sucesiones ejerc resueltos.pdf

Ejercicios resueltos sucesiones

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

Ejercicios de Análisis Matemático

Sucesiones numéricas

1. Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

$$a)\ x_n = \frac{2n+3}{3n-50},\ x = \frac{2}{3}; \qquad b)\ x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n},\ x = 0$$

$$c)\ x_n = \sqrt[n]{a}\ \ (a > 0),\ x = 1; \qquad d)\ x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ x = 0$$

$$e)\ x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right),\ x = 0; \quad f)\ x_n = n^2 a^n\ \ (|a| < 1), x = 0$$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x - 1 \geqslant 0$ se verifica que

$$x^n = (1 + (x-1))^n \geqslant 1 + n(x-1).$$

Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

Solución. Como regla general, en este tipo de ejercicios hay que "trabajar hacia atrás", esto es, se calcula y simplifica $|x_n - x|$ y se convierte la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ en otra equivalente a ella de la forma $n > \varphi(\varepsilon)$ donde $\varphi(\varepsilon)$ es un número que depende de ε. Basta entonces tomar m_ε como la parte entera de $\varphi(\varepsilon)$ más 1, $m_\varepsilon = E\big(\varphi(\varepsilon)\big) + 1$, con lo cual para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $n < \varphi(\varepsilon)$ y, por tanto, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Este procedimiento admite muchos atajos. Hay que tener en cuenta que no se pide calcular el m_ε "óptimo", es decir, el menor valor posible de m_ε tal que $n \geqslant m_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, sino que se pide calcular cualquier valor de m_ε para el cual sea cierta dicha implicación. Para ello es suficiente con obtener, a partir de la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$, otra desigualdad del tipo $n > \varphi(\varepsilon)$ de forma que se verifique la implicación $n > \varphi(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

En este procedimiento hay que quitar valores absolutos. Esto siempre puede hacerse porque la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a las dos desigualdades $-\varepsilon < x - n - x < \varepsilon$. Con frecuencia, el número $x_n - x$ es siempre positivo o siempre negativo para todo $n \geqslant n_0$, lo que permite quitar directamente el valor absoluto y sustituirlo por la correspondiente desigualdad.

Por supuesto, en estos ejercicios hay que trabajar con un valor genérico de $\varepsilon > 0$, es decir, no está permitido considerar valores particulares de ε porque se trata de probar que una cierta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$.

La verdad es que se tarda más en escribir lo anterior que en hacer el ejercicio porque las sucesiones que se dan son muy sencillas y la sugerencia muy útil.

a) Tenemos que

$$|x_n - x| = \left|\frac{2n+3}{3n-50} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{109}{9n-150}\right|.$$

El denominador es positivo para todo $n > 17$. Pongamos $n = 17 + k$ donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|x_n - x| = \frac{109}{9n-150} = \frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}.$$

Deducimos que para que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ es suficiente que tomar $n = 17 + k$ donde k se elige de forma que $\frac{13}{k} < \varepsilon$, es decir, $k > \frac{13}{\varepsilon}$. Por tanto, poniendo $m_\varepsilon = 18 + E(\frac{13}{\varepsilon})$ podemos asegurar que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Observa que las acotaciones $\frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}$ no son imprescindibles; de hecho, podemos despejar k de la desigualdad $\frac{109}{3+9k} < \varepsilon$, pero las acotaciones hechas facilitan este paso (aunque se obtiene un valor de k mayor).

NEWS

WUOLAH

LUN 14 ENE

Noticias para el mundo universitario.

nº 19. Semana del 14 al 20

Las mejores cervezas del mundo 2018

Si te gusta la cerveza te mostramos qué delicias te has perdido este pasado 2018 con el ranking de las mejores cervezas realizado por World Drinks Awards.

Los World Drinks Awards son unos premios presentados por TheDrinksReport.com que galardonan las mejores bebidas a nivel internacional. Entre estas bebidas encontramos licores, ginebras, tequilas, whiskys o vinos. Aunque, sin duda, una de las bebidas estrella premiada por los World Drinks Awards es la cerveza. Estos premios cuentan con un numeroso grupo de jueces especializados en diferentes ámbitos. Entre los jueces que han juzgado las diferentes cervezas mundiales en 2018 encontramos desde bloggers, maestros cerveceros, fabricantes, catadores profesionales e incluso científicos especializados y escritores. Todos los jueces proceden de diferentes países de forma que se incluya la variedad cultural. Aunque ningún juez es procedente de España.

Sin seguir ninguna posición numérica, nueve han sido las cervezas premiadas únicamente por el gusto. Pasando desde la habitual cerveza de trigo hasta cervezas oscuras o de sabores. Además, algunas otras han sido condecoradas por su diseño. Por ejemplo, diseño de botella, etiqueta o multipack. Sin más, estas han sido las mejores cervezas de 2018:

1. Premio a la mejor cerveza oscuras: Collesi Rossa. Se trata de una cerveza italiana de la marca Collesi. Una cerveza artesana no pasteurizada con 8º de alcohol. Su sabor es dulce caracterizado por una mezcla de aromas de avellana, caramelo y malta.

