ÁLGEBRA I. 2015/16

RELACIÓN 3

1. Congruencias en $\mathbb{Z}$

Ejercicio 1: Discutir, usando congruencias, la validez de las siguientes afirmaciones:
(1) 320^{207} y 2^{21} dan el mismo resto al dividirlos por 13.
(2) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7 cualquiera que sea el entero $n \geq 1$.
(3) $23^{84.292}$ entre 7 da resto 2.
(4) Las dos últimas cifras del número 7^{355} son 6 y 3.
(5) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17 cualquiera que sea el entero $n \geq 1$.
(6) Un número es divisible por 4 si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

Ejercicio 2: Cinco compañeros se reparten un premio, y uno de ellos es robado. Al ir a poner la denuncia ante un policía, estaba nervioso y solo recuerda que eran todos billetes de 10 euros, la cantidad estaba entre 1500 y 2000 euros, que al contar la cantidad de billetes que tenía de 4 en 4 le sobraba 1, que cuando dos de los compañeros hicieron montones de 7 billetes con el dinero de ambos le faltaban 3 billetes para completar todos los montones, y que cuando los cinco hicieron montones de nueve billetes con el dinero de todos le sobraban 2 billetes. ¿Puedes ayudar al policía a concretar la denuncia?

Ejercicio 3: Una banda de 13 piratas se reparten N monedas de oro, pero le sobran 8. Dos mueren, las vuelven a repartir y sobran 3. Luego 3 se ahogan y sobran 5. ¿Cuál es la mínima cantidad posible N de monedas?

Ejercicio 4: En la finca de Juan todos los años se consume la misma cantidad de fertilizante, que siempre viene en un camión de menos de 2 toneladas de capacidad. En los tres últimos años Juan ha utilizado, para envasar el fertilizante, sacos de 75, 56 y 143 kilogramos respectivamente. El primer año al envasar el fertilizante sobraron 21 Kg, el segundo 45 y el tercero 77. ¿Qué cantidad de fertilizante consume Juan anualmente? En la finca vecina a la de Juan se han utilizado, también en los últimos tres años, los mismos sacos que Juan y al envasar su fertilizante en estos sacos han sobrado las mismas cantidades que a Juan, sin embargo en esta finca se necesitan más de un camión para transportar su fertilizante. ¿Qué cantidad mínima de fertilizante se usa en la finca vecina de la de Juan?

Ejercicio 5: Calcular la menor capacidad posible de un depósito de agua sabiendo que a un depósito de doble capacidad le ha faltado un litro para poder ser llenado con garrafas de 5 litros, mientras que a uno de quintuple capacidad también le ha faltado un litro tanto si se llenaba con garrafas de 7 litros como de 11 litros.

Ejercicio 6: Antonio, Pepe y Juan son tres campesinos que principalmente se dedican al cultivo de la aceituna. Este año la producción de los olivos de Antonio fue tres veces la de los de Juan y la de Pepe cinco veces la de los de Juan. Los molinos a los que estos campesinos llevan la aceituna, usan recipientes de 25 litros el de Juan, 7 litros el de Antonio y 16 litros el de Pepe. Al envasar el aceite producido por los olivos de Juan sobraron 21 litros, al envasar el producido por Antonio sobraron 3 litros y al envasar el producido por Pepe sobraron 11 litros. Sabiendo que la producción de Juan está entre 1000 y 2000 litros ¿cual fue la producción de cada uno de ellos?.

Ejercicio 7: Un grupo de 12 ladrones decidieron robar un cofre lleno de monedas de oro, que según un informe fidedigno contenía entre 2000 y 3000 monedas. El día del robo, uno de ellos resultó apresado, los 11 restantes decidieron repartir las monedas a partes iguales. Al hacer el reparto resultó que sobraron 8 monedas que decidieron darían a María, la mujer del ladrón apresado. María, no contenta con el reparto, delató a los dos ladrones que lo habían propuesto, después de lo cual quedaron 9 ladrones en libertad que volvieron a repartirse el botín. En este caso solo sobraron 2 monedas, que en su momento darían a Maria. Indignada María con el comportamiento de los compinches de su marido, decidió acabar con todos ellos y quedarse con todo el botín. Para ello, colocó una bomba en el lugar de reunión de la banda, desafortunadamente para María, la bomba hizo explosión cuando solo se encontraban 4 ladrones en el local. Los que quedaron, volvieron a decidir repartir el botín a partes iguales y dar a María la única moneda que sobraba del reparto. Esto indignó aún más a María, que mediante intrigas consiguió que disputaran los ladrones entre ellos, muriendo 3 en la disputa. Los dos que quedaron con vida repartieron el botín a partes iguales y no sobró moneda alguna. ¿Qué cantidad de monedas tenía el cofre?

