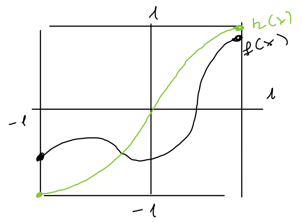
3. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ Una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1,1]$ tal que $f(c) = c^3$.

Si hacemos un dibujillo orientativo:



Se viene suspenso 😊

Cualquier función continua que vaya de $(-1,-1)$ a $(1,1)$

Consideramos $h(x) = x^3$ y calculamos la diferencia $f(x) - h(x) = g(x)$

g continua

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$g(-1) = f(-1) + 1 \geqslant 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$

Si $g(-1) = 0$ o $g(1) = 0$, entonces hemos acabado. $\Rightarrow$ $c = -1$ o $c = 1$

En otro caso $g(-1) > 0$ y $g(1) < 0$, en cuyo caso, el Teorema de Bolzano $\exists c \in]-1,1[\ / \ g(c) = 0$

El caso más sencillo:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in [a,b]$

$\exists \ c \in [a,b] : f(c) = c$

$f(x) = x$. $g(x) = f(x) - x$ ¿ $\exists c \ / \ g(c) = 0$?

$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{array}\right\}$ Si $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$ hemos terminado. En otro caso $g(a) > 0$, $g(b) < 0$, en cuyo caso el Teorema de Bolzano dice $\exists c \in]a,b[\ / g(c) = 0$

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en $[a,b]$ tal que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a,b]$. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = f(a), \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Equivale a:

$$\begin{cases} \{x_n\} \to u \in [a,b] \\ f(u) = u \end{cases}$$

$a \leq x_1 \Rightarrow$ Como f es creciente $\Rightarrow$ $f(a) = x_1 \leq f(x_1) = x_2$ $\Rightarrow$ Se deduce que la sucesión es creciente.

Si consideramos el conjunto $A = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1} \}$

$1 \in A \Rightarrow x_1 \leq x_2$

$n \in A \ / \ x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2} \Rightarrow n+1 \in A$

Luego se verifica que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente

$x_n \leq b$ $\quad \{x_n\} \to u \leq b$ $\quad a \leq u \leq b$

Tomando límites en $x_{n+1} = f(x_n)$ $\Rightarrow$ $\boxed{u = f(u)}$

Definición de continuidad en u.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A) = f(\sup A)$.

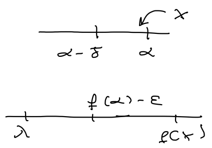
$\alpha = \sup A$, luego si $x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(\alpha)$, luego $f(\alpha)$ es un mayorante de los valores de $f(A) \Rightarrow \underline{\sup f(A) \leq f(\alpha)}$

Por la caracterización del supremo y el ínfimo:

$$\alpha = \lim \underset{A}{\underset{\cap}{\{x_n\}}} \Rightarrow f(\alpha) = \lim \underset{f(A)}{\underset{\cap}{\{f(x_n)\}}} \Rightarrow \underline{f(\alpha) = \sup f(A)}$$

Otra forma:

$\lambda = \sup f(A) < f(\alpha)$

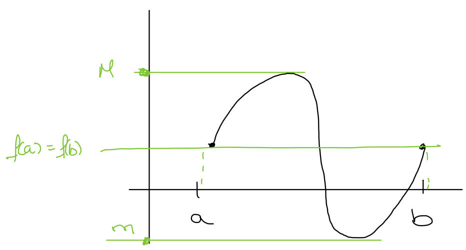


$\alpha - \delta < \underset{A}{\underset{\cap}{x}} \leq \alpha \Rightarrow 0 \leq f(\alpha) - f(x) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(x) > f(\alpha) - \varepsilon > \lambda}$!!!

Se llega a una contradicción de que no puede ser menor estricto

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a, b])$, $m = \min f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $]m, M[$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.



$f(x_0) = M$, $f(y_0) = m$ $\quad x_0, y_0 \in [a,b]$

$x_0 < y_0$

$f([x_0, y_0]) = [m, M]$, $\quad f(\overbrace{]x_0, y_0[}) \supset \,]m, M[$

$f([a, x_0]) \supseteq [f(a), M]$

$f([y_0, b]) \supseteq [m, f(b)] = [m, f(a)]$

Luego, $f(\underbrace{[a, x_0] \cup [y_0, b]}) \supseteq [m, M]$

son intervalos disjuntos

6. Sea $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in]0,1[$ por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$. Calcula el conjunto imagen $f(]0,1[)$.

f es continua porque es una función racional (menos en el 0 y el 1) y por lo que, en particular, será continua en dicho intervalo ($]0,1[$). Como está definida en un intervalo, $f(]0,1[) = J$ es un intervalo.

$\{\frac{1}{n}\}$ $\quad f(\frac{1}{n}) = \dfrac{\frac{2}{n}-1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)} = \dfrac{2-n}{\frac{1}{n}-1} = n\dfrac{n-2}{n-1} \longrightarrow +\infty \Rightarrow J$ no está mayorado

$M>0$, $n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) > M$

$\{1-\frac{1}{n}\}$ $\quad f(1-\frac{1}{n}) = \dfrac{1-\frac{2}{n}}{(1-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n})} = \dfrac{2-n}{1-\frac{1}{n}} \longrightarrow -\infty$ $\quad m<0$ entonces

$\exists n_1 \in \mathbb{N} / n \geq n_1 \quad f(1-\frac{1}{n}) < m \Rightarrow J$ no está minorado

luego $J = \mathbb{R}$.

7. Sea $f :]-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in]-1,1]$ por $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

a) Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio que debes enunciar, el conjunto $f(]-1,1])$.

b) Calcula, usando un resultado sobre continuidad y monotonía que debes enunciar, el conjunto $f([-1/2,1/2])$.

a) $f(1)=0$

$f(]-1,1]) = [0,+\infty]$

f es continua por ser composición de funciones continuas. $J = f(]-1,1])$, $J \subseteq \mathbb{R}_0^+$

Consideramos la sucesión $\{-1+\frac{1}{n^2}\} \Rightarrow f(-1+\frac{1}{n^2}) = \sqrt{n(2-\frac{1}{n^2})} \longrightarrow +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El intervalo J no está mayorado y $0 \in J$ y $J \subseteq \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow f(]-1,1]) = [0,+\infty[$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x,y \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \\ x \neq y \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ equivale a que $f(x) = f(y) \Rightarrow x=y$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2} = \sqrt{3}$

$f([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ (Para que esto se verifique hay que probar que f es inyectiva)

$\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1-y}{\sqrt{1+y}} \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1+y} = (1-y)\sqrt{1+x} \Leftrightarrow (1-x)^2(1+y) = (1-y)^2(1+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Acabar ...

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) < b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$ tal que $\beta = \sup f([a, \beta[)$. Además $\beta \leqslant f(\beta)$. Si suponemos que f es continua en β entonces $\beta = f(\beta)$.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = a < f(a) = x_2 \quad \{x_n\} \nearrow \\ x_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_n\} \to \beta \leq b \qquad \beta \in]a,b]$

$a \leqslant x < \beta \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad a \leqslant x < x_{n_0} < \beta \Rightarrow f(x) < f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} < \beta \Rightarrow$ β es un mayorante de $f([a, \beta[)$, luego $\sup f([a, \beta[) \leqslant \beta$

$\varepsilon > 0$, $\quad \beta - \varepsilon < x_n \in f([a, \beta[)$ luego $\beta - \varepsilon$ no es un mayorante de $f([a, \beta[)$