ÁLGEBRA I, 2015/16

RELACIÓN 2

1. Ejercicios de ecuaciones diofánticas en $\mathbb{Z}$

Ejercicio 1: Calcular las soluciones enteras positivas de la ecuación diofántica

$$10x + 46y = 4050.$$

Ejercicio 2: "Veintitrés viajeros cansados entraron en un bello bosque. Allí encontraron sesenta y tres montones de plátanos, de no más de cincuenta cada uno, y siete plátanos sueltos y se los dividieron en igual número de ellos ..." (cuento del año 850 a.c.). ¿Cuántos plátanos había en cada montón?

Ejercicio 3: Un gorro ruso cuesta 19 rublos, pero el comprador sólo dispone de billetes de 3 rublos, y el vendedor sólo de 5 ¿Podremos hacer la compra-venta? ¿Cómo?

Ejercicio 4: Enviamos por correo paquetes, unos a Francia y otros a Portugal. Por enviarlos a Francia nos cobran 15 céntimos más que por los que enviamos a Portugal. Sabiendo que hemos enviado más paquetes a Portugal que a Francia, que en total hemos enviado 12 paquetes, y que nos han cobrado un total de 13 euros con 20 céntimos, ¿cuántos paquetes hemos enviado a cada sitio y qué nos han cobrado por cada uno?

Ejercicio 5: Si un gallo vale cinco monedas, una gallina tres monedas, y tres polluelos juntos una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas, y polluelos, que sumen 100, podré comprar con 100 monedas?

Ejercicio 6: Un ruso dispone de 1 rublo para comprar 40 sellos de correos, de 1, 4, y 12 kopeks.¿Cuántos sellos de cada clase podrá comprar?

Ejercicio 7: En un mueble, se nos ha roto una pata de 4cm de altura. Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de varios discos de madera, unos de 5 mm de grosor y otros de 3mm. ¿Cuántos discos usaremos de cada clase?

Ejercicio 8: Una persona va al supermercado y compra 12 cajas de bolsas de leche, unas de leche entera y otras de desnatada, por 1200 euros. Si la leche entera vale 30 euros más por caja que la desnatada, y ha comprado el mínimo posible de desnatada ¿Cuántas cajas habrá comprado de cada una?

Ejercicio 9: Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3 sobran 2 y haciendo grupos de 4 sobran 3. hallar el número de manzanas que hay en el cesto sabiendo que están entre 100 y 110.

Ejercicio 10: Una bodega debe entregar un pedido de 81000 litros de vino sin embotellar. Para ello posee camiones cisterna que transportan 3500 litros cada uno y remolques cisterna que transportan 1500. Cada camión puede llevar como mucho un remolque y, lógicamente, los remolques no pueden circular solos. Además las cisternas deben ir llenas. Si la bodega quiere minimizar el número de camiones utilizados, ¿cuántos camiones y remolques debe utilizar?

2. Ejercicios en $K[x]$

Ejercicio 1: Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{Q}[x]$, de los polinomios $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ y $x^5 - 2x^4 - x + 2$.

Ejercicio 2: Encontrar, si existen, todos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$, con grado de $f(x)$ mínimo, tales que

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4)f(x) + (x^5 - 2x^4 - x + 2)g(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Ejercicio 3: Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{Z}_3[x]$, de los polinomios $x^4 + x^3 - x - 1$ y $x^5 + x^4 - x - 1$.

Ejercicio 4: Encontrar, si existen, todos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{Z}_3[x]$, con grado de $g(x)$ igual a 7, tales que

$$(x^4 + x^3 - x - 1)f(x) + (x^5 + x^4 - x - 1)g(x) = x^4 + x^2 + 1$$

Ejercicio 5: Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{R}[x]$, de los polinomios $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Ejercicio 6: Encontrar, si existen, todos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, ambos de grado 3, tales que

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)f(x) + (x^3 - 3x^2 - x + 3)g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Ejercicio 7: Determinar los polinomios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado menor o igual que tres que satisfacen las siguientes dos condiciones:
(1) Al dividir $f(X)$ entre $x^2 + 1$, el resto es $x - 1$.
(2) Al dividir $f(X)$ entre $x^2 + x + 1$, el resto es $x + 1$.

Ejercicio 8: Determinar todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ de grado menor o igual que 4, tales que: 1) el resto de dividir $f(x)$ entre $x^2 + 1$ es x, 2) el resto de dividir $x + f(x)$ entre $x^2 + x + 1$ es 1.

Ejercicio 9: En el anillo $\mathbb{Z}_3[x]$ determina los polinomios $f(x)$ de grado 2 tales que el polinomio producto $(x^3 + x + 2)f(x)$ da resto 1 al dividirlo por $x^2 + x + 2$.

Ejercicio 10: En el anillo $\mathbb{Q}[x]$ determina los polinomios $f(x)$ tales que el polinomio producto $(x^3 + +2x^2 + 2x + 1)f(x)$ da resto $x - 1$ al dividirlo por $x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Ejercicios en $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

Ejercicio 1: En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los enteros cuadráticos $2 - 3\sqrt{-2}$ y $1 + \sqrt{-2}$.

Ejercicio 2: Probar que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ el entero cuadráticos $2+\sqrt{2}$ y su conjugado $2 - \sqrt{2}$ son asociados. ¿Quienes son su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo?.

Ejercicio 3: En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, calcula $\mathrm{mcd}(3 + \sqrt{3}, 2)$ y $\mathrm{mcm}(3 + \sqrt{3}, 2)$.

Ejercicio 4: Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{Z}[i]$:

$$(2 + 5i)x + (3 - 4i)y = -1 + 5i.$$

Ejercicio 5: Determinar un entero de Gauss $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, tal que al dividirlo por 3 da resto i, mientras su resto al dividirlo $3 + 2i$ es $1 + i$.

Ejercicio 6: Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

$$(4 + \sqrt{2})x + (6 + 4\sqrt{2})y = \sqrt{2}.$$

Ejercicio 7: Determina enteros de Gauss $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, con $N(x) \leq 18$, tales que

$$4x + (3 + 3i)y = -1 + 5i$$

Ejercicio 8: En $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números 3 y $2+\sqrt{-2}$. Calcular también $u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ tal que

$$3u + (2+\sqrt{-2})v = \mathrm{mcd}(3, 2+\sqrt{-2}).$$

Ejercicio 9: Determinar un $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ cuya norma es $N(\alpha) \leq 7$, tal que al restarle $1+2\sqrt{-2}$ da un múltiplo de $2-3\sqrt{-2}$ y al restarle 3 resulta un múltiplo de $1+\sqrt{-2}$.

Ejercicio 10: Encontrar, si existe, una unidad $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, tal que su resto al dividirlo por $2+\sqrt{2}$ sea $3-\sqrt{2}$ y su resto al dividirlo por $2-\sqrt{2}$ sea $7-3\sqrt{2}$.