Ejercicios variados.pdf

Ejercicios Resueltos

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

ETS DE INGENIEROS DE MONTES
PRIMER CURSO
GRUPO B

EJERCICIOS DEL
TEMA 3
Sucesiones de Números Reales

NEWS

WUOLAH

LUN 28 ENE

Noticias para el mundo universitario.

nº 21. Semana del 28 al 3

El notición, los jóvenes necesitan más horas de sueño que el resto

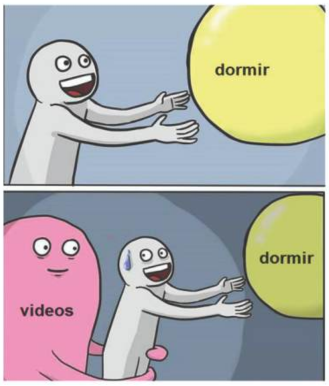
Más horas de sueño para los jóvenes, la noticia que todos estábamos esperando con ansia.

Aún eres un jovenzuelo y crees que eres más flojo que un "muelle guita" por dormir 10 horitas el fin de semana. No te preocupes, un estudio confirma que los jóvenes necesitan entre 8 y 10 horas de sueño por noche (o por día, según si pasas toda la noche jugando al Fornite).

Los centros de educación secundaria y superior comenzarán sus clases a las 9:00 a.m. en lugar de las 8:00 a.m. u 8:30 a.m. Una lástima que sólo sea en Francia. Está bien, perdón por las falsas ilusiones pero teníamos que crear expectación.

La presidenta de París desata un estrepitoso revuelo en Francia al afirmar que los jóvenes necesitan más horas de sueño que los niños y los adultos. Ya no somos tan adultos ahora, eh.

Valérie Pécresse, presidenta de la región, ha propuesto cambiar el horario de los liceos entre media y una hora más tarde. Algo que no le ha hecho la más mínima gracia al ministro de educación. El hombre no parece muy buena persona, mira que no comprender a los pobres jóvenes. Que no son vagos señor, que sólo tienen sueño. Tampoco es que la mujer se lo haya inventado, que se ha basado en un estudio.



Publicado en la revista *Sciences Advances* este estudio se apoya en un experimento realizado en Seattle. La prueba consistía en retrasar el horario matutino en algunos establecimientos. Resultados: mejor horas de sueño, más rendimiento y menos ausencia.

Los científicos argumentan que la luz, entre otros factores, afecta a nuestro reloj biológico, pero que en los adolescentes esta sensibilidad disminuye. Por eso, los jóvenes tienden a dormirse y despertarse más tarde. Vamos, que pedirle a un joven que se levante a las 7:30 a.m. es lo mismo que pedirle a un adulto que se despierte a las 5:30 a.m. Menuda crueldad, no me extraña que los jóvenes de hoy en día estén "empanaos", si es que no rinden.

Los estudios también recogen que la luz azul de los dispositivos electrónico igualmente afectan a las horas de sueño. Esto pasa por entregar el trabajo en el último momento, que te pasas toda la noche tecleando más que Beethoven tocando La Sonata para piano n.º 14 en do sostenido menor *Quasi una fantasia*.

Hipertensión, ansiedad, diabetes, obesidad, accidentes. ¿Quieres tener buena salud? Pues vete a vivir a Francia porque en España vas a dormir menos que el Tato.

Algunos consejos para preservar tus horas de sueño.

1. Deja el Fornite, tu cuenta de Netflix o cualquier vicio nocturno. ¿Eres un chico o chica gamer y te gusta pasarte tus 12 horas frente a la pantalla del ordenador? Pues no lo hagas de noche, duerme más y ve a clase a tomar nota. Si aún así por la mañana te es imposible levantarte, siempre puedes pillar apuntes en Wuolah.

2. Olvídate de filosofar por la noche. Tienes mucho sueño, llega la noche, te metes a la cama y tu cerebro está bailando la conga en ese momento. Deja de pensar en la muerte, en el cosmos o en lo que dijiste en 2012 a tu amigo. Relájate, mente en blanco y a dormir. Ya habrá tiempo de pensar durante el día.

3. ¿Conversaciones profundas a las 3 de la mañana? Estas hablando con tu mejor amigo o de repente te habla la persona que te gusta y claro, no puedes cortarle. Déjate de conversaciones sobre la existencia, la última peli spiderman o el cotilleo del barrio. Corta el seco y a dormir, tus amigos te lo agradecerán.

4. No sigas la Ley del vago, el último día lo hago. Ponte al día con los trabajos, que no se diga que eres un holgazán.

Ejercicios del Tema 3. Sucesiones de números reales.

Ejercicio 1.

Calcula los límites siguientes:

1.1. $\lim \frac{n^2-3n+5}{n^{\frac{5}{2}}+n+1}$ (sol.: 0).

1.2. $\lim \frac{n^{\frac{9}{4}}+n}{n^2+7}$ (sol.: $+\infty$).

1.3. $\lim \frac{3n^2+5n+2}{4n^2+2n+1}$ (sol.: $\frac{3}{4}$).

1.4. $\lim \frac{4n^3+\sqrt[3]{2n^9-3n^2}}{n^2+\sqrt[4]{16n^{12}+5n+1}}$ (sol.: $\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2}$).

1.5. $\lim \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (sol.: 0).

1.6. $\lim \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$ (sol.: 0).

1.7. $\lim \left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{(n+1)^2}\right)$ (sol.: 0).

1.8. $\lim \left(\sqrt[3]{n^{\frac{4}{3}}+n+1}-n^2\right)$ (sol.: $-\infty$).

1.9. $\lim \left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n^2+3}{2n-1}\right)$ (sol.: $-\frac{3}{2}$).

1.10. $\lim \left(\sqrt[3]{\frac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{1+3n}{2n+1}}$ (sol.: $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

1.11. $\lim \left(\frac{4^{n^2+n+2}}{4^{n^2+n+3}}\right)^{n^2+n+1}$ (sol.: 0).

1.12. $\lim \left(\sqrt[3]{\frac{1+n^2}{1+2n}}\right)^{\frac{1-3n^2}{2n+1}}$ (sol.: 0).

1.13. $\lim \left(\frac{4n+\pi}{4n+2\pi}\right)^{\sqrt{16n^2+4n+8}}$ (sol.: $e^{-\pi}$).

1.14. $\lim \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ (sol.: 0).

1.15. $\lim \left(\sqrt{\frac{2n^2+n+1}{3n^2+2}}\right)^{\frac{3n^2+4n^3+16n^4}{\sqrt[4]{256n^{16}+n^2+1}}}$ (sol.: $\frac{4}{9}$).

