Solucion relacion 2.pdf

Ejercicios Resueltos

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

Cálculo I

Soluciones a los ejercicios de la relación 2

1. Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ y de la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$

Solución

Empezamos probando por inducción que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que $x_1 > 0$ y, suponiendo que $x_n > 0$, tenemos $1+x_n^2 > 1$, luego $\sqrt{1+x_n^2}-1 > 0$, de donde $x_{n+1} > 0$. Podemos ahora escribir:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(\sqrt{1+x_n^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x_n^2}+1\right)}{x_n^2\left(\sqrt{1+x_n^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2}+1} < \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Deducimos que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ es decreciente y, como también está minorada, es convergente.

Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, como también $\{x_{n+1}\} \to L$, tenemos

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} x_n\, x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+x_n^2}-1\right) = \sqrt{1+L^2}-1$$

de donde deducimos que $1+L^2 = \sqrt{1+L^2}$, luego $\sqrt{1+L^2} = 1$ y $L = 0$. Así pues, hemos probado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Usando ahora $(*)$ y que $\{x_n\} \to 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2}+1} = \frac{1}{2} < 1$$

y el criterio del cociente nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente.

Alternativamente, a partir de $(*)$ podríamos haber razonado de la siguiente forma. La sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ está acotada y, de hecho tenemos

$$\sup\left\{\frac{x_{k+1}}{x_k} : k \geq n\right\} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{luego} \quad \limsup\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \leq \frac{1}{2} < 1$$

El criterio del cociente nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, luego $\{x_n\} \to 0$.

2. Dado $p \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{a)} \quad \left\{ \frac{1}{n^{p+1}\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} k^p \sqrt{k} \right\} \qquad\qquad \text{b)} \quad \left\{ \sqrt[n]{\binom{p\,n}{n}} \right\}$$

Solución

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $x_n = \sum_{k=1}^{n} k^p \sqrt{k}$ y $\rho_n = n^{p+1}\sqrt{n}$. Es evidente que $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada de números positivos, lo que nos permitirá aplicar el criterio de Stolz. En todo lo que sigue trabajamos con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Tenemos claramente

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} &= \frac{(n+1)^p \sqrt{n+1}}{(n+1)^{p+1}\sqrt{n+1} - n^{p+1}\sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1)^p \sqrt{n+1}\,\big((n+1)^{p+1}\sqrt{n+1} + n^{p+1}\sqrt{n}\big)}{\big((n+1)^{p+1}\sqrt{n+1} - n^{p+1}\sqrt{n}\big)\,\big((n+1)^{p+1}\sqrt{n+1} + n^{p+1}\sqrt{n}\big)} \\ &= \frac{(n+1)^{2p+2} + (n+1)^p\, n^{p+1}\sqrt{n(n+1)}}{(n+1)^{2p+3} - n^{2p+3}} \end{aligned} \tag{1}$$

Por otra parte, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir

$$(n+1)^{2p+3} = n^{2p+3} + (2p+3)\,n^{2p+2} + Q(n) \tag{2}$$

donde $Q(n) = \sum_{k=2}^{2p+3} \binom{2p+3}{k} n^{2p+3-k}$. Sustituyendo (2) en (1) y dividiendo numerador y denominador por n^{2p+2} tenemos finalmente

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{\big(1 + (1/n)\big)^{2p+2} + \big(1 + (1/n)\big)^p \sqrt{1 + (1/n)}}{(2p+3) + \big(Q(n)/n^{2p+2}\big)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Puesto que Q es un polinomio de grado $2p+1$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q(n)}{n^{2p+2}} = 0\,, \quad \text{luego} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{2}{2p+3}$$

y el criterio de Stolz nos dice que

$$\left\{ \frac{1}{n^{p+1}\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} k^p \sqrt{k} \right\} = \left\{ \frac{x_n}{\rho_n} \right\} \to \frac{2}{2p+3}$$

b) Tenemos la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ donde $\{x_n\} = \left\{\binom{pn}{n}\right\}$, lo que nos permitirá aplicar el criterio de la raíz para sucesiones. En el caso $p=1$ nuestra sucesión es constantemente igual a 1, así que trabajamos con $p>1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(pn+p)!}{(pn)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(pn-n)!}{(pn+p-n-1)!} \tag{3}$$

