Documento anónimo

ejerciciosseries.pdf

Ejercicios Resueltos

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Series de números reales

1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$

e) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Solución 1.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$. Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{\frac{n^2+1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}\,\frac{1}{e^{1/n}} = 0 < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

d) $\sum \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$

e) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Solución 2.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

NEWS

WUOLAH

LUN 28 ENE

Noticias para el mundo universitario.

nº 21. Semana del 28 al 3

El notición, los jóvenes necesitan más horas de sueño que el resto

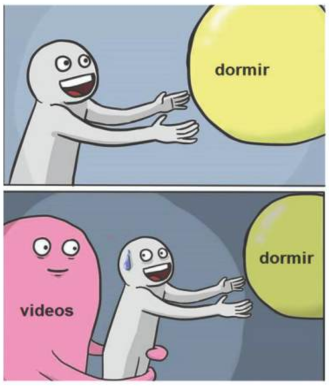
Más horas de sueño para los jóvenes, la noticia que todos estábamos esperando con ansia.

Aún eres un jovenzuelo y crees que eres más flojo que un "muelle guita" por dormir 10 horitas el fin de semana. No te preocupes, un estudio confirma que los jóvenes necesitan entre 8 y 10 horas de sueño por noche (o por día, según si pasas toda la noche jugando al Fornite).

Los centros de educación secundaria y superior comenzarán sus clases a las 9:00 a.m. en lugar de las 8:00 a.m. u 8:30 a.m. Una lástima que sólo sea en Francia. Está bien, perdón por las falsas ilusiones pero teníamos que crear expectación.

La presidenta de París desata un estrepitoso revuelo en Francia al afirmar que los jóvenes necesitan más horas de sueño que los niños y los adultos. Ya no somos tan adultos ahora, eh.

Valérie Pécresse, presidenta de la región, ha propuesto cambiar el horario de los liceos entre media y una hora más tarde. Algo que no le ha hecho la más mínima gracia al ministro de educación. El hombre no parece muy buena persona, mira que no comprender a los pobres jóvenes. Que no son vagos señor, que sólo tienen sueño. Tampoco es que la mujer se lo haya inventado, que se ha basado en un estudio.



Publicado en la revista *Sciences Advances* este estudio se apoya en un experimento realizado en Seattle. La prueba consistía en retrasar el horario matutino en algunos establecimientos. Resultados: mejor horas de sueño, más rendimiento y menos ausencia.

Los científicos argumentan que la luz, entre otros factores, afecta a nuestro reloj biológico, pero que en los adolescentes esta sensibilidad disminuye. Por eso, los jóvenes tienden a dormirse y despertarse más tarde. Vamos, que pedirle a un joven que se levante a las 7:30 a.m. es lo mismo que pedirle a un adulto que se despierte a las 5:30 a.m. Menuda crueldad, no me extraña que los jóvenes de hoy en día estén "empanaos", si es que no rinden.

Los estudios también recogen que la luz azul de los dispositivos electrónico igualmente afectan a las horas de sueño. Esto pasa por entregar el trabajo en el último momento, que te pasas toda la noche tecleando más que Beethoven tocando La Sonata para piano n.º 14 en do sostenido menor *Quasi una fantasia*.

Hipertensión, ansiedad, diabetes, obesidad, accidentes. ¿Quieres tener buena salud? Pues vete a vivir a Francia porque en España vas a dormir menos que el Tato.

Algunos consejos para preservar tus horas de sueño.

1. Deja el Fornite, tu cuenta de Netflix o cualquier vicio nocturno. ¿Eres un chico o chica gamer y te gusta pasarte tus 12 horas frente a la pantalla del ordenador? Pues no lo hagas de noche, duerme más y ve a clase a tomar nota. Si aún así por la mañana te es imposible levantarte, siempre puedes pillar apuntes en Wuolah.

2. Olvídate de filosofar por la noche. Tienes mucho sueño, llega la noche, te metes a la cama y tu cerebro está bailando la conga en ese momento. Deja de pensar en la muerte, en el cosmos o en lo que dijiste en 2012 a tu amigo. Relájate, mente en blanco y a dormir. Ya habrá tiempo de pensar durante el día.

3. ¿Conversaciones profundas a las 3 de la mañana? Estas hablando con tu mejor amigo o de repente te habla la persona que te gusta y claro, no puedes cortarle. Déjate de conversaciones sobre la existencia, la última peli spiderman o el cotilleo del barrio. Corta el seco y a dormir, tus amigos te lo agradecerán.

4. No sigas la Ley del vago, el último día lo hago. Ponte al día con los trabajos, que no se diga que eres un holgazán.

Wuolah Giveaway

Kit de estudio. Consigue este kit que incluye 5 cuadernos Oxford, 7 bolígrafos Pilot de varios colores, una luz de lectura con pinza y un atril.

