Juan de Dios Pérez y Alfonso Romero

Parcial

1. Contesta razonadamente las siguientes cuestiones:
   - Sea V un e.v. sobre K con dimensión 1. ¿Es cierto que parra cada $f \in End_K(V)$ existe un único $a \in K$ de manera que f(v) = av $\forall v \in V$?
   - Para $g \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ se sabe que g(1,3) = (0,2) y g(4,2) = (1,1). ¿Puede ocurrir que g(2,5) = g(1,2)?
   - Se sabe que $h \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tiene rango 1.
     - ¿Es posible encontrar bases ordenadas B y B' de $\mathbb{R}^2$ de manera que $M(h, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?
     - ¿Es osible encontrar siempre una base ordenada $\tilde{B}$ de manera que $M(h, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Considera $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$ no nulas tales que $Ker(\alpha) = Ker(\beta)$. ¿Existe $c \in \mathbb{R}^*$ tal que $\beta = c\alpha$?

2. Se consideran los subespacios $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-3y+2z = 0 \text{ y } x + y + z = 0\}$. Construye, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que cumpla que Im(f) = U y Ker(f) = W, dando además su matriz respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$.

3. Se considera $\phi \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ dada por $\phi(A) = b - c$ para cada $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   - Encuentra una base $\tilde{B}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ que contenga a ϕ.
   - Calcula la base B de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ cuya dual es $\tilde{B}$.
   - En una base ordenada B'' obtenida de $\tilde{B}$, calcula las coordenadas de la forma lineal ψ dada por $\psi(A) = 2a - 3c$.