2. Premio a la mejor cerveza de sabores: Bourbon Barrel Aged Uprising Stout Ale. Desde la marca Sons of Liberty esta cerveza estadounidense ofrece un sabor afrutado. Se trata de una cerveza oscura envejecida en barrica de madera con un aroma a cerezas y 10º de alcohol.

3. Premio a la mejor cerveza IPA (India Pale Ale): Hobgoblin IPA. Cerveza británica de Hobgiblin de tono dorado de 5,3º. Hierbas, cítricos y el malta le dan un sabor afrutado con aromas de melón y vino. Además, la fusión de lúpulos Fluggles, Styrian y Golding con algunos lúpulos estadounidenses actuales le proporcionan un contraste amargo.

* Las IPA son un tipo de cerveza de alta fermentación cuyos cereales son de color claro. Este tipo de cerveza tienen un incremento de lúpulo y, en ocasiones, un alto grado de alcohol. Esta era la forma del siglo XVIII de conservar las cervezas cuando se exportaban.

4. Premio a la mejor cerveza lager: Schweden Pils. Se trata de una cerveza de Schwarzbräu procedente de Alemania. Una cerveza suave y seca cuyo lùpulo proporciona un agradable aroma. De color dorado claro y 5º de alcohol.

* Lager son aquellas cervezas cuya fermentación es baja y se realiza en frío. Son las cervezas habituales españolas.

5. Premio a la mejor cerveza pale: 25e Blonde de l'Enfer. Cerveza canadiense de la marca Unibroue. Una cerveza de color dorado claro al estilo belga con un regusto suave y un acabado cálido. Consta de unas finas burbujas y 10,5º.

6. Premio a la mejor cerveza agria (sour): Rodenbach Vintage 2015. La marca Rodenbach (Bélgica) ofrece una cerveza muy refrescante y ácida y algo amarga. Consta de tonos rojos y marrones Una cerveza fermentada durante 2 años en barrica de roble de 7º que proporciona aromas de vino y fruta.

7. Premio a mejor cerveza especial: Quadriga. De nuevo, una cerveza alemana que la empresa Rügener Insel-Brauerei lanzó de forma limitada por la navidad 2016/2017. Seca y perfumada, con aromas de levadura francesa y fruta. Fermentada en barril de madera fina. Contiene un 10,5º de alcohol.

8. Premio a la mejor cerveza stout y porter: Macondo Coffee Stout. Una cerveza colombiana de Bogotá Beer Company cuyos cereales malteados son de color oscuro. Contiene café colombiano y vainilla y una cremosa espuma que le proporcionan un carácter jugoso y dulce. Baja carbonatación y alcohol 5,8º.

* Las cervezas stout y porter son 2 clases de cervezas oscuras de tipo ale. Se trata de unas cervezas cremosas cuyo aroma y sabor oscila entre el café y el chocolate negro. La diferencia entre ambos estilos es que la stout es una evolución de la porter. Los cerveceros experimentaron el sabor haciendolo más fuerte.

9. Premio a la mejor cerveza de trigo: Original Maisel's Weisse. Procedente de Alemania, cerveza de trigo de color ámbar brillante y rojizo. Aroma fresco y frutal provocado por un sabor a nuez moscada, frutas y clavo. Contiene un toque picante típico de Maisel's Weisse.

b) Tenemos que:

$$0 < x_n - 0 = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n \geqslant 0$ y, usando la sugerencia dada:

$$(1+z_n)^3 = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + 3z_n \Longrightarrow z_n \leqslant \frac{1}{3n}$$

Deducimos que:

$$x_n = \sqrt[3]{n}\, z_n \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon \Longrightarrow x_n < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = x_n < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{1}{27\varepsilon^3}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{1}{27\varepsilon^3}\right)$.

Observa que la acotación $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ no es imprescindible; de hecho, podemos despejar n en la desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \varepsilon$, pero la acotación anterior facilita este paso (aunque se obtiene un valor mayor para n).

c) Sea $a > 1$. Entonces $1 < \sqrt[n]{a}$. Pongamos $z_n = |x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Tenemos que:

$$(1+z_n)^n = a > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{a-1}{n}$$

Deducimos que:

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow z_n = |x_n - 1| < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)$.

Si $0 < a < 1$, poniendo $b = \frac{1}{a}$ y usando lo ya visto, tenemos que:

$$0 < 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n} = \frac{1-a}{a}\frac{1}{n}$$

De donde se sigue que podemos tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{1-a}{a\varepsilon}\right)$.

e) Sea $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$. Tenemos que:

$$0 < x_n = |x_n - 0| = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = n\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n > 0$ y:

$$(1+z_n)^n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, usando la desigualdad **??**, tenemos que:

$$|x_n - 0| = n\sqrt[n]{n} z_n < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) 0\frac{1}{n} + \frac{2}{n\sqrt[n]{n}} \leqslant \frac{3}{n}$$

Deducimos que tomando $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$, para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - 0| < \varepsilon$. ☺

2. Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

   Solución. Supongamos que $\beta = \sup(A)$. Entonces β es, claro está, un mayorante de A. Veamos que hay una sucesión de puntos de A que converge a β. Como β es el mínimo mayorante de A, ningún número menor que β puede ser mayorante de A. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún $a_\varepsilon \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a_\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tiene que haber algún $a_n \in A$ tal que $\beta - \frac{1}{n} < a_n$ y, por supuesto, $a_n \leqslant \beta$. Deducimos así la existencia de una sucesión, $\{a_n\}$, de puntos de A que verifica $\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta$. Es claro que $\{a_n\} \to \beta$.