1.16. $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3-2}}\right)^{n}$ (sol.: 1).

1.17. $\lim \left(\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}\right)^{2^n}$ (sol.: 0).

Ejercicio 2.

Calcula los límites siguientes:

2.1. $\lim \frac{\log n}{n}$.

2.2. $\lim \frac{1!+2!+...+n!}{n!}$.

2.3. $\lim \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$.

2.4. $\lim \frac{1}{n^2}\left(2^2+\frac{3^2}{2}+...+\frac{(n+1)^2}{n^{n-1}}\right)$.

2.5. $\lim \frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+...+\left(a+\frac{n}{n}\right)^2\right)$.

2.6. $\lim \left(\frac{1+3+...+2n-1}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

2.7. $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2.8. $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+...+\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$.

2.9. $\lim \left(\frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{4n^3}\right)^{2n}$.

2.10. $\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)+(n+2)+...+(n+n)}$.

2.11. $\lim \sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot...\cdot\sqrt[n]{n}}$.

2.12. $\lim \sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot...\cdot(n+n)}$ (sol.: $+\infty$).

2.13. $\lim \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

2.14. $\lim \frac{\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)...\left(n-\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

2.15. $\lim \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$, con $p\in\mathbb{R}$.

2.16. $\lim \left(\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)$, con $p\in\mathbb{N}$.

2.17. $\lim \frac{\log 1+\log 2+...+\log n}{1+2+...+n}$.

Una solución.

2.1. Dado que la sucesión (n) es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{\log n}{n}=\lim \frac{\log n-\log(n-1)}{n-(n-1)}=\lim \log \frac{n}{n-1}=0$$

2.2. Dado que la sucesión $(n!)$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1! + 2! + ... + n!}{n!} = \lim \frac{n!}{n! - (n-1)!} = \lim \frac{n}{n-1} = 1$$

2.3. Dado que $\lim \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ (se llega a este resultado sumando los términos de la progresión geométrica), no se puede aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro.

$$\lim \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2.4. Dado que la sucesión $\left(n^2\right)$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1}{n^2}\left(2^2 + \frac{3^2}{2} + ... + \frac{(n+1)^2}{n^{n-1}}\right) = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} =$$
$$= \lim \frac{(n+1)^2}{n^{n-1}(2n-1)} = 0$$

2.5. Dado que la sucesión (n) es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1}{n}\left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(a + \frac{n}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \lim \frac{(a+1)^2}{n - (n-1)} = (a+1)^2$$

2.6. Sumando la progresión aritmética y operando, se llega a

$$\lim \left(\frac{1 + 3 + ... + 2n - 1}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right) = \lim \frac{-3n-1}{2n+2} = -\frac{3}{2}$$

2.7. Dado que la sucesión $(\sqrt{n})$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} =$$
$$= \lim \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}(n - (n-1))} = 2$$

2.8. Dado que la sucesión $\left(\sqrt{n+1}\right)$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+...+\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)=$$
$$=\lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\sqrt{n+1}}=0$$

2.9. Comencemos analizando cuál es el límite de la base. Dado que la sucesión $\left(4n^3\right)$ es de términos positivos, monótona creciente y no está acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{4n^3}=\lim \frac{(2n-1)^2}{4n^3-4(n-1)^3}=\frac{1}{3}$$

Por tanto, $\lim \left(\frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{4n^3}\right)^{2n}=0$.

2.10. Sumando la progresión aritmética dentro de la raíz y operando:

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)+(n+2)+...+(n+n)}=\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{3n^2+n}{2}}$$

Por otra parte, recordamos que, en caso de existir $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces $\lim \sqrt[n]{a_n}$ también existe, y es tal que $\lim \sqrt[n]{a_n}=\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (como vimos en el apartado 12.1.6. de la parte teórica). Aplicando este resultado a $a_n=\frac{3n^2+n}{2}$, es facil ver que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, por lo que $\lim \sqrt[n]{\frac{3n^2+n}{2}}=1$. En definitiva,

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{3n^2+n}{2}}=0$$

2.11. Tomando logaritmos:

$$\log \lim \sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot...\cdot\sqrt[n]{n}}=\lim \frac{\log 1+\log\sqrt{2}+\log\sqrt[3]{3}+...+\log\sqrt[n]{n}}{n}.$$

Dado que la sucesión (n) es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{\log 1+\log\sqrt{2}+\log\sqrt[3]{3}+...+\log\sqrt[n]{n}}{n}=$$
$$=\lim \log\sqrt[n]{n}=0$$

(aplicando el resultado del apartado 12.1.6. de la parte teórica, se llega fácilmente a que $\lim \sqrt[n]{n}=1$). Por tanto,

$$\lim \sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot...\cdot\sqrt[n]{n}}=e^0=1$$

(a este mismo resultado se llega aplicando el resultado del apartado 12.1.6. de la parte teórica desde un principio).

2.13. Operando y simplificando:

$$\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\lim\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)...\left(\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\right)\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=$$
$$=\lim\left(\frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\right)\left(\frac{(4-1)(4+1)}{4\cdot 4}\right)...$$
$$...\left(\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\right)\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right)=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

2.14. Operando y simplificando:

$$\lim\frac{\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)...\left(n-\frac{1}{n}\right)}{n!}=\lim\frac{\frac{2^2-1}{2}\frac{3^2-1}{3}...\frac{n^2-1}{n}}{n!}=$$
$$=\lim\frac{(2+1)(2-1)(3+1)(3-1)...(n+1)(n-1)}{2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot n!}=$$
$$=\lim\frac{(n+1)!(n-1)!}{2\cdot n!\cdot n!}=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

2.15. Si $p=-1$, la sucesión es $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$, y sabemos que

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Si $p<-1$, $\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}>\frac{1}{n^{p+1}}\to+\infty$, por lo que $\lim\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}=+\infty$. Finalmente, si es $p>-1$, la sucesión $\left(n^{p+1}\right)$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, por lo que podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}=\lim\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=$$
$$=\lim\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+1}\right)}=\lim\frac{1}{(n+1)(p+1)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}=$$
$$=\frac{1}{p+1}$$

2.16. Operando en la expresión del límite, se llega a

$$\lim\left(\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\lim\frac{(p+1)\left(1^p+2^p+...+n^p\right)-n^{p+1}}{(p+1)n^p}$$

Dado que la sucesión (n^p) es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro. Operando y aplicando la Fórmula del Binomio de Newton, queda:

$$\lim \frac{(p+1)\left(1^p+2^p+...+n^p\right)-n^{p+1}}{(p+1)n^p} =$$
$$= \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + (n-1)^{p+1}}{(p+1)(n^p-(n-1)^p)} =$$
$$= \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + n^{p+1} - (p+1)n^p + \frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}}{(p+1)(n^p-n^p+pn^{p-1})} = \frac{1}{2}$$

2.17. Dado que la sucesión $(1+2+...+n)$ es de términos positivos, monótona creciente y no acotada superiormente, podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesàro:

$$\lim \frac{\log 1 + \log 2 + ... + \log n}{1+2+...+n} = \lim \frac{\log n}{n} = 0$$

($\lim \frac{\log n}{n} = 0$ como vimos en el ejercicio 2.1.)

Ejercicio 3.

Sea (a_n) una sucesión de números reales no nulos.

a) Prueba que si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces $\lim a_n = 0$.

b) Utiliza el resultado del apartado anterior para calcular los siguientes límites:

$$\lim \frac{n!}{n^n}$$
$$\lim \frac{n^a}{b^n}, \text{ con } a,b \in \mathbb{R} \text{ y } b>1$$

Una solución.

a) Si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r$, con $0<r<1$. Por tanto, $|a_{N+1}| \leq r\,|a_N|$, $|a_{N+2}| \leq r\,|a_{N+1}| \leq r^2\,|a_N|$, ... , $|a_{N+p}| \leq r^p\,|a_N|$. De aquí se deduce que $\forall n \geq N : |a_n| \leq r^{-N}\,|a_N| \cdot r^n \Rightarrow -r^{-N}\,|a_N| \cdot r^n \leq a_n \leq r^{-N}\,|a_N| \cdot r^n$, y aplicando el Teorema del Sandwich (al ser $0<r<1$, observa que $r^n \to 0$) resulta que $\lim a_n = 0$.

b) $\lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim n\left(\frac{-1}{n+1}\right)} = e^{-1} < 1$. Aplicando la anterior propiedad, se deduce que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
$\lim \frac{\frac{(n+1)^a}{b^{n+1}}}{\frac{n^a}{b^n}} = \frac{1}{b} \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^a = \frac{1}{b} < 1$. Aplicando la anterior propiedad, se deduce que $\lim \frac{n^a}{b^n} = 0$.

Ejercicio 4.

a) El límite de la sucesión de término general $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ es $a = 2$. Sea $\epsilon = 0.1$. Determina el menor número natural n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ los términos de dicha sucesión se mantienen en el intervalo $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$, es decir, dichos términos a_n son tales que $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0$.¿Cuáles serían dichos números n_0 en los casos $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.0001$?

b) Id. apartado anterior con la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$, cuyo límite es también $a = 2$.

Una solución.

a) Obligando a que sea $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \epsilon$, se llega a que $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Esto supone que, para los valores $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.0001$ los números naturales pedidos sean $n_0 = 10$, $n_0 = 100$ y $n_0 = 10000$, respectivamente.

b) Obligando a que sea $\left|\frac{2n^2+1}{n^2+1} - 2\right| < \epsilon$, se llega a que $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$. Esto supone que, para los valores $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.0001$ los números naturales pedidos sean $n_0 = 4$, $n_0 = 10$ y $n_0 = 100$, respectivamente.

Ejercicio 5.

En cada uno de los siguientes casos, da un ejemplo o prueba la no existencia de una sucesión (o unas sucesiones) que sea(n):

5.1. Convergente y no monótona.

5.2. Acotada y no convergente.

5.3. Convergente y no acotada.

5.4. Monótona y no acotada.

5.5. Divergente a $+\infty$ y no monótona.

5.6. Monótona y acotada, pero no convergente.

5.7. No acotada y no monótona.

5.8. De términos positivos y convergente, pero no monótona.

5.9. Tal que $(|a_n|)$ converge pero (a_n) no converge.

5.10. Tal que (a_n) converge pero $(|a_n|)$ no converge.

5.11. Tales que (a_n) y (b_n) no sean convergentes, pero $(a_n + b_n)$ sea convergente.

5.12. Tales que (a_n) y (a_n+b_n) sean convergentes, pero (b_n) no sea convergente.

5.13. Tales que (a_n+b_n) sea convergente, pero (a_n) y (b_n) no sean convergentes.

5.14. Tales que (a_n) y $(a_n \cdot b_n)$ sean convergentes, pero (b_n) no sea convergente.

Una solución.

5.1. $(-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente a 0 y no es monótona.

5.2. $(-1)^n$ está acotada y no es convergente.

5.3. Sabemos que si una sucesión es convergente, entonces está acotada. Por tanto, no es posible plantear un ejemplo de sucesión convergente y no acotada.

5.4. (n) es monótona y no está acotada.

5.5. La sucesión $(1, 1^2, 2, 2^2, 3, 3^2, ...)$ es divergente a $+\infty$ y no es monótona.

5.6. Sabemos que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Por tanto, no es posible plantear un ejemplo de sucesión monótona y acotada, pero no convergente.

5.7. $(-1)^n n$ es no acotada y no monótona.

5.8. $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ...\right)$ es de términos positivos y convergente a 0, pero no es monótona.

5.9. $(-1)^n$ es tal que $(|a_n|)$ converge a 1 pero (a_n) no converge.

5.10. Es evidente que si $(a_n) \to a$, entonces $(|a_n|) \to |a|$. Por tanto, no es posible plantear un ejemplo de sucesión tal que (a_n) converge pero $(|a_n|)$ no converge.

5.11. $(a_n) = n$ y $(b_n) = -n$ son tales que (a_n) y (b_n) no son convergentes, pero $(a_n + b_n) = (0)$, que es convergente.

5.12. Dado que (a_n) y $(a_n + b_n)$ son convergentes, también

$$(b_n) = ((a_n + b_n) + (-a_n))$$

lo es, por ser la suma de dos sucesiones convergentes.

5.13. Vale el ejemplo dado en 5.11.

5.14. $(a_n) = \frac{1}{n}$ y $(b_n) = n$ son tales que (a_n) converge a 0 y $(a_n \cdot b_n)$ converge a 1, pero $(b_n) = n$ no es convergente.

Ejercicio 6.

Cierta sucesión de números reales se define por la ley de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$$

Se pide:

a) En el supuesto de que el primer término sea $a_1 = 2$, prueba que la sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente, calculando $\lim a_n$.

b) En el supuesto de que el primer término sea $a_1 = \frac{1}{2}$, prueba que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, calculando $\lim a_n$.

Una solución.

