ÁLGEBRA I. 2015/16

RELACIÓN 5

Ejercicio 1: En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, factoriza $3+\sqrt{3}$ en irreducibles y calcula, usando esas factorizaciones, $\mathrm{mcd}(3+\sqrt{3},2)$ y $\mathrm{mcm}(3+\sqrt{3},2)$.

Ejercicio 2: En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, comprobar que $4=2\cdot 2$ y $4=(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$ son dos factorizaciones en irreducibles no equivalentes, ¿es $(1+\sqrt{5})$ primo?.

Ejercicio 3: En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, prueba que 3 divide al producto $(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})$, pero no divide ni a $4+\sqrt{10}$ ni a $4+\sqrt{10}$. ¿Es 3 primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$?, ¿es irreducible?.

Ejercicio 4: Factorizar en irreducibles los siguientes elementos:

(1) $66+12i$ en $\mathbb{Z}[i]$,

(2) $4+7\sqrt{2}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejercicio 5: Calcular las unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y demostrar que en este anillo

$$4=2.2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

son dos factorizaciones en irreducibles, y no equivalentes, del número 4. Razonar que los irreducibles en esas factorizaciones no son primos.

Ejercicio 6: Factorizar 300 como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 7: Demostrar que los elementos 2, 7, $1+\sqrt{13}i$ y $1-\sqrt{13}i$ son irreducibles no asociados en $\mathbb{Z}[\sqrt{13}i]$. Encontrar dos factorizaciones distintas en irreducibles de 14 y a partir de ella concluir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{13}i]$ hay elementos irreducibles que no son primos.

Ejercicio 8: Demuestra que los elementos $2, 1+\sqrt{-7}, 1-\sqrt{-7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ son irreducibles. Prueba que el número 8 puede ser factorizado en términos de esos irreducibles de dos formas no equivalentes. ¿Es 2 primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$?.

Ejercicio 9: Calcular, si existe, el inverso de la clase del elemento $[2+3i]$ en el anillo cociente $A=\mathbb{Z}[i]/(2+2i)\mathbb{Z}[i]$. Encontrar, si existe, un divisor de cero no nulo en A. ¿Es A un cuerpo?

Ejercicio 10: Estudiar la irreducibilidad de los siguientes polinomios de $\mathbb{Z}[x]$:

$2x^5-6x^3+9x^2-15$	x^4+15x^3+7	$x^5+x^4+x^2+x+2$
$12x^7+6x^4+9x+8$	$x^3+17x+36$	x^5-x^2+1
$x^4+10x^3+5x^2-2x-3$	$x^4+6x^3+4x^2-15x+1$	$6x^4+9x^3-3x^2+1$
$x^5+5x^4+7x^3+x^2-3x-11$	$x^5-10x^4+36x^3-53x^2+26x+1$	$x^4+6x^3+4x^2-15x+1$
$x^6+3x^5-x^4+3x^3+3x^2+3x-1$	$x^4+4x^3-x^2+4x+1$	$x^5-6x^4+3x^3+2x-1$
$2x^4+2x^3+6x^2+4$	$2x^4+3x^3+3x^2+3x+1$	$x^4-x^3+9x^2-4x-1$
$x^7+5x^6+x^2+6x+5$	$3x^5+42x^3-147x^2+21$	$x^5+3x^4+10x^2-2$
x^4+3x^2-2x+5	$3x^6+x^5+3x^2+4x+1$	$2x^4+x^3+5x+3$
$2x^5-2x^2-4x-2$	$x^6-2x^5-x^4-2x^3-2x^2-2x-1$	$3x^4+3x^3+9x^2+6$
$x^4+3x^3+5x^2+1$	$2x^4+8x^3+10x^2+2$	$x^4+4x^3+6x^2+2x+1$

Ejercicio 11: Probar que los siguientes polinomios de $\mathbb{Z}[x,y]$ son irreducibles:

$$x^4y^3+15y^2+7,\quad y^5+x^2y^2+x^3,\quad x^3y+(x+1)^2y^2+x+1.$$