Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Examen Final

1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\operatorname{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} \, : \, a \in A, b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\operatorname{ínf}(A) - \sup(B)}$.

2. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\}$$

Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas. Deduce que si $\{x_n\} \to x$ entonces $\underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = x + \underline{\text{lím}}\{y_n\}$.

3. Calcula los límites de las sucesiones:

a) $\dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$; b) $\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$

4. Estudia, enunciando en cada caso los resultados teóricos que aplicas, la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

LEIBNIZ

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\log(n+2)}{n+2}$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)}{9 \cdot 11 \cdot 13 \ldots (2n+7)}}$ ← COCIENTE RAABE

? 5. Sean I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente en I. Supongamos que f es continua en un punto $a \in I$. Prueba que:

$$\sup\{f(x) : x \in I, \; x < a\} = f(a) = \operatorname{ínf}\{f(x) : x \in I, \; x > a\}$$

6. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando brevemente las respuestas.

   a) Una sucesión monótona que tenga una parcial convergente es convergente.

   b) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

   c) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.

   d) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.

(2) 7. Elige para responder uno de los temas:

→ a) Series absolutamente convergentes y series conmutativamente o incondicionalmente convergentes. Series alternadas. Criterio de Leibnitz.

b) Continuidad y monotonía.

$\overline{\text{lím}}\{x_n\} = 2$

$\underline{\text{lím}}\{x_n\} = 1/2$

$\underline{\text{lím}}\{y_n\} = 0$

$\cancel{x_n = \{1, 2, 1/2, \ldots\}}$

$\cancel{y_n = \{2, 3, 0, \ldots\}}$

$\cancel{x_n + y_n = \{3, 5, 1/2, \ldots\}}$

Granada, 21 de enero de 2019.