

## Solución del ejercicio 3 de la relación 5 de problemas

Isabel M. Tienda Luna

En este documento el ejercicio 3 de la relación de problemas del tema 5 dedicado a la Electrónica Digital. El enunciado de este ejercicio es el siguiente:

Una posibilidad para construir un inversor con un transistor NMOS es usar una resistencia como carga. Si a la resistencia se coloca una fuente de  $V_{DD} = 15V$ , calcula  $V_{OL}$ ,  $V_{OH}$ , el margen de ruido en estado alto y el margen de ruido en estado bajo si:

1.  $R_D = 1k\Omega$

2.  $R_D = 1M\Omega$

Datos:  $k = 10^{-3} \frac{A}{V^2}$ ,  $V_T = 2V$ .

El circuito correspondiente a este ejercicio se muestra en el figura 1.

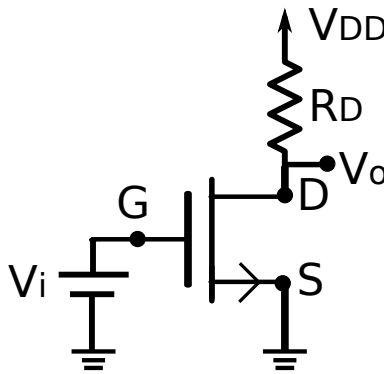


Figura 1: Circuito.

Como en todos los ejercicios con transistores MOSFETs empezamos escribiendo las ecuaciones del transistor. En este caso, según el dibujo, se trata de un transistor tipo n con lo cual las ecuaciones son:

- Corte. El transistor está en corte si

1.  $V_{GS} < V_T = 2V$

En este caso se cumple que

$$I_D = 0A \quad (1)$$

- Saturación. El transistor está en saturación si se cumplen dos condiciones:

1.  $V_{GS} > V_T = 2V$
2.  $V_{DS} > (V_{GS} - V_T) = (V_{GS} - 2V)$

en este caso se cumple que

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2 = \frac{10^{-3} \frac{A}{V^2}}{2} (V_{GS} - 2V)^2 \quad (2)$$

- Lineal. El transistor está en saturación si se cumplen dos condiciones:

1.  $V_{GS} > V_T = 2V$
2.  $V_{DS} < (V_{GS} - V_T) = (V_{GS} - 2V)$

en este caso se cumple que

$$I_D = \frac{k}{2} (2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2) = \frac{10^{-3} \frac{A}{V^2}}{2} (2(V_{GS} - 2V)V_{DS} - V_{DS}^2) \quad (3)$$

Una vez escritas las ecuaciones para las distintas regiones del MOSFET, pasamos a analizar el circuito en el que se encuentra el dispositivo para poder escribir las ecuaciones generales. En este caso, las **ecuaciones generales** del circuito son:

1. Para obtener la primera ecuación general del circuito utilizaremos el recorrido que aparece en la figura 2. Según este recorrido (pintado en gris en la figura), se cumple que:

$$V_{DD} = 15V = I_D R_D + V_{DS} = I_D 1k\Omega + V_{DS} \quad (4)$$

2. Para obtener la segunda ecuación general del circuito utilizaremos el recorrido que aparece en la figura 3. Según este recorrido (pintado en gris en la figura), se cumple que:

$$V_i = V_{GS} \quad (5)$$

3. Para obtener la tercera ecuación general del circuito utilizaremos el recorrido que aparece en la figura 4. Según este recorrido (pintado en gris en la figura), se cumple que:

$$V_o = V_{DS} \quad (6)$$

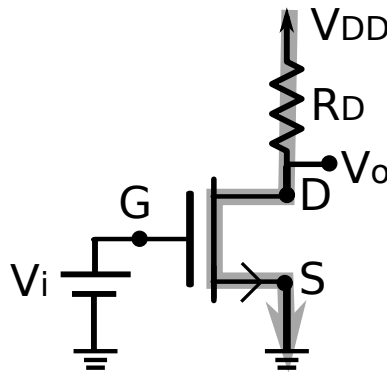


Figura 2: Obtención de la ecuación general 1.