Ejercicio 8: Cuatro cuadrillas de albañiles emprenden la construcción de un dique, cada una se compromete a ejecutar el mismo número de jornadas de trabajo y todas ellas trabajarán al menos una jornada completa, siendo el número de jornadas completas de trabajo inferior a 1500. La primera de las cuadrillas consta de 2 hombres, la segunda de tres, la tercera de 7 y la cuarta de 25. Completando el trabajo en jornadas completas de cada cuadrilla, al final quedó un día de trabajo para un hombre de la primera cuadrilla, para dos de la segunda y para cinco de la tercera y cuarta. ¿Cuántos fueron los días de trabajo empleados en construir el dique?

Ejercicio 9: Una banda de 20 piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de entre 5000 y 10000 monedas de oro. Desafortunadamente sobran 15 monedas. Se pelean y muere uno de ellos. Al hacer de nuevo el reparto sobran 15, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelven a sobrar 3 monedas.

(1) ¿Cuál es el número de monedas del botín?
(2) Si la historia continua, es decir, siempre que sobren monedas se organiza una reyerta y muere uno de los piratas, ¿cuántos quedarán vivos?

Ejercicio 10: Diecisiete piratas se reparten un botín de n monedas de oro. Acordaron partes iguales y, si hubiese un resto, se lo darían al cocinero chino. Después del reparto el chino recibió 3 monedas. Pero en la borrachera nocturna 6 piratas murieron acuchillados (en la riña acostumbrada en esos casos). Al otro día los sobrevivientes se vuelven a repartir las monedas y al cocinero le tocaron 4 monedas. Posteriormente, en un naufragio, sólo se salvó el botín, el cocinero y 6 piratas. Así que se vuelven a repartir y le tocaron 5 monedas al cocinero. Encuentra el número n de monedas con que se quedó el cocinero (como mínimo) después de envenenar a los piratas.

2. En $K[x]$ y en $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

Ejercicio 1: (1) Probar el Teorema de Ruffini: *Si $f(x) \in A[x]$, para cualquier $a \in A$, $f(a)$ es igual al resto de dividir $f(x)$ entre $(x-a)$.*

(2) Encontrar un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que: $f(0) = 6$, $f(1) = 12$ y $f(x) \equiv (3x+3) \bmod (x^2+x+1)$.

Ejercicio 2: Determinar todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ tales que

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1)f(x) \equiv x^4 - 2x^3 - x + 2 \mod(x^3 + 3x^2 + 4x + 2).$$

Ejercicio 3: Determinar los polinomios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado menor o igual que tres que satisfacen el sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcll} f(x) & \equiv & x-1 & \mod(x^2+1) \\ f(x) & \equiv & x+1 & \mod(x^2+x+1) \end{array}$$

Ejercicio 4: Determinar todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ de grado menor o igual que 4, tales que: 1) el resto de dividir $f(x)$ entre x^2+1 es x, 2) el resto de dividir $xf(x)$ entre x^2+x+1 es $x+1$, y 3) $f(1) = 1$.

Ejercicio 5: En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, resolver la congruencia

$$(1+\sqrt{3})x \equiv 9 - 4\sqrt{3} \mod(2\sqrt{3})$$

Ejercicio 6: En el anillo $\mathbb{Z}[i]$, resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left\{ \begin{array}{rccl} x & \equiv & i & \mod(3) \\ x & \equiv & 1+i & \mod(3+2i) \\ x & \equiv & 3+2i & \mod(4+i) \end{array} \right.$$

Ejercicio 7: Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, y dar una solución de norma menor que 7:

$$\left\{ \begin{array}{rccl} x & \equiv & 1+2\sqrt{-2} & \mod(2-3\sqrt{-2}) \\ x & \equiv & 3 & \mod(1+\sqrt{-2}) \end{array} \right.$$

Ejercicio 8: En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left\{ \begin{array}{rccl} x & \equiv & 3-\sqrt{2} & \mod(2+\sqrt{2}) \\ x & \equiv & 7-3\sqrt{2} & \mod(2-\sqrt{2}) \end{array} \right.$$