Dado que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n}{1+a_n} - \frac{2a_{n-1}}{1+a_{n-1}} = \frac{2(a_n - a_{n-1})}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

siempre que sean $a_n > -1$ y $a_{n-1} > -1$, la sucesión (a_n) será monótona. En particular (y siempre que sean $a_n > -1$ y $a_{n-1} > -1$), cuando $a_2 > a_1$ la sucesión (a_n) será monótona creciente, y cuando $a_2 < a_1$ la sucesión (a_n) será monótona decreciente.

a) $a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3} < a_1$, por lo que (a_n) es monótona estrictamente decreciente, es decir, $a_{n+1} < a_n$. Veamos que está acotada inferiormente por 1.

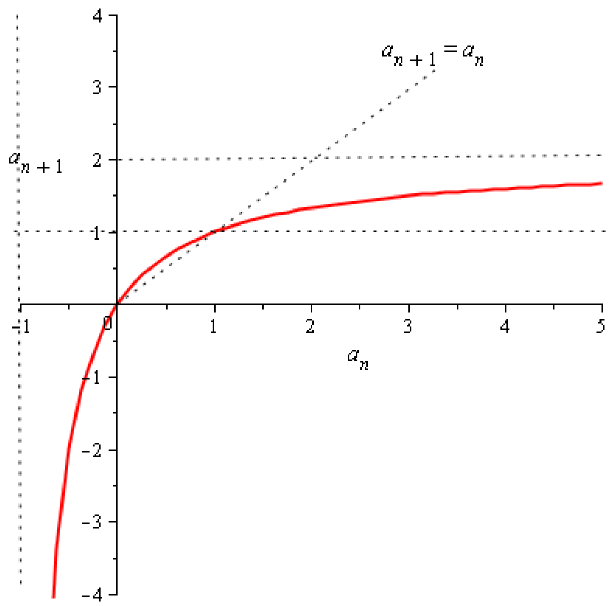


Figura 1

La Figura 1 muestra en color rojo (en el plano $a_n - a_{n+1}$) la gráfica de la curva $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$ para $a_n > -1$, así como las rectas auxiliares $a_{n+1} = 2$ (asíntota horizontal), $a_{n+1} = 1$, y $a_n = -1$ (asíntota vertical). Supongamos que $a_n > 1$. Entonces, de la gráfica anterior se deduce que $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} > 1$, por lo que 1 es cota inferior de (a_n). Dado que (a_n) es monótona decreciente acotada inferiormente, (a_n) es convergente. Sea $a \in \mathbb{R}$ el límite de (a_n), es decir, $\lim a_n = a$. Entonces, pasando al límite en la expresión $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$, se llega a que $a = \frac{2a}{1+a} \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 1$. Dado que 1 es cota inferior de (a_n) y (a_n) es monótona decreciente, es evidente que en este caso $a_1 = 2$, será $\lim a_n = 1$. La Figura 2 muestra como convergen las sucesivas iteraciones de (a_n) a 1 en este caso $a_1 = 2$.

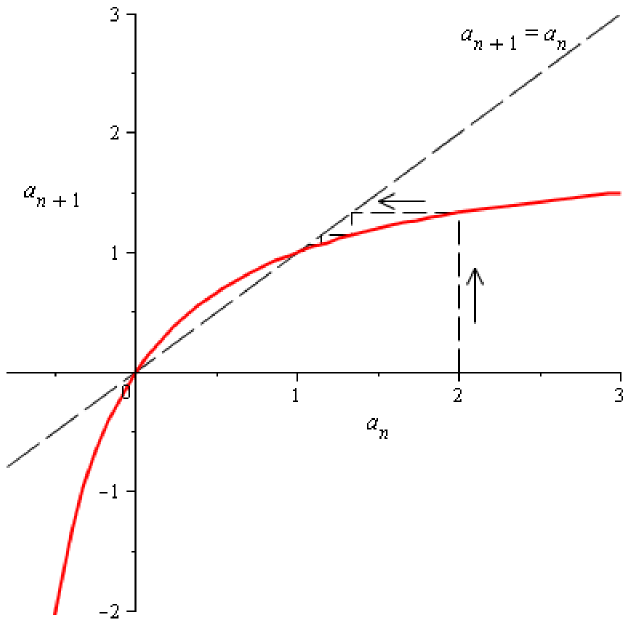


Figura 2

De la gráfica anterior también se deduce (como ya sabíamos) que, siempre que sea $a_1 > 1$, la sucesión (a_n) es monótona decreciente y convergente a 1.

b) $a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3} > a_1$, por lo que (a_n) es monótona estrictamente creciente, es decir, $a_{n+1} > a_n$. Veamos que está acotada superiormente por 1. De la gráfica anterior se deduce que, siempre que sea $0 < a_n < 1$, se verifica que $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} < 1$, por lo que 1 es cota superior de (a_n) en este caso. Dado que 1 es cota superior de (a_n) y (a_n) es monótona creciente, es evidente que en este caso $a_1 = \frac{1}{2}$, será también $\lim a_n = 1$. La Figura 3 muestra como convergen las sucesivas iteraciones de (a_n) a 1 en este caso

$a_1 = \frac{1}{2}$.

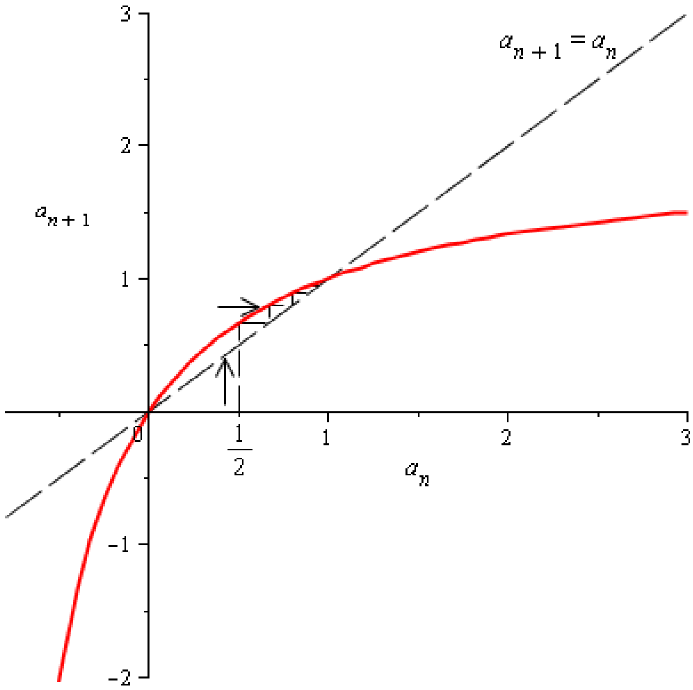


Figura 3

De la gráfica anterior también se deduce (como ya sabíamos) que, siempre que sea $0 < a_1 < 1$, la sucesión (a_n) es monótona creciente y convergente a 1.