   La afirmación recíproca te la dejo apara que la hagas tú. ☺

3. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

   Solución. Los elementos de A son los términos de la sucesión junto con el límite de la misma. Observa que el conjunto A puede ser finito o infinito. El caso en que A es finito es trivial porque sabemos que todo conjunto finito tiene máximo y mínimo. Conviene considerar, por tanto, que A es infinito. La idea para hacer este ejercicio es la siguiente: aún siendo A infinito, todos sus elementos están en un intervalo de la forma $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, con la posible excepción de un número finito de elementos de A que pueden quedar fuera de dicho intervalo. Para probar que A tiene máximo debemos fijarnos en los elementos más grandes de A. Dichos elementos deberían estar a la derecha del número $x + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Pero no tiene por qué haber ningún elemento de A en estas condiciones, y eso pasa justamente cuando x es el mayor elemento de A, en cuyo caso x sería el máximo de A.

   Esto lleva a razonar de la siguiente forma. Si x es el máximo de A, hemos acabado. En otro caso, tiene que haber algún elemento en A, digamos $a \in A$ que sea mayor que x, $a > x$. Tomemos un $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon < a$ (por ejemplo $\varepsilon = (a - x)/2$). Entonces, todos los elementos de A están en $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ excepto un número finito de ellos que quedan fuera de dicho intervalo; además, como $a > x + \varepsilon$, el conjunto $B = \{u \in A : u > x + \varepsilon\}$ no es vacío ($a \in B$), es finito y, evidentemente, se tiene que $\max(B) = \max(A)$. ☺

4. a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0, 1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

   b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

   Aplicación. Dados $a \in]-1, 1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

   Solución. *a)* Podemos hacer este apartado de dos maneras. La primera consiste en darse cuenta de que la hipótesis $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ para todo $n \geqslant p$, junto con que $0 < \rho < 1$, implica que la sucesión $\big\{|x_{n+p}|\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y, como es de números positivos, tiene que converger a un número $\alpha \geqslant 0$. Por tanto $\lim\{|x_n|\} = \alpha$. La desigualdad $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ implica que $\alpha \leqslant \rho\alpha$ y, como $0 < \rho < 1$, la única posibilidad para que dicha desigualdad se cumpla es que $\alpha = 0$.

   Otra forma consiste en escribir para $n > p$:

$$|x_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}\cdots\frac{|x_{p+1}|}{|x_p|}|x_p| \leqslant \rho^{n-p+1}|x_p| = \rho^{n+1}\frac{|x_p|}{\rho^p} = M\rho^{n+1}$$

   donde hemos puesto $M = \frac{|x_p|}{\rho^p}$ que es una constante que no depende de n. La desigualdad anterior, teniendo en cuenta que, por ser $0 < \rho < 1$, se verifica que $\rho^n \to 0$, implica que $|x_n| \to 0$.

   b) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $\rho = \lambda + \varepsilon < 1$ (basta tomar $\varepsilon = (1 - \lambda)/2$), se sigue que hay un número $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant p$ se verifica que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant \rho \Longrightarrow |x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|.$$

Y, por lo visto en el apartado anterior, concluimos que $\{x_n\} \to 0$.

La aplicación que se propone en este ejercicio es un resultado importante que debes memorizar.

Pongamos $x_n = n^k a^n$, donde se entiende que k es un número natural fijo y a es un número real con $|a| < 1$. Tenemos que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |a| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a| < 1.$$

Y podemos aplicar el resultado del punto anterior para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

5. Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$$a)\ x_n = \frac{2n + (-1)^n(n+2)}{7n+3} \qquad b)\ x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$$

$$c)\ x_n = n^2\left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ \ (a>0, b>0)$$

$$e)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \qquad f)\ x_n = \frac{x^n}{n!}\ \ (x \in \mathbb{R})$$

$$g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2}\ -\ n \qquad h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)$$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

Solución. *a)* Tenemos que $\{x_{2n}\} \to 3/7$, $\{x_{2n-1}\} \to 1/7$. Luego $\{x_n\}$ no converge porque tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites distintos.

b) Tenemos que $0 \leqslant x_n \leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y, como $n\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ por lo visto en el ejercicio anterior, se sigue que $\{x_n\} \to 0$.

d) Sea $\alpha = \max a, b$. Entonces $\alpha \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2}\alpha$. Como $\sqrt[n]{2} \to 1$, concluimos que $\{x_n\} \to \alpha$.

e) Tenemos que:

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$, el principio de las sucesiones encajadas implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} = 1$.

h)

$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right) = \frac{n^2 + \sqrt{n} - n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} + n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{2}\,n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} + n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}} + 1} \to \sqrt{2}$$

☺

6. Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solución. Estudiaremos la monotonía y acotación. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}} >$$
$$> \frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Por tanto $x_{n+1} > x_n$ y la sucesión es estrictamente creciente. Además:

$$x_{k+1} - x_k = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Sumando estas desigualdades para $1 \leqslant k \leqslant n-1$ obtenemos que $x_n - x_1 < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$, de donde se sigue que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto es convergente.

