Ejercicios tipo de geometría

- Suma e intersección de subespacios:
  1) Estudiar dimensión (Puede estar en función de un parámetro)
     - Si te dan un sistema de generadores estudias la dependencia lineal de los vectores
     - Si te dan ecuaciones cartesianas, pasalas a forma matricial y estudias el rango
  2) Calcular la suma
     - Juntas las bases de los dos espacios y quitas los vectores l.d
     - $\dim(U+W)$ = nº vectores de la base
  3) Calcular la intersección
     - Juntas las ecuaciones cartesianas de los espacios y quitas las l.d
     - $\dim(U \cap W) = \dim(V)$ − nº ecuaciones (Recuerda que la intersección es un subespacio)
  4) Suma directa

$$\left.\begin{array}{l} U \cap W = \{0\} \\ U+W = V(\mathbb{K}) \end{array}\right\} \Rightarrow U \oplus W$$

Cosas que debes recordar:

$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$

$\dim(U) = \dim(V)$ − nº ecuaciones implícitas (U subespacio de V)

$\dim(U)$ = nº vectores de una base de U

Dependencia lineal

$\dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$ Matrices

$\dim(S_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ Matrices simétricas

$\dim(A_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$ Matrices asimétricas

$$\boxed{\text{Sistema de generadores}} \rightleftarrows \boxed{\text{Bases}}$$

$$\downarrow\uparrow$$

$$\boxed{\text{Ecuaciones cartesianas}} \rightleftarrows \boxed{\text{Ecuaciones paramétricas}}$$

- Ejercicio de dual:
  * Te dan x formas lineales de $V^*(\mathbb{K})$ y te piden calcular una base $\mathcal{B}^*$ con dichas formas y ampliando con las formas que necesites
    1) Consideras $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}_C^* = \{w^1, \dots, w^n\}$
    2) Consideras cada forma como c.l. de $\mathcal{B}_C^* \Rightarrow \varphi^i = a_0 w^1 + \dots + a_n w^n$, $i \in \{1, \dots, x\}$
    3) Aplicas cada forma a los elementos de $\mathcal{B}_C$ y te queda un sistema de ecuaciones con incógnitas $a_0 \cdots a_n$ y lo resuelves
    4) Añade, si hiciese falta, las formas l.c. que necesites para formar una base.

* Calcular la base $\bar{B}$ de la cual $\bar{B}^*$ es dual
  1) Como $\dim(V(K)) = \dim(V^*(K)) = n$ consideras $\bar{B} = \{n$ elementos$\}$
  2) Aplicas a cada vector de $\bar{B}$ las formas de $\bar{B}^*$ (Recuerda que $\varphi^i(v_i) = 1$ y $\varphi^i(v_j) = 0$)
  3) Resuelves los sistemas y obtienes los vectores de $\bar{B}$.
* Dar las coordenadas de un vector en función de B usando las propiedades del dual:
  1) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ expresas w como c.l. $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
  2) Aplicando las propiedades del dual ($\bar{B}^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^n\}$
  $\lambda_1 = \varphi^1(w) =$ (coordenadas de la forma) $\begin{pmatrix} \text{coordenadas} \\ \text{de } w \end{pmatrix}$ = escalar

  ↓ así n veces

Cosas a recordar:
- Definición de espacio dual
- Matriz asociada a la base dual (Redes usar la inversa para calcularla)
- Sean: $\begin{cases} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V \\ B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\} \text{ base dual de } B \end{cases}$

  Sea $v \in V$: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow a_j = \varphi^j(v)$ $\quad j \in \{1, \dots, n\}$
- Sea $\phi \in V^*$: $\phi = b_1 \varphi^1 + \dots + b_n \varphi^n$

  $\phi(v_1) = (b_1\varphi^1 + b_2\varphi^2 + \dots + b_n\varphi^n) = b_1 \underbrace{\varphi^1(v_1)}_{1} + \dots + b_n \underbrace{\varphi^n(v_n)}_{0} \Rightarrow \phi(v_1) = b_1$
- Cambios de base

• Ejercicio de buscar $f: V(K) \to V(K)$ endomorfo que verifique x condiciones:
  1) Los vectores del núcleo se aplican en 0
  2) Los vectores de la imagen en donde quieras que no sea nulo (piensa en el resto de condiciones)
  3) Añade vectores l.i. para formar base de $V(K)$ y aplícales f, ten en cuenta las condiciones del enunciado. Si no te dicen nada te recomiendo aplicarlos en el 0.

