ÁLGEBRA I. 2015/16

RELACIÓN 8

Ejercicio 1: Calcular los factores invariantes y los divisores elementales del endomorfismo $t : V \to V$ que, sobre los vectores de una base e_1, e_2, e_3 del espacio vectorial real V, está definido por $T(e_1) = -e_1$, $T(e_2) = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $T(e_3) = -e_3$. ¿Es posible encontrar una base de V respecto de la cual la matriz de T sea

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: ¿Son semejantes entre si algunas de las siguientes matrices reales?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, definida sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$, tiene la siguiente lista de factores invariantes: $(x + 1, x^2 + 2x + 1, x^4 - x^2 + 2x^3 - 4x - 2)$. Determina n, sus divisores elementales, el polinomio mínimo, y su polinomio característico.

Ejercicio 4: Sea $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x, y, z) = (7x - 2y + z, -2x + 10y + 2z, x - 2y + 7z).$$

Calcular sus factores invariantes, divisores elementales, polinomio mínimo, polinomio característico, y las formas canónica racional (Frobenius) y racional primaria (Weierstrass) de la matriz del endomorfismo.

Ejercicio 5: Describir todas las matrices cuadradas reales, salvo semejanza, cuyo polinomio característico sea $(x^4 - 1)(x^2 - 1)$.

Ejercicio 6: Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, salvo semejanza, verificando que $A^6 = I$. Observar que el polinomio factoriza en $\mathbb{R}[x]$ como $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2 - x + 1)$.

Ejercicio 7: Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcular sus factores invariantes y sus divisores elementales.
- Describir sus formas canónicas racional (Frobenius), racional primaria (Weierstrass) y, si existe, de Jordan.

Ejercicio 8: Sea $A \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que $A^3 + A^2 = I$. Razonar que n es necesariamente un múltiplo de 3 y que todas las posibles tales matrices son semejantes.

Ejercicio 9: Probar que las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -8 & -10 & -1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

tienen ambas $(x-1)^2(x+1)$ como polinomio característico, pero una puede ser diagonalizada en tanto que la otra no. Determinar la forma canónica de Jordan para ambas matrices.

Ejercicio 10: Determinar las formas canónicas de las siguientes matrices definidas sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$