

# ÁLGEBRA I. 2015/16

## RELACIÓN 4

### 1. EN ANILLOS DE RESTOS DE $\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 1:** Resuelve las ecuaciones siguientes en los anillos que se indican:

- (1)  $12x = 8$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{20}$ .
- (2)  $19x = 42$  en  $\mathbb{Z}_{50}$ .
- (3)  $9x = 4$  en  $\mathbb{Z}_{1453}$ .
- (4)  $5^{30}x = 2$  en  $\mathbb{Z}_7$ .
- (5)  $20x = 984$  en  $\mathbb{Z}_{1984}$ .
- (6)  $4x = 9$  en  $\mathbb{Z}_{1453}$ .
- (7)  $15x = 1$  en  $\mathbb{Z}_{16}$ .

**Ejercicio 2:** Determina cuántas unidades y cuántos divisores de cero tienen los anillos que se indican:

- (1)  $\mathbb{Z}_{125}$ .
- (2)  $\mathbb{Z}_{72}$ .
- (3)  $\mathbb{Z}_{88}$ .
- (4)  $\mathbb{Z}_{1000}$ .

**Ejercicio 3:** Determina si la igualdad  $a = b$  es cierta en los siguientes casos:

- (1)  $a = 9^{55^9}$  y  $b = 7^{70^{55}}$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{21}$ .
- (2)  $a = 2^{5^{70}}$  y  $b = 5^{70^2}$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{21}$ .
- (3)  $a = 12^{55^{70}}$  y  $b = 10^{70^{55}}$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{22}$ .
- (4)  $a = 5^{5^{70}} 11^{5^{70}}$  y  $b = 10^{70^{22}}$  en el anillo  $\mathbb{Z}_{22}$ .

### 2. EN ANILLOS DE RESTOS DE $K[x]$ .

**Ejercicio 1:** (1) Probar que un polinomio de grado 1 es irreducible en  $K[x]$ .

- (2) Probar que un polinomio de grado 2 o 3 en  $K[x]$  es irreducible si y solo si no tiene raíces en  $K$  (Ind. Recordar el Teorema de Ruffini).

**Ejercicio 2:** Sea  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$  el anillo de restos del anillo  $\mathbb{Z}_3[x]$  módulo  $x^2 + 1$ .

- (1) Argumentar que  $\mathbb{F}_9$  es un cuerpo.
- (2) Lista los diferentes elementos de  $\mathbb{F}_9$ , ¿Cuántos elementos tiene?
- (3) ¿Qué elemento de la lista se obtiene como resultado de hacer el cálculo siguiente:

$$(2+x)^3(2+x^2)^3 + (1-x)^2 + 2x + 2.$$

- (4) ¿Que elemento de la lista es  $(2-x)^{-1}$ ?

**Ejercicio 3:** Sea  $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x+1}$ .

- (1) Argumentar que  $\mathbb{F}_8$  es un cuerpo.
- (2) Lista los diferentes elementos de  $\mathbb{F}_8$ , ¿Cuántos elementos tiene?
- (3) ¿Qué elemento de la lista se obtiene como resultado de hacer el cálculo siguiente:

$$(1+x)^3(1+x^2)^3 + (1-x)^2 + x + 1.$$

- (4) ¿Que elemento de la lista es el inverso del elemento del apartado anterior?

**Ejercicio 4:** Sea  $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x^2+x+1}$ .

- (1) Factorizar  $x^3 + x^2 + x + 1$  como producto de polinomios de grado uno (Ind. Recordar el Teorema de Ruffini).
- (2) Argumentar que  $A$  no es un cuerpo ni un dominio de integridad.
- (3) Lista los diferentes elementos de  $K$ , ¿Cuántos elementos tiene?.
- (4) ¿Qué elemento de la lista se obtiene como resultado de hacer el cálculo siguiente:

$$(1+x)^3(1+x^2)^3 + (1+x)^2 + 1.$$

- (5) ¿Qué elemento de  $A$  es el inverso del elemento obtenido en el apartado anterior?.
- (6) ¿Tiene inverso en  $A$  el elemento  $x^2 + 1$ ?
- (7) Razonar que un elemento de  $f(x) \in A$  es un divisor de cero si y solo  $f(1) = 0$ , y es unidad si y solo si  $f(1) \neq 0$ .
- (8) Lista los elementos de  $A$  que tienen inversos y los que no.

**Ejercicio 5:** Sea  $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^2+2}$ .

- (1) Factorizar  $x^2 + 2$  como producto de polinomios de grado uno.
- (2) Argumentar que  $A$  no es un cuerpo ni un dominio de integridad.
- (3) Lista los diferentes elementos de  $K$ , ¿Cuántos elementos tiene?.
- (4) ¿Qué elemento de la lista se obtiene como resultado de hacer el cálculo siguiente:

$$(1+2x)^3(2+x^2)^3 + (1-x)^2 + 2x + 2.$$

- (5) ¿Qué elemento de  $A$  es el inverso del elemento obtenido en el apartado anterior?.
- (6) ¿Tiene inverso en  $A$  el elemento  $x + 1$ ?
- (7) Razonar que un elemento de  $f(x) \in A$  es un divisor de cero si y solo  $f(1) = 0$  o  $f(2) = 0$ , y es unidad si y solo si  $f(1) \neq 0 \neq f(2)$ .
- (8) Lista los elementos de  $A$  que tienen inversos y los que no.