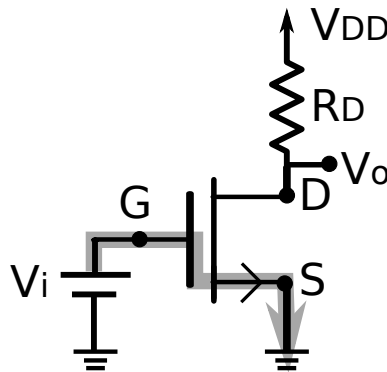


Figura 3: Obtención de la ecuación general 2.

Ahora, ya contamos con todas las ecuaciones necesarias para poder analizar el circuito. Hay que recordar, que el objetivo de este análisis es resolver el ejercicio 3 que está relacionado con la **característica de transferencia** del circuito. Recordamos que la característica de transferencia es una gráfica donde representamos en el eje x la entrada ( $V_i$ ) y en el eje y la salida del circuito ( $V_o$ ). Por tanto, para poder pintar la característica de transferencia del circuito es necesario buscar las ecuaciones que relacionan la salida ( $V_o$ ) y la entrada ( $V_i$ ) del circuito.

**¿Quiénes son la entrada y la salida del circuito?** Según la segunda ecuación general que hemos obtenido,  $V_i = V_{GS}$ . Por otro lado, si nos fijamos en la tercera ecuación general, podemos ver que la salida está puesta en el drenador por lo que  $V_o = V_{DS}$ .

Como el objetivo es encontrar las relaciones entre  $V_o$  y  $V_i$  en las distintas regiones de comportamiento del circuito, a continuación voy a escribir las ecuaciones del MOSFET y las ecuaciones generales sustituyendo  $V_{DS}$  por

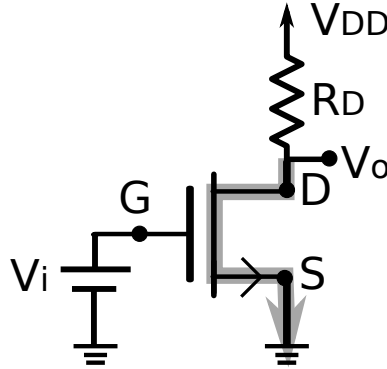


Figura 4: Obtención de la ecuación general 3.

$V_o$  y  $V_{GS}$  por  $V_i$ :

- Corte. El transistor está en corte si

1.  $V_i < V_T = 2V$

En este caso se cumple que

$$I_D = 0A \quad (7)$$

- Saturación. El transistor está en saturación si se cumplen dos condiciones:

1.  $V_i > V_T = 2V$
2.  $V_o > (V_i - V_T) = (V_i - 2V)$

en este caso se cumple que

$$I_D = 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V^2} (V_i - 2V)^2 \quad (8)$$

- Lineal. El transistor está en saturación si se cumplen dos condiciones:

1.  $V_i > V_T = 2V$
2.  $V_o < (V_i - V_T) = (V_i - 2V)$

en este caso se cumple que

$$I_D = 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V^2} (2(V_i - 2V)V_o - V_o^2) \quad (9)$$

Por su parte, las ecuaciones generales quedarían de la siguiente manera:

1. 
$$15V = I_D 1k\Omega + V_o \quad (10)$$

2. 
$$V_i = V_{GS} \quad (11)$$

3. 
$$V_o = V_{DS} \quad (12)$$

## 1. Región de corte

Según las ecuaciones correspondientes a la región de corte, cuando  $V_i < 2V$  el transistor está en corte. Además, según la ecuación 7, en esta región se cumple  $I_D = 0A$ . Usando este valor para la intensidad en la ecuación general 10, se obtiene:

$$15V = 0 \cdot 1k\Omega + V_o \Rightarrow V_o = 15V \quad (13)$$

Usando este valor de salida cuando la entrada es pequeña, podemos calcular  $V_{OH}$ . Por tanto, en nuestro caso,  $V_{OH} = 15V$ .

