WUOLAH

Atlas2
www.wuolah.com/student/Atlas2

223

Final soluciones.pdf

Examen Cálculo I

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

CALCULO I, 1^0 MATEMÁTICAS, **Grupo A**

Curso 2015-16 **Examen final (febrero)**

1) *(2 puntos)*
Teoría

2) *(2 puntos)*
Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) El supremo de un subconjunto A no vacío de $\mathbb{R}$ es el máximo de A.
Es falso. Basta considerar el conjunto $A =]0,1[$ que es no vacío y mayorado y como $\sup A = 2 \notin A$, entonces A no tiene máximo.

b) Si $\sum b_n$ es una serie convergente de números reales positivos y $\{a_n\}$ es una sucesión acotada de números reales positivos, entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge.
Cierto. Es consecuencia del criterio de comparación para series. Por hipótesis, existe un real K tal que $0 \leq a_n \leq K$ para cada natural n, luego

$$0 \leq a_n b_n \leq K b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis, la serie $\sum K b_n$ converge, luego $\sum a_n b_n$ también converge.

c) Sea $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces f está acotada.
Es falsa. Basta considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in]0,1[)$ que verifica que $f(]0,1[) =]1,+\infty[$ y es continua.

d) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.
Falsa. Basta considerar la función $f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ -x+5 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

que es continua e inyectiva, pero no monótona.

3) *(2 puntos)*
Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y el valor del límite, en su caso
i)

$$\left\{ \frac{x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}}{\log(n+1)^2} \right\},$$

donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales convergente a un número real x.

Se puede usar el criterio de Stolz, ya que por ser la función logaritmo neperiano estrictamente creciente, la sucesión $\{\log(n+1)^2\}$ es estrictamente creciente, todos sus términos son positivos y diverge. Usando el criterio de Stolz para

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}, \qquad b_n = \log(n+1)^2 = 2\log(n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

obtenemos que

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{x_{n+1}}{2(n+1)} \, \frac{1}{\log(n+2)-\log(n+1)} = \frac{x_{n+1}}{2} \frac{1}{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}.$$

Como $\{x_n\} \to x$ y $\left\{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right\} \to e$, entonces la sucesión anterior converge a $\frac{x}{2}$. Por el criterio de Stolz $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ converge a $\dfrac{x}{2}$.

ii)

$$\{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\}.$$

Para cada natural n usaremos la igualdad

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

para $a = \sqrt[4]{n+1}$ y $b = \sqrt[4]{n}$, luego

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} &= \frac{n+1-n}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2 n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2 n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior deducimos que la sucesión del apartado ii) converge a 0, por ser la inversa de una que diverge positivamente.

4) *(2 puntos)*
Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\log(n+1)}{n+1}$

a) Como la serie es de términos positivos, la convergencia y la convergencia absoluta coinciden. Dado que

$$0 \leq \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} \leq \frac{e}{n^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, entonces la serie $\sum \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$ también converge por el criterio de comparación.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

b) Estudiaremos primero la convergencia absoluta. Dado que para $n \geq 2$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \frac{\log(n+1)}{n+1}\right| &\geq \frac{\log(3)}{n+1} \\ &\geq \frac{\log(e)}{n+1} \\ &\geq \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

y la serie $\sum \frac{1}{n+1}$ no converge, el criterio de comparación nos asegura que la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\log(n+1)}{n+1}$ no converge absolutamente.

Comprobaremos que, sin embargo, converge. Para ello, llamamos $a_n = \frac{\log(n+1)}{n+1}$. Se verifican las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n &\Leftrightarrow \frac{\log(n+2)}{n+2} \leq \frac{\log(n+1)}{n+1} \\ &\Leftrightarrow (n+1)\log(n+2) - (n+2)\log(n+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (n+1)\big(\log(n+2) - \log(n+1)\big) \leq \log(n+1) \\ &\Leftrightarrow \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq \log(n+1) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq n+1, \end{aligned}$$

donce hemos usado que la exponencial y el logaritmo neperiano son funciones crecientes.

