CÁLCULO I

1^0 Grado Matemáticas y 1^0 Doble Grado Física y Matemáticas,
Curso 2018–2019, Primer cuatrimestre

II. Ejercicios (Raíces, intervalos, densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Tema 4.)

1. Probar que:

$$\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2. Sea $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; pruébense las siguientes afirmaciones:
1)

$$\alpha = \text{Sup } A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a \le \alpha, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

2)

$$\alpha = \text{Inf } A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a \ge \alpha, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists a \in A : a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Pruébese que $a = \text{Inf }]a, b[$ y que $b = \text{Sup }]a, b[$. ¿Qué ocurre para los intervalos $[a, b],]a, b]$ y $[a, b[$?

4. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que el conjunto que se indica está acotado, calcular su supremo e ínfimo, y justificar si tiene máximo y mínimo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + x < 2\}\,; \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \le 3\}\,; \qquad C = \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \,:\, x^2 \le 2\}$$

5. Comprobar las siguientes igualdades:

$$\text{Sup} \left\{1 - \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1\,; \qquad \text{Inf} \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{2^n} \,:\, m, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

6. Prueba que si $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\text{Sup } \{y \in \mathbb{Q} : y < x\} = x = \text{Inf } \{y \in \mathbb{Q} : x < y\},$$

$$\text{Sup } \{y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : y < x\} = x = \text{Inf } \{y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < y\},$$

7. Probar que $\mathbb{Q}$ no verifica la siguiente versión del axioma de Dedekind, es decir, dar un ejemplo de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{Q}$ tales que $a \le b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, pero no existe $x \in \mathbb{Q}$ verificando que $a \le x \le b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

8. Pruébese que si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

9. Probar que $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ es un número irracional.

10. Prueba por inducción que para $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\prod_{k=1}^{n} y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} y_k \geq n$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$.

Deduce la llamada "**desigualdad de las medias**": para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

¿Cuándo se da la igualdad?

11. Probar que cualquier natural n tal que $n > 1$, se verifica:

$$n\,! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Indicación: Es una aplicación directa de la desigualdad de las medias.