5.- Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas verificando $x_n \leq y_n\ \forall n \in N$. Probar que

$$lim\,inf\{x_n\} \leq lim\,inf\{y_n\} \quad y \quad lim\,sup\{x_n\} \leq lim\,sup\{y_n\}$$

Solución

$\{x_n\}$ es una sucesión acotada: sea $n \in N$

$$inf\{x_k : k \geq n\} = \alpha_n \leq x_k \leq \beta_n = sup\{x_k : k \geq n\}\ \forall k \in N\ \ k \geq n$$

$\{y_n\}$ es una sucesión acotada: sea $n \in N$

$$inf\{y_k : k \geq n\} = \alpha'_n \leq y_k \leq \beta'_n = sup\{y_k : k \geq n\}\ \ \forall k \in N\ \ k \geq n$$

Sea $k \in N\ \ k \geq n$:

$$\alpha_n \leq x_k \leq y_k\ \forall\ k \geq n \Rightarrow \alpha_n \leq y_k\ \forall\ k \geq n \Rightarrow \alpha_n \in m(\{y_k : k \geq n\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n \leq \alpha'_n\ \ \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,inf\{x_n\} \leq lim\,inf\{y_n\}$

$$x_k \leq y_k \leq \beta'_n\ \ \forall\ k \geq n \Rightarrow x_k \leq \beta'_n\ \forall\ k \geq n \Rightarrow \beta'_n \in M(\{x_k : k \geq n\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_n \leq \beta'_n\ \ \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,sup\{x_n\} \leq lim\,sup\{y_n\}$

6.- Dar un ejemplo de dos sucesiones acotadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que verifiquen:

$$\overline{lim}\{x_n y_n\} \neq \overline{lim}\{x_n\}.\overline{lim}\{y_n\}$$

Solución

$$x_n = (-1)^n 2 \quad \overline{lim}\{x_n\} = 2$$

$$y_n = -3 \quad \overline{lim}\{y_n\} = -3$$

$$\{x_n y_n\} = (-1)^{n+1} 6 \quad \overline{lim}\{x_n y_n\} = 6$$

$$6 = \overline{lim}\{x_n y_n\} \neq \overline{lim}\{x_n\}.\overline{lim}\{y_n\} = -6$$

7.- Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales acotados. Prueba que:

a) $lim\,sup\{x_n + y_n\} \leq lim\,sup\{x_n\} + lim\,sup\{y_n\}$

b) $lim\,inf\{x_n + y_n\} \geq lim\,inf\{x_n\} + lim\,inf\{y_n\}$

4.- Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \qquad \forall n \in N$$

es convergente y su límite es menor o igual que 1.

Solución

$\{a_n\}$ es creciente:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} = a_{n+1}$$

$$\forall n \in N$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2}$$

Supongamos que

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} = \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow 4n^2 + 6n + 2 > 4n^2 + 7n + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 > n \ \ absurdo$$

$\{a_n\}$ es acotada:

Claramente $a_n \geq 0 \quad \forall n \in N$

Veamos por inducción que $a_n \leq 1 \quad \forall n \in N$

$$A = \{n \in N : a_n \leq 1\} \subseteq N$$

i) $1 \in A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1$

ii) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Se tiene que probar que:

$$\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1$$

Por lo tanto, $A = N$, queda probada la igualdad.

Por ser creciente y acotada es convergente, además $sup\{a_n\} = L \leq 1$ por ser 1 un mayorante de la sucesión.

7.- Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales acotados. Prueba que:

a) $lim\,sup\{x_n + y_n\} \leq lim\,sup\{x_n\} + lim\,sup\{y_n\}$

b) $lim\,inf\{x_n + y_n\} \geq lim\,inf\{x_n\} + lim\,inf\{y_n\}$

c) Si $x_n, y_n \geq 0 \;\; \forall n \in N$, entonces $lim\,sup\{x_n y_n\} \leq lim\,sup\{x_n\}\, lim\,sup\{y_n\}$

d) Si $x_n, y_n \geq 0 \;\; \forall n \in N$, entonces $lim\,inf\{x_n y_n\} \geq lim\,inf\{x_n\}\, lim\,inf\{y_n\}$

Solución

$\{x_n\}$ es una sucesión acotada: sea $n \in N$

$$inf\{x_k : k \geq n\} = \alpha_n \leq x_k \leq \beta_n = sup\{x_k : k \geq n\} \;\; \forall k \in N \;\; k \geq n$$

$\{y_n\}$ es una sucesión acotada: sea $n \in N$

$$inf\{y_k : k \geq n\} = \alpha'_n \leq y_k \leq \beta'_n = sup\{y_k : k \geq n\} \;\; \forall k \in N \;\; k \geq n$$

