Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Examen de Cálculo I – Soluciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ab - c^2 \ : \ a\in A, \ b\in B, \ c\in B\right\}$$

está mayorado y calcula su supremo.

Solución. Pongamos $\alpha = \sup(A) > 0$ y $\beta = \sup(B) > 0$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, B está minorado y $\gamma = \inf(B) \geqslant 0$. Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < a \leqslant \alpha \\ 0 < b \leqslant \beta \\ 0 \leqslant \gamma \leqslant c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 < ab \leqslant \alpha\beta \\ \gamma^2 \leqslant c^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow ab - c^2 \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$$

En consecuencia, $\alpha\beta - \gamma^2$ es un mayorante de C. Pongamos $\delta = \sup(C)$. Como el supremo es, por definición, el mínimo mayorante, se verifica que $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$.

Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $b, c\in B$ y obtenemos que $a \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{b}$, como esta desigualdad es válida para todo $a \in A$, deducimos que $\dfrac{\delta + c^2}{b}$ es un mayorante de A y, por tanto, $\alpha \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{b}$. En esta desigualdad, válida para todos $b, c \in B$, *fijamos* $c \in B$ y obtenemos que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{\alpha}$, lo que implica que $\beta \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{\alpha}$. Hemos obtenido así que $\alpha\beta - \delta \leqslant c^2$. Puesto que, evidentemente, $\alpha\beta$ es un mayorante de C, se tiene que $\delta \leqslant \alpha\beta$, es decir, $0 \leqslant \alpha\beta - \delta$. Deducimos que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant c$, desigualdad válida para todo $c \in B$, esto es, el número $\sqrt{\alpha\beta - \delta}$ es un minorante de B, luego, como el ínfimo es el máximo minorante, tenemos que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant \gamma$ y deducimos que $\alpha\beta - \delta \leqslant \gamma^2$, esto es, $\alpha\beta - \gamma^2 \leqslant \delta$.

Las dos desigualdades obtenidas implican que $\delta = \alpha\beta - \gamma^2$. ☺

Comentarios. Como tantas veces he repetido en clase, comprender muy bien los conceptos de supremo e ínfimo y saber usarlos es imprescindible para progresar en el Análisis Matemático. Y ése es un trabajo que hay que hacer en este curso porque después ya es tarde. Hemos hecho muchos ejercicios parecidos a este y, salvo alguna excepción, casi todos lo hacéis correctamente. Hay un detalle que, aunque no lo he tenido en cuenta para calificar, es importante y quiero comentarlo. En el razonamiento anterior podríamos haber procedido como sigue:

> Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $a\in A$ y $b\in B$ y deducimos que $ab - \delta \leqslant c^2$,de donde, $\sqrt{ab - \delta} \leqslant c$ *etcétera*. ¿Te das cuenta de que aquí hay algo que no es correcto? A saber, el número $ab - \delta$ podría ser negativo para algunos valores de $a\in A$ y de $b\in B$.

Antes de aplicar la función “raíz cuadrada” a un número debes asegurarte de que no es negativo.

2. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\}$$

Prueba con un ejemplo que la desigualdad anterior puede ser estricta.

Solución. Pongamos

$$A_n = \{x_k : k \geqslant n\}, \quad B_n = \{y_k : k \geqslant n\}, \quad C_n = \{x_k + y_k : k \geqslant n\}$$

y

$$\alpha_n = \text{ínf}(A_n), \quad \beta_n = \sup(B_n), \quad \gamma_n = \sup(C_n)$$

Por definición, tenemos que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} = \text{lím}\{\alpha_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{y_n\} = \text{lím}\{\beta_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = \text{lím}\{\gamma_n\}$$