## 2. Región de saturación

Si aumentamos la entrada por encima de la tensión umbral  $V_i > V_T = 2V$  el transistor comenzará a conducir en saturación. En esta región se cumple la ecuación 8 para la intensidad por lo que para obtener la relación entre  $V_i$  y  $V_o$  sólo tenemos que sustituir la expresión 8 para  $I_D$  en la ecuación general 1 (ecuación 10). Al realizar esta sustitución se obtiene:

$$\begin{aligned} 15V &= I_D 1k\Omega + V_o \\ &= 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 + V_o \end{aligned}$$

de donde ya podemos despejar  $V_o$  en función de  $V_i$

$$V_o = 15V - 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 \quad (14)$$

De la ecuación anterior es interesante notar que, a medida que aumentamos el valor de  $V_i$ ,  $V_o$  va disminuyendo. O sea, que si la entrada aumenta, la salida disminuye.

### 3. Región de lineal

Si seguimos aumentando la entrada, llegará un momento en el que el transistor pasará de estar en saturación a conducir en región lineal. En esta región se cumple la ecuación 9 para la intensidad por lo que para obtener la relación entre  $V_i$  y  $V_o$  sólo tenemos que sustituir la expresión 9 para  $I_D$  en la ecuación general 1 (ecuación 10). Al realizar esta sustitución se obtiene:

$$\begin{aligned} 15V &= I_D 1k\Omega + V_o \\ &= 0,5 \frac{1}{V} (2(V_i - 2V)V_o - V_o^2) + V_o \\ 0 &= V_o^2 - 2(V_i - 1)V_o + 30 \end{aligned}$$

Operando en la ecuación anterior podemos despejar  $V_o$  en función de  $V_i$

$$V_o = \frac{2(V_i - 1) \pm \sqrt{4(V_i - 1)^2 - 120}}{2} \quad (15)$$

de las dos posibles soluciones (signo más y signo menos delante de la raíz), sólo nos quedamos con la que tiene el signo menos porque la resultante de usar el signo más no cumple la condición de lineal ( $V_{DS} < V_{GS} - V_T \Rightarrow V_o < V_i - V_T$ ).

Usando la definición del nivel lógico  $V_{OL}$  como la salida para la que la entrada es un 1 lógico (esto es el valor de  $V_o$  cuando  $V_i = V_{OH} = 15V$ ) se obtiene:

$$\begin{aligned} V_{OL} &= \frac{2(V_{OH} - 1) - \sqrt{4(V_{OH} - 1)^2 - 120}}{2} \\ &= \frac{2(15 - 1) - \sqrt{4(15 - 1)^2 - 120}}{2} \\ &= 1,12V \end{aligned}$$

### 4. Paso de corte a saturación

Cuando la entrada llega al valor de la tensión umbral ( $V_T = 2V$ ), se produce el paso de corte a saturación. Esto es, el transistor pasa de no conducir a conducir en régimen de saturación. En este momento, cuando  $V_{GS} = V_i = V_T = 2V$ , el transistor se encuentra a la vez en corte y en saturación y se cumplen las ecuaciones para los regímenes. O sea, se cumple a la vez que  $I_D = 0A$  y que  $I_D = \frac{k}{2}(V_i - 2V)^2$ .

¿Cómo es esto posible? Para comprobar que se cumplen las dos ecuaciones anteriores no hay más que sustituir en la segunda ecuación  $V_i = V_T = 2V$  y entonces  $I_D = \frac{k}{2}(2V - 2V)^2 = 0A$ . Otra alternativa para calcular el valor de  $V_i$  en el que se produce el paso de corte a saturación, es usar que

en ese punto han de cumplirse a la vez las ecuaciones que relacionan salida y entrada para estas dos regiones. Es decir, se tienen que cumplir a la vez las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} V_o &= 15V \\ V_o &= 15V - 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, para calcular el  $V_i$  en el que se produce la transición, sólo tenemos que igualar las ecuaciones anteriores:

$$15V = 15V - 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 \Rightarrow V_i = 2V \quad (16)$$

