

CÁLCULO I

1º Grado Matemáticas y 1º Doble Grado Física y Matemáticas,
Curso 2018–2019, Primer cuatrimestre

IV. Ejercicios (Series de números reales. Temas 10 y 11.)

1. Da un ejemplo de dos series divergentes $\sum x_n$ y $\sum y_n$ tales que $\sum x_n y_n$ sea convergente.
2. Supongamos que la serie $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$ es convergente. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de las series $\sum_{n \geq 1} x_n$ y $\sum_{n \geq 1} y_n$?
3. Si $a_n \geq 0 \forall n$ y $\sum a_n$ converge, ¿puede afirmarse algo sobre la serie $\sum \sqrt{a_n}$? ¿Y sobre $\sum a_n^2$?
4. Prueba que la sucesión $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 3n + 2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} \right\}$ es convergente y calcula su límite.
5. Supongamos que $\sum a_n$ es una serie convergente. Prueba que $\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k\}$ converge a cero.
6. Prueba que las siguientes series convergen y calcula sus sumas:

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} \quad (b) \sum_{n \geq 0} \frac{3n + 1}{n!}$$

7. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha x^{2n} + \beta}{x^n}$.
8. Dado $a \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$.
9. Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie convergente de términos no negativos. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1 + a_n}$ también es convergente.
10. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales no negativos. Supongamos que las series $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ y $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ son convergentes. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ también es convergente.
11. Sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q a_n = 1$, donde $q \in \mathbb{N}$ y $q > 1$. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.

12. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(b)} \sum_{n \geq 1} \frac{2^n(n^2 + 1)}{n^n} & \text{(c)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \\
 \text{(d)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{2^n n!} & \text{(e)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{3^n n!} & \text{(f)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \\
 \text{(g)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \text{(h)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n} & \text{(i)} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 \text{(j)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} & & \text{(k)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n - 10}{n^4 + 1}
 \end{array}$$

13. Prueba que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ también converge absolutamente. ¿Se verifica el mismo resultado si la primera serie converge, pero no converge absolutamente?

14. Prueba que si la serie $\sum a_n$ converge absolutamente y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge absolutamente. ¿Es cierta la afirmación análoga para series convergentes en lugar de absolutamente convergentes?

15. Sea $\sum_{n \geq 1} x_n$ una serie absolutamente convergente y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Prueba que la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Suponiendo sólo que $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, ¿se puede asegurar que $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ también converge?

16. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{x^n + n^2}$