CÁLCULO 1: CUESTIONES VERDADERO O FALSO

AUTOR RESPUESTAS: 1ºDGIIM 17-18. REDACCIÓN: DANIEL PÉREZ RUIZ

1. Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \\ x & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

f está definida en el intervalo $[0, 1[$ y su imagen es el intervalo $]0, 1]$. Sin embargo, es discontinua en el punto $x = 0$.

2. Si f es una función estrictamente monótona y definida en un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!
Por una proposición, una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.
Por ser f estrictamente monótona, f^{-1} también será monótona y su imagen será el intervalo en que está definida f. Así, por la proposición, f^{-1} es continua.

3. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \\ x & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

f es inyectiva, definida en un intervalo y su imagen es un intervalo.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 1 \\ \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

f^{-1} es discontinua en el punto $x = 1$.

4. Hay una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f([0, 1]) = [2, 3[$

RESPUESTA: ¡FALSA!
Por el *Teorema de Weierstrass*, una función definida y continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un mínimo y máximo absolutos, de modo que la imagen debería ser un intervalo cerrado.

5. Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Los polinomios de grado impar, al ser funciones continuas que toman valores positivos y negativos se anulan por el *Teorema de Bolzano*.
Por otro lado, apoyándose del *Teorema de Weierstrass* se demuestra que los polinomios de grado par alcanzar un mínimo absoluto si el coeficiente líder es positivo o un máximo absoluto si el coeficiente líder es negativo.

6. Si f es continua en a y g es discontinua en a entonces $f+g$ puede ser continua o discontinua en a.

RESPUESTA: ¡FALSA!

Por una proposición, si la suma de dos funciones es continua y una de ellas es continua, entonces la otra debe ser continua. Si $f+g$ fuera continua, al ser f continua, g debería ser continua, llegándose a una contradicción.

7. Si f y g son discontinuas en a entonces fg es discontinua en a.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -1 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se tiene que f y g son discontinuas en todos los puntos. Sin embargo, fg es la función constante 1, continua en todo punto.

8. Una función f es continua en a si, y sólo si, $|f|$ es continua en a.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -1 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$|f|$ es la función constante 1, continua en todo punto. Sin embargo f es discontinua en todo punto.

9. Si una función f está definida en un intervalo $[a,b]$ y toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces es continua en $[a,b]$.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \\ x & si \quad 0 < x < 1 \\ \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

f está definida en $[0,1]$ y toma todos los valores entre $f(0)$ y $f(1)$. Sin embargo, es discontinua en $x=0$ y $x=1$.

10. Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Sea $\left\{x_{\sigma(n)}\right\} \to x$ una parcial convergente de $\{x_n\}$. Para cada $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - x| < \epsilon$.
Si $\{x_n\}$ no converge a x, entonces $\exists p \in \mathbb{N}, p > \sigma(n_0) : |x_p - x| \geq \epsilon$.
Si $\{x_n\}$ es creciente debe existir $q \in \mathbb{N} : x_{\sigma(q)} \geq x_p > x_{\sigma(n_0)}$.
Como $|x_p - x| \geq \epsilon$, se tendría que $|x_{\sigma(q)} - x| \geq \epsilon$, lo cual es una contradicción. Si $\{x_n\}$ fuera decreciente bastaría tomar $q \in \mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(q)} \leq x_p < x_{\sigma(n_0)}$, llegándose a la misma contradicción.

11. Una sucesión no está mayorada si, y sólo si, tiene alguna sucesión parcial positivamente divergente.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

$\Leftarrow$ | Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\left\{x_{\sigma(n)}\right\} \to +\infty$ una parcial positivamente divergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(k)} > n$. Así, $\{x_n\}$ no puede estar mayorada.

$\Rightarrow$ | Sea $\{x_n\}$ una sucesión no mayorada y definamos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:
$\sigma(1) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq 1\} \ldots \sigma(n+1) = \min\{p \in \mathbb{N} : x_{n+1} \geq n+1, p > \sigma(n)\}$
Se tiene que σ es estrictamente creciente y $\left\{x_{\sigma(n)}\right\} \to +\infty$

12. Si $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente tal que $\{x_{n+1} - x_n\} \to 0$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Así, se tiene $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\} \to 0$ y $\{\sqrt{n}\}$ estrictamente creciente. Sin embargo, $\{\sqrt{n}\} \to +\infty$.

13. Supongamos que $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$ convergen a un mismo número α. Entonces $\{x_n\}$ converge a α.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Dado $\epsilon > 0$
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |x_{3n} - \alpha| < \epsilon$
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow |x_{3n+1} - \alpha| < \epsilon$
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_3 \Rightarrow |x_{3n+2} - \alpha| < \epsilon$

Sea $m = \max\{3n_1, 3n_2 + 1, 3n_3 + 2\}$. Tomando $n \geq m, x_n$ pertenecerá a alguna de las tres sucesiones parciales al ser las parciales exhaustivas (la unión de sus términos cubre toda la sucesión). Así, se tendrá $|x_n - \alpha| < \epsilon$ y, por tanto, $\{x_n\} \to \alpha$.

14. Si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_{n+1} - a_n|$ es convergente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Si $\sum_{n\geq 1} |a_{n+1} - a_n|$ es convergente, lo será la serie $\sum_{n\geq 1} \{a_{n+1} - a_n\}$ (por ser absolutamente convergente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} \{a_{n+1} - a_n\} = \{a_{n+1} - a_n\}$, que al ser convergente, implica que $\{a_{n+1}\}$ es convergente y por tanto, $\{a_n\}$ también.

15. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Tomemos $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fijo pero arbitrario. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ podemos construir una sucesión de racionales $x_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\{x_n\} \to y$.

Por continuidad, $\{f(x_n)\} \to f(y)$, $\{g(x_n)\} \to g(y)$. Al ser $x_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\{f(x_n)\} = \{g(x_n)\}$.

Por la unicidad del límite, $f(y) = g(y)$. Así, teníamos que sus imágenes también coinciden en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y se tendrá $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

16. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Al ser f continua en el intervalo cerrado y acotado $[0,1]$, entonces $f([0,1])$ debe ser un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ con $a > 0$. Tomando $\alpha = \frac{a}{2}$, se tendrá que $0 < \alpha < f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

17. Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.

RESPUESTA: ¡FALSA!

Por una proposición, una sucesión verifica la condición de Cauchy si, y sólo si converge. Tenemos $\{n\}$ estrictamente creciente, pero $\{n\} \to +\infty$.

18. Toda serie mayorada es convergente.

RESPUESTA: ¡FALSA!

$\sum_{n \geq 1} \{-n\}$ está mayorada por -1, pero diverge.
(NOTA: Sí es cierta para series de términos positivos, que al ser sucesiones crecientes y mayoradas convergen).

19. Si un conjunto no vacío de números reales no tiene supremo tampoco tiene máximo.

RESPUESTA: ¡VERDADERA! Si tuviera máximo ese sería el supremo.

20. Hay un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $]-\infty, a[$.

RESPUESTA: ¡FALSA! Por el principio del ínfimo, el conjunto de minorantes de un conjunto no vacío de números reales tiene máximo, por lo que a debería estar incluido.

21. Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo: Definamos $f :]0,1[\to \mathbb{R}, f(x) = x$. f es continua en $]0,1[$ pero no alcanza un mínimo en dicho intervalo.

22. Toda función $f : A \to \mathbb{R}$, inyectiva en A y cuya imagen es un intervalo, es continua.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ x & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

23. Si un conjunto de números reales no tiene máximo entonces tiene supremo.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo: Sea $A =]0, 1[$. A no tiene máximo, pero $\sup A = 1$.

24. Existe una sucesión acotada de números reales $\{x_n\}$ que verifica que $|x_n - x_m| \geq 10^{-10}$ siempre que $n \neq m$.

RESPUESTA: ¡FALSA! Sea $\{x_n\}$ acotada. Por el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* tiene una parcial $\left\{x_{\sigma(n)}\right\} \to x$ que cumple la condición de Cauchy.
Dado $\epsilon = 10^{-10}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_0}| < 10^{-10}$. Se llega así a una contradicción.

25. Toda serie convergente es una sucesión acotada.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Se verifica si la serie es de términos positivos, ya que al ser una sucesión creciente, si converge lo hará al supremo. Asimismo estará minorada por el 0.

26. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Sea $\{x_n\}$ acotada. Si dado $\delta = 1, m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq n$ y $|x_n - x_m| < \delta = 1$, significaría que todos los términos de la sucesión están separados del resto por una unidad. Al haber infinitos términos, la sucesión no podría estar acotada. Esto sería válido para cualquier $\delta > 0$.

27. Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Sea $\{x_n\}$ una sucesión que no tiene ninguna parcial convergente. Si tuviera una parcial acotada, dicha parcial tendría una parcial convergente por el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, que sería también parcial de $\{x_n\}$, lo cual es una contradicción.

28. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado y $\beta = \sup A$. Dado $\epsilon > 0$ existe algún $a \in A$ tal que $\beta - \epsilon < a < \beta$.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo:

Sea el conjunto $A = \{0, 2\}$. Tenemos que $\sup A = 2$. Dado $\epsilon = 1$, no existe $a \in A$ tal que $2 - 1 < a < 2$.

29. Toda sucesión tiene una sucesión parcial convergente o alguna sucesión parcial divergente.

RESPUESTA: ¡VERDADERA! Si la sucesión está acotada, por el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, tendrá una parcial convergente. Si no está acotada podrá construirse una sucesión parcial divergente.

30. Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.

RESPUESTA: ¡FALSA! Contraejemplo: Definamos x_n:

$\{x_{2n}\} = \{1\} \to 1$
$\{x_{2n-1}\} = \{n\} \to +\infty$

31. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$, entonces f es constante.

RESPUESTA: ¡VERDADERA!

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Por el *Teorema del Valor Intermedio*, por ser R un intervalo, $f(\mathbb{R})$ debe ser un intervalo, es decir, si f no se es constante y toma valores $x, y \in \mathbb{Q}$, deberá también tomar todos los valores del intervalo $]x, y[$, en cuál habrá números irracionales por la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. En este caso no se tendría $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$. La única alternativa es que f tome el valor de un sólo racional, es decir, que f sea constante.

32. Si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} x_n$ también es convergente.

RESPUESTA: ¡FALSA!

Sean $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ series de términos positivos. Tenemos que una serie de términos positivos converge sí y sólo si está mayorada. Así, si $\sum_{n\geq 1} y_n$ converge, estará mayorada, y por ser $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 1} x_n$ estará mayorada y convergerá.