lc:=CoefficientsOfUnivariatePolynomial(p);
    lc:=lc{[1..(Length(lc)-1)]};
    fp:=Factors(lc[1]);
    return Filtered(fp,f->(ForAll(lc,c->(c mod f=0)) and (lc[1] mod f^2=0)));
end;

gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> eisenstein(x^2+2*x-6);
[  ]
gap> eisenstein(x^2+2*x-4);
[ -2, 2 ]
```

11.4. Polinomios simétricos

Seguimos en esta sección la demostración dada en teoría para encontrar la expresión de un polinomio simétrico en función de los polinomios simétricos elementales.

Empezamos construyendo de forma recursiva el conjunto de polinomios simétricos elementales en un número determinado de variables (el argumento `x` contiene la lista de variables).

```
simetricoselementales:=function(x)
    local el;
    if (Length(x)=1) then
        return x;
    fi;
    el:=Concatenation([1],simetricoselementales(x{[2..Length(x)]}),[0]);
    return List([2..Length(el)],i->x[1]*el[i-1]+el[i]);
end;

gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> y:=Indeterminate(Rationals,"y");
y
gap> z:=Indeterminate(Rationals,"z");
z

gap> simetricoselementales([x,y,z]);
[ x+y+z, x*y+x*z+y*z, x*y*z ]
```

Vamos a identificar los polinomios simétricos elementales con las variables de entrada. Así si tenemos dos variables x e y, éstas vistas como polinomios simétricos elementales denotan también respectivamente a $x + y$ y xy. Para traducir esta representación a notación estándar, usamos la siguiente función.

```
evaluasim:=function(f,x)
    if (IsRat(f)) then
        return f;
    fi;
    return Value(f,x,simetricoselementales(x));
end;
```

(La función `Value` sirve para evaluar un polinomio en varias variables. Si la entrada es un racional, no sabe hacer dicha evaluación. Es por eso que hemos puesto ese condicional al principio de la función.)

Ya tenemos pues los ingredientes necesarios para implementar el algoritmo.

```
sim:=function(f,x)
```

```
    local f0,f1,f2,g1,g2;

    if (Length(x)=1) or (IsRat(f)) then
        return f;
    fi;

    f0:=Value(f,[x[Length(x)]],[0]);
    if f0=0 then
        return 0;
    fi;
    g1:=sim(f0,x{[1..(Length(x)-1)]});
    f1:=f-evaluasim(g1,x);
    if f1=0 then
        return g1;
    fi;
    f2:=Quotient(f1,Product(x));
    g2:=sim(f2,x);
    return g1+x[Length(x)]*g2;

end;

gap> sim((x+y)*(y+z)*(z+x),[x,y,z]);
x*y-z
gap> evaluasim(last,[x,y,z]);
x^2*y+x^2*z+x*y^2+2*x*y*z+x*z^2+y^2*z+y*z^2
gap> (x+y)*(y+z)*(z+x);
x^2*y+x^2*z+x*y^2+2*x*y*z+x*z^2+y^2*z+y*z^2
```

11.5. Resultante y discriminante

Para calcular la resultante y el discriminante podemos usar las funciones `Resultant` y `Discriminant`, respectivamente.

```
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");
x
gap> y:=Indeterminate(Rationals,"y");
```

```
y
gap> Resultant(x^2+y^2-1,x-y,y);
2*x^2-1

gap> Discriminant(x^3+1);
-27
gap> z:=Indeterminate(Rationals,"z");
z
gap> Discriminant(x^3+y*x^2+z,x);
-4*z*y^3-27*z^2
```

11.6. Cociente por un ideal

Intentemos calcular los divisores de cero y unidades del anillo cociente $R = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$. Empezamos definiendo nuestra variable y el módulo.

```
gap> x:=Indeterminate(ZmodnZ(2),"x");
x

gap> modulo:=x^2+1;
x^2+Z(2)^0
```

Como cada elemento en R tiene un único representante de grado menor o igual que uno (el resto de dividir por x^2+1), podemos identificar R con el siguiente conjunto.

