CALCULO I, 1^0 MATEMÁTICAS, Grupo A

Curso 2015-16 **Soluciones de la Prueba 1**

1. *(3 puntos)*

   Define el supremo y el ínfimo de un subconjunto (no vacío) de números reales. ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ tienen supremo? ¿Cuál es la relación que existe entre el supremo y el máximo de un conjunto de números reales?

   Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, un número real x es mayorante de A si se verifica que
   $$a \leq x, \forall a \in A.$$
   El supremo de A es el mínimo del conjunto de los mayorantes de A.
   Un número real x es minorante de A si se verifica que
   $$x \leq a, \forall a \in A.$$
   El ínfimo de A es el máximo del conjunto de los minorantes de A.
   La propiedad de supremo afirma que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y mayorado tiene supremo. La afirmación anterior es una consecuencia inmediata del axioma de Dedekind. De hecho, los subconjuntos que $\mathbb{R}$ que tienen supremo son exactamente aquellos que son no vacíos y están mayorados.
   Un conjunto no vacío A de números reales tiene máximo si, y sólo si está mayorado, y su supremo pertenece al conjunto A.

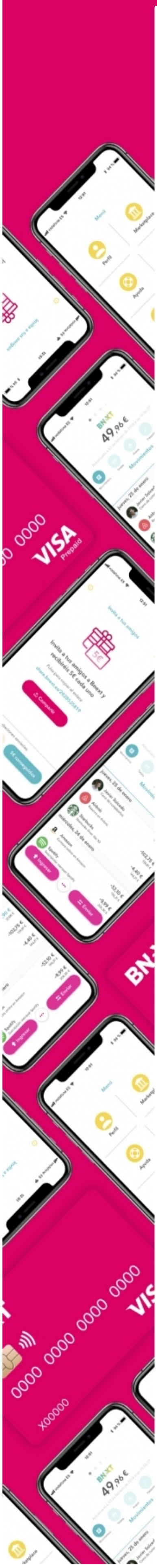
2. *(2 puntos)*

   Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo.*
   Cierta. El conjunto $\mathbb{N}$ está bien ordenado. Es consecuencia de la propiedad de ínfimo y del hecho de que la distancia entre dos naturales distintos es mayor o igual que 1.

   b) *Todo subconjunto de un conjunto no numerable es no numerable.*
   Falsa. El conjunto $\mathbb{R}$ no es numerable, y $\mathbb{N}$ es un subconjunto suyo que es numerable.

   c) *Toda sucesión de números reales monótona está acotada.*
   Falsa. La sucesión $\{n\}$ es monótona y no está acotada.

   d) *Toda sucesión de números reales convergente está mayorada.*
   Cierta. Toda sucesión convergente está acotada, luego mayorada.



3. *(2 puntos)*

Prueba que $2^n \leq n! + 2$ para cada número natural n.

Usaremos inducción (sobre n).

Para $n = 1$, $2^1 = 2 \leq 3 = 1! + 2$, luego la afirmación es cierta.

Nótese que para $n = 2$ y $n = 3$ también es cierta la afirmación, ya que $2^2 = 4 = 2! + 2$ y $2^3 = 8 = 3! + 2$.

Supongamos entonces que la propiedad es cierta para un natural $n \geq 3$. Usando la hipótesis de inducción obtenemos que

$$2^{n+1} = 22^n \leq 2\big(n! + 2\big).$$

Para obtener la desigualdad para $n + 1$ bastaría que fuese cierta la desigualdad $2\big(n! + 2\big) \leq (n + 1)! + 2$.

Dado que se verifica la siguiente cadena de equivalencias

$$2\big(n! + 2\big) \leq (n + 1)! + 2 \;\Leftrightarrow\; 2n! + 2 \leq (n + 1)! = (n + 1)n! \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; n! + 2 \leq n!(n + 1) - n! = n!n \;\Leftrightarrow\; 2 \leq n!(n - 1).$$

Ahora bien, como $n \geq 3$, entonces $n - 1 \geq 2$ y, por ser $n! \geq n \geq 1$, entonces $(n - 1)n! \geq 2$. Esto es, la última desigualdad de la cadena de desigualdades anteriores es cierta. Como consecuencia, también se verifica la primera, esto es, $2\big(n! + 2\big) \leq (n + 1)! + 2$. Esto concluye la prueba de la desigualdad para $n + 1$.

Nótese que el argumento usado para probar la desigualdad para $n + 1$ justifica también el que se haya comprobado antes la desigualdad de forma separada en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

4. *(3 puntos)*

Sea $\{x_n\}$ la sucesión de números reales dada por

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{4}\big(x_n^2 + 1\big), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ converge y calcula el límite.

Dado que $x_2 = \frac{1}{4} > 0 = x_1$, si $\{x_n\}$ es monótona, ha de ser creciente.

Por inducción probaremos que $0 \le x_n \le x_{n+1}$, para cada natural n. Para $n = 1$ ya hemos comprobado antes la desigualdad.

Supuesto que $0 \le x_n \le x_{n+1}$ para un natural n, entonces es claro que $x_n^2 \le x_{n+1}^2$, esto es, $x_n^2 + 1 \le x_{n+1}^2 + 1$, luego

$$0 \le x_{n+1} = \frac{1}{4}\big(x_n^2 + 1\big) \le \frac{1}{4}\big(x_{n+1}^2 + 1\big) = x_{n+2}.$$

Hemos comprobado que $x_{n+1} \le x_{n+2}$, lo que concluye la inducción.

Como la sucesión es creciente, si además está mayorada, será convergente.

Probaremos que $x_n \le 1$, para cada natural n, desigualdad que es trivialmente cierta para $n = 1$ por ser $x_1 = 0$. Si suponemos que $x_n \le 1$, entonces, dado que $0 \le x_n$, tendremos $x_n^2 \le 1$, luego $x_n^2 + 1 \le 2$, equivalentemente, $x_{n+1} = \frac{1}{4}\big(x_n^2 + 1\big) \le \frac{2}{4} \le 1$. Hemos probado por inducción que $x_n \le 1$ para cada natural n.

Por ser $\{x_n\}$ una sucesión creciente y mayorada de números reales, entonces converge. Llamamos $L = \lim\{x_n\}$. Usando las propiedades de estabilidad de las sucesiones convergentes, de la igualdad

$$\{x_{n+1}\} = \left\{\frac{1}{4}\big(x_n^2 + 1\big)\right\},$$

obtenemos que

$$L = \frac{1}{4}\big(L^2 + 1\big),$$

esto es, L es solución de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$. Las soluciones de la ecuación anterior son $2 - \sqrt{3}$ y $L = 2 + \sqrt{3}$.

Dado que se verifica $x_n \le 1$ para cada natural n, entonces $L \le 1$. Luego $L \ne 2 + \sqrt{3}$. Por tanto, $L = 2 - \sqrt{3}$.