## 5. Paso de saturación a lineal

El paso entre saturación y lineal ocurre cuando  $V_{DS} = V_{GS} - V_T$ , en nuestro problema esto significa que tiene que cumplirse que  $V_o = V_i - 2V$ . Para calcular el valor de  $V_i$  en el que se produce este cambio haya varias alternativas. Una es resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 15V &= 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 + V_o \\ V_o &= V_i - 2V \end{aligned}$$

donde podemos sustituir la segunda ecuación en la primera y reducimos nuestro problema a resolver la ecuación

$$15V = 0,5 \frac{1}{V} (V_o)^2 + V_o.$$

Otra posibilidad es resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 15V &= 0,5 \frac{1}{V} (2(V_i - 2V) V_o - V_o^2) + V_o \\ V_o &= V_i - 2V \end{aligned}$$

donde podemos sustituir de nuevo la segunda ecuación en la primera y reducimos nuestro problema a resolver la ecuación

$$15V = 0,5 \frac{1}{V} (2(V_o) V_o - V_o^2) + V_o.$$

La tercera y última alternativa para calcular el valor de  $V_i$  en el que se produce el paso de saturación lineal es usar que en ese momento, han de cumplirse a la vez las ecuaciones que relacionan salida y entrada para estas dos regiones. Es decir, se tienen que cumplir a la vez las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} V_o &= 15V - 0,5 \frac{1}{V} (V_i - 2V)^2 \\ V_o &= \frac{2(V_i - 1) - \sqrt{4(V_i - 1)^2 - 120}}{2} \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular el valor de  $V_i$  para el que se cumplen las dos ecuaciones a la vez, sólo tenemos que igualarlas:

$$15V - 0,5(V_i - 2)^2 = \frac{2(V_i - 1) - \sqrt{4(V_i - 1)^2 - 120}}{2} \quad (17)$$

En cualquiera de los tres sistemas de ecuaciones anteriores, la solución es la misma. Por tanto, no importa la alternativa de las tres que escojamos, llegaremos a dos posibles valores para  $V_o$  y dos posibles valores para  $V_i$ . Hay dos porque al final, al solucionar los sistemas de ecuaciones queda una ecuación de segundo grado. Los valores que se obtiene son:

1.  $V_o = 4,6V$  y  $V_i = 6,6V$ .
2.  $V_o = -6,6V$  y  $V_i = -4,6V$ .

De las dos parejas de soluciones anteriores sólo la primera es correcta ya que en la segunda  $V_i = -4,6V$  que es menor que la tensión umbral ( $V_T = 2V$ ) y, por tanto, no es compatible con el hecho de que el transistor esté en el punto entre saturación y lineal donde debe cumplirse que  $V_{GS} = V_i > V_T = 2V$ .

## 6. Característica de transferencia

Ahora ya conocemos todas las ecuaciones y casi todos los puntos de interés de la característica de transferencia. Ya podemos dibujarla pero antes de hacerlo voy a resumir los resultados de las secciones anteriores:

### 6.1. Corte

El transistor está en corte si  $V_i < 2V$ . En esta región la ecuación que relaciona salida y entrada es  $V_o = 15V$  para cualquier valor de  $V_i$  ( $V_o$  es constante y no depende de  $V_i$ ).

### 6.2. Paso de Corte a Saturación

El transistor pasa de corte a saturación cuando la entrada vale justo la tensión umbral,  $V_i = 2V$ . En ese punto la salida vale aún  $V_o = 15V$ .

### 6.3. Saturación

El transistor entra en saturación en cuanto aumento  $V_i$  por encima de la tensión umbral ( $V_T = 2V$ ). En esta región la ecuación que relaciona salida y entrada es  $V_o = 15V - 0,5\frac{1}{V'}(V_i - 2V)^2$ .



#### 6.4. Paso de Saturación a Lineal

El transistor pasa de saturación a lineal cuando  $V_o = V_i - 2V$ . En ese punto hemos calculado que  $V_i = 6,6V$  y  $V_o = 4,6V$ .

#### 6.5. Lineal

En el momento en el que  $V_o < V_i - 2V$  el transistor entra en región lineal. En esta región la ecuación que relaciona salida y entrada es  $V_o = \frac{2(V_i-1) \pm \sqrt{4(V_i-1)^2 - 120}}{2}$ .