```
gap> elementos:=List(Cartesian([0..1],[0..1]),n->n[1]+x*n[2]);
[ 0*Z(2), x, Z(2)^0, x+Z(2)^0 ]
```

Que se lee como $\{0, x, 1, 1+x\}$. Seleccionamos aquellos elementos que son no nulos.

```
gap> elementosnonulos:=elementos{[2..4]};
[ x, Z(2)^0, x+Z(2)^0 ]
```

Así las unidades se pueden calcular de la siguiente forma.

```
gap> Filtered(elementosnonulos,n->
    ForAny(elementosnonulos,m->IsOne(EuclideanRemainder(n * m,modulo))));
[ x, Z(2)^0 ]
```

Obsérvese que hemos vuelto a utilizar `EuclideanRemainder`. La función `IsOne` sirve para determinar si un elemento en $\mathbb{Z}_2[x]$ es uno (no podemos en este caso escribir simplemente `EuclideanRemainder(n * m,modulo)=1`).

Los divisores de cero no nulos, se calculan de forma análoga.

```
gap> Filtered(elementosnonulos,
n->ForAny(elementosnonulos,
m->IsZero(EuclideanRemainder(n * m,modulo))))
[ x+Z(2)^0 ]
```

12. Aritmética en Anillos de Polinomios con MATHEMATICA

12.1. Generalidades

- **Producto de polinomios**

  El producto de dos polinomios p y q es $p\ q$ (o $p * q$). MATHEMATICAno devuelve el resultado a no ser que se lo pidamos con el comando `Expand`.

  Ejemplo:

```
p=2x^3+3x^2+7x+9;
q=6x^2+5x+4;
p q
```

$$(4 + 5x + 6x^2)(9 + 7x + 3x^2 + 2x^3)$$

```
Expand[p q]
```

$$36 + 73x + 101x^2 + 65x^3 + 28x^4 + 12x^5$$

Si queremos encontrar el resultado módulo n, entonces usamos el comando `PolynomialMod`.

Ejemplo

```
PolynomialMod[p q,12]
```

$$x + 5x^2 + 5x^3 + 4x^4$$

La opción `Modulus -> k` devuelve directamente el resultado módulo k.

Ejemplo

```
Expand[p q,Modulus->12]
```

$$x + 5x^2 + 5x^3 + 4x^4$$

- **Coeficientes y coeficiente líder**

  La función `Exponent` nos dice el grado de un polinomio en la variable que queramos. Así, si

```
p=3x^3+5x+2;
q=x^4+2x+3x^2+5x+8;
```

  entonces

```
Exponent[p,x]
```

```
3
```

mientras que

```
Exponent[q,x]
```

```
4
```

El comando `Coefficient` puede ser usado para obtener el coeficiente que acompañe a una potencia de una variable. Ejemplo

```
Coefficient[p,x,2]
```

```
0
```

La lista de coeficientes la podemos obtener poniendo

```
CoefficientList[p,x]
```

```
{2, 5, 0, 3}
```

Usando el producto escalar, recuperamos el polinomio a partir de los coeficientes. Ejemplo

```
{2,5,0,3}.{1,x,x^2,x^3}
```

$2 + 5x + 3x^3$

O bien

```
{2,5,0,3}.Table[x^i,{i,0,3}]
```

$2 + 5x + 3x^3$

Definimos una función que nos da el coeficiente lider de un polinomio en una variable poniendo

```
coeficientelider[p_,x_]:=Last[CoefficientList[p,x]]
```

Así

```
coeficientelider[p,x]
```

3

mientras que

```
coeficientelider[q,x]
```

1

El comando `FullForm` nos da la representación interna de la expresión de un polinomio. Ejemplo

```
FullForm[p]
```

```
Out[18]//FullForm= Plus[2, Times[5, x], Times[3, Power[x, 3]]]
```

Entonces, usando la función `Collect`, podemos también definir una función que nos dé el término líder (como se ve en la implementación de la función, `Last` también se puede aplicar a expresiones que no son listas).