Recuerda:
- Endomorfismo: Aplicación del espacio en sí mismo
- $\operatorname{Ker}(f) = \{v \in V(K) : f(v) = 0\}$ y es un subespacio del dominio $\qquad f: V \to V'$
- $\operatorname{Im}(f) = \{f(v) \in V'(K) : v \in V(K)\}$ y es un subespacio del codominio
- Matriz asociada a una aplicación lineal respecto bases B y B'

* Calcular bases del an (U): (U subespacio de $V(K)$)
  1) Obtengo una base de U.
  2) Amplío hasta tener una base de $V(K)$
  3) Considero su base dual
  4) $\operatorname{Dim}(\operatorname{an}(U)) = \dim(V(K)) - \dim(U)$
  5) Aplico la propiedad del dual para ver las formas que pertenecen al anulador

6) Calculo las formas que pertenecen al anulador y la expreso como funciones

Recuerda:

$an(U) = \{\varphi \in V^* \ / \ \varphi(u)=0 \ \forall u \in U\}$, U subespacio de $V(K)$

$an(W) = \{v \in V \ / \ w(v) = 0 \ \forall w \in W\}$, W subespacio de $V(K)$

Propiedades del anulador:

$an(an(S)) = L(S)$, S subconjunto de $V(K)$

$an(an(U)) = U$, U subespacio vectorial

$\dim(an(U)) = \dim V - \dim U$

$an(U+W) = an(U) \cap an(W)$

$an(U \cap W) = an(U) + an(W)$

$U \subseteq W \Rightarrow an(W) \subseteq an(U)$

$an(V) = \{\varphi^0\} \Rightarrow an(\{\vec{0}\}) = V^*$

$an(V^*) = \{\vec{0}\} \Rightarrow an(\{\varphi^0\}) = V$

* Calcular la aplicación traspuesta:

- Si te dan la matriz de f la traspones y listo
- Si no te dan la matriz de f:

1) Tienes $f: V \to V'$, pues $f^t: V^* \longrightarrow (V')^*$

$\omega \longrightarrow f^t(\omega)$

2) Sacas la matriz f asociada a bases B y B' de V y V'.
3) Traspones dicha matriz.
4) Compones la matriz traspuesta con la forma lineal que te dan y obtienes un vector por columnas
5) Traspones el vector y lo multiplicas por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$ y te sale la ecuación de $f^t(\omega)$

Más corto:

1) Defines f^t
2) Compones la forma $\omega(f(x,y\ldots)) =$ ecuación de $f^t(\omega)$

Recuerda:

Concepto de aplicación traspuesta

$Ker(f^t) = an(Im(f))$

$Im(f^t) = an(Ker(f))$

$rg(f^t) = rg(f)$

$traza(f^t) = traza(f)$

$Im(f) = an(Ker(f^t))$

$Ker(f) = an(Im(f^t))$

Los ejercicios de aplicaciones lineales son un poco lo más variado. Tenéis que recordar:

- concepto de aplicación lineal $f: V \to V'$
- Concepto de núcleo e imagen y saber hallar bases de las mismas
- f inyectiva $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$
- f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = V'$
- f biyectiva $\Leftrightarrow$ las dos condiciones anteriores se verifican
- $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
- Matriz asociada a una aplicación lineal
- Dos matrices A y C son equivalentes $\Leftrightarrow$ tienen el mismo rango
- Matriz de cambio de base