Álgebra I. Doble grado en Informática y Matemáticas. Diciembre 2016

Teoría. (3 puntos, 1.5 por pregunta)

1. Argumentar que, para enteros $m, n \geq 2$ tales que $(m, n) = 1$, hay un isomorfismo entre los anillo $\mathbb{Z}/(mn)$ y $\mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$.
2. Sea A un DIP. Argumentar que $\forall\ a, b \in A$ existe su máximo común divisor $d = (a, b)$ y, además, elementos $u, v \in A$ tales que $d = au + bv$.

Ejercicios. (4 puntos, 2 por problema)

1. Un inversor quiere invertir una cantidad de dinero en la compra de plata, oro y platino, destinando a ello doble cantidad para oro que para plata, y triple para platino que para oro.

   La cantidad de dinero a invertir es ligeramente superior al millón doscientos mil dólares, en billetes de 1000 \$, y queremos conocer esa cantidad con exactitud, sabiendo que:

   En el momento de la compra, el valor del lingote de plata está en 12000 \$, el de oro en 14000 \$, y el de platino en 31000 \$. Al comprar la plata, le sobraron 5000 \$, que añadió a la cantidad destinada a comprar oro, y al comprar oro le sobraron 13000 \$, que añadió al dinero destinado a comprar platino. Al comprar finalmente el platino le faltaron 2000 \$, que pidió prestados a su hermano. (Comprobar la solución)

2. Sean los polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1, \\ g(x) &= 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2. \end{aligned}$$

   (a) Calcular su máximo común divisor $(f(x), g(x))$ y unos correspondientes coeficientes de Bezout.

   (b) Resolver la ecuación diofántica $f(x) \cdot Y + g(x) \cdot Z = 4x + 3$.

   (c) Resolver la ecuación diofántica $f(x) \cdot Y + g(x) \cdot Z = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

   (d) Resolver la ecuación de congruencias $f(x) \cdot Y \equiv x^3 + x + 1 \mod (g(x))$.

   (e) Resolver la ecuación de congruencias $f(x) \cdot Y \equiv x^3 + x \mod (g(x))$.

   (Comprobar las soluciones particulares).