Dado que se verifica que

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \leq 3 \leq n+2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

la sucesión $\{a_{n+2}\}$ es decreciente. Por ser monótona, dado que

$$a_{2^n-1} = \frac{\log(2^n)}{2^n} = \frac{n\log(2)}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $\{a_{2^n-1}\} \to 0$, luego $\{a_n\} \to 0$. Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum(-1)^n \frac{\log(n+1)}{n+1}$ converge.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

5) *(2 puntos)*
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. Prueba que

$$\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(y) : y > a\}$$

Probaremos primero la primera igualdad. Por ser f creciente, tenemos que

$$x \in \mathbb{R},\ x < a \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(a),$$

es decir, $f(a)$ es un mayorante del conjunto $C := \{f(x) : x < a\}$. Por ser f continua en a, si elegimos una sucesión de números reales $\{x_n\} \to a$ tal que $x_n < a$ para cada natural n (por ejemplo $x_n = a - \frac{1}{n}$), entonces $\{f(x_n)\} \to f(a)$. Como consecuencia, $f(a) = \sup C$, por ser $f(a)$ un mayorante de C que es límite de una sucesión de puntos de C.

Para la segunda igualdad, se puede usar el mismo argumento. En este caso, usaremos la definición de continuidad. Es claro que $f(a)$ es un minorante del conjunto $A := \{f(y) : y \in \mathbb{R}, y > a\}$, ya que

$$y \in \mathbb{R}, a < y \ \Rightarrow\ f(a) \leq f(y).$$

Dado un real positivo ε, por la continuidad de f en a existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in \mathbb{R},\ a - \delta < y < a + \delta \ \Rightarrow\ |f(y) - f(a)| < \varepsilon \ \Rightarrow\ f(y) < f(a) + \varepsilon.$$

Si elegimos, por ejemplo, $y = a + \frac{\delta}{2}$, es claro que $a < y < a + \delta$, luego $f(y) < f(a) + \varepsilon$. Luego $f(y) \in A$ y verifica $f(y) < f(a) + \varepsilon$. Hemos probado que $f(a) = \inf A$.

6) *(2 puntos)*
Sea $f : [-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall x \in [-1, 1[$$

a) Prueba que f es continua.
La función $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ es continua en $[-1, 1[$ por ser una función racional cuyo denominador no se anula en este intervalo. Es inmediato comprobar además que su imagen está contenida en $\mathbb{R}_0^+$. Como la función raíz cuadrada es continua en $\mathbb{R}_0^+$, entonces f es continua en $[-1, 1[$, por ser composición de funciones continuas.

b) Calcula $f\big([-1, 1[\big)$
Dado que f es continua y $[-1, 1[$ un intervalo, comprobaremos que f es inyectiva, por lo que entonces será estrictamente monótona.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Supongamos que $x, y \in [-1, 1[$ verifican que $f(x) = f(y)$, luego

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \;\Rightarrow\; \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+y}{1-y} \;\Rightarrow\; (1-y)(1+x) = (1-x)(1+y)$$

$$\Rightarrow\; 1 + x - y - xy = 1 + y - x - xy \;\Rightarrow\; x = y.$$

Hemos probado que f es inyectiva. Ahora bien, dado que $f(-1) = 0$ y para cualquier sucesión $\{x_n\} \to 1$ en $[-1, 1[$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to +\infty$, por ser f monótona y en vista del Teorema del valor intermedio obtenemos que $f([-1, 1[) = \mathbb{R}_0^+$.

c) Calcula $f\big([-1/2, 1/2]\big)$.

Por los apartados anteriores sabemos que f es continua y creciente. Por el Teorema del valor intermedio sabemos que

$$f\Big(\Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big]\Big) = \Big[f\Big(-\frac{1}{2}\Big), f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] = \Big[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\Big].$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH