

Álgebra I. Doble grado en Informática y Matemáticas. Noviembre 2015

Cuestiones. (3 puntos. Acierto=0.75, Fallo=-0.5)

1. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?
 - ☐ $2+i$ e $i-2$ son unidades.
 - ☐ $2+i$ e $i-2$ son asociados.
 - ☐ $2+i$ e $i-2$ son irreducibles.
 - ☐ $2+i$ e $i-2$ son conjugados.
2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?
 - ☐ Dos polinomios de $\mathbb{Z}_3[x]$ son asociados si y solo si son iguales u opuestos.
 - ☐ El anillo $\mathbb{Z}_4[x]$ no es DI.
 - ☐ El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un DIP.
 - ☐ El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es un DE.
3. Estamos en un DI donde hay mcd de todo par de elementos ¿Cuál de los siguientes asertos es VERDAD?
 - ☐ Las tres afirmaciones siguientes son falsas.
 - ☐ Si $d = (a, b)$, entonces $(a, \frac{b}{d}) = 1$.
 - ☐ $(a, b) = (a - qb, b - pa)$.
 - ☐ $a, b, c = abc$.
4. Estamos en el anillo \mathbb{Z}_{24} ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?
 - ☐ Hay menor número de unidades que de divisores de cero.
 - ☐ La ecuación $22x = 0$ tiene 4 soluciones distintas.
 - ☐ No existe el inverso de 10.
 - ☐ La ecuación $22x = 3$ no tiene solución.

Ejercicios. (5 puntos, 2.5 por problema. Entregar las soluciones en folios aparte)

1. Resolver la ecuación $5^{3^{100}} x = 6$ en \mathbb{Z}_{28} (Comprobar las soluciones).
2. Determinar todas enteros $x \in \mathbb{Z}$ que satisfacen las congruencias siguientes en el anillo $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 + 2i\sqrt{2} & \text{mod}(2 - 3i\sqrt{2}) \\ x & \equiv & 3 & \text{mod}(1 + i\sqrt{2}) \end{cases}$$

(Comprobar las soluciones)

Teoría. (2 puntos, 1 por pregunta)

1. Sea φ la función de Euler. Argumenta que si $(m, n) = 1$ entonces $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Deduce entonces la fórmula de cálculo de φ .
2. Sea A un DIP y $m \in A$ un elemento que no es cero ni unidad. Prueba que en A/mA todo elemento es un divisor de cero o unidad. Demuestra entonces que son equivalentes:
1) m es irreducible, 2) A/mA es un DI, 3) A/mA es un cuerpo.