Nombre del alumno: ______________________________

Este examen tiene 5 ejercicios, para un total de 10 puntos y una duración de dos horas.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	2	2	2	2	2	10
Puntuación						

1. $\boxed{\text{2 puntos}}$ Probar que si m y n son números impares, entonces $m^2 - n^2$ es divisible por 8.

Solución:

Si m es un número impar, entonces $m \equiv 1 \pmod 8$ ó $m \equiv 3 \pmod 8$ ó $m \equiv 5 \pmod 8$ ó $m \equiv 7 \pmod 8$, de donde $m^2 \equiv 1 \pmod 8$. Análogamente, $n^2 \equiv 1 \pmod 8$. Así $m^2 - n^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 8$. Por tanto $8|(m^2 - n^2)$.

2. $\boxed{\text{2 puntos}}$ Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{1, 2\}$ y $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ la aplicación dada por $f(A) = A \cup Y$.

   i) ¿Es f inyectiva, suprayectiva o biyectiva?

   ii) Calcular la relación $\mathcal{R}_f$ en $\mathcal{P}(X)$ asociada a f y el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/\mathcal{R}_f$.

Solución:

i) No es inyectiva, ya que para $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$, tenemos que $A \cup Y = Y = B \cup Y$, pero $A \neq B$.

No es suprayectiva, ya que para $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ no existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \subseteq A \cup Y = \emptyset$.

ii) $[\emptyset] = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$[\{3\}] = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

$[\{4\}] = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$.

$[\{3, 4\}] = \{\{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

3. $\boxed{\text{2 puntos}}$ Para realizar este examen, que empieza a las 10 y acaba a las 12, disponemos de un aula con 13 filas de bancas de 8 asientos. Se sabe que si se colocan los alumnos, 4 por banca, sobran 2, si se colocan, 5 por banca, entonces sobran 3 y si se colocan, 6 por banca, sobran 2 (aunque en este caso las probabilidades de que se copien aumentan). Calcular el número de alumnos, teniendo en cuenta que son más de 50 y menos de 100.

Solución:

Tenemos que $50 < x < 100$ y

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{6} \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

i	a	m	c	d	b
1	2	4	15	3	30
2	3	5	12	3	18
3	2	3	20	2	38

Por tanto $x \equiv 38 \pmod{60}$. Por tanto $x = 38 + 60k$. Así para $k = 1$, $x = 98$.

Otra forma: Sea $x = 2 + 4k_1$, entonces $4k_1 \equiv 1 \pmod{5}$, de donde $k_1 \equiv 4 \pmod{5}$ y así $k_1 = 4 + 5k_2$. Por tanto $x = 2 + 4(4 + 5k_2) = 18 + 20k_2$.

Ahora tenemos $18 + 20k_2 \equiv 2 \pmod{3}$, de donde $k_2 \equiv 1 \pmod{3}$ y así $k_2 = 1 + 3k_3$ y por tanto $x = 18 + 20(1 + 3k_3) = 38 + 60k_3$. Por consiguiente $x = 38 + 60 = 98$.

4. $\boxed{\text{2 puntos}}$ Calcular el resto de dividir 233^{46} entre 22.

Solución:

$233^{46} \equiv 13^{46} \pmod{22}$. Ya que $\varphi(22) = 10$, $13^{10} \equiv 1 \pmod{22}$. Así $233^{46} \equiv 13^{46} \equiv 13^{6} \pmod{22}$.

Así $13^2 \equiv 169 \equiv 15 \pmod{22}$, $13^4 \equiv 225 \equiv 5 \pmod{22}$, $13^6 \equiv 75 \equiv 9 \pmod{22}$.

5. $\boxed{\text{2 puntos}}$ La fábrica de cervezas Alhambra dispone de cajas de 24 y 10 latas de cerveza. Sabiendo que quiere usar el mínimo de cajas de 10 latas, ¿cuántas cajas de cada tipo debe usar para empaquetar 1696 latas?

El ejercicio 5 continúa en la siguiente página…

Solución:

$24x + 10y = 1696$ o equivalentemente $12x + 5y = 848$.

i	q	r	s	t
0	-	12	1	0
1	2	5	0	1
2	2	2	1	-2
3	2	1	-2	5

Entonces $d = 1$, $s = -2$ y $t = 5$. Por tanto, $e = 848/1 = 848$ y una solución particular es $x_0 = es = -1696$ e $y_0 = et = 4240$.

La ecuación general es $\overline{x} = -1696 + (5/1)k = -1696 + 5k$ e $\overline{y} = 4240 - (12/1)k = 4240 - 12k$. Ya que $\overline{y}$ debe ser mínimo, de $4240 - 12k \geq 0$, deducimos que $k = 353$ y por tanto $\overline{y} = 4240 - 4236 = 4$ e $\overline{x} = -1696 + 1765 = 69$.

Otra forma: $12x \equiv 848 \mod 5$, equivalentemente $2x \equiv 3 \pmod 5$, esto es $x \equiv 4 \pmod 5$, de donde $x = 4 + 5k$. Sustituyendo obtenemos, $12(4 + 5k) + 5y = 848$. Así $y = 160 - 12k$. Como $160 - 12k \geq 0$, tomamos $k = 13$, de donde $y = 160 - 156 = 4$ y $x = 4 + 65 = 69$.