Examen de Cálculo I

5 de diciembre de 2012

Soluciones

1. Sean A y B conjuntos de números reales, no vacíos y minorados, verificando que $\inf A = \inf B = 1$. Se considera el conjunto

$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a+b}} \ : \ a \in A\,,\ b \in B \right\}$$

Probar que C está mayorado y calcular su supremo.

Solución

Para $c \in C$, tenemos $c = 1/\sqrt{a+b}$ con $a \in A$ y $b \in B$. Por ser $a \geq \inf\ A = 1$ y también $b \geq \inf\ B = 1$, deducimos:

$$a + b \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a+b} \geq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hemos probado que $1/\sqrt{2}$ es mayorante de C, así que C está mayorado y $\sup\ C \leq 1/\sqrt{2}$.

Por otra parte, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, tenemos $1/\sqrt{a+b} \in C$. Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} \leq \sup C \quad \Rightarrow \quad a + b \geq \frac{1}{(\sup\ C)^2} \quad \Rightarrow \quad a \geq \frac{1}{(\sup\ C)^2} - b$$

Como esta desigualdad es válida para todo $a \in A$, tenemos que $1/(\sup\ C)^2 - b$ es minorante de A. Por tanto:

$$\frac{1}{(\sup\ C)^2} - b \leq \inf\ A = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\sup\ C)^2} - 1 \leq b$$

Ahora, esta desigualdad es válida para todo $b \in B$, luego $1/(\sup\ C)^2 - 1$ es minorante de B. Por tanto,

$$\frac{1}{(\sup\ C)^2} - 1 \leq \inf\ B = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sup\ C)^2 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sup\ C \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Junto con la otra desigualdad ya probada, concluimos: $\sup\ C = 1/\sqrt{2}$.

2. Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 1\,, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^3}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\left\{ \sqrt[n]{x_n} \right\}$.

Solución

Es claro que $x_1 > 0$ y, suponiendo que $x_n > 0$, tenemos

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^3}} > 0$$

Por inducción, hemos probado que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, la sucesión $\{x_n\}$ está minorada.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\sqrt{1+x_n^3} > 1$, luego

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n^3}} < 1$$

Esto prueba que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente, pero también está minorada, luego es convergente.

Poniendo $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tenemos que $\{x_{n+1}\} \to L$, pero también

$$\{x_{n+1}\} = \left\{ \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^3}} \right\} \to \frac{L}{\sqrt{1+L^3}}$$

Por tanto:

$$L = \frac{L}{\sqrt{1+L^3}} \quad \Rightarrow \quad L^2(1+L^3) = L^2 \quad \Rightarrow \quad L^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0$$

Queda así probado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

De $\{x_n^3\} \to 0$ deducimos que

$$\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x_n^3}} \right\} \to 1$$

Aplicando el criterio de la raíz, concluimos que $\left\{ \sqrt[n]{x_n} \right\} \to 1$.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando las respuestas:

a) Toda unión de conjuntos finitos es un conjunto numerable.

Solución. Esta afirmación es FALSA. Sabemos que $\mathbb{R}$ no es numerable, pero escribiendo

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$$

vemos que $\mathbb{R}$ es una unión de conjuntos, cada uno de los cuales es finito, pues tiene sólo un elemento.

b) El conjunto $\{r\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución. Esta afirmación es CIERTA. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, se tiene $x/\sqrt{2} < y/\sqrt{2}$, luego, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}$, es decir, $x < r\sqrt{2} < y$.

c) Toda sucesión monótona, que admita una sucesión parcial convergente, es convergente.

Solución. Esta afirmación es CIERTA. Una sucesión monótona ha de ser convergente o divergente, pero si es divergente, todas sus sucesiones parciales también lo son, luego si admite una sucesión parcial convergente, tendrá que ser convergente.

d) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones divergentes, entonces $\{x_n + y_n\}$ es convergente o divergente.

Solución. Esta afirmación es FALSA. Tomando $\{x_n\} = \{n + (-1)^n\}$ e $\{y_n\} = \{-n\}$, es claro que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son divergentes y, sin embargo, la sucesión $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n\}$ no converge ni diverge.