

# Álgebra I. Grado en Matemáticas e Informática

## 01/02/2013

### PARTE TEÓRICA:

**Pregunta 1.-** Define el concepto de *Dominio Euclídeo*, y demuestra que el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  es un Dominio Euclídeo.

**Pregunta 2.-** Enuncia y demuestra el *Lema de Gauss* sobre polinomios primitivos.

### EJERCICIOS:

**Ejercicio 1.-** Estudiar la irreducibilidad de los siguientes polinomios de  $\mathbb{Z}[x]$ :

$$x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad 5x^4 - 24x^3 + 12x^2 - 12, \quad x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 1.$$

**Ejercicio 2.-** Determinar todos los polinomios  $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$  de grado menor o igual que 4, tales que: 1) el resto de dividir  $f(x)$  entre  $x^2 + 1$  es  $x$ , 2) el resto de dividir  $xf(x)$  entre  $x^2 + x + 1$  es  $x + 1$ , y 3)  $f(1) = 1$ .

**Ejercicio 3.-** Resuelve la ecuación  $2^{1000}x = 7$  en el anillo  $\mathbb{Z}_9$ .

**Ejercicio 4** En una reunión hay entre 25 y 100 personas que quieren jugar a las cartas, dividiéndose en equipos de igual tamaño. Pero tienen un problema: les sobra siempre una persona para poder formar equipos de 2, 3, 4, 5 o 6. Hallar el número de personas de la reunión.

**Ejercicio 5** En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{14}i]$  se verifica que  $(1 + \sqrt{14}i)(1 - \sqrt{14}i) = 15 = 3 \cdot 5$ . Demostrar que los elementos 3, 5,  $1 + \sqrt{14}i$  y  $1 - \sqrt{14}i$  son irreducibles y no asociados entre sí. ¿Es 3 primo en este anillo? ¿Es  $\mathbb{Z}[\sqrt{14}i]$  un Dominio de Factorización Única?