Álgebra I. Doble grado en Informática y Matemáticas. Final global, 2015/16.

NOMBRE:
DNI:

Cuestiones. (3 puntos. Acierto=0.75, Fallo=-0.5)

1. Dado el conjunto de números $\{100x + 40y \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

☐ no contiene a ningún múltiplo de 20.

☐ contiene algún múltiplo de 20, pero no a todos.

☐ contiene a todos los múltiplos de 20, pero también otros números lo son.

☐ contiene a todos los múltiplos de 20 y a ningún otro número.

2. En el anillo $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

☐ $1 + i\sqrt{5}$ es primo, pero no irreducible.

☐ $1 + i\sqrt{5}$ es irreducible, pero no primo.

☐ $1 + i\sqrt{5}$ ni es irreducible ni es primo.

☐ $1 + i\sqrt{5}$ es primo e irreducible.

3. Dados los grupos abelianos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ y $\mathbb{Z}_{36}$, ¿Cuál de los siguientes asertos es FALSA?

☐ Cualesquiera dos de ellos no son isomorfos.

☐ Cualquier grupo abeliano con 36 elementos es isomorfo a uno de estos.

☐ Dos grupos abelianos con 36 elementos son isomorfos si y solo si tienen el mismo anulador minimal.

☐ Una de las afirmaciones anteriores es falsa.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

☐ El polinomio $x^5 - 3x^3 + 6x - 12 \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible.

☐ El polinomio $x^5 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible.

☐ El polinomio $2x^3 - 6x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible.

☐ Una de las afirmaciones anteriores es falsa.

Teoría. (2 puntos, 1 por pregunta)

1. Dado el sistema de congruencias en un DE, $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a \bmod(m) \\ x \equiv b \bmod(n) \end{array} \right.$, demuestra que tiene solución si y solo si $a \equiv b \bmod(m, n)$ y, que en tal caso, las soluciones son congruentes módulo $[m, n]$.
2. Demuestra que el anulador minimal del $K[x]$-módulo definido por una matriz nunca es cero.

Ejercicios (5 puntos, 2.5 por ejercicio)

1. Determinar todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ de grado menor o igual que 4, tales que: 1) el resto de dividir $f(x)$ entre $x^2 + 1$ es x, 2) el resto de dividir $xf(x)$ entre $x^2 + x + 1$ es $x + 1$, y 3) $f(1) = 1$.
2. De la siguiente matriz A, determina sus polinomios característico y mínimo, sus factores invariantes y divisores elementales. También sus formas canónicas (Frobenius, Weierstrass y, si existen, de Jordan y diagonal).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$