```
terminolider[p_,x_]:=Last[Collect[p,x]]
```

Así

```
terminolider[p,x]
```

$$3x^3$$

mientras que

```
terminolider[p q,x]
```

$$3x^7$$

- **Evaluación de un polinomio**

  Para evaluar un polinomio (o cualquier expresión) en un valor, usamos las reglas de sustitución

```
evalua[p_,x_,a_]:=p /. {x:>a}
```

Ejemplo

```
evalua[p,x,0]
```

```
2
```

Para evaluar módulo m, hacemos lo siguiente.

```
evalua[p_,x_,a_,m_]:=Mod[evalua[p,x,a],m]
```

Ejemplo

```
evalua[q,x,0,3]
```

```
2
```

Si nos interesa evaluar un polinomio en más de un elemento también podemos usar la función `evalua` aplicada a listas poniendo

```
SetAttributes[evalua,Listable]
```

Así

```
evalua[1+x^2,x,{1,2,3}]
```

```
{2, 5, 10}
```

mientras que si evaluamos y tomamos módulo

```
evalua[{1+x^3,1+x^2},x,1,2]
```

```
{0,0}
```

y

```
evalua[{1+x^3,1+x^2},x,{0,1},3]
```

```
{1,2}
```

y tomando varios módulos

```
evalua[1+x^2,x,1,{2,3,4,5}]
```

```
{0,2,2,2}
```

Ejemplo: Si queremos obtener la gráfica del polinomio $p = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ visto como polinomio en $\mathbb{Z}_5$ declaramos el polinomio

```
p=x^3+3x^2+2x+2;
```

y ponemos

```
Map[{#,evalua[p,x,#,5]}&,Range[0,4]]
```

$\{0, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 2\}$

- **Cociente y resto**

  Las funciones predefinidas que dan cociente y resto son `PolynomialQuotient` y `PolynomialRemainder`.

  Ejemplo

```
PolynomialQuotient[x^2-1,2x+2,x]
```

Out[33]= $-(1/2) + x/2$

Ejemplo

```
PolynomialRemainder[x^2-1,2x+2,x]
```

0

Si para estas funciones queremos tomar módulo entonces usamos `PolynomialMod`

Ejemplo

```
PolynomialMod[PolynomialRemainder[x^2+1,x+1,x],2]
```

0

y

```
PolynomialMod[PolynomialQuotient[x^2+1,x+1,x],2]
```

$1 + x$

12.2. Factorización

- **El contenido de un polinomio**

  Sabemos que se trata del máximo común divisor así que lo calculamos con la función

```
contenido[p_,x_]:=Apply[GCD,CoefficientList[p,x]]
```

  Ejemplo

```
contenido[105x^3-21x^2+70x-35,x]
```

7

- **El comando `Factor`**

  Con este comando podemos calcular la factorización en $\mathbb{Z}[x]$ de un polinomio con coeficientes enteros. Si queremos que esa factorización se efectúe módulo m, entonces agregamos la opción `Modulus-> m`.

  Ejemplos

```
Factor[6x-4]
```

$2(-2 + 3x)$

```
Factor[6x^3-19x^2-8x+12]
```

$$(-2+3x)(-6-5x+2x^2)$$

```
Factor[x^4+x^3+x+2]
```

$$2+x+x^3+x^4$$

```
Factor[x^4+x^3+x+2,Modulus->3]
```

$$(1+x^2)(2+x+x^2)$$

- **La derivada de un polinomio**

  La función predefinida `D[f,x]` devuelve la derivada de f respecto de x.

  Ejemplos

```
D[2x^5-7x^3+3x^2-5x+3,x]
```

$$-5+6x-21x^2+10x^4$$

```
D[(3x+1)^100,x]
```

$$300(1+3x)^{99}$$

- **Encontrando las raices de un polinomio: El comando `Solve`**

  Declaramos el polinomio

```
p=6x^3-19x^2-8x+12;
```

  y entonces, para calcular las raices, ponemos

```
Solve[p==0,x]
```

$$\{\{x \to 2/3\}, \{x \to 1/4(5 - \sqrt{73})\}, \{x \to 1/4(5 + \sqrt{73})\}\}$$

  Si queremos las raices del polinomio reducido modulo 7 entonces ponemos

