sucesiones_solucionados1.pdf

Ejercicios Resueltos

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

Capítulo 1

Problemas de Sucesiones

Problema 1.1 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)\operatorname{sen}(n)}{n} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2^n}{5^n} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(\frac{n}{n-1})} \quad (iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)\operatorname{sen}(n)}{n} = \begin{bmatrix} \text{escala de infinitos} \\ \operatorname{sen}(n) \ \ \text{acotada} \end{bmatrix} = 0 \times \text{acotada} = 0.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n = [(\text{ número menor que uno })^\infty] = 0+0=0.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(\frac{n}{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = [\text{ infinitésimo del logaritmo }] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n-1)}{n} = 3.$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \cdots$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ y $b_n = n\sqrt{n}$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$$

NEWS

WUOLAH

LUN 28 ENE

Noticias para el mundo universitario.

nº 21. Semana del 28 al 3

El notición, los jóvenes necesitan más horas de sueño que el resto

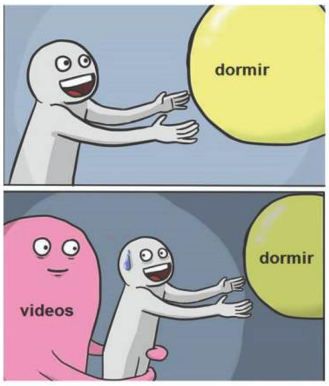
Más horas de sueño para los jóvenes, la noticia que todos estábamos esperando con ansia.

Aún eres un jovenzuelo y crees que eres más flojo que un “muelle guita” por dormir 10 horitas el fin de semana. No te preocupes, un estudio confirma que los jóvenes necesitan entre 8 y 10 horas de sueño por noche (o por día, según si pasas toda la noche jugando al Fornite).

Los centros de educación secundaria y superior comenzarán sus clases a las 9:00 a.m. en lugar de las 8:00 a.m. u 8:30 a.m. Una lástima que sólo sea en Francia. Está bien, perdón por las falsas ilusiones pero teníamos que crear expectación.

La presidenta de París desata un estrepitoso revuelo en Francia al afirmar que los jóvenes necesitan más horas de sueño que los niños y los adultos. Ya no somos tan adultos ahora, eh.

Valérie Pécresse, presidenta de la región, ha propuesto cambiar el horario de los liceos entre media y una hora más tarde. Algo que no le ha hecho la más mínima gracia al ministro de educación. El hombre no parece muy buena persona, mira que no comprender a los pobres jóvenes. Que no son vagos señor, que sólo tienen sueño. Tampoco es que la mujer se lo haya inventado, que se ha basado en un estudio.



Publicado en la revista *Sciences Advances* este estudio se apoya en un experimento realizado en Seattle. La prueba consistía en retrasar el horario matutino en algunos establecimientos. Resultados: mejor horas de sueño, más rendimiento y menos ausencia.

Los científicos argumentan que la luz, entre otros factores, afecta a nuestro reloj biológico, pero que en los adolescentes esta sensibilidad disminuye. Por eso, los jóvenes tienden a dormirse y despertarse más tarde. Vamos, que pedirle a un joven que se levante a las 7:30 a.m. es lo mismo que pedirle a un adulto que se despierte a las 5:30 a.m. Menuda crueldad, no me extraña que los jóvenes de hoy en día estén “empanaos”, si es que no rinden.

Los estudios también recogen que la luz azul de los dispositivos electrónico igualmente afectan a las horas de sueño. Esto pasa por entregar el trabajo en el último momento, que te pasas toda la noche tecleando más que Beethoven tocando La Sonata para piano n.º 14 en do sostenido menor *Quasi una fantasia*.

Hipertensión, ansiedad, diabetes, obesidad, accidentes. ¿Quieres tener buena salud? Pues vete a vivir a Francia porque en España vas a dormir menos que el Tato.

Algunos consejos para preservar tus horas de sueño.

1. Deja el Fornite, tu cuenta de Netflix o cualquier vicio nocturno. ¿Eres un chico o chica gamer y te gusta pasarte tus 12 horas frente a la pantalla del ordenador? Pues no lo hagas de noche, duerme más y ve a clase a tomar nota. Si aún así por la mañana te es imposible levantarte, siempre puedes pillar apuntes en Wuolah.