Ejercicio 7.

Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

7.1. Si (a_n) es una sucesión de números reales tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\lim a_n = +\infty$.

7.2. Si (a_n) es una sucesión de números reales tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces (a_n) es convergente.

7.3. Si (a_n) es una sucesión de números reales tal que el conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene dos puntos de acumulación distintos, entonces (a_n) no es convergente.

7.4. Si (a_n) es una sucesión de números reales no convergente, entonces el conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ningún punto de acumulación.

7.5. Si (a_n) es una sucesión de números reales acotada superiormente y no convergente, entonces (a_n) no es monótona creciente.

7.6. Si (a_n) es una sucesión de números reales monótona decreciente acotada inferiormente por 0, entonces $\lim a_n = 0$.

7.7. Si (a_n) es una sucesión de números reales, entonces $((-1)^n a_n)$ no es monótona creciente.

7.8. Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales positivos tales que $\frac{a_n}{b_n}$ es convergente, entonces (a_n) y (b_n) son ambas convergentes.

Una solución.

7.1. Si (a_n) es una sucesión de números reales tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces (a_n) es monótona creciente, pero no podemos asegurar que $\lim a_n = +\infty$ (puede suceder, por ejemplo, que (a_n) esté acotada superiormente). Como contraejemplo, puede tomarse la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, que es monótona creciente pero $\lim a_n = 1 \neq +\infty$.

7.2. Falso (contraejemplo: (n)).

7.3. Verdadero, por la unicidad del elemento límite.

7.4. Falso. Como contraejemplo, puede tomarse la sucesión $\left((-1)^n \frac{n+1}{n}\right)$, que tiene dos puntos de acumulación $\{-1, 1\}$, pero no es convergente (ya que $\liminf (-1)^n \frac{n+1}{n} = -1 \neq \limsup (-1)^n \frac{n+1}{n} = 1$).

7.5. Verdadero. Se sigue de la proposición contrarecíproca de "si (a_n) es una sucesión de números reales monótona creciente y acotada superiormente, entonces (a_n) es convergente", que establece que "si (a_n) es una sucesión de números reales no convergente, entonces o (a_n) no es monótona creciente o (a_n) no está acotada superiormente".

7.6. Falso. Como contraejemplo, puede tomarse $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, que es monótona decreciente, tiene a 0 por cota inferior, pero $\lim a_n = 1 \neq 0$ (observa que $\inf \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$).

7.7. Falso. Como contraejemplo, puede tomarse $a_n = (-1)^n n$, que verifica que $((-1)^n a_n) = (n)$, que es monótona creciente.

7.8. Falso. Como contraejemplo, puede tomarse $a_n = n$ y $b_n = n$, que son tales que $\frac{a_n}{b_n} = 1$ (sucesión constante 1), pero (a_n) y (b_n) no son convergentes.

Ejercicio 8.

Es bien sabido que una sucesión de números reales $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ puede ser definida por una ley de recurrencia del tipo $a_{n+1} = f(a_n)$, dependiendo el carácter de la sucesión, en general, no solo de la función f, sino también del primer término a_1. Se pide:

a) Prueba que las sucesiones definidas mediante las leyes de recurrencia $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$, con $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, y $b_{n+1} = \frac{b_n - 1}{b_n + 1}$, con $b_n \neq -1, \forall n \in \mathbb{N}$, no son convergentes, para cualquiera que sean a_1 y b_1.

b) Prueba que la sucesión definida mediante la ley de recurrencia $c_{n+1} = \frac{1}{4(1-c_n)}$, con $c_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, es convergente, para cualquiera que sea c_1. Calcula su límite.

c) Estudia la convergencia de la sucesión definida mediante la ley $d_{n+1} = \frac{3d_n - 2}{d_n}$, con $d_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, según los distintos valores de d_1.

Una solución.

a) En el supuesto de que (a_n) y (b_n) fueran convergentes, es decir, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$, pasando al límite en $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ y en $b_{n+1} = \frac{b_n - 1}{b_n + 1}$, se llega a las ecuaciones $a^2 - a + 1 = 0$ y $b^2 + 1 = 0$, que no tienen raíces reales. Por tanto, dado que no existen $a, b \in \mathbb{R}$ verificando dichas condiciones, (a_n) y (b_n) no pueden ser convergentes.

b) En el supuesto de que (c_n) sea convergente, es decir, $\lim c_n = c \in \mathbb{R}$, pasando al límite en $c_{n+1} = \frac{1}{4(1-c_n)}$, se verifica que $c = \frac{1}{4(1-c)}$. Esta ecuación tiene una única raíz real, que es $c = \frac{1}{2}$. Por tanto, de ser convergente la sucesión (c_n), será $\lim c_n = \frac{1}{2}, \forall c_1 \in \mathbb{R}$.
La Figura 4 muestra la gráfica de $c_{n+1} = \frac{1}{4(1-c_n)}$ en el plano $c_n - c_{n+1}$

(dicha gráfica es tangente a la bisectriz en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$).

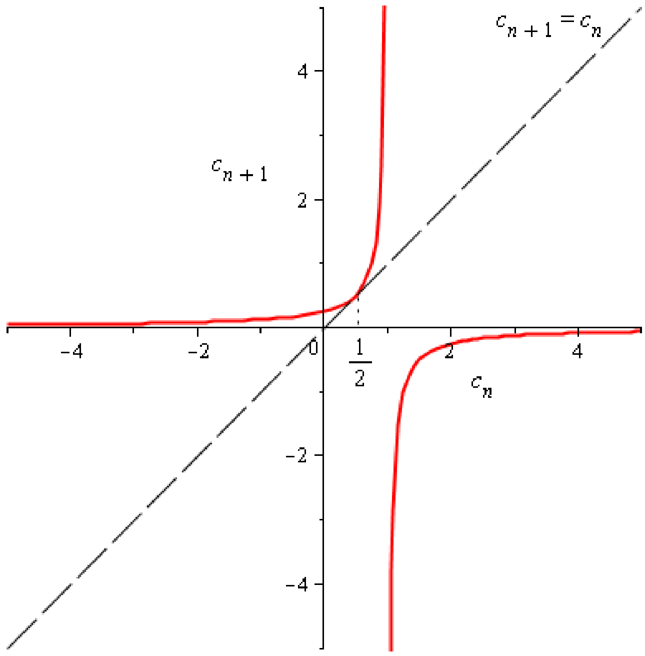


Figura 4

Para estudiar la convergencia de (c_n), consideraremos tres casos:
a) si $c_1 < \frac{1}{2}$, entonces vemos en la Figura 4 que $c_2 > c_1$, y de

