Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas – Examen de Cálculo I – Soluciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que B está mayorado y que $\sup(B) < \inf(A)\inf(B)$. Definimos el conjunto

$$U = \left\{ \frac{1}{ab-c} \,:\, a\in A,\, b\in B,\, c\in B \right\}.$$

Prueba que U está mayorado y calcula $\sup(U)$.

Solución. Pongamos $\alpha = \inf(A)$, $\beta = \inf(B)$ y $\gamma = \sup(B)$. Las hipótesis $A \subset \mathbb{R}^+$, $B \subset \mathbb{R}^+$ y $\gamma < \alpha\beta$ implican que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \alpha \leqslant a \\ 0 < \beta \leqslant b \\ c \leqslant \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 < \alpha\beta \leqslant ab \\ -\gamma \leqslant -c \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 < \alpha\beta - \gamma \leqslant ab - c \Longrightarrow \frac{1}{ab-c} \leqslant \frac{1}{\alpha\beta-\gamma}$$

Obtenemos así que $\dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$ es un mayorante de U. Pongamos $\lambda = \sup(U)$ el mínimo mayorante de U. Por tanto tenemos que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$. También hemos obtenido que $ab - c > 0$ para todos $a\in A$, $b, c\in B$. Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que

$$\frac{1}{ab-c} \leqslant \lambda \Longrightarrow ab - c \geqslant \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow ab - \frac{1}{\lambda} \geqslant c$$

Esta desigualdad, válida para todos $a\in A$, $b, c\in B$, implica que, fijados $a\in A$ y $b\in B$, el número $ab - \dfrac{1}{\lambda}$ es un mayorante de B, por lo que debe ser mayor o igual que el mínimo mayorante de B, es decir:

$$ab - \frac{1}{\lambda} \geqslant \gamma \Longrightarrow a \geqslant \frac{1}{b}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right)$$

Esta desigualdad, válida para todos $a\in A$, $b\in B$, implica que, fijado $b\in B$, el número $\dfrac{1}{b}\left(\gamma + \dfrac{1}{\lambda}\right)$ es un minorante de A, por lo que debe ser menor o igual que el máximo minorante de A, es decir:

$$\alpha \geqslant \frac{1}{b}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right) \Longrightarrow b \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right)$$

Esta desigualdad, válida para todo $b\in B$, implica que el número $\dfrac{1}{\alpha}\left(\gamma + \dfrac{1}{\lambda}\right)$ es un minorante de B, por lo que debe ser menor o igual que el máximo minorante de B, es decir:

$$\beta \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right) \Longrightarrow \alpha\beta - \gamma \geqslant \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha\beta-\gamma} \leqslant \lambda$$

Concluimos, por tanto, que $\lambda = \dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$. ☺

Comentarios. Salvo alguna excepción, casi todos habéis hecho bien este ejercicio. Parece que habéis entendido los conceptos de supremo e ínfimo y sabéis usarlos. ☺

2. Prueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones reales. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$$

Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite es la única solución de dicha ecuación en el intervalo $]0,1[$.

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es una función polinómica, por tanto es continua y, además, está definida en un intervalo, por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano, que implica que dicha función debe anularse al menos una vez entre cada dos puntos en los que cambie de signo. Tenemos que $f(-2) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. En consecuencia, la función tiene que anularse al menos una vez en cada uno de los intervalos $]-2,0[$, $]0,1[$ y $]1,2[$. Es decir, la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos tres soluciones reales distintas y, como se trata de un polinomio de grado 3, concluimos que tiene exactamente tres soluciones reales distintas.

Pongamos $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1\}$. Probaremos por inducción que $A = \mathbb{N}$. Como $0 < x_1 < 1$, se verifica que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$ tenemos que

$$0 < x_n < 1 \Longrightarrow 0 < x_n^2 < 1 \Longrightarrow 3 - x_n^2 > 2 \Longrightarrow 0 < x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow n + 1 \in A$$

Luego, por el principio de inducción matemática, concluimos que $A = \mathbb{N}$, es decir, $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observa que, de hecho, todos los términos de la sucesión son menores que 1/2.

Para probar la convergencia estudiaremos la monotonía. Puesto que $x_1 = \dfrac{1}{3} < \dfrac{9}{26} = x_2$, probaremos que la sucesión es estrictamente creciente. Pongamos $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Acabamos de ver que $1 \in B$. Supuesto que $n \in B$, tenemos que

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 \Longrightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2 < 1 \Longrightarrow 3 - x_n^2 > 3 - x_{n+1}^2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{3 - x_{n+1}^2}$$

es decir $x_{n+1} < x_{n+2}$, luego $n + 1 \in B$. Concluimos que $B = \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es estrictamente creciente. Como está mayorada por 1, dicha sucesión es convergente. Sea $\ell = \lim\{x_n\}$. Por álgebra de límites debe verificarse que

$$\ell = \frac{1}{3 - \ell^2} \Longrightarrow \ell^3 - 3\ell + 1 = 0$$

Como $0 < \ell < 1$, dicho número ℓ es la única solución de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está en el intervalo $]0,1[$. ☺