```
Solve[{p==0,Modulus==7},Mode->Modular]
```

$$\{\{Modulus- > 7, x \to 3\}\}$$

  de modo que la única raiz módulo 7 es 3.

  Notemos que si factorizamos dicho polinomio p

```
Factor[p]
```

$$(-2+3x)(-6-5x+2x^2)$$

mientras que si lo hacemos módulo 7

```
Factor[p,Modulus->7]
```

$$6(4+x)(4+x+x^2)$$

de modo que, como habíamos visto arriba, la única raiz módulo 7 es -4, esto es, 3.

Ejercicio: Determina si los polinomios x^3+2x+2 y $(x^4)+(x^3)+x+2$ son reducibles módulo 3.

- **Polinomios de grado n módulo m**

  Calculamos todos los polinomios de grado n en $\mathbb{Z}_m[x]$. Para definir la correspondiente función recordemos que dadas dos listas, el comando `Outer` nos permite operar todos los miembros de la primera con los de la segunda mediante la operación que viene dada en el primer argumento. Luego, para que el resultado aparezca en una lista, usamos el comando `Flatten`.

  Entonces, si queremos calcular todos los polinomios de grado menor o igual que n ponemos

```
 polshastagrado[0,_,m_]:=Range[0,m-1];
polshastagrado[n_,x_,m_]:=With[{pn=polshastagrado[n-1,x,m]},
Union[pn,Flatten[Outer[Plus,Table[i x^n,{i,1,m-1}],pn]]]
]
```

  Ejemplo

```
polshastagrado[2,x,2]
```

$$\{0, 1, x, x^2, 1+x, 1+x^2, x+x^2, 1+x+x^2\}$$

Mientras que si queremos calcular solo los de grado n ponemos

```
 polsgrado[0,_,m_]:=Range[0,m-1];
polsgrado[n_,x_,m_]:=With[{pn=polshastagrado[n-1,x,m]},
Flatten[Outer[Plus,Table[i x^n,{i,1,m-1}],pn]]
]
```

Ejemplo

```
polsgrado[2,y,3]
```

$$\{y^2, 1+y^2, 2+y^2, y+y^2, 2y+y^2, 1+y+y^2, 2+y+y^2, 1+2y+y^2, 2+2y+y^2, 2\\ y^2, 1+2y^2, 2+2y^2, y+2y^2, 2y+2y^2, 1+y+2y^2, 2+y+2y^2, 1+2y+2\\ y^2, 2+2y+2y^2\}$$

A continuación queremos calcular los polinomios irreducibles módulo m cuyo grado es menor o igual a n. Para ello tenemos en cuenta las siguientes observaciones:

1. `MemberQ` sirve para ver si un elemento pertenece a una lista.
2. `Function` sirve para definir una función que al primer argumento le asigna la regla que viene dada como segundo argumento.

Tenemos que calcular qué polinomios de grado n no son divisibles por ningún polinomio irreducible de grado menor o igual a $n-1$. En la variable *pi* almacenaremos los polinomios irreducibles de grado menor o igual a $n-1$ (generados recursivamente), y en *ps* los polinomios mónicos de grado n.

Así, ponemos

```
polsirreduciblesgrado[1,x_,m_]:=Table[i+x,{i,0,m-1}]
```

y

```
polsirreduciblesgrado[n_,x_,m_]:=With[{pi=polsirreduciblesgrado[n-1,x,\
m],ps=x^n+polshastagrado[n-1,x,m]},
Union[pi,Select[ps,Not[MemberQ[Map[Function[z,PolynomialMod[\
PolynomialRemainder[#,z,x],m]],pi],0]]&]]
]
```

Ejemplo: Para calcular los irreducibles de grado 5 en $\mathbb{Z}_2[x]$ ponemos