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{4(1-c_n)} - \frac{1}{4(1-c_{n-1})} = \frac{c_n - c_{n-1}}{4(1-c_n)(1-c_{n-1})}$$

se deduce que (c_n) es monótona creciente. Veamos que (c_n) está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$. Razonando por inducción, la propiedad es cierta para $n = 1$, porque $c_1 < \frac{1}{2}$. Y en el supuesto de que sea $c_n < \frac{1}{2}$, entonces $c_{n+1} = \frac{1}{4(1-c_n)} < \frac{1}{2}$. Por tanto, en caso de que sea $c_1 < \frac{1}{2}$, (c_n) es convergente y $\lim c_n = \frac{1}{2}$.
b) si $c_1 = \frac{1}{2}$, entonces $(c_n) = \left(\frac{1}{2}\right)$ (sucesión constante $\frac{1}{2}$), por lo que (c_n) es convergente y $\lim c_n = \frac{1}{2}$.
c) si $c_1 > \frac{1}{2}$, entonces, iterando a partir de c_1, vemos con la ayuda de la Figura 4 que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_{n_0} < \frac{1}{2}$ (concretamente, $n_0 = 2$ siempre que sea $c_1 > \frac{1}{2}$), por lo que, aplicando los resultados del apartado a), (c_n) también es convergente (por ser, a partir de n_0, monótona creciente y acotada superiormente), y $\lim c_n = \frac{1}{2}$.

c) En el supuesto de que (d_n) sea convergente, es decir, $\lim d_n = d \in \mathbb{R}$, pasando al límite en $d_{n+1} = \frac{3d_n - 2}{d_n}$, se verifica que $d = \frac{3d-2}{d}$. Esta ecuación tiene dos raíces reales, que son $l_1 = 1$ y $l_2 = 2$. Por tanto, de ser convergente la sucesión (d_n), será $\lim d_n = 1$ (para ciertos valores de d_1) o

$\lim d_n = 2$ (para ciertos valores de d_1).
La Figura 5 muestra la gráfica de $d_{n+1} = \frac{3d_n - 2}{d_n}$ en el plano $d_n - d_{n+1}$ (dicha gráfica corta a la bisectriz en los puntos de abscisa 1 y 2).

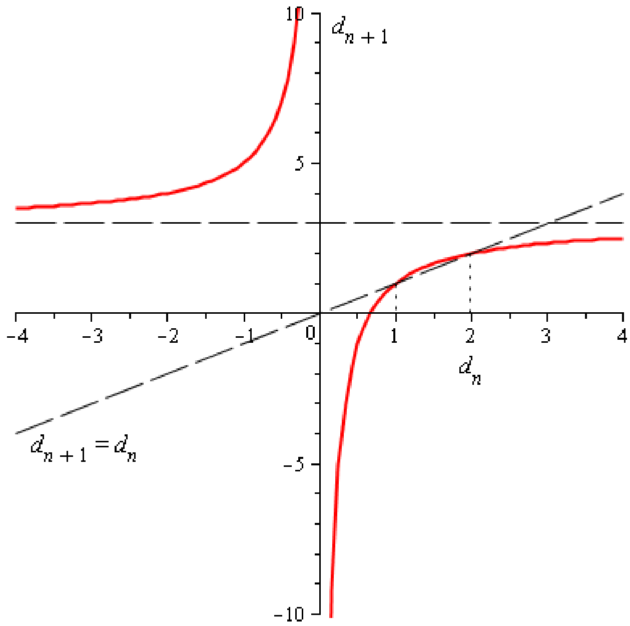


Figura 5

Para estudiar la convergencia de (d_n), consideraremos los casos siguientes:
a) si $d_1 > 2$, se deduce de la Figura 5 que $d_2 < d_1$, y de

$$d_{n+1} - d_n = \frac{3d_n - 2}{d_n} - d_n = -\frac{(d_n - 1)(d_n - 2)}{d_n}$$

se deduce que, en este caso, (d_n) es monótona decreciente. Veamos que (d_n) está acotada inferiormente por 2. Razonando por inducción, la propiedad es cierta para $n = 1$, porque $d_1 > 2$. Y en el supuesto de que sea $d_n > 2$, entonces $d_{n+1} = \frac{3d_n - 2}{d_n} = 3 - \frac{2}{d_n} > 2$. Por tanto, en caso de que sea $d_1 > 2$, (d_n) es convergente y $\lim d_n = 2$.
b) si $d_1 = 2$, entonces $(d_n) = (2), \forall n \in \mathbb{N}$ (sucesión constante 2), por lo que (d_n) es convergente y $\lim d_n = 2$.
c) si $1 < d_1 < 2$, se deduce de la Figura 5 que $d_2 > d_1$, y de

$$d_{n+1} - d_n = \frac{3d_n - 2}{d_n} - d_n = -\frac{(d_n - 1)(d_n - 2)}{d_n}$$

se deduce que, en este caso, (d_n) es monótona creciente. Veamos que (d_n) está acotada superiormente por 2. Razonando por inducción, la propiedad es cierta para $n = 1$, porque $1 < d_1 < 2$. Y en el supuesto de que sea

$1 < d_n < 2$, entonces $d_{n+1} = \frac{3d_n - 2}{d_n} = 3 - \frac{2}{d_n} < 2$. Por tanto, en caso de que sea $1 < d_1 < 2$, (d_n) es convergente y $\lim d_n = 2$.
d) si $d_1 = 1$, entonces $(d_n) = (1)\,, \forall n \in \mathbb{N}$ (sucesión constante 1), por lo que (d_n) es convergente y $\lim d_n = 1$.
e) si $d_1 < 1$, entonces, iterando a partir de d_1, vemos con la ayuda de la Figura 5 que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{n_0} > 2$ (concretamente, $n_0 = 4$ para $\frac{2}{3} < d_1 < 1$, $n_0 = 3$ para $0 < d_1 < \frac{2}{3}$ y $n_0 = 2$ para $d_1 < 0$), por lo que, aplicando los resultados del apartado a), (d_n) también es convergente (por ser, a partir de n_0, monótona decreciente y acotada inferiormente), y $\lim d_n = 2$.

Ejercicio 9.