Para todo $k \geqslant n$ se tiene que $\alpha_n + y_k \leqslant x_k + y_k \leqslant \gamma_n$, por lo que $y_k \leqslant \gamma_n - \alpha_n$. Esta desigualdad, válida para todo $k \geqslant n$, nos dice que el número $\gamma_n - \alpha_n$ es un mayorante de B_n y, por tanto, $\beta_n \leqslant \gamma_n - \alpha_n$, es decir, $\alpha_n + \beta_n \leqslant \gamma_n$. Y tomando límites en esta desigualdad obtenemos que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\}$$

Las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ definidas por $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = 2$, $y_{2n-1} = 2$, $y_{2n} = 1$ verifican que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} = 0 + 2 < \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = 3$$

☺

Comentarios. Salvo una única excepción nadie ha hecho bien este ejercicio. He insistido en clase en la importancia de los límites superior e inferior (sin ir más lejos, son necesarios para formular con generalidad los criterios del cociente y de la raíz para la convergencia de series de términos positivos) pero no los habéis estudiado. Muchos tratáis de hacer este ejercicio de cualquier manera sin ni siquiera saber cómo se definen dichos límites o definiéndolos de formas disparatadas. ¿A qué jugáis? Cuando no se sabe algo hay que saber reconocerlo y no tratar de hacer el ejercicio de cualquier manera porque eso da muy mala impresión. En Matemáticas no todo vale. Creo que muchos de vosotros ni siquiera entendéis la definición de los conjuntos A_n, B_n o C_n ¿tan difícil es? Esos conjuntos son los formados por todos los elementos de las respectivas sucesiones con índices mayor o igual que n. Un error frecuente es poner $\alpha = \text{ínf}(A_n)$ y $\beta = \sup(B_n)$ ¿No está claro que los conjuntos A_n y B_n dependen de n? Pues también dependen de n su ínfimo y su supremo respectivamente. Hemos hecho ejercicios parecidos y más complicados que este. Porque es un ejercicio muy fácil: para hacerlo basta con entender las definiciones de límite superior e inferior de una sucesión acotada. Como digo, salvo una excepción, nadie lo ha hecho. ☹

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right), \quad b)\ x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5}\right)^n$$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^3}{3^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, $b_n = n^2$. Tenemos que $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ y como la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y divergente podemos aplicar el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{2n+1} = \frac{n+2}{2n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{2}$$

b) Pongamos $u_n = \dfrac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5}$ y $v_n = n$. Puesto que $\{u_n\} \to 1$ y $\{v_n\} \to +\infty$, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞ por lo que, aplicando el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $\{x_n\} \to \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\{v_n(u_n - 1)\} \to L$. Tenemos que

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5} - 1\right) = \frac{2}{5}n(\sqrt[n]{3} - 1) + \frac{3}{5}n(\sqrt[n]{2} - 1) \to \frac{2}{5}\log 3 + \frac{3}{5}\log 2 = \log(\sqrt[5]{72})$$

Luego $\lim\{x_n\} = \sqrt[5]{72}$ ☺

Comentarios. Son límites que no tienen ninguna dificultad. El segundo lo hice en clase y, aunque no estoy del todo seguro, creo que el primero también. Pocos los hacéis bien. Fallo principal no reconocer el número e en la sucesión $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$. En clase estudiamos las sucesiones del tipo $\left(\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)^{h(n)}$ donde p, q y h son funciones polinómicas no constantes tales que $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to 1$. Dichas sucesiones siempre están relacionadas con el número e. Pues da igual, como si no lo hubiéramos visto. Otra sucesión básica que hemos usado, nada menos que para definir la función logaritmo, es la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ donde $x > 0$. Deberías saber que esa sucesión converge al logaritmo de x porque precisamente definimos $\log x$ como el límite de dicha sucesión. Pues nada, ni por esas. ☹

4. Estudia la convergencia absoluta y no absoluta de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 9^n, \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 9^n$. Se trata de una serie de términos positivos. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 9 \frac{((n+3)!)^3}{(n+2)^{3n+3}} \frac{(n+1)^{3n}}{((n+2)!)^3} = 9\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \to \frac{9}{\mathrm{e}^3} < 1$$

La serie es convergente.

b) Puesto que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \sim \dfrac{1}{n}$, ya que $\dfrac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la serie no converge absolutamente. También deducimos que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 0$, porque sucesiones asintóticamente equivalentes tienen el mismo límite.

