Juan de Dios Pérez y Alfonso Romero

Final

1.
   - Sea V(K) un e.v. de dimensión myor o igual que dos y sea $S = \{u_1, ..., u_n\}$ un subconjunto de vectores e V. Se sabe que S es un sistema de generadores de V y que $V \backslash \{u_i\}$ ya no genera a V, para todo i = 1, ..., n. Prueba que S es una base de V.
   - Sea el vector $(3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. ¿Pueden existir tres bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^3$ en las que dicho vector tenga coordenadas (1,1,1)?

2. Considera el espacio $\mathbb{R}_3[x]$.
   - Encuentra un subespacio W de manera que $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$ siendo $U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$.
   - Dado $p(x) = (1 + x)^3$, calcula $p_1 \in U$ y $p_2 \in W$ tales que $p = p_1 + p_2$.

3.
   - Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de manera que existan $x, y \in \mathbb{R}^3$ no nnulos tales que $f(x) = x$ y $f(y) = -y$. ¿Es $\{x, y\}$ linealmente independiente?
   - Encuentre un endomorfismo h de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que cumpla $(1, -1, 1) \in Im(h)$, $(1, 1, 1) \in Ker(h)$ y $traza(h) = 1$, dando su matriz respecto a la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

4. Considera $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ dadas por $\phi_1(A) = a + d$ y $\phi_2(A) = a - d$, siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   - Demuestra que $\{\phi_1, \phi_2\}$ es linealmente independiente.
   - Amplía $\{\phi_1, \phi_2\}$ hasta tener una base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$.
   - Encuentra la base $\mathcal{B}$ que es dual de la anterior.