```
polsirreduciblesgrado[5,x,2]
```

$$\{x, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^2+x^3, 1+x+x^4, 1+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4, 1+x^2+x^5, 1+x^3+x^5, 1+x+x^2+x^3+x^5, 1+x+x^2+x^4+x^5, 1+x+x^3+x^4+x^5, 1+x^2+x^3+x^4+x^5\}$$

y para saber cuántos hay pedimos la longitud de la lista poniendo

```
Length[%]
```

14

Y para calcular los irreducibles de grado 2 en $\mathbb{Z}_5[x]$ ponemos

```
polsirreduciblesgrado[2,x,5]
```

$$\{x, 1+x, 2+x, 3+x, 4+x, 2+x^2, 3+x^2, 1+x+x^2, 2+x+x^2, 3+2x+x^2,$$
$$4+2x+x^2, 3+3x+x^2, 4+3x+x^2, 1+4x+x^2, 2+4x+x^2\}$$

cuya longitud es

```
Length[%]
```

15

- **Raices racionales**

  Sabemos que las posibles raices racionales de un polinomio con coeficientes enteros son las fracciones que resultan de dividir los divisores del término independiente por los del coeficiente líder (notemos que MATHEMATICAautomáticamente simplifica fracciones). Definimos

```
 posiblesraices[p_,x_]:=Module[{a0,an,salida},
a0=p/.x:>0;
an=coeficientelider[p,x];
salida=Flatten[Outer[Divide,Divisors[a0],Divisors[an]]];
Union[salida,-salida]
]
```

  Ejemplo: Si queremos calcular las posibles raices racionales del polinomio $6x^3 - 8$ ponemos

```
posiblesraices[6x^3-8,x]
```

$$\{-8,-4,-\tfrac{8}{3},-2,-\tfrac{4}{3},-1,-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},1,\tfrac{4}{3},2,\tfrac{8}{3},4,8\}$$

Análogamente

```
posiblesraices[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x]
```

$$\{-8,-4,-\tfrac{8}{3},-2,-\tfrac{4}{3},-1,-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},1,\tfrac{4}{3},2,\tfrac{8}{3},4,8\}$$

que en total son

```
Length[%]
```

20

Ahora, para saber cuales de ellas son realmente raices del polinomio, evaluamos éste en toda la lista poniendo

```
evalua[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x,%%]
```

$$\{17576,448,-\tfrac{2600}{27},-112,-\tfrac{656}{9},-50,-\tfrac{824}{27},-\tfrac{91}{4},-\tfrac{148}{9},-\tfrac{625}{54},-\tfrac{197}{36},-\tfrac{98}{27},-2,0,8,\tfrac{736}{27},136,\tfrac{3752}{9},2000,29128\}$$

Observamos que sólo hay una raíz racional, a saber $\frac{2}{3}$

- **Un filtro**

```
posiblesraices[p_,x_,c_]:=Module[{pc,dpc},
pc=evalua[p,x,c];
dpc=Union[-Divisors[pc],Divisors[pc]];
Select[posiblesraices[p,x],MemberQ[dpc,Denominator[#]c-Numerator[#]]&]\
]
```

```
posiblesraices[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x,1]
```

$$\{-1,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},2\}$$

```
posiblesraices[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x,-1]
```

$$\{-\tfrac{8}{3},-2,-\tfrac{4}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{6},\tfrac{2}{3},1,4\}$$

```
Intersection@@(posiblesraices[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x,#]&/@{1,-1,2,-\
2})
```

$$\{\tfrac{2}{3}\}$$

O lo que es lo mismo (recuérdese que `Map` se usa para aplicar una función a cada uno de los elementos de una lista. `Apply` se puede usar para pasarle a una función como argumentos los elementos de una lista, aunque en realidad, lo que hace es cambiar la cabecera del segundo argumento por el primer argumento):

```
Apply[Intersection,Map[posiblesraices[6x^4+11x^3-19x^2+18x-8,x,#]&,{1,\
-1,2,-2}]]
```

$\frac{2}{3}$

Ejercicio: Encuentra las posibles raices racionales de $72 - 24x - 18x^2 + 6x^3$.

- **Criterio de Eisenstein**

  Usamos el comando `FactorInteger` para implementar este criterio

