2) TEOREMAS DE ISOMORFÍA

1) Teorema de homomorfismos: Sea $f: G \longrightarrow H$ homomorfismo de grupos y N subgrupo de G tal que $N \subseteq \ker(f)$. Entonces existe un único homomorfismo $\bar{f}: G/N \longrightarrow H$ tal que $\bar{f} \circ \varphi = f$ donde $\varphi: G \longrightarrow (G/N)$ es la proyección:

Además:

- → $\bar{f}$ es epimorfismo sii f lo es
- → $\ker \bar{f} = \ker f / N$
- → $\bar{f}$ es monomorfismo sii $\ker f = N$

$$\begin{tikzcd} f: G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

DEM $\Rightarrow$ aplicación $\bar{f}(aN) = f(a)$ $\bar{f}: G/N \longrightarrow H$

2) Primer teorema de isomorfía: Si $f: G \longrightarrow H$ es homomorfismo de grupos entonces $(G/\ker f) \cong \operatorname{Im} f$

Dem $\Rightarrow$ $\bar{f}$ entre $(G/\ker f)$ y H, que es epimorfismo si tomamos $\operatorname{Im}(f)$. Además, $\bar{f}$ es un monomorfismo $\Rightarrow$ es biyectiva.

3) Segundo teorema de isomorfía: Si N es un subgrupo normal de G y H es un subgrupo de G, entonces $H \cap N$ es normal en H y $\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{(NH)}{N}$

DEM $\Rightarrow$ $f: H \longrightarrow NH/N$ es epimorfismo y $\ker f = \{h \in H : Nh = N\} = \{h \in H, h \in N\} = H \cap N$, Por el primer teorema es isomorfismo.

4) Tercer teorema de isomorfía Si H y N son dos ideales de G con $H \trianglelefteq N$ entonces $\frac{G}{H} \cong \frac{G/N}{H/N}$

DEM $\Rightarrow$ $\varphi: G \longrightarrow G/H$ la proyección, es un epimorfismo de grupos y $\ker \varphi = H$ luego $N \leq \ker \varphi$. entonces existe epimorfismo $\bar{\varphi}: G/N \longrightarrow G/H$, pero $aN \in \ker \varphi$ sii $aN \in H$, sii $a \in H$, entonces $\ker \bar{\varphi} = (H/N)$, entonces por el primer teorema existe