2. Olvídate de filosofar por la noche. Tienes mucho sueño, llega la noche, te metes a la cama y tu cerebro está bailando la conga en ese momento. Deja de pensar en la muerte, en el cosmos o en lo que dijiste en 2012 a tu amigo. Relájate, mente en blanco y a dormir. Ya habrá tiempo de pensar durante el día.

3. ¿Conversaciones profundas a las 3 de la mañana? Estas hablando con tu mejor amigo o de repente te habla la persona que te gusta y claro, no puedes cortarle. Déjate de conversaciones sobre la existencia, la última peli spiderman o el cotilleo del barrio. Corta el seco y a dormir, tus amigos te lo agradecerán.

4. No sigas la Ley del vago, el último día lo hago. Ponte al día con los trabajos, que no se diga que eres un holgazán.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{((n+1)^3-n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1} = \frac{2}{3}.$$

Problema 1.2 Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n} \quad (ii) \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (iii) \lim_{n\to\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n} \quad (v) \lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Solución:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n)\right) = [\operatorname{sen}(n) \ \text{ acotada}] = 1+0\times\text{acotada} = 1.$$

$$(ii) \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = [\text{ infinitésimos equivalentes }] = 1.$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}+1\right) = \infty \times \frac{\pi}{4} = \infty.$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n} = [\text{escala de infinitos}] = 0.$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = [\text{infinitésimos equivalentes}] = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2n^2} = 0.$$

Problema 1.3 Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} \quad (ii) \lim_{n\to\infty} 2n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \quad (iii) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)^n$$

Solución:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)\ln(n^2-n+1)}{n} = \begin{bmatrix} \text{escala de infinitos} \\ \cos(n) \ \text{ acotada} \end{bmatrix} = 0\times\text{acotada} = 0.$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = [\text{ infinitésimos equivalentes}] = 2.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)+1\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)} = e^0 = 1.$

Para el cálculo de este límite hemos utilizado el criterio del número e.

Problema 1.4 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-2^n}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(n)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

Solución:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n-2^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n}\left(1-\left(\dfrac{2}{e}\right)^n\right) = [\text{ escala de infinitos}] = \infty\times 1 = \infty.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = [\text{infinitésimos equivalentes}] = e.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{sen}(n)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{sen}(n)\dfrac{1}{n}-\dfrac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) = [0\times\text{acotada}] - \dfrac{0}{\infty} = 0.$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4} = \cdots$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = 1^3+2^3+\cdots+n^3$ y $b_n = n^4$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{4n^3+6n^2+4n+1} = \frac{1}{4}.$$

Problema 1.5 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)-\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n}} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right)^n \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solución:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)-\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} - \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}\right) = [0\times \text{acotada}] = 0-0 = 0.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{2}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})\operatorname{sen}(\dfrac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = [\text{infinitésimos equivalentes}] = 1.$

Problema 1.6 Calcular los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3+2n-1}{4n^3+n^2-2n+1}\right)^n$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan(n)\ln(n^2+2)}{n}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{5^n}$ (iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}$

Solución:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3+2n-1}{4n^3+n^2-2n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^3+2n-1}{4n^3+n^2-2n+1}-1\right)} =$

$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^3+4n^2-2n}{4n^3+n^2-2n+1}} = e^{-\frac{1}{4}}.$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan(n)\ln(n^2+2)}{n} = \left[\begin{array}{c}\arctan(n) \text{ es acotada}\\ \text{escala de infinitos}\end{array}\right] = \text{acotada}\times 0 = 0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0.$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+4n}\right) = [\times \text{ y } \div \text{ por el conjugado}] =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+4n}\right)\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+4n}\right)}{\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+4n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n}{\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+4n}\right)} =$

$\dfrac{-5}{2}.$

$(v)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)$ y $b_n = n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n+1)}{2n+1} = [\text{acotada} \times 0] = 0.$$

Problema 1.7 Calcular los siguientes límites:

$(i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}\right)^n$ $\quad (ii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n}{\sqrt{n}}$

$(iii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(1+\sqrt{n}+n)-\ln(n)\right)$ $\quad (iv)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1)+\operatorname{sen}(2)+\cdots+\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^4+2n^3-1}{n^4+2n^2-2n+3}-1\right)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4-2n^3+2n^2-4n}{n^4+2n^2-2n+3}} = e^2.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-\ln(n)}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right) = [\text{escala de infintos}] = 0+\infty = \infty.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \left(\ln(1+\sqrt{n}+n)-\ln(n)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}+n)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) =$$

$$[\text{infinitésimos equivalentes}] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