Alternativamente, aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[k, k+1]$ tenemos que hay algún número $c \in]k, k+1[$ tal que:

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Como $k < c < k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Deducimos que:

$$0 < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Y volvemos a obtener las acotaciones anteriores de forma más cómoda. ☺

7. Prueba que la sucesión dada por $x_1 = 0$ y para $n \geqslant 2$:

$$x_n = \log(\log n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

Solución. Tenemos que:

$$x_{k+1} - x_k = \log(\log(k+1)) - \log(\log k) - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = \log(\log x))$ en el intervalo $[k, k+1]$ para $k \geqslant 2$, tenemos que hay algún número $c \in]k, k+1[$ tal que:

$$\log(\log(k+1)) - \log(\log k) = \frac{1}{c \log c}.$$

Como $k < c < k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \frac{1}{c \log c} < \frac{1}{k \log k}.$$

Deducimos que:

$$0 < x_{k+1} - x_k < \frac{1}{k \log k} - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Esta desigualdad prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Además, sumando las desigualdades anteriores desde $k=2$ hasta $k=n$ resulta que:

$$x_{n+1}-x_2<\frac{1}{2\log 2}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}<\frac{1}{2\log 2}\Longrightarrow x_{n+1}<x_2+\frac{1}{2\log 2}=\log(\log 2).$$

Por tanto, la sucesión está mayorada y, como es creciente, es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$. ☺

8. Dados $0<a_1<b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

Solución. Teniendo en cuenta que la media geométrica de dos números es menor que su media aritmética, y que ambas están comprendidas entre dichos números, se sigue que $a_1<a_2<b_2<b_1$. Volvemos a razonar ahora igual con $a_2<b_2$ para obtener que $a_2<a_3<b_3<b_2$. Este proceso puede continuarse indefinidamente. Deducimos que $\{a_n\}$ es creciente y $\{b_n\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque para todo $n\in\mathbb{N}$ es $a_1<a_n<b_n<b_1$. Por tanto, ambas convergen. Pongamos $\{a_n\}\to a$ y $\{b_n\}\to b$. De la igualdad $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ se sigue que $a=\dfrac{a+b}{2}$, de donde se obtiene que $a=b$. ☺

9. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$.

b) $x_1=3$, $x_{n+1}=\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

c) $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

d) Dado $a\in]-2,-1[$, definimos $x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n-2}{x_n+4}$.

e) Dado $a>0$, definimos $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$.

f) $x_1=0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3-x_n^2}$.

g) Dado $a>0$, $a\neq 1$, definimos $x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a\in\mathbb{R}$, definimos $x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}+(x_n)^2$.

i) Dado $a\in]-2,1[$, definimos $x_1=a$, $3x_{n+1}=2+(x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

Solución. En este tipo de ejercicios puede ser útil calcular de entrada, cuando sea posible y bajo el supuesto de que la sucesión sea convergente, el límite de la sucesión. Después deberemos probar que efectivamente la sucesión converge.

a) Supuesto que $\{x_n\}\to\alpha$, de la igualdad $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$, se sigue que $\alpha=\sqrt{3\alpha}$, por lo que $\alpha=3$. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es 3. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1=1<x_2=\sqrt{3}$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es creciente. En tal caso debería verificarse que $x_n<3$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Tenemos que $x_1 = 1 < 3$; supuesto que $x_n < 3$ deducimos que $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es creciente. Tenemos que:

$$3x_n = x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+1} < 3x_{n+1} \implies x_n < x_{n+1}$$

por tanto, la sucesión es estrictamente creciente y, como está mayorada por 3, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es 3. ☺

b) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, se sigue que $\alpha = \dfrac{3+3\alpha}{3+\alpha}$, de donde resulta que $\alpha^2 = 3$, por lo que deberá ser $\alpha = \sqrt{3}$ ya que el límite debe ser un número no negativo pues, evidentemente, todos los términos de la sucesión son positivos. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es $\sqrt{3}$. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 3 > x_2 = 2$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es decreciente. En tal caso debería verificarse que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Claramente $x_1 = 3 > \sqrt{3}$. Por otra parte:

$$x_{n+1} > \sqrt{3} \iff \frac{3+3x_n}{3+x_n} > \sqrt{3} \iff 3+3x_n > 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x_n \iff$$
$$\iff x_n\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) > 3(\sqrt{3}-1) \iff x_n > \sqrt{3}$$

Por tanto, si $x_n > \sqrt{3}$ también es $x_{n+1} > \sqrt{3}$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0 \implies x_{n+1} < x_n$$

por tanto, la sucesión es estrictamente decreciente y, como está minorada por $\sqrt{3}$, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es $\sqrt{3}$. ☺

Estrategia. Para estudiar las sucesiones recurrentes pueden usarse técnicas de derivadas; para ello hay que expresar la sucesión recurrente en la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, donde la función f generalmente es fácil de obtener a partir de la definición de la sucesión. En nuestro caso, tenemos que $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, por lo que deberemos considerar la función $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Con ello, tenemos que $x_{n+1} = f(x_n)$. Esta relación, junto con $x_1 = 3$ determina la sucesión. Seguidamente, hay que elegir un intervalo donde la función f va a estar definida. Tenemos que elegir dicho intervalo de forma que la función tome valores en él. En nuestro caso, la elección es fácil pues, si $x \geqslant 0$ también es $f(x) \geqslant 0$, por ello vamos a considerar que f está definida en $\mathbb{R}_o^+$. Podemos volver a enunciar nuestro ejercicio como sigue.

Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \geqslant 0$ por $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$.

Lo primero que debemos observar es que la sucesión está bien definida pues $x_1 = 3 > 0$ y, supuesto que $x_n > 0$, también es $x_{n+1} = f(x_n) > 0$ por lo que tiene sentido $f(x_{n+1})$. Si la sucesión converge, su límite debe ser un número $\alpha \geqslant 0$ y, por ser f continua, f permuta con el límite, por lo que debe verificarse que

$$\alpha = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{f(x_n)\} = f(\lim\{x_n\}) = f(\alpha).$$

De donde se obtiene que $\alpha = \sqrt{3}$.

Para estudiar la monotonía calculamos la derivada de f. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2}$. Como $f'(x) > 0$, se sigue que f es estrictamente creciente. Como $x_1 = 3 > x_2 = f(x_1) = 2$ y, al ser creciente, f conserva las desigualdades, se sigue que $x_2 = f(x_1) > f(x_2) = x_3$. Este proceso puede seguirse indefinidamente, esto es, la misma relación de orden que hay entre dos términos consecutivos se conserva siempre:

$$x_n > x_{n+1} \implies x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n+1}) = x_{n+2}.$$

Obtenemos así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además, como es de términos positivos, está minorada, luego es convergente. Su límite ya sabemos que es $\sqrt{3}$.

Observa que, al proceder de esta forma, podemos probar muy fácilmente el decrecimiento de la sucesión, sin necesidad de probar previamente que $x_n > \sqrt{3}$.

Las sucesiones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f es una función continua, cuando son convergentes, $\{x_n\} \to \alpha$, su límite viene dado por $\alpha = f(\alpha)$, es decir, es un *punto fijo* de la función f. □

e) Definamos $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{a+x}$. La sucesión está dada por $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Como f es continua, si la sucesión es convergente, su límite debe ser un punto fijo de f, es decir, debe ser solución de la ecuación $\alpha = f(\alpha)$, lo que implica que $\alpha^2 = a + \alpha$ y deducimos que

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2},$$

donde hemos elegido la solución positiva de la ecuación. Puesto que $x_1 = \sqrt{a} < x_2 = \sqrt{2a}$ y, evidentemente, f es estrictamente creciente, se sigue $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, $x_n < x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Veamos que está mayorada. Probaremos que $x_n < \alpha$. Claramente $x_1 = \sqrt{a} < \alpha$. Supongamos que $x_n < \alpha$. Entonces:

$$x_{n+1}^2 = a + x_n < a + \alpha = \alpha^2 \implies x_{n+1} < \alpha$$

Concluimos, por inducción, que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto converge y su límite es α.

Para $a = 1$, tenemos que:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{lím} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

☺

f) Tenemos que $x_1 = 0$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n^2}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$. La sucesión que nos dan está definida por $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. La derivada de f viene dada por $f'(x) = \dfrac{2x}{(3-x^2)^2}$. Debemos considerar definida la función f en un intervalo I que contenga el 0 (porque $x_2 = f(0) = 1/3$) y de forma que $f(I) \subset I$. Como $f(0) = 1/3$ debe estar en I, deberá ser $I \subset [0, \sqrt{3}[$. Como f es creciente en $[0, \sqrt{3}[$ y $f(1) = 1/2$, se sigue que $f([0,1]) \subset [0, 1/2] \subset [0,1]$.

Consideraremos en lo que sigue que la función f está definida en el intervalo $[0,1]$. Como $f([0,1]) \subset [0,1]$ y los valores de la sucesión $\{x_n\}$ son valores de f obtenidos por aplicación reiterada de f a partir del valor inicial $x_1 = 0 \in [0,1]$, dichos valores están siempre en $[0,1]$. Por tanto $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es estrictamente creciente en $[0,1]$ y $x_1 = 0 < x_2 = f(0) = 1/3$, se sigue que $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, supuesto que $x_{n-1} < x_n$, se sigue que $x_n = f(x_{n-1}) < f(x_n) = x_{n+1}$. Luego $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como está acotada, concluimos que $\{x_n\}$ es convergente. Sea $\{x_n\} \to \alpha$. Como $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, se sigue que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Además, como f es continua en $[0,1]$, α debe ser un punto fijo de f, esto es, $f(\alpha) = \alpha$. Deducimos que α verifica la ecuación $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ no son inmediatas de calcular pero podemos decir algunas cosas sobre ellas. Pongamos $h(x) = x^3 - 3x + 1$. Tenemos que $h(-2) = -1 < 0$,

