Examen de Cálculo I

29 de enero de 2013

Soluciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que A está mayorado con $\sup A = 1$ y que B está minorado con $\inf B = 2$. Probar que el conjunto

$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} \;:\; a \in A\,,\; b \in B \right\}$$

está mayorado y calcular su supremo.

Solución

Para $c \in C$, tenemos $c = 1/\sqrt{b-a}$ con $a \in A$ y $b \in B$. Entonces $a \leq \sup\, A = 1$, luego $-a \geq -1$, y también $b \geq \text{ínf}\, B = 2$, de donde deducimos:

$$b - a \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b-a} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \leq 1$$

Como esto es cierto para todo $c \in C$, hemos probado que 1 es mayorante de C, así que C está mayorado y $\sup\, C \leq 1$.

Por otra parte, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, tenemos $1/\sqrt{b-a} \in C$. Por tanto,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{b-a}} \leq \sup C \quad \Rightarrow \quad b - a \geq \frac{1}{(\sup\, C)^2} \quad \Rightarrow \quad b \geq \frac{1}{(\sup\, C)^2} + a$$

Como esta desigualdad es válida para todo $b \in B$, tenemos que $1/(\sup\, C)^2 + a$ es minorante de B. Por tanto:

$$\frac{1}{(\sup\, C)^2} + a \leq \text{ínf}\, B = 2 \quad \Rightarrow \quad a \leq 2 - \frac{1}{(\sup\, C)^2}$$

Ahora, esta desigualdad es válida para todo $a \in A$, luego $2 - 1/(\sup\, C)^2$ es mayorante de A. Por tanto,

$$2 - \frac{1}{(\sup\, C)^2} \geq \sup\, A = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\sup\, C)^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sup\, C \geq 1$$

y con la otra desigualdad ya probada, concluimos que $\sup\, C = 1$.

2. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2\,, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Solución

Es claro que $x_1 > 0$ y, suponiendo que $x_n > 0$, tenemos que $x_n+1 > 0$ y $\sqrt{x_n}+1 > 0$, luego $x_{n+1} > 0$. Esto prueba por inducción que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, la sucesión $\{x_n\}$ está minorada.

Con vistas a estudiar la monotonía, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$x_n - x_{n+1} \;=\; \frac{x_n\sqrt{x_n} + x_n - x_n - 1}{\sqrt{x_n} + 1} \;=\; \frac{x_n\sqrt{x_n} - 1}{\sqrt{x_n} + 1} \qquad (*)$$

y como $\sqrt{x_n} + 1 > 0$, nos preguntamos si $x_n\sqrt{x_n} > 1$, o lo que es lo mismo, si $x_n > 1$.

Es claro que $x_1 > 1$ y, suponiendo que $x_n > 1$ tenemos $x_n > \sqrt{x_n}$ luego

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \;>\; 1$$

Por inducción, hemos probado que $x_n > 1$, luego también $x_n\sqrt{x_n} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En vista de $(*)$, tenemos que $\{x_n\}$ es decreciente y, como también está minorada, es convergente.

Poniendo $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tenemos que $\{x_{n+1}\} \to L$, pero también

$$\{x_{n+1}\} \;=\; \left\{\frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1}\right\} \;\to\; \frac{L+1}{\sqrt{L}+1}$$

Por tanto:

$$L \;=\; \frac{L+1}{\sqrt{L}+1} \quad\Rightarrow\quad L\sqrt{L} + L \;=\; L+1 \quad\Rightarrow\quad L\sqrt{L} \;=\; 1 \quad\Rightarrow\quad L \;=\; 1$$

Queda así probado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; 1$.

3. Dado $p \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\, n^p}{(n+p)^2\, p^n}$$

Solución

Pongamos $x_n = \dfrac{(-1)^n\, n^p}{(n+p)^2\, p^n}$ y $a_n = |x_n| = \dfrac{n^p}{(n+p)^2\, p^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para estudiar la convergencia absoluta, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \left(\frac{n+p}{n+1+p}\right)^2 \frac{p^n}{p^{n+1}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y deducimos claramente que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{p}$

En el caso $p > 1$, el criterio del cociente nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es convergente, luego la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ converge absolutamente y, en particular, es convergente.

En el caso $p = 1$ tenemos $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$ y tomamos $b_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Como la serie armónica $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ es divergente, el criterio de comparación por paso al límite nos dice que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es divergente, luego $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ no converge absolutamente.

Queda estudiar la convergencia en el caso $p = 1$. Por tratarse de una serie alternada, podemos acudir al criterio de Leibniz. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n(n+2)^2 - (n+1)^3}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2\,(n+2)^2} > 0$$

Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, y es evidente que $\{a_n\} \to 0$. El criterio de Leibniz nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ es convergente.

En resumen, la serie dada siempre converge. Converge absolutamente si, y sólo si, $p > 1$.

4. Sea $f : [-2, 2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[4]{2-x}} \qquad \forall\, x \in [-2, 2[$$

Calcular $f\big([-2, 2[\big)$ y $f\big([-2, 0]\big)$.

Solución

Obtenemos f como cociente, cuyo numerador es una función continua, por ser la composición de la función valor absoluto con la función raíz cuadrada. El denominador también es una función continua, composición de una función polinómica con la función raíz cuarta. Así pues, f es continua, como cociente de funciones continuas. El Teorema del Valor Intermedio nos asegura que $f\big([-2, 2[\big)$ y $f\big([-2, 0]\big)$ son intervalos.