$(iv)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1)+\operatorname{sen}(2)+\cdots+\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n = \operatorname{sen}(1)+\operatorname{sen}(2)+\cdots+\operatorname{sen}(n)$ y $b_n = n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{2n+1} = [\text{acotada} \times 0] = 0.$$

Problema 1.8 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(n)\ln(n)}{n}$$
$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2}$$

Solución:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\infty\times\mathrm{sen}(1)=\infty.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(n)\ln(n)}{n}=\left[\begin{array}{c}\text{escala de infinitos}\\ \mathrm{sen}(n)\text{ acotada}\end{array}\right]=0.$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=[\text{infinitésimos equivalente}]=1.$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2}.$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con $a_n=\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})$ y $b_n=n^2$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{2n+1}=[\text{infinitésimos equivalentes}]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=0.$$

Problema 1.9 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}\right)^n \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2-2n+7}} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{e^n}$$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)}{n}$; $a>0$ (según los valores de a).

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3-2n}{n^3+3n^2-2n-1}-1\right)}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^3+n}{n^3+3n^2-2n-1}} = e^{-3}.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$$(ii) \lim_{n\to\infty} \frac{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2-2n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-2n+7}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{e^n} = [\text{ orden de infinitos}] = 0.$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)}{n}.$$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz considerando las sucesiones $a_n = \ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)$ y $b_n = n$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a^n) = \begin{cases} 0 & a\in(0,1), \\ \ln(2) & a=1, \\ +\infty & a>1. \end{cases}$$

Problema 1.10 Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}\right)^n \quad (ii) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (iii) \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+3n+1)}{n^2+1}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a^n}}{\ln(n)};\, a>0 \text{ (según los valores de } a).$$

Solución:

$$(i) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^4-3n^3-2n^2+1}{n^4-1}-1\right)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^4-2n^3+2n}{n^4-1}} = e^{-3}.$$

Para el cálculo del límite hemos aplicado el criterio del número e.

$(ii) \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} = [0^0]$. Por tanto, supondremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)^{\frac{1}{n}} = A$, de donde

$$\ln(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln(n^3+2)}{n}\right)=[\text{escala de infinitos}]=0.$$

Finalmente, $A=e^0=1$.

$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n^2+3n+1)}{n^2+1}=[\text{acotada}\times 0]=0.$

$(iv)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a^n}}{\ln(n)}.$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de Stolz, con$a_n=1+\dfrac{1}{a}+\cdots+\dfrac{1}{a^n}$ y $b_n=\ln(n)$, ya que b_n es creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^{n+1}}}{\ln(n+1)-\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}\frac{n}{a^{n+1}}=\begin{cases}+\infty, & a\leq 1\\ 0, & a>1\end{cases}$$

Problema 1.11 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{bn};b\in\mathbb{R}\quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+2}{n^2-2n+1}\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right)\quad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n}$$

Solución:

$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{bn}=1,\ \text{si } b=0.$

Supongamos que $b\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{bn}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}bn\left(\frac{n+1}{n-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2bn}{n-1}\right)}=e^{2b}.$$

$(ii)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n+2}{n^2-2n+1}\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right)=[\text{infinitésimos equivalentes}]=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+2}{(n^2-2n+1)(n+7)}\frac{\left(e^{\frac{1}{n+7}}-1\right)}{\frac{1}{n+7}}=1.$$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{e^n}=[\text{escala de infinitos}]=\infty.$

Problema 1.12 Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,(n - \operatorname{sen}(n)) \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)^n}{n^2} \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,(n - \operatorname{sen}(n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}\right) = 0 \times \text{ acotada } = 0.$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n^2+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n} = [\text{ escala de infinitos}] = 0.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\frac{1}{2n}} \frac{\frac{1}{2n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$[\text{ infinitésimos equivalentes }] = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$$

Problema 1.13 Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por $x_{n+1} = x_n^2$, $x_0 = 1/2$. Demostrar que:

(a) (x_n) está acotada inferiormente por 0 y superiormente por $\frac{1}{2}$.
(b) (x_n) es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión.

Solución: (a) $x_0 = 1/2 \geq 0$ y $x_{n+1} = x_n^2 \geq 0$. Luego, (x_n) está acotada inferiormente por 0.