$h(0) = 1 > 0$, $h(1) = -1 < 0$ y $h(2) = 3 > 0$. Deducimos que en cada uno de los intervalos $]-2, 0[$, $]0, 1[$ y $]1, 2[$ hay una única raíz de la ecuación. Por tanto, la sucesión dada converge a la única raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está en $]0, 1[$. ☺

g) Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$. Tenemos, evidentemente, que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{a}{x^2}\right)$ donde, en principio, $x > 0$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - a}{x^3}$$

Deducimos que $f'(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt[3]{a}$ y $f'(x) > 0$ para $x > \sqrt[3]{a}$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0, \sqrt[3]{a}]$ y estrictamente creciente en $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$. Concluimos que en $\sqrt[3]{a}$ la función f tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Como todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ son (con la posible excepción del primero $x_1 = a$) valores que toma f en puntos de $\mathbb{R}^+$, se sigue que $x_n > f(\sqrt[3]{a})$ para todo $n \geqslant 2$. Un calculo inmediato da $f(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$, es decir, resulta que $\sqrt[3]{a}$ es un punto fijo de f en $\mathbb{R}^+$. Como f es continua en $\mathbb{R}^+$, si $\{x_n\}$ es convergente dicho punto debe ser el límite de $\{x_n\}$. Pero antes debemos probar que $\{x_n\}$ es convergente.

Para estudiar la monotonía debemos tener en cuenta que como $x_n > \sqrt[3]{a}$ para todo $n \geqslant 2$, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [\sqrt[3]{a}, +\infty[$. No es por eso restrictivo suponer que $a > 1$ (porque si fuera $0 < a < 1$, podemos eliminar el primer término de la sucesión lo que no afecta para nada a su estudio). Comparemos x_1 con x_2. Tenemos que:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{3}\left(a - \frac{a}{a^2}\right) - a = \frac{2a^2 + 1}{3a} - a = \frac{1 - a^2}{3a} < 0$$

Por tanto se tiene que $x_2 < x_1$ y, como f es estrictamente creciente en I, las desigualdades se conservan por f, luego, supuesto que $x_n < x_{n-1}$, se tiene también que $x_{n+1} = f(x_n) < f(x_{n-1}) = x_n$. Resulta así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además es de términos positivos (de hecho mayores que $\sqrt[3]{a}$), luego $\{x_n\}$ es convergente y su límite es $\sqrt[3]{a}$. ☺

h) Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4} + x^2$. Tenemos que $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$. Como los términos de la sucesión dada, con la posible excepción del primero, son todos ellos valores de f, se cumple que $x_n \geqslant \frac{1}{4}$ para todo $n \geqslant 2$. No es restrictivo por eso suponer que $a \geqslant \frac{1}{4}$. Pongamos $I = [1/4, +\infty[$. Tenemos que $f(I) \subset I$. Como $f'(x) = 2x$, se sigue que f es estrictamente creciente en I. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ será monótona creciente si $x_1 \leqslant x_2$ y será monótona decreciente si $x_2 < x_1$. Tenemos que:

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant a^2 + \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant a^2 + \frac{1}{4} - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

Deducimos que se verifica $x_1 \leqslant x_2$ y, por tanto, la sucesión es creciente. Cuando dicha sucesión esté mayorada será convergente y su límite debe ser un punto fijo de f en I. Tenemos que $f(x) = x$ es lo mismo que $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, esto es, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, cuya única solución es $x = 1/2$. En consecuencia, la sucesión $\{x_n\}$ será convergente a $\frac{1}{2}$ solamente cuando $x_n \leqslant \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $a^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$, que equivale a que $a^2 \leqslant \frac{1}{4}$, esto es, $|a| \leqslant \frac{1}{2}$ y, como $a \geqslant \frac{1}{4}$, resulta que debe ser $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Deducimos también que para $a > \frac{1}{2}$, la sucesión no puede ser convergente y, al ser creciente, no está mayorada. Observa que cuando $a = \frac{1}{2}$ resulta la sucesión constante $x_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)} = 1.$

b) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right\} = \log 2.$

c) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2.$

Solución. Tenemos que:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Desigualdad que es consecuencia de que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$. También podemos tomar logaritmos en las desigualdades **??** para obtener que:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Deducimos que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Tenemos también:

$$y_n - y_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0.$$

Deducimos que $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_1 < x_n < y_n < y_1$, por lo que ambas sucesiones están acotadas. Concluimos que dichas sucesiones convergen. Como $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$.

a)
$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)} = \frac{\log n + x_n}{\log n} = 1 + \frac{x_n}{\log n}.$$

Como $\{x_n\}$ es convergente y $\dfrac{1}{\log n} \to 0$, se sigue que $\dfrac{x_n}{\log n} \to 0$.

b) Pongamos $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n = x_{2n} + \log(2n) - x_n + \log n = x_{2n} - x_n + \log 2$$

Como $\{x_{2n}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ se tiene que $\{x_{2n} - x_n\} \to \gamma - \gamma = 0$.

c) Pongamos $A_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n
\end{aligned}$$

Por el apartado anterior, tenemos que $\lim\{A_{2n}\} = \log 2$. Como $A_{2n-1} = A_{2n} + \frac{1}{2n}$, deducimos que también $\lim\{A_{2n-1}\} = \log 2$. Concluimos que (ver ejercicio resuelto **??**) $\lim\{A_n\} = \log 2$.