Dadas las sucesiones de números reales (a_n) y (b_n) definidas mediante

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_n)}$$
$$a_1 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$$
$$b_{n+1} = \frac{b_n}{a_{n+1}}$$
$$b_1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$$

donde x representa un número real positivo arbitrario. Se pide:

a) Prueba que (a_n) está acotada inferiormente por 1 y es monótona decreciente. Calcula su límite.

b) Obtén razonadamente una fórmula para a_n en términos de n y de x. Comprueba el límite obtenido en el apartado anterior mediante esta fórmula.

c) Obtén razonadamente una fórmula para b_n en términos de n y de x. Calcula $\lim b_n$.

Una solución.

a) Aplicando el método de inducción, veamos que (a_n) está acotada inferiormente por 1. La propiedad es cierta para $n = 1$, porque $a_1 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geq$

$1, \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ (ver Figura 6). Tan solo es $a_1 = 1$ cuando $x = 1$.

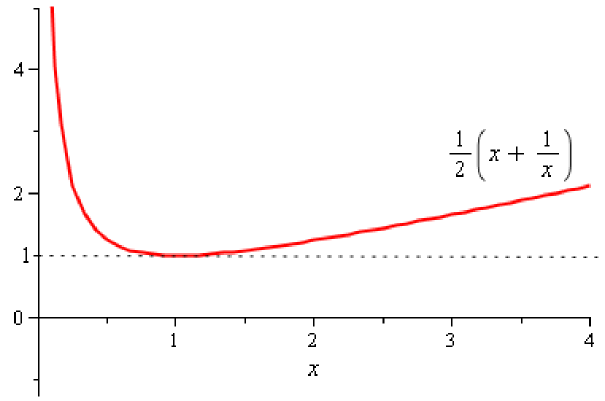


Figura 6

Supongamos ahora que $a_n \geq 1$. Entonces, es evidente que

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_n)} \geq 1,$$

resultando que (a_n) está acotada inferiormente por 1.
Veamos que (a_n) es monótona decreciente. Esto se deduce de que, al ser $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_n)} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + a_n)} = \sqrt{a_n} \leq a_n$$

Por tanto, (a_n) es convergente, es decir, $\exists a \in \mathbb{R} : \lim a_n = a$. Pasando al límite en $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_n)}$, se llega a la ecuación $a = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a)}$. Elevando al cuadrado, se obtiene la ecuación $2a^2 - a - 1 = 0$, cuyas raíces son 1 y $-\frac{1}{2}$, pero solo la primera es raíz de la ecuación original ($-\frac{1}{2}$ es una "solución extraña" introducida al elevar al cuadrado). En definitiva, resulta que $\lim a_n = 1$.

b) Dado que $a_1 = \frac{x^2+1}{2x}$, $a_2 = \frac{x+1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $a_3 = \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{2x^{\frac{1}{4}}}$, $a_4 = \frac{x^{\frac{1}{4}}+1}{2x^{\frac{1}{8}}}$,..., se deduce que

$$a_n = \frac{\left((x)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\right) + 1}{2\,(x)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}$$

y se comprueba que $\lim a_n = 1$.

c) Dado que $b_1 = \frac{x^2+1}{2x}$, $b_2 = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $b_3 = \frac{2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)}{x^{\frac{1}{4}}}$, $b_4 = \frac{2^2\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)}{x^{\frac{1}{8}}}$, $b_5 =$

$\frac{2^3\cdot\left(x^{\frac{1}{8}}-1\right)}{x^{\frac{1}{16}}}$,..., se deduce que

$$b_n = \frac{2^{n-2}\cdot\left((x)^{\frac{1}{2^{n-2}}}-1\right)}{(x)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}$$

y se verifica que

$$\lim b_n = \lim \frac{2^{n-2}\cdot\left((x)^{\frac{1}{2^{n-2}}}-1\right)}{(x)^{\frac{1}{2^{n-1}}}} = \lim \frac{2^{n-2}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\log x}{1} = \log x$$

Por ello, el anterior algoritmo, basado en las sucesiones recurrentes (a_n) y (b_n), puede ser utilizado para obtener una aproximación al logaritmo neperiano de cualquier número real positivo.

Ejercicio 10.

Calcula los límites siguientes:

10.1. $\lim \frac{\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2-1}}}{n}$ (sol.: 0).

10.2. $\lim \frac{n^{2n}}{(1+n^2)^n}$ (sol.: 1).

10.3. $\lim \sqrt[n]{2^n+3^n}$ (sol.: 3).

10.4. $\lim (n+\sqrt{n})\log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$ (sol.: $\frac{1}{2}$).

10.5. $\lim \frac{(a+n)(n-1)^{n-1}}{n^n}$, con $a\in\mathbb{R}$ (sol.: e^{-1}).

10.6. $\lim \left(\frac{a^n+1}{a^n}\right)^{2^n}$, con $a>0$ (sol.: si $0<a<2$, $\lim=+\infty$; si $a=2$, $\lim=e$; si $a>2$, $\lim=1$).

10.7. $\lim \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+2}}\right)^{\sqrt{n}}$ (sol.: 1).

10.8. $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3-2}}\right)^n$ (sol.: 1).

10.9. $\lim \left(\sqrt{\frac{1+3n}{5+3n}}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}$ (sol.: $e^{-\frac{1}{3}}$).

10.10. $\lim \left(\frac{\log(n^2+1)}{\log(n^2-1)}\right)^{n^2\log n}$ (sol.: e).

10.11. $\lim \left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}$ (sol.: e^2).

10.12. $\lim \left(1+\log\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{4n+1}$ (sol.: e^{-4}).

10.13. $\lim \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$ (sol.: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

10.14. $\lim \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2}$, con $a \in \mathbb{R}$ (sol.: $e^{-\frac{a^2}{2}}$).

10.15. $\lim e^{n(\log(n+1)-\log n)}$ (sol.: e).

10.16. $\lim \left(1+3\tan^2 \frac{1}{n}\right)^{\cot^2 \frac{1}{n}}$ (sol.: e^3).

10.17. $\lim \frac{e^{\frac{a^2}{n}}-e^{\frac{b^2}{n}}}{\operatorname{sen}\frac{a}{n}-\operatorname{sen}\frac{b}{n}}$, con $a \neq b$ y $a, b \in \mathbb{R}$ (sol.: $a+b$).

10.18. $\lim \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$ (sol.: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$).

10.19. $\lim \left(\cos\left(\sqrt{n+1}\right)-\cos\left(\sqrt{n}\right)\right)$ (sol.: 0).

10.20. $\lim \left[\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}\right]$ (sol.: $\sqrt{e}$).

10.21. $\lim n^a \operatorname{sen}\left(\frac{b}{n}\right)$, con $a, b > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$ (sol.: $\lim = 0$, si $a < 1$; $\lim = b$, si $a = 1$; $\lim = \infty$, si $a > 1$).