```
 eisenstein[p_,x_]:=With[{a0=p/.x:>0},Select[Map[First,FactorInteger[\
Abs[a0]]],(Union[Mod[Drop[CoefficientList[p,x],-1],#]]=={0}\[And]Mod[\
a0,#^2]!=0)&]!={}
]
```

Ejemplo

```
 eisenstein[x^2+4x+4,x]
```

False

Ejercicio: ¿Se puede aplicar el criterio al polinomio $x^2 + 4x + 8$? ¿Y a $5x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 18x - 24$?

12.3. Polinomios Simétricos

- **Los polinomios simétricos elementales**

  La siguiente función devuelve una lista con los polinomios simétricos elementales en las variables que introduzcamos

```
 simetricoselementales[{x_}]:={x};
simetricoselementales[{x_,xs___}]:=With[{el=Join[{1},\
simetricoselementales[{xs}],{0}]},
Table[Expand[x el[[i-1]]+el[[i]]],{i,2,Length[el]}]
]
```

Ejemplo

```
simetricoselementales[{x,y,z,t}]
```

$$\{t + x + y + z, tx + ty + xy + tz + xz + yz, txy + txz + tyz + xyz, txyz\}$$

Ejercicio: Calcula los polinomios simétricos en cinco variables.

Introducimos a continuación la función `evalua` que sirve para evaluar un polinomio en varias variables. Nos será de utilidad para evaluar un polinomio en los polinomios simétricos elementales (compárese con la función `evalua` del principio de esta práctica). Usamos `ClearAll` para borrar su definición y hacer que MATHEMATICAse olvide de que tenía el atributo `Listable`.

```
ClearAll[evalua]
```

```
?evalua
Global‘evalua
```

```
evalua[f_,{},{}]:=f;
evalua[f_,x_,v_]:=f/.Inner[Rule,x,v,List]
```

Ejemplo:

```
evalua[x y+z,{x,y},{1,2}]
```

$$2 + z$$

La siguiente función nos sirve para expresar un polinomio que viene dado en función de los polinomios simétricos elementales en n variables como un polinomio en esas variables. A los polinomios simétricos elementales en n variables los vamos a denotar por $s_1, \ldots, s_n$.

```
Clear[s]
```

```
evaluasim[f_,x_]:=evalua[f,Table[Subscript[s, \
i],{i,1,Length[x]}],simetricoselementales[x]]
```

Así, el simétrico elemental de grado 1 en dos variables es

```
evaluasim[Subscript[s, 1],{x,y}]
```

$$x + y$$

mientras que el de grado dos es

```
evaluasim[Subscript[s, 2],{x,y}]
```

$$x\,y$$

Otros ejemplos son

```
evaluasim[Subscript[s, 1],{x,y,z}]
```

$$x + y + z$$

```
evaluasim[Subscript[s, 1]Subscript[s, 2]+Subscript[s, 3],{x,y,z}]
```

$$xyz + (x + y + z)(xy + xz + yz)$$

- **Expresando un polinomio simétrico en función de los polinomios simétricos elementales**

  Ya tenemos las piezas para implementar el algoritmo que expresa un polinomio simétrico en función de los polinomios simétricos elementales.

```
 sim[f_]:=f /; Length[Variables[f]]==0
sim[f_]:=(f/.{Variables[f][[1]]:>Subscript[s, \
1]})/;Length[Variables[f]]==1
sim[f_]:=Module[{f0,f1,f2,g1,g2,var},
var=Variables[f];
f0=(f/.Last[var]->0);
g1=sim[f0];
(*Print["El polinomio que representa a ",f," con ",Last[var]," igual \
a cero es g1=",g1];*)
f1:=f-evaluasim[g1,var];
f2:=Simplify[f1/Times@@var];
(*Print["f1=",f1,", y así, f2=",f2];*)
g2:=sim[f2];
(*Print["El polinomio que representa a f2 es g2=",g2,", y obtenemos: \
",g1+Last[var] g2];*)
g1+Subscript[s, Length[var]] g2
]
```

Algunos ejemplos

