Cálculo I

3 de Septiembre de 2012

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos, verificando que $\inf A > 0$ y B está mayorado. Probar que el conjunto
$$A^{-1}B = \{\frac{b}{a} : \ a \in A, \ b \in B\}$$
está mayorado y calcular su supremo.

2. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:
$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \quad \forall \, n \in \mathbb{N}$$

3. Estudiar la convergencia de la serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que existe un número real positivo c tal que
$$|f(x) - f(t)| \geq c|x-t| \quad \forall x,t \in \mathbb{R}.$$
Demostrar que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
(Indicación: Probar que la función f es inyectiva y por tanto estrictamente monótona)

5. Sea $a \geq 1$. Probar que existe alguna solución real de la ecuación
$$\log(x) = (x-a)^2$$

Cálculo I

3 de Septiembre de 2012

1. Desarrollar uno de los dos temas siguientes:
   - Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$.
   - Teorema del valor intermedio para funciones continuas

2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

   (a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $|ab| < |a|$, se tiene que $b < 1$.

   (b) Toda función definida en un conjunto numerable es continua.

   (c) Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial de Cauchy.

   (d) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de positivos tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una serie convergente. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n^2}{1+a_n}$ es convergente.

   (e) Toda función continua e inyectiva es estrictamente monótona.