#### 6.6. Niveles lógicos

Utilizando que el nivel lógico alto ( $V_{OH}$ ) es el valor de salida cuando la entrada es un cero lógico (en este caso cuando  $V_i < 2V$ ), hemos encontrado que  $V_{OH} = 15V$ .

Utilizando que el nivel lógico bajo ( $V_{OL}$ ) es el valor de salida cuando la entrada es un uno lógico (cuando  $V_i = V_{OH}$ ), hemos encontrado que  $V_{OL} = 1,12V$ .

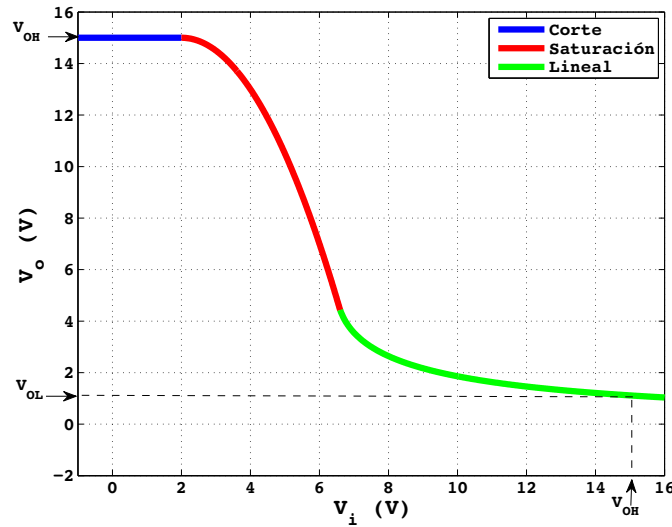


Figura 5: Característica de Transferencia.

#### 6.7. Característica de transferencia

Una vez que tenemos todas las ecuaciones ya podemos pintar la característica de transferencia. En la figura 5 aparece representada dicha carac-

terística donde se han usado distintos colores para las distintas zonas de comportamiento del MOSFET.

## 7. Márgenes de ruido

Para calcular los márgenes de ruido hay que usar la definición de los mismos:

- Margen de ruido en estado alto:  $NM_H = V_{OH} - V_{IH}$ .
- Margen de ruido en estado bajo:  $NM_L = V_{IL} - V_{OL}$ .

Por tanto, para calcular los márgenes de ruido necesito conocer los valores de  $V_{IH}$  y  $V_{IL}$ .

### 7.1. Cálculo de $V_{IL}$

$V_{IH}$  se define como el valor de la entrada ( $V_i$ ) para el que la derivada de la función que relaciona salida y entrada en saturación (ecuación 14) vale -1. Por tanto, lo que hay que hacer es la derivada de la ecuación 14

$$\frac{dV_o}{dV_i} = -(V_i - 2) \quad (18)$$

y el valor de  $V_{IL}$  se obtiene igualando la derivada a -1:

$$-(V_{IL} - 2) = -1 \quad (19)$$

de donde se obtiene  $V_{IL} = 3V$ .

Por tanto,  $NM_L = V_{IL} - V_{OL} = 3V - 1,12V = 1,88V$ .

### 7.2. Cálculo de $V_{IH}$

$V_{IH}$  se define como el valor de la entrada ( $V_i$ ) para el que la derivada de la función que relaciona salida y entrada en lineal (ecuación 15) vale -1. Por tanto, lo que hay que hacer es la derivada de la ecuación 15

$$\frac{dV_o}{dV_i} = 1 + \frac{(1 - V_i)}{\sqrt{(1 - V_i)^2 - 30}} \quad (20)$$

y el valor de  $V_{IH}$  se obtiene igualando la derivada a -1:

$$1 + \frac{(1 - V_{IH})}{\sqrt{(1 - V_{IH})^2 - 30}} = -1 \quad (21)$$

de donde se obtienen dos soluciones  $V_{IH1} = 7,3V$  y  $V_{IH2} = -5,3V$  de las cuales sólo la primera tiene sentido porque la segunda es menor que la tensión umbral y, por tanto, no puede corresponderse con una entrada válida para la región lineal donde la entrada tiene que ser mayor que la tensión umbral.

Por tanto,  $NM_H = V_{OH} - V_{IH} = 15V - 7,3V = 7,8V$ .