```
sim[x y]
```

$$s_2$$

```
sim[x^2+y^2+z^2]
```

$$s_1^2 - 2s_2$$

```
sim[x y z]
```

$$s_3$$

```
sim[(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2]
```

$$2s_1^2 - 2s_2$$

```
sim[(x+y)(y+z)(z+x)]
```

$$s_1 s_2 - s_3$$

```
sim[(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)]
```

$$s_1^3 + 4s_1 s_2 - 8s_3$$

12.4. Resultante y discriminante

- **Resultante**

  La función `Resultant[polinomio, polinomio, variable]` calcula la resultante de dos polinomios

```
Resultant[x^3+5x+2,x^3-x-1,x]
```

$$-135$$

Ejercicio: Calcula los valores de a para que los polinomios $f = a + 5x + ax + 6x^2 + x^3 + ax^3 + 5x^4 + x^5$ y $g = 2 + 7x + 8x^2 + 6x^3 + x^4$ tengan raíces comunes.

```
Solve[Resultant[x^5+5x^4+a x^3+6x^2+a x+a,x^4+6x^3+8x^2+7x+2,x]==0,a]
```

$$\{\{a \to 1/2(7 - I\sqrt{3})\}, \{a \to 1/2(7 + I\sqrt{3})\},$$
$$\{a \to \tfrac{2}{47}(5 - 17\sqrt{17})\}, \{a \to \tfrac{2}{47}(5 + 17\sqrt{17})\}\}$$

La resultante se puede usar para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas en dos variables. Así, si queremos intersecar la circunferencia unidad con la bisectriz $x = y$, podemos usar el comando `Solve` de MATHEMATICA.

```
Solve[{x^2+y^2==1,x-y==0},{x,y}]
```

$$\{\{x \to -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y \to -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}, y \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\}\}$$

Alternativamente, podemos pensar en dos polinomios en la variable x, y calculamos para qué valores de y ambos tienen ceros en común. Entonces ponemos

```
Resultant[x^2+y^2-1,x-y,x]
```

$$-1 + 2y^2$$

y resolvemos

```
Solve[%==0]
```

$$\{\{y \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{y \to \frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$$

```
{x^2+y^2-1,x-y}/.%
```

$$\{\{-\frac{1}{2} + x^2, \frac{1}{\sqrt{2}+x}\}, \{-\frac{1}{2} + x^2, -\frac{1}{\sqrt{2}+x}\}\}$$

```
Solve[{x^2-1/2==0}]
```

$$\{\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$$

Ejercicio: Sea a una raiz del polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 3$ y sea $b = 2a^2 - 3a + 4$. Usando la función resultante, encuentra un polinomio que tenga a b como raíz.

```
Resultant[x^4-3x^3+5x^2+4x-3,2x^2-3x+4-b,x]
```

$$1559 - 560b + 19b^2 - 5b^3 + b^4$$

- **Discriminante**

  La función `Resultant` nos permite definir la función `Discriminant` que nos calculará el discriminante de un polinomio.

```
Discriminant[p_, x_] := With[{m = Exponent[p, x]},
      Cancel[(-1)^((1/2) m((m - 1)) Resultant[p, D[p,x] x]/Coefficient[p, x, m]]]
```

  Ejercicio: Calcular el discriminante de una cúbica principal.

```
Discriminant[x^3+b x+c,x]
```

$$-4b^3 - 27c^2$$

  Ejercicio ¿Para qué valores de a tiene raíces múltiples el polinomio $x^4 - x^3 - x^2 + x + a$?

```
Solve[Discriminant[x^4-x^3-x^2+x+a,x]==0,a]
```

$$\{\{a \to 0\}, \{a \to \tfrac{1}{512}(107 - 51\sqrt{17})\}, \{a \to \tfrac{1}{512}(107 + 51\sqrt{17})\}\}$$

Se propone como ejercicio final encontrar solución a los ejercicios propuestos en la sección 10 que puedan ser resueltos utilizando las funciones definidas en esta Práctica.

Índice alfabético