Comentarios. En este ejercicio hay muchos errores. Uno frecuente es afirmar que $x_n < x_{n+1} \Longrightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2$ *sin antes haber probado que* $x_n > 0$. Observa que la implicación $a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$ no es cierta en general. Por ejemplo, $-2 < 1$ pero $(-2)^2 = 4 > 1$. Por tanto en este ejercicio lo primero que hay que hacer es probar que $x_n > 0$, y como también tenemos que probar que $x_n < 1$ lo mejor es probar las dos cosas a la vez porque están relacionadas.

La monotonía de la sucesión puede probarse también fácilmente considerando la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{3 - x^3}$. Dicha función es estrictamente creciente pues

$$0 \leqslant x < y \leqslant 1 \Longrightarrow 3 - x^2 > 3 - y^2 > 2 \Longrightarrow g(x) = \frac{1}{3 - x^3} < \frac{1}{3 - x^3} = g(y)$$

Este resultado nos dice también que $g(0) = 1/3 < g(x) < g(1) = 1/2$ para todo $x \in]0,1[$. Puesto que $x_1 = 1/3$ y $x_{n+1} = g(x_n)$ deducimos que $0 < x_n < 1$ y, como $x_1 < x_2$, y la función g conserva el orden, resulta que la sucesión es estrictamente creciente.

Es un ejercicio sencillo en el que, algo que yo no me esperaba, hay muchos errores. ☹

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a) } x_n = \frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4}, \quad \text{b) } x_n = \sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} - n$$

Solución. a) Podemos aplicar el criterio de Stolz pues la sucesión n^4 es estrictamente creciente y positivamente divergente. Pongamos $A_n = 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$, $B_n = n^4$. Tenemos que

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n} = \frac{(2n+1)^3}{(n+1)^4-n^4} = \frac{(2n+1)^3}{4n^3+6n^2+4n+1} \to \frac{8}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego, por el criterio de Stolz, concluimos que la sucesión dada converge a 1/2.

b)

$$x_n = n\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} - 1\right)$$

Es una sucesión de la forma $n(y_n-1)$ donde $y_n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} \to 1$. Por el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $n(y_n-1) \to L \Longleftrightarrow (y_n)^n \to \mathrm{e}^L$. Tenemos que

$$(y_n)^n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \to \sqrt{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e}^2$$

Concluimos que $x_n \to 2$. ☺

Comentarios. Casi todos hacéis el primer límite pero muy pocos hacéis el segundo que, por cierto, se hizo en clase. Hay otras formas de hacer este segundo límite.

Podemos escribir $y_n = \mathrm{e}^{z_n}$ con $z_n = \log(y_n) \to 0$ y usar la equivalencia asintótica $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$, válida cuando $z_n \to 0$, con lo que resulta

$$x_n \sim nz_n = n\log(y_n) = \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

y usando ahora que $\log(1+u_n) \sim u_n$ cuando $u_n \to 0$, obtenemos que

$$\frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \to \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \to \frac{3}{3}$$

por lo que $x_n \to \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3} = 2$.

Alternativamente, como $y_n^3 \to 1$ podemos escribir $y_n^3 = 1+v_n$ donde $v_n \to 0$. Con ello $y_n - 1 = (1+v_n)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}v_n$, donde usamos la equivalencia asintótica $(1+v_n)^\alpha - 1 \sim \alpha v_n$ cuando $v_n \to 0$. Resulta así que

$$x_n = n(y_n-1) = n\big((1+v_n)^{1/3}-1\big) \sim \frac{1}{3}nv_n = \frac{1}{3}n\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} - 1\right)$$

y el límite de esta sucesión es muy fácil de calcular.

4. Estudia la convergencia absoluta y no absoluta de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{4^n n!}{\sqrt[5]{n^4}(1+4)(1+8)(1+12)\cdots(1+4n)}, \quad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+7n+12}$$

Solución. a) Es una serie de términos positivos. Pongamos

$$a_n = \frac{4^n n!}{\sqrt[5]{n^4}(1+4)(1+8)(1+12)\cdots(1+4n)}$$

Aplicamos lo criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+4}{4n+5}\sqrt[5]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^4} \to 1$$

Además, converge a 1 por valores menores que 1, por lo que el criterio del cociente no proporciona información. Aplicamos el criterio de Raabe. Tenemos que

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

se trata de una sucesión de la forma $v_n(u_n-1)$ donde $|v_n| \to +\infty$ y $u_n \to 1$. Por el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $v_n(u_n-1) \to L$ si, y sólo si, $(u_n)^{v_n} \to \mathrm{e}^L$.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-n} = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{4n+5}{4n+4}\right)^n \sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4n}} \to \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{21}{20}}$$

Resulta así que

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to \frac{21}{20} > 1$$

y la serie es convergente.

b) Se trata de una serie alternada de la forma $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ donde $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+7n+12}$. Puesto que $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, el criterio límite de comparación nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente, es decir, la serie dada, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$, no es absolutamente convergente.