Para deducir que (x_n) está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$ procedemos por inducción. En primer lugar, $x_0 = 1/2 \leq 1/2$. Supongamos que $x_n \leq 1/2$ (H.I), debemos demostrarlo para x_{n+1}.

$$x_{n+1} = x_n^2 \leq 1/4 \leq 1/2,$$

por la hipótesis de inducción.

(b) Para demostrar que (x_n) es una sucesión decreciente procedemos de nuevo por inducción. En primer lugar, $x_0 = 1/2 \geq 1/4 = x_1$. Supongamos que $x_{n+1} \leq x_n$ (H.I.), debemos demostrar que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 \leq x_n^2 = x_{n+1},$$

por la hipótesis de inducción.

(c) Por el Teorema de la convergencia monótona, x_n es una sucesión convergente, ya que está acotada inferiormente y es decreciente. Para calcular el límite de la sucesión, suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Entonces, de la relación de recurrencia tenemos que

$$l^2 = l \implies l = 0 \text{ o } l = 1.$$

Como $x_n \leq 1/2$, el límite de la sucesión es $l = 0$.

Problema 1.14 Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida de forma recurrente por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big), \ \ x_0 = \alpha.$$

Demostrar que:
(a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por $\sqrt{\alpha}$.
(b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente.
(c) Estudiar la convergencia de la sucesión.

Solución:

(a) Debemos demostrar que $x_n \geq \sqrt{\alpha}$.

$x_n \geq \sqrt{\alpha} \iff \frac{1}{2}\big(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\big) \geq \sqrt{\alpha} \iff x_{n-1}^2 + \alpha \geq 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} \iff$

$x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0 \iff (x_{n-1} - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0,$

desigualdad que es siempre cierta.

(b) Debemos demostrar que $x_{n+1} \leq x_n$.

$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big) \leq x_n \iff$

$x_n^2 + \alpha \leq 2x_n^2 \iff \alpha \leq x_n^2 \iff \sqrt{\alpha} \leq x_n,$

desigualdad que es cierta por el apartado (a).

(c) Como (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente el Teorema de la convergencia monótona asegura que (x_n) converge. Además si $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se verifica:

$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\big) \iff \ell = \dfrac{1}{2}\big(\ell + \dfrac{\alpha}{\ell}\big) \iff$

$2\ell^2 = \ell^2 + \alpha \iff \ell^2 = \alpha \iff \ell = \sqrt{\alpha},$

ya que el límite debe ser positivo, por ser (x_n) una sucesión de términos positivos.

Problema 1.15 Sea (y_n) una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_1}{1} + \dfrac{y_2}{2} + \cdots + \dfrac{y_n}{n}}{\ln(n)}.$$

Solución: Para el cálculo del límite podemos aplicar el criterio de Stolz ya que la sucesión del denominador $\ln(n)$ es estrictamente creciente y tiene límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{y_1}{1}+\frac{y_2}{2}+\cdots+\frac{y_n}{n}}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{n+1}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = a,$$

donde se ha aplicado que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{n}$ y que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Problema 1.16 Una sucesión (x_n) es una progresión aritmética si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n+1} = d + x_n, \; n \geq 1.$$

(i) Probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Probar que $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$.

(iii) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$$

Solución: Sea (x_n) una progresión aritmética es decir

$$x_{n+1} = d + x_n, \; n \geq 1.$$

(i) Para probar que $x_n = x_1 + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$, procedemos por inducción.

Por definición $x_2 = d + x_1 = x_1 + (2-1)d$, por tanto se verifica la fórmula para $n = 2$. Supongamos que es cierta para n, es decir, $x_n = x_1 + (n-1)d$ (H.I.), debemos probarla para $n+1$,

$$x_{n+1} = x_n + d = x_1 + (n-1)d + d = x_1 + nd.$$

Luego la fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para probar $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$, procedemos de nuevo por inducción.

Para $n = 2$, $x_1 + x_2 = 2\frac{x_1+x_2}{2}$, luego la fórmula es cierta. Supongamos ahora que es cierta para n, es decir, $x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1+x_n}{2}$. Debemos probarla para $n+1$.

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} &= n\frac{x_1+x_n}{2} + x_{n+1} = n\frac{x_1+x_{n+1}-d}{2} + x_{n+1} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} - \frac{dn}{2} + x_1 + nd = n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{dn}{2} + \frac{2x_1}{2} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{dn+x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \\ &= n\frac{x_1+x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_1}{2} = (n+1)\frac{x_1+x_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Usando el apartado anterior obtenemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por tanto el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}.$$