10.22. $\lim\left(\log(\operatorname{senh} n) - n\right)$ (sol.: $-\log 2$).

10.23. $\lim\left(\cos \pi a\right)^{2n}$, con $a \in \mathbb{R}$ (sol.: $\lim = 1$, si $a \in \mathbb{Z}$; $\lim = 0$, si $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$).

Ejercicio 11.

Un cultivo consta inicialmente de N_0 bacterias, y se estudia durante un período de tiempo T, a lo largo del cual, y a intervalos de tiempo de igual longitud $\frac{T}{n}$, la población de bacterias aumenta proporcionalmente al producto de su número y de la longitud de dicho intervalo, con constante de proporcionalidad $r > 0$. Se pide: a) ¿Cuántas bacterias habrá al final del período T? b) ¿Cuántas bacterias habrá al final del período T si el número de intervalos tiende a hacerse infinito ($n \longrightarrow +\infty$)?

Una solución.

a) Designando por $0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, ..., \frac{(n-1)T}{n}, T$ los extremos de cada uno de los subintervalos del intervalo $[0, T]$, y por $N(0) = N_0, N(\frac{T}{n}), N(\frac{2T}{n}), ..., N(T)$ los correspondientes niveles poblacionales, es evidente que

$$N\left(\frac{T}{n}\right) = N(0) + rN(0)\frac{T}{n} = N_0\left(1+r\frac{T}{n}\right)$$

$$N\left(\frac{2T}{n}\right) = N_0\left(1+r\frac{T}{n}\right) + rN_0\left(1+r\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n} = N_0\left(1+r\frac{T}{n}\right)^2$$

....

$$N(T) = N_0\left(1+r\frac{T}{n}\right)^n$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} N(T) = N_0 e^{rT}$ (ley de crecimiento exponencial).

Ejercicio 12.

Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado l, se obtiene otro, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados obtenidos.

Una solución.

$S = \lim\limits_{n\to\infty} \left(l^2 + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2^2}l^2 + ... + \frac{1}{2^n}l^2 + ...\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}l^2 = 2l^2$ (dado que se trata de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{1}{2}$ y primer término 1).

Ejercicio 13.

a) Se invierte un capital inicial C_0, a un interés compuesto anual i (tanto por uno), abonado en n períodos iguales cada año durante t años. Obtén el capital acumulado a su vencimiento.

b) Calcula dicho capital acumulado cuando los intereses se acumulan en cada instante (es decir, cuando $n \to \infty$).

Una solución.

a) Llamando $C(t)$ al capital acumulado al final del período de capitalización, y aplicando la fórmula de capitalización a interés compuesto con n períodos de capitalización cada año durante t años, se verifica que

$$C(t) = C_0(1 + \frac{i}{n})^{nt}$$

En esta expresión, $\frac{i}{n}$ representa el tipo de interés referido a la unidad de tiempo de capitalización y nt el número total de períodos de capitalización.

b) Pasando al límite en la anterior expresión cuando $n \to \infty$, se llega a $C = C_0 e^{it}$, que es la fórmula de capitalización con interés continuo.

Ejercicio 14.

Utilizando la identidad $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \epsilon_n$, donde $\gamma = 0.57721556649... = \lim(H_n - \log n)$ es la llamada Constante de Euler-Mascheroni (que no debe ser confundida con el número $e = 2.718281828459045...$), y ϵ_n es un infinitésimo, es decir, una sucesión tal que $\lim \epsilon_n = 0$:

a) Calcula

$$\lim\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\frac{1}{3+n}+...+\frac{1}{n+n}\right)$$

b) Prueba que la sucesión $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ no está acotada, y que

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Una solución.

a) Teniendo en cuenta que

$$\begin{gathered}\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\frac{1}{3+n}+...+\frac{1}{n+n}=H_{2n}-H_n=\\ =\log(2n)+\gamma+\epsilon_n-(\log n+\gamma+\epsilon'_n)=\log 2+\epsilon_n-\epsilon'_n\end{gathered}$$

se deduce que

$$\lim\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\frac{1}{3+n}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\log 2.$$

b) Pasando al límite en

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\log n+\gamma+\epsilon_n$$

se deduce que

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\lim\log n+\gamma+0=+\infty.$$

Por tanto, la sucesión

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$$

no está acotada.

Ejercicio 15.

a) Prueba que si (a_n) es una sucesión de números reales y $\alpha\in\mathbb{R}$ es un número real tal que $\alpha<1$, y se verifica que

$$\forall n\in\mathbb{N},\text{ con } n\geq 2:|a_{n+1}-a_n|\leq\alpha\cdot|a_n-a_{n-1}|,$$

entonces (a_n) es una sucesión de Cauchy.

b) Aplica el anterior resultado para probar que la sucesión definida por la ley de recurrencia

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

es una sucesión de Cauchy. Calcula $\lim a_n$.

Una solución.

a) Aplicando sucesivamente la condición dada, se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$ que

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha \cdot |a_n - a_{n-1}| \leq \alpha^2 \cdot |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq ... \leq \alpha^{n-1} \cdot |a_2 - a_1|$$

Por tanto, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, con $m > n$, se verifica que

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leq \\ \leq |a_2 - a_1| \cdot \left(\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + ... + \alpha^{n-1}\right) = \\ = |a_2 - a_1| \cdot \alpha^{n-1} \cdot \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \leq |a_2 - a_1| \cdot \alpha^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Si $a_2 = a_1$, entonces se deduce de la anterior expresión que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1$, por lo que (a_n) es una sucesión de Cauchy. Supongamos que $a_2 \neq a_1$. Entonces, al ser $\alpha < 1$, sabemos que la sucesión (α^n) converge a 0, por lo que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que

$$\alpha^{n-1} < \frac{\epsilon \cdot (1 - \alpha)}{|a_2 - a_1|}$$

de donde se sigue que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq n_0$, se verifica que $|a_m - a_n| < \epsilon$, por lo que (a_n) es una sucesión de Cauchy.

b) Dado que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, es evidente que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 1$. Por tanto

$$a_n a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) a_{n-1} = 1 + a_{n-1} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 2.$$

Aplicando el anterior resultado, se verifica que

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| = \\ = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}|, \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 2 \end{aligned}$$

por lo que, aplicando la propiedad del apartado a), (a_n) es una sucesión de Cauchy. Designando por $\lim a_n = a$, y pasando al límite en

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

se llega a la ecuación $a^2 - a - 1 = 0$, cuyas raíces son $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geq 1$, necesariamente ha de ser

$$\lim a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$