

Juan de Dios Pérez y Alfonso Romero

Parcial

Este examen pertenece al Banco de Exámenes de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Granada. Si bien su autoría corresponde a los profesores ya citados, en la asociación nos encargamos de almacenarlos y ceder su uso a los estudiantes para que sea más satisfactoria su labor a la hora de preparar un examen.

1. Contesta razonadamente las siguientes cuestiones:

- Sea  $V$  un e.v. sobre  $K$  con dimensión 1. ¿Es cierto que para cada  $f \in \text{End}_K(V)$  existe un único  $a \in K$  de manera que  $f(v) = av \forall v \in V$ ?
- Para  $g \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  se sabe que  $g(1,3) = (0,2)$  y  $g(4,2) = (1,1)$ . ¿Puede ocurrir que  $g(2,5) = g(1,2)$ ?
- Se sabe que  $h \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  tiene rango 1.
  - ¿Es posible encontrar bases ordenadas  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^2$  de manera que  $M(h, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?
  - ¿Es posible encontrar siempre una base ordenada  $\tilde{B}$  de manera que  $M(h, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Considera  $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$  no nulas tales que  $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ . ¿Existe  $c \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\beta = c\alpha$ ?

2. Se consideran los subespacios  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$  y  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0 \text{ y } x + y + z = 0\}$ . Construye, si es posible, un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que cumpla que  $\text{Im}(f) = U$  y  $\text{Ker}(f) = W$ , dando además su matriz respecto a la base usual de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Se considera  $\phi \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$  dada por  $\phi(A) = b - c$  para cada  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- Encuentra una base  $\tilde{B}$  de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$  que contenga a  $\phi$ .
- Calcula la base  $B$  de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$  cuya dual es  $\tilde{B}$ .
- En una base ordenada  $B''$  obtenida de  $\tilde{B}$ , calcula las coordenadas de la forma lineal  $\psi$  dada por  $\psi(A) = 2a - 3c$ .