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [-2, 2[$ y $f(0) = 0$, tenemos que $0 = \text{mín}\, f\big([-2, 2[\big)$. Además, si tomamos cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $[-2, 2[$ tal que $\{x_n\} \to 2$, tenemos claramente que $\big\{\sqrt{|x_n|}\big\} \to \sqrt{2}$ y que $\big\{\sqrt[4]{2-x_n}\big\} \to 0$, luego $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y el intervalo $f\big([-2, 2[\big)$ no está mayorado. Concluimos que $f\big([-2, 2[\big)$ es la semirrecta a la derecha cerrada con origen en 0, es decir, $f\big([-2, 2[\big) = \mathbb{R}_0^+$.

Por otra parte, el Teorema de Weierstrass nos dice que el intervalo $f\big([-2, 0]\big)$ es cerrado y acotado. Para encontrar su mínimo y su máximo, estudiamos la inyectividad de f en el intervalo $[-2, 0]$. Para $x, y \in [-2, 0]$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \;&\Longrightarrow\; \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[4]{2-x}} = \frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt[4]{2-y}} \;\Longrightarrow\; \frac{x^2}{2-x} = \frac{y^2}{2-y} \\ &\Longrightarrow\; 2x^2 - x^2 y = 2y^2 - xy^2 \;\Longrightarrow\; 2(x+y)(x-y) = xy(x-y) \end{aligned}$$

Por tanto, de $f(x) = f(y)$ deducimos que, o bien $x = y$, o bien $2(x+y) = xy$. Pero en el segundo caso, como $xy \geq 0$ pero $2(x+y) \leq 0$, deberá ser $xy = 2(x+y) = 0$, de donde $x = y = 0$. Queda probado que la restricción de f al intervalo $[-2, 0]$ es inyectiva y, como también es continua, deducimos que es estrictamente monótona. Al ser $f(-2) = 1 > f(0)$, vemos que es estrictamente decreciente, luego su mínimo es $f(0) = 0$ y su máximo es $f(-2) = 1$. Por tanto, $f\big([-2, 0]\big) = [0, 1]$.

Cuestiones teóricas. Dilucidar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando brevemente las respuestas:

a) $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Solución. Esta afirmación es CIERTA. Como los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ son infinitos y numerables, ambos son equipotentes a $\mathbb{N}$, luego existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Definimos una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \varphi(x) \ \ \forall x \in \mathbb{Z}, \qquad f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Para comprobar que f es inyectiva, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$. Si $x \in \mathbb{Z}$ tenemos que $f(x) = \varphi(x) \in \mathbb{Z}$ luego $f(y) \in \mathbb{Z}$ y esto implica que $y \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $\varphi(x) = f(x) = f(y) = \varphi(y)$ luego $x = y$, ya que φ es inyectiva. Análogamente, si $y \in \mathbb{Z}$ tendremos $x = y$. Finalmente, si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tenemos $x = f(x) = f(y) = y$.

Por otra parte, la imagen de f se obtiene fácilmente:

$$f(\mathbb{R}) = \varphi(\mathbb{Z}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

Así pues, podemos ver f como una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales y $\{x_n\} \to -\infty$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{x_{n+k}\}$ es decreciente.

Solución. Esta afirmación es FALSA. Tomando $\{x_n\} = \{-n + (-1)^n\}$, es claro que $\{x_n\} \to -\infty$. Si existiese $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_{n+k}\}$ fuese decreciente tendríamos

$$-(n+k) + (-1)^{n+k} = x_{n+k} \geq x_{n+k+1} = -(n+k+1) + (-1)^{n+k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y sumando en ambos miembros $n + k + 1$ obtendríamos

$$1 + (-1)^{n+k} \geq (-1)^{n+k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero esto es imposible, pues tomando $n = k + 1$ obtendríamos $0 \geq 1$.

c) Sea $\{x_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos y sea $y_n = x_{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 2/5$, entonces $\{x_n\} \to 0$.

Solución. Esta afirmación es CIERTA. La sucesión $\{x_n\}$ es decreciente y está minorada, luego converge, sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Como $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, también tenemos $\{y_n\} \to L$, así como $\{y_{n+1}\} \to L$. Si fuese $L \neq 0$, deduciríamos que $\{y_{n+1}/y_n\} \to 1 \neq 2/5$, luego no queda más salida que $L = 0$.

De hecho, ocurre que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ es convergente (luego $\{x_n\} \to 0$). En efecto, puesto que $\{x_n\}$ es decreciente, el criterio de condensación nos asegura que la convergencia de dicha serie equivale a la de $\sum\limits_{n\geq 1} 2^n\, y_n$, y para ver que esta última serie converge basta aplicar el criterio del cociente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} y_{n+1}}{2^n y_n} = \frac{4}{5} < 1$$

d) Si la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$ también converge, pero el recíproco es falso.

Solución. Esta afirmación es FALSA. Basta tomar $x_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ es convergente, ya que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ es decreciente y converge a 0. Sin embargo, la serie armónica $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2 = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ no es convergente.

e) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ es un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es monótona.

Solución. Esta afirmación es CIERTA. La función f^{-1}, que está definida en el intervalo $f(A)$, es continua e inyectiva, luego estrictamente monótona. Por tanto, f también es estrictamente monótona y, en particular, es monótona.