Para estudiar la convergencia no absoluta aplicaremos el criterio de Leibnitz. Tenemos que

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Leftrightarrow n\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}$$

y esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto la sucesión $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ es decreciente y converge a cero por lo que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ es, en virtud del criterio de Leibnitz, convergente. ☺

Comentarios. Los fallos en la primera serie son debidos a errores al simplificar y en no relacionar la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$ con el número e. En la segunda serie el fallo principal, por increíble que parezca, está en probar el decrecimiento de la sucesión. Algo trivial que no sabéis hacer la mayoría. Y eso que iniciamos el curso estudiando desigualdades. Por supuesto, muchos siguen confundiendo una serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ con la sucesión a_n. Otros afirman que como las sucesiones $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ y $\dfrac{1}{n}$ son equivalentes, entonces las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ son equivalentes. A algunos les cuesta enorme trabajo probar que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 0$. Es así de simple:

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

y usar el principio de las sucesiones encajadas. Por cierto, la desigualdad evidente:

$$\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1}$$

nos dice que, en virtud del criterio de comparación, la serie no converge absolutamente. Muy pocos, poquísimos, hacéis bien las dos series. ☹

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z \neq \emptyset$, prueba que Z tiene máximo y mínimo.

Solución. Puesto que $Z \subset [a,b]$, Z es un conjunto acotado y, por hipótesis, no vacío, por lo que tiene un máximo minorante $\alpha = \text{ínf}(Z)$ y un mínimo mayorante $\beta = \sup(Z)$. Es claro que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Probemos que $\alpha \in Z$, es decir que $f(\alpha) = 0$. Podemos razonar como sigue: sabemos que el extremo inferior de un conjunto es un minorante que es límite de una sucesión de puntos del conjunto, es decir, $\alpha = \text{lím}\{z_n\}$ donde $z_n \in Z$. Como f es continua tenemos que $\text{lím}\,\{f(z_n)\} = f(\alpha)$ y, como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(z_n) = 0$, obtenemos que $f(\alpha) = 0$. Podemos razonar también por contradicción. Supongamos que $f(\alpha) \neq 0$. Entonces, por el teorema de conservación del signo, existe $r > 0$ tal que *para todo* $x \in]\alpha - r, \alpha + r[\cap[a,b]$ se verifica que $f(x)f(\alpha) > 0$ y, en particular, $f(x) \neq 0$. Pero como $Z \cap [\alpha, \alpha + r[\neq \emptyset$ (¿por qué?) obtenemos una contradicción. De forma análoga se prueba que $f(\beta) = 0$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho este *difícil* ejercicio. Lo peor son los disparates sin sentido que cometéis la mayoría de los que habéis intentado hacerlo. Da la impresión de que no entendierais nada. Abundan las afirmaciones locuelas como que la función toma valores en Z y otros delirios por el estilo. ☹

6. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y acotada. Sea $\alpha = \text{ínf}\big(f(]a,b[)\big)$, $\beta = \sup\big(f(]a,b[)\big)$. Prueba que $f(]a,b[) =]\alpha,\beta[$.