Para ver si es convergente aplicaremos el criterio de Leibnitz. Es evidente que $a_n \to 0$. Veamos que $a_n \geqslant a_{n+1}$. Tenemos que

$$\frac{n+1}{n^2+7n+12} \geqslant \frac{n+2}{n^2+9n+20} \Longleftrightarrow (n+1)(n^2+9n+20) \geqslant (n+2)(n^2+7n+12) \Longleftrightarrow n^2+3n-4 \geqslant 0$$

lo cual es, evidentemente, cierto para todo $n\in\mathbb{N}$. Concluimos que la serie es convergente. ☺

Comentarios. La primera serie solamente la han hecho bien unos pocos por no saber usar la forma alternativa del criterio de Raabe (consultar mis apuntes). En la segunda, llama la atención el enorme trabajo que os cuesta probar que no hay convergencia absoluta. Es inmediato:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+7n+12} \geqslant \frac{n}{n^2+19n} = \frac{1}{n+19}$$

Vimos en clase que una serie del tipo $\sum_{n\geqslant 1}\frac{p(n)}{q(n)}$ donde $p(n)$ y $q(n)$ son polinomios, converge absolutamente si, y sólo si, el grado del denominador excede en dos o más unidades al grado del numerador. Esto se deduce de comparar dicha serie con una serie de Riemann. Cuando en el criterio límite de comparación se usan series de Riemann se obtiene un criterio de convergencia, el criterio de Pringshein, que no es más que un caso particular del criterio límite de comparación para series de términos positivos.

A algunos también les cuesta trabajo probar que $a_n \to 0$. Es inmediato:

$$0 < a_n = \frac{n+1}{(n+3)(n+4)} < \frac{1}{n+4}$$

Para probar que $\{a_n\}$ es decreciente algunos tratan de hacerlo por inducción lo que complica innecesariamente los cálculos. Es mucho más fácil probarlo directamente como hemos hecho arriba.

Por supuesto, hay quienes no entienden lo que es una serie, confunden la sucesión $\{a_n\}$ con la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, afirman que una serie de términos positivos ¡converge a cero!, y otros variados disparates que no dejan de sorprenderme. ☹

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A\subset\mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$. Para todo $a\in A$ se tiene que $a\leqslant\alpha$ por lo que, al ser f creciente, $f(a)\leqslant f(\alpha)$. Deducimos que $f(\alpha)$ es un mayorante de $f(A)$, por lo que $\sup(f(A))\leqslant f(\alpha)$. Si $\alpha\in A$, entonces $f(\alpha)\in f(A)$ y $\sup(f(A)) = \max(f(A)) = f(\alpha)$. Supondremos que $\alpha\notin A$ y probaremos que $f(\alpha)$ es el mínimo mayorante de $f(A)$. Dado $\varepsilon>0$, por la continuidad de f en α, existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in]\alpha-\delta,\alpha+\delta[$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon<f(x)<f(\alpha)+\varepsilon$. Como $\alpha=\sup(A)$ y $\alpha\notin A$, se verifica que $]\alpha-\delta,\alpha[\cap A\neq\emptyset$, y para $a\in]\alpha-\delta,\alpha[\cap A$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon<f(a)$, lo que prueba que $f(\alpha)-\varepsilon$ no es un mayorante de $f(A)$. Hemos probado así que ningún número menor que $f(\alpha)$ (es decir, ningún número de la forma $f(\alpha)-\varepsilon$ con $\varepsilon>0$) es mayorante de $f(A)$, esto es que $f(\alpha)=\sup(f(A))$. ☺

Comentarios. Poquísimos habéis intentado hacer este ejercicio y, menos aún, lo han hecho correctamente. Puede hacerse también usando sucesiones. Pues sabemos que el supremo de un conjunto es límite de una sucesión de puntos del conjunto, es decir, $\alpha=\lim\{a_n\}$ con $a_n\in A$. Por la continuidad de f tenemos que $f(\alpha)=\lim\{f(a_n)\}$, lo que prueba que $f(\alpha)$ es límite de una sucesión de puntos de $f(A)$ y, como es un mayorante de $f(A)$, concluimos que es el supremo de $f(A)$. Razonando de esta manera no es necesario distinguir si α está o no está en A.

Respecto a las cuestiones teóricas no soy yo quien debo responderlas sino vosotros. Volveré a preguntar varias de la lista que tenéis y lo que debéis hacer es estudiarlas todas hasta que estéis bien seguros de la respuesta correcta a cada una.