Pack de calcetines Suckmysocks. Calentitos, reconfortables. Participa en el sorteo y llévate este pack de calcetines de maravillosos diseños.

a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^{(n+1)}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{e}{3} < 1,$$

y, por tanto, la serie es convergente. Observa que en el último paso hemos utilizado la regla del número e.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

Ejercicio 3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
c) $\sum \frac{1}{2n-1}$
d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$
e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$
f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Solución 3.

a) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n}$ que no es convergente. Como $\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, la serie no es convergente.

b) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ no es convergente.

c) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.

d) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

e) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

f) No es convergente porque $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

g) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^{7/6}}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{7/6} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$

b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$

c) $\sum \frac{1}{n(\log(n))\log(\log(n))}$

Solución 4.

a) Aplicando el criterio de condensación, la serie tiene el mismo carácter que la serie $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log(2^n)} = \sum \frac{1}{\log(2^n)} = \sum \frac{1}{n\log(2)}$ y esta última serie no es convergente comparando con $\sum \frac{1}{n}$.

b) Aplicando el criterio de condensación $\sum 2^n \frac{1}{2^n(\log(2^n))^2} = \sum \frac{1}{n^2(\log(2))^2}$ y esta última serie es convergente (compárase con $\sum \frac{1}{n^2}$).

c) El término general es decreciente y convergente a cero. Estamos en condiciones de aplicar el criterio de condensación. La serie tiene el mismo carácter de convergencia que la serie

$$\sum \frac{2^n}{2^n \log(2^n)\log(\log(2^n))} = \sum \frac{1}{n\log(2)\log(n\log(2))}$$

que, a su vez y por el criterio de comparación por paso al límite, se comporta igual que $\sum \frac{1}{n\log(n)}$. Esta última serie ya sabemos que no es convergente (véase el Ejercicio ??).

Ejercicio 5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$

b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$

d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$

e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Solución 5.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

a) No es convergente porque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.
b) No es convergente porque el término general no tiende a cero: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.
c) Como $\log(n) \geq 1$ para $n \geq 3$, se tiene que $\frac{1}{n^2\log(n)} \leq \frac{1}{n^2}$, para cualquier $n \geq 3$. La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y, el criterio de comparación nos dice que $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$ también lo es.
d) El término general no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente.
e) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$
b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Solución 6.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.
b) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.
c) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ es convergente, ambas lo son.
d) No es convergente porque el término general no converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1} - 1\right) = L$$

y el segundo límite vale

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n-3n-1}{3n+1}\right) = -1/3.$$

Por tanto el término general de la serie converge a $e^{-1/3} \neq 0$.
e) Aplicamos el criterio de la raíz

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{4}<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$
b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
c) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
d) $\sum \frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$
e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$
f) $\sum \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}$
g) $\sum \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}$

Solución 7.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}}=\frac{1}{e}<1$ y, en consecuencia, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n+3}=0<1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

f) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)(2n+4)}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+4}=1$$

pero, como $\frac{2n+1}{2n+4}\leq1$, el criterio del cociente no decide. Ya que hemos calculado $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{2n+1}{2n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+4}=\frac{3}{2}>1$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

y, por tanto, la serie es convergente.

g) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2n+2)}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)\cdot(2n+5)}}{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+5} = 1,$$

pero $\frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$ por lo que el criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum(-1)^n \frac{20^n}{n+1}$

b) $\sum\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2$

c) $\sum\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum\log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$

e) $\sum\frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$

f) $\sum(-1)^n e^{-n}$

Solución 8.

a) No es convergente porque el término general no converge a cero.

b) Aplicamos el criterio de Raabe y llegamos a $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} \leq 1$, de lo que se deduce la no convergencia de la serie.

c) Comparamos con la serie armónica $\sum\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log(e) = 1$$

y, por tanto, la serie no es convergente.

d) Podemos escribir el término general de la forma:

$$a_n = \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right).$$

Comparando con la serie $\sum\frac{1}{n^2}$ se obtiene la convergencia de la serie dada.

e) Comparamos con la serie $\sum\frac{\log(n)}{n^{5/3}}$ ya que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{\log(n)}{n^{5/3}}} = 1$$

Y aplicando el criterio de condensación a la serie $\sum\frac{\log(n)}{n^{5/3}}$ se obtiene que es convergente, luego la de partida también lo es.

f) No hay más que aplicar el criterio de Laeibnitz para series alternadas.

E **Ejercicio 9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum\frac{1+\log(n)}{n^n}$.

Solución 9.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

a) Aplicamos el criterio de la raíz, considerando como $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$. Tendremos entonces que estudiar el límite de $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n}$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\lim n\left(\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right) = \lim \frac{-4n}{2n+5} = -2 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como $a_n = \frac{1+\log(n)}{n^n}$; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor1:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \frac{n^n}{(n+1)^n\,(n+1)} \\ &= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por $\log(n+1)$), el segundo factor converge a e^{-1} (basta aplicar la regla del número e) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ es convergente.}$$

E **Ejercicio 10.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

Solución 10.

a) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que en para $a = 1$ es la serie armónica que no converge, y para $a > 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

b) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a \geq 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

2 Suma de series

Ejercicio 11. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Solución 11.

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) La suma es $\frac{1}{2}$ puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo ??.

c) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Ejercicio 12. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

Solución 12.

a) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

c) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$

Ejercicio 13. Suma la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$

Solución 13. Esta serie se suma haciendo uso de que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, y para ello descomponemos el numerador del término general de la forma siguiente:

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

$$n^2 + n + 1 = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$$

e igualando coeficientes obtenemos que $\alpha = 1, \beta = 2$ y $\gamma = 1$. Por tanto la suma de la serie (que existe por el criterio del cociente) es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e + 2e + (e-1) = 4e - 1.
\end{aligned}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.