Solución. Recuerda que (muchos no lo sabéis) $f(]a,b[) = \{f(x) : x \in]a,b[\}$. Puesto que para todo $x \in]a,b[$ se tiene que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, tenemos que $f(]a,b[) \subset [\alpha,\beta]$. Como el intervalo $]a,b[$ no tiene máximo ni mínimo, dado $x \in]a,b[$, hay números $u,v \in]a,b[$ tales que $u < x < v$. Como la función es estrictamente creciente, se verifica que $f(u) < f(x) < f(v)$, lo que implica que $f(]a,b[)$ no tiene máximo ni mínimo. Luego $f(]a,b[) \subset]\alpha,\beta[$. Observa que hasta ahora no hemos usado para nada la continuidad de f. Para probar la inclusión contraria, sea $z \in]\alpha,\beta[$. Como $\alpha < z$ debe existir algún $s \in]a,b[$ tal que $\alpha < f(s) < z$ (¿por qué?), como $z < \beta$ debe existir algún $t \in]a,b[$ tal que $z < f(t) < \beta$ (¿por qué?). Tampoco hemos usado aún la continuidad. Lo hacemos seguidamente. Como f es continua y está definida en un intervalo, sabemos que verifica la propiedad del valor intermedio, como $f(s) < z < f(t)$ deducimos que f debe tomar el valor z, es decir $z \in f(]a,b[)$. Hemos probado así que $f(]a,b[) =]\alpha,\beta[$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho este *difícil* ejercicio. Pero lo peor, igual que en el ejercicio anterior, son los increíbles disparates de todo tipo que cometen quienes intentan hacerlo.

7. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

1. Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

   Verdadero. Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial convergente. Entonces la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe estar mayorada, es decir, existe $M > 0$ tal que $x_{\sigma(n)} \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $n \leqslant \sigma(n)$, por lo que $x_n \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant M$, lo que prueba que $\{x_n\}$ está mayorada y, por tanto, es convergente. Análogamente se razona si suponemos que $\{x_n\}$ es decreciente.

2. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

   Verdadero. Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucesión acotada tiene alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe verificar la condición de Cauchy, es decir, dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $\left|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\right| < \delta$. Poniendo $m = \sigma(n_0)$ y $n = \sigma(n_0 + 1)$ tenemos que $m \neq n$ (porque σ es estrictamente creciente) y $|x_n - x_m| < \delta$.

3. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Verdadero. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, dado $y \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de números racionales, $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{Q}$, tal que $\operatorname{lím}\{x_n\} = y$. Por la continuidad de f y de g debe ser $f(y) = \operatorname{lím}\{f(x_n)\}$ y $g(y) = \operatorname{lím}\{g(x_n)\}$, pero como, por la hipótesis hecha, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) = g(x_n)$, deducimos que $f(y) = \operatorname{lím}\{f(x_n)\} = \operatorname{lím}\{g(x_n)\} = g(y)$, esto es, $f(y) = g(y)$. Concluimos que f y g coinciden en todo $\mathbb{R}$.

4. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$.

   Verdadero. Por el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos, sabemos que una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo absoluto (y también un máximo absoluto pero eso ahora no interesa), es decir hay algún $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Y como es $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ debe ser $f(x_0) > 0$. Tomando $\alpha = f(x_0)/2$ (vale cualquier número que esté en el intervalo $]0, f(x_0)[$) tenemos que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho bien las cuatro cuestiones a pesar de que sabíais que preguntaría varias cuestiones de la lista que os entregué. Quien más hace solamente hace dos. No puedo entender que no hayáis preparado bien las respuestas a todas las cuestiones de dicha lista. Hay algunos fallos sistemáticos en la primera y en la tercera cuestión, lo que me hace pensar que alguno de vosotros ha creído tener la respuesta correcta y se la ha pasado a otros con lo que todos cometéis el mismo error. Algo totalmente sorprendente es que en la última cuestión, para afirmar que hay algún número entre 0 y el mínimo absoluto de f, algunos (bastantes) usan el ¡principio del supremo! No deben tener claro que entre dos números reales hay otros números reales.

Con respecto al tema de teoría muy pocos hacen algo y nadie lo hace correctamente y completo.

Como podéis suponer, después de todo lo anterior, los resultados del examen, que mañana subiré al SWAD, han sido desastrosos. ¿Tú estudias o trabajas?