Trabajemos por separado con cada una de las fracciones que han aparecido. Por una parte, tenemos

$$\frac{(pn+p)!}{(pn)!} = (pn+p)\,\frac{(pn+p-1)!}{(pn)!} = p(n+1)\prod_{k=1}^{p-1}(pn+k)$$

de donde deducimos que

$$\frac{(pn+p)!\,n!}{(pn)!\,(n+1)!} = p\prod_{k=1}^{p-1}(pn+k) \tag{4}$$

Por otra, tenemos también

$$(pn+p-n-1)! = (pn-n)!\prod_{k=1}^{p-1}\big((p-1)n+k\big)$$

de donde deducimos que

$$\frac{(pn-n)!}{(pn+p-n-1)!} = \prod_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\big((p-1)n+k\big)} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3), obtenemos

$$\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} = \left\{p\prod_{k=1}^{p-1}\frac{pn+k}{(p-1)n+k}\right\}$$

donde ha aparecido un producto de $p-1$ sucesiones, todas ellas convergentes a $p/(p-1)$. Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} = \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$$

y el criterio de la raíz para sucesiones nos dice que

$$\left\{\sqrt[n]{\binom{p\,n}{n}}\right\} = \{\sqrt[n]{x_n}\} \to \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$$

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!\, 3^n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{n\,\sqrt[3]{n^2}} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Solución

a) Poniendo $a_n = \dfrac{n^n}{n!\, 3^n}$ tenemos claramente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\, n!\, 3^n}{n^n\,(n+1)!\, 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{3} < 1$ y el criterio del cociente nos dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

b) Pongamos ahora $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^2+1}}{n\,\sqrt[3]{n^2}} > 0$ y $b_n = \dfrac{1}{n\,\sqrt[3]{n^2}} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1$, el criterio de la raíz para sucesiones nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$$

Por tanto, aplicando el criterio de comparación por paso al límite, obtenemos que la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$. Para estudiar la convergencia de esta última serie, puesto que la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente, podemos aplicar el criterio de condensación, que nos lleva a estudiar la serie

$$\sum_{n\geq 0} 2^n\, b_{2^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{2^n\,\sqrt[3]{2^{2n}}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^n$$

Esta es la serie de geométrica de razón $1/\sqrt[3]{4} < 1$ que es convergente, luego el criterio de condensación nos dice que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, e igual le ocurre a la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

c) Tomando ahora $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} > 0$, tenemos claramente

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{4} < 1$, y el criterio de la raíz nos dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

4. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}}$

Solución

Escribiendo $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}}$ tenemos claramente

$$|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}} \geq \frac{1}{2n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Como la serie armónica es divergente, el criterio de comparación nos dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ no es absolutamente convergente.

Por otra parte, tenemos una serie alternada: $x_n = (-1)^n\, a_n$ con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos lleva a considerar el criterio de Leibniz. Por una parte, tenemos claramente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}} = 0$$

donde hemos usado que $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$.

Para comprobar que $\{a_n\}$ es decreciente, observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{2n(n+1)} = \left(\frac{\sqrt{n+1}\,\sqrt[n+1]{2}}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}}\right)^{2n(n+1)} = \frac{(n+1)^{n(n+1)}\,2^{2n}}{n^{n(n+1)}\,2^{2(n+1)}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}$$

o lo que es lo mismo

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{4}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Como la sucesión $\{\sqrt[n+1]{4}\}$ es decreciente, mientras que $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente, y el primer término de ambas es 2, podemos asegurar que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \geq \sqrt[n+1]{4} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Deducimos que $(a_n/a_{n+1})^{2n} \geq 1$, luego $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y, como también $\{a_n\} \to 0$, el criterio de Leibniz nos dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\, a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{2}}$ es convergente. En resumen, dicha serie converge pero no lo hace absolutamente.