(a) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$x_k + y_k \leq \beta_n + y_k \; \forall\, k \geq n \Rightarrow x_k + y_k \leq \beta_n + \beta'_n \; \forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_n + \beta'_n \in M(\{x_k + y_k : k \geq n\}) \Rightarrow \beta_n + \beta'_n \geq sup\{x_k + y_k : k \geq n\} \;\; \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,sup\{x_n + y_n\} \leq lim\,sup\{x_n\} + lim\,sup\{y_n\}$

(b) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$x_k + y_k \geq \alpha_n + y_k \; \forall\, k \geq n \Rightarrow x_k + y_k \geq \alpha_n + \alpha'_n \; \forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n + \alpha'_n \in m(\{x_k + y_k : k \geq n\}) \Rightarrow \alpha_n + \alpha'_n \leq inf\{x_k + y_k : k \geq n\} \;\; \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,inf\{x_n + y_n\} \geq lim\,inf\{x_n\} + lim\,inf\{y_n\}$

(c) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$0 \leq x_k . y_k \leq \beta_n . y_k \; \forall\, k \geq n \Rightarrow x_k . y_k \leq \beta_n . \beta'_n \; \forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_n . \beta'_n \in M(\{x_k . y_k : k \geq n\}) \Rightarrow \beta_n . \beta'_n \geq sup\{x_k . y_k : k \geq n\} \;\; \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,sup\{x_n . y_n\} \leq lim\,sup\{x_n\} . lim\,sup\{y_n\}$

(d) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$x_k . y_k \geq \alpha_n . y_k \; \forall\, k \geq n \Rightarrow x_k . y_k \geq \alpha_n . \alpha'_n \; \forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n . \alpha'_n \in m(\{x_k . y_k : k \geq n\}) \Rightarrow \alpha_n . \alpha'_n \leq inf\{x_k . y_k : k \geq n\} \;\; \forall n \in N$$

Tomando límites: $lim\,inf\{x_n . y_n\} \geq lim\,inf\{x_n\} . lim\,inf\{y_n\}$

8.- Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales acotados. Prueba que:

a) $lim\, sup\{x_n + y_n\} \geq lim\, sup\{x_n\} + lim\, inf\{y_n\}$

b) $lim\, inf\{x_n + y_n\} \leq lim\, inf\{x_n\} + lim\, sup\{y_n\}$

Deducir que, si la sucesión $\{y_n\}$ es convergente, se tiene

c) $lim\, sup\{x_n + y_n\} = lim\, sup\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$

d) $lim\, inf\{x_n + y_n\} = lim\, inf\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$

Solución

(a) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$inf\{y_n\} \leq y_k = x_k + y_k - x_k \leq sup\{x_n + y_n\} - x_k \;\forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k \leq sup\{x_n + y_n\} - inf\{y_n\} \;\forall\, k \geq n \Rightarrow sup\{x_n\} \leq sup\{x_n + y_n\} - inf\{y_n\}$$

Tomando límites: $\quad lim\, sup\{x_n\} \leq lim\, sup\{x_n + y_n\} - lim\, inf\{y_n\}$

$$lim\, sup\{x_n + y_n\} \geq lim\, sup\{x_n\} + lim\, inf\{y_n\}$$

(b) Sea $k \in N \;\; k \geq n$:

$$inf\{x_n + y_n\} - x_k \leq y_k = x_k + y_k - x_k \leq sup\{y_n\} \;\forall\, k \geq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow inf\{x_n + y_n\} - sup\{y_n\} \leq x_k \;\forall\, k \geq n \Rightarrow inf\{x_n + y_n\} - sup\{y_n\} \leq inf\{x_n\}$$

Tomando límites: $\quad lim\, inf\{x_n + y_n\} - lim\, sup\{y_n\} \leq lim\, inf\{x_n\}$

$$lim\, inf\{x_n + y_n\} \leq lim\, inf\{x_n\} + lim\, sup\{y_n\}$$

(c) Por $7(a)$ y $8(a)$:

$$lim\, sup\{x_n\} + lim\, inf\{y_n\} \leq lim\, sup\{x_n + y_n\} \leq lim\, sup\{x_n\} + lim\, inf\{y_n\}$$

$$lim\, sup\{x_n\} + lim\, \{y_n\} \leq lim\, sup\{x_n + y_n\} \leq lim\, sup\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$$

$$lim\, sup\{x_n + y_n\} = lim\, sup\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$$

(d) Por $7(a)$ y $8(a)$:

$$lim\, inf\{x_n\} + lim\, inf\{y_n\} \leq lim\, inf\{x_n + y_n\} \leq lim\, inf\{x_n\} + lim\, sup\{y_n\}$$

$$lim\, inf\{x_n\} + lim\, \{y_n\} \leq lim\, inf\{x_n + y_n\} \leq lim\, inf\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$$

$$lim\, inf\{x_n + y_n\} = lim\, inf\{x_n\} + lim\, \{y_n\}$$