La sucesión $\{A_n\}$ se llama **serie armónica alternada**.

Estrategia. Para calcular límites donde interviene la serie armónica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

puede ser conveniente escribir dicha sucesión como $H_n = \log n + \gamma_n$ donde $\{\gamma_n\} \to \gamma$. □

11. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

   Solución. Dado $\varepsilon > 0$, existen números naturales m_ε y n_ε tales que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y $|x_{s(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_\varepsilon$. Sea $p = \text{máx}\{m_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ y pongamos $A = \{\sigma(n) : n \geqslant p\} \cup \{s(n) : n \geqslant p\}$. Como, por hipótesis es $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, se sigue que el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$ es finito pues $B \subset \{\sigma(n) : 1 \leqslant n < p\} \cup \{s(n) : 1 \leqslant n < p\}$. Definamos $m = \text{máx}(B) + 1$. Para $q \geqslant m$ se tiene que $q \notin B$, o sea, $q \in A$, es decir, q es de la forma $q = \sigma(n)$ o $q = s(n)$ con $n \geqslant p$, en cualquier caso se verifica que $|x_q - x| < \varepsilon$.

   Este resultado suele aplicarse cuando $\sigma(n) = 2n$ y $s(n) = 2n - 1$, es decir, a las sucesiones parciales de los términos pares e impares. Cuando sabemos que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ convergen a un mismo número, podemos concluir que $\{x_n\}$ converge a dicho número.

   Este resultado puede generalizarse de manera fácil. Por ejemplo si $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n-1}\}$ y $\{x_{3n-2}\}$ convergen todas a un mismo número, también $\{x_n\}$ converge a dicho número. ☺

12. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n, h \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

   deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

   Solución. Sean $n, h \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$|x_{n+h} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{h-1}(x_{n+k+1} - x_{n+k})\right| \leqslant \sum_{k=0}^{h-1}|x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leqslant M\sum_{k=0}^{h-1}\rho^{n+k} =$$

$$= M\rho^n\sum_{k=0}^{h-1}\rho^k = M\rho^n\frac{1-\rho^h}{1-\rho} < \rho^n\frac{M}{1-\rho} = K\rho^n$$

   Donde hemos puesto $K = \dfrac{M}{1-\rho}$, que es una constante independiente de n y de h. Deducimos que:

$$K\rho^n < \varepsilon \implies |x_{n+h} - x_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } h \in \mathbb{N}$$

   Dado $\varepsilon > 0$, determinamos m_ε por la condición de que $\rho^{m_\varepsilon} < \varepsilon/K$. Entonces para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo* $h \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_{n+h} - x_n| < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. ☺

13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho|x_n - x_{n-1}|$ para todo $n > p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

   Solución. Es muy fácil, basta iterar la desigualdad del enunciado. Sea $n > p$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho|x_n - x_{n-1}| \leqslant \rho^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \rho^{n-p}|x_{p+1} - x_p| = M\rho^n.$$

   Donde $M = \dfrac{|x_{p+1} - x_p|}{\rho^p}$ es una constante independiente de n. El ejercicio anterior nos dice que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. ☺

14. Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{1}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0, 1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

Solución. a) Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

b) Es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. ☺

15. Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$a)\ x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}; \qquad b)\ x_1 = \sqrt{2},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

Solución. a) Consideremos la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. La sucesión que nos piden estudiar es la sucesión de iteradas de dicha función a partir del valor inicial $x_1 = 1$. Como $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, la función f es estrictamente decreciente. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ no es monótona. Pues si, por ejemplo es $x_{n-1} < x_n$, como f, al ser decreciente, invierte las desigualdades, se tendrá que $x_n = f(x_{n-1}) > f(x_n) = x_{n+1}$.

Es evidente que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $1 + x_n > 1 \Longrightarrow x_{n+1} < 1$, luego $x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $1 + x_n \leqslant 2 \Longrightarrow x_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$. Deducimos que todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [1/2, +\infty[$. Para $x \geqslant 1/2$ se tiene que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. Podemos aplicar, por tanto, el ejercicio anterior y deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. Además, su límite es el único punto fijo de f en I, que viene dado por $x = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, de donde, $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. ☺

16. Supongamos que la ecuación $x^2 = bx + a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = \lambda + \mu,\ \ x_2 = \lambda\alpha + \mu\beta,\ \ x_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n$$

Prueba que $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = x_2 = 1,\ \ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ \ x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n).$$

Solución. La igualdad $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ es cierta para $n = 1$ y para $n = 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geqslant 2$, y supongamos que la igualdad se verifica para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$. Entonces, teniendo en cuenta que $\alpha^2 = b\alpha + a$ y $\beta^2 = b\beta + a$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= bx_n + ax_{n-1} = b\lambda\alpha^{n-1} + b\mu\beta^{n-1} + a\lambda\alpha^{n-2} + a\mu\beta^{n-2} = \\ &= \lambda(b\alpha + a)\alpha^{n-2} + \mu(b\mu + a)\beta^{n-2} = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n \end{aligned}$$

Lo que prueba la igualdad para $n + 1$. Concluimos, por inducción, que la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Como $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, deducimos que $a=b=1$. Por tanto, α y β son las raíces de $x^2=x+1$, las cuales vienen dadas por:

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Calculemos λ y μ por las condiciones $x_1=1=\lambda+\mu=$, $x_2=1=\lambda\alpha+\mu\beta$. Fácilmente se obtiene que:

$$\lambda=\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Deducimos, por lo antes visto, que:

$$x_n=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

iii) Pongamos $x_1=a^1b^0$, $x_2=a^0b^1$, $x_n=a^{p_n}b^{q_n}$. Entonces:

$$x_{n+2}=a^{p_{n+2}}b^{q_{n+2}}=a^{\frac{1}{2}(p_{n+1}+p_n)}b^{\frac{1}{2}(q_{n+1}+q_n)}.$$

Tenemos las ecuaciones:

$$p_1=1,\ p_2=0,\ 2p_{n+2}=p_{n+1}+p_n, \qquad q_1=0,\ q_2=1,\ 2q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$$

Ambas ecuaciones son de la forma $2x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ por lo que $a=b=1$ y α y β son las raíces de $2x^2=x+1$. Por tanto $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$. En consecuencia:

$$p_n=\lambda_1+\mu_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad q_n=\lambda_2+\mu_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

Debemos ahora calcular λ_1,μ_1 y λ_2,μ_2 para que se verifiquen las respectivas condiciones iniciales $p_1=1, p_2=0$ y $q_1=0, q_2=1$. Fácilmente se obtiene que $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\mu_1=\frac{2}{3}$, $\lambda_2=\frac{2}{3}$, $\mu_2=-\frac{2}{3}$. Deducimos que:

$$x_n=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\longrightarrow a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{ab^2}.$$

☺

17. Prueba que $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n\log n\}$.

Solución. Pongamos $x_n=n\log n$, $y_n=\log n!$. Aplicaremos el criterio de Stolz para calcular el límite de la sucesión $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. Tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)\log(n+1)-n\log n}{\log(n+1)}=\frac{n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)}+1$$

Teniendo en cuenta que $n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 1$ y que $\log n\to+\infty$, obtenemos que $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}\to 1$ y, por el criterio de Stolz, concluimos que $\{\frac{x_n}{y_n}\}\to 1$. ☺

18. Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}-1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha>0$.

Solución. Pongamos $x_n=\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}$. Como $1\leqslant x_n\leqslant\sqrt[n]{2}$, deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\{x_n\}\to 1$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}=1$, porque dicho límite es la derivada en 1 de la función logaritmo. Por tanto, para toda sucesión $\{z_n\}\to 1$ se verifica que

$\lim \dfrac{\log(z_n)}{z_n - 1} = 1$, esto es, $z_n - 1 \sim \log(z_n)$. Análogamente, se tiene que $\log(1 + u_n) \sim u_n$ para toda sucesión $\{u_n\} \to 0$. Deducimos que:

$$x_n - 1 \sim \log(x_n) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

19. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3 \log(1 + 1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

Solución. a) Pongamos $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicamos el criterio de Stolz, lo cual puede hacerse porque, al ser $\alpha > -1$ se tiene que $n^{\alpha+1}$ es una sucesión estrictamente creciente.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]}$$

Usando las equivalencias asintóticas $x_n - 1 \sim \log(x_n)$, válida cuando $\{x_n\} \to 1$, y $\log(1 + u_n) \sim u_n$, válida cuando $\{u_n\} \to 0$, tenemos que:

$$n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] \sim n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = (\alpha+1) n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim (\alpha+1) n \frac{1}{n} = \alpha + 1.$$

Deducimos que $\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{1}{\alpha+1}$ y, por el criterio de Stolz, $\lim x_n = \frac{1}{\alpha+1}$.

b)Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n &= n\left(\sqrt[k]{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)} - 1\right) \sim \\ &\sim n\frac{1}{k}\log\left[\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n \log\left(1 + \frac{a_j}{n}\right) \to \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.\end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a$.

c) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} - 1\right) = n\left(\frac{\alpha(\sqrt[n]{a} - 1) + \beta(\sqrt[n]{b} - 1)}{\alpha + \beta}\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{b} - 1) \to$$
$$\to \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \log a + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \log b = \log\left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

d) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{p}\left(n\big(2^{\frac{p}{n}} - 1\big) + n\big(3^{\frac{p}{n}} - 1\big) + \cdots + n\big(p^{\frac{p}{n}} - 1\big)\right)$$

Teniendo en cuenta que $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(u_n - 1) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log n! \Longrightarrow \lim\{x_n\} = n!.$$

f) Es una sucesión de potencias $x_n = u_n^{v_n}$, donde:

$$u_n = \frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}, \quad v_n = n^2.$$

La base $\{u_n\}$ converge a 1, pues aplicando Stolz con $a_n = 1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ y $b_n = n^3$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 3n + 1} \to \frac{4}{3}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n^2\left(\frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3} - 1\right) =$$
$$= \frac{3}{4}\frac{3\big(1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\big) - 4n^3}{n}$$

Apliquemos ahora el criterio de Stolz con $z_n = 3\big(1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\big) - 4n^3, w_n = n$. Tenemos:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{w_{n+1} - w_n} = 3(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 + 4n^3 = -1.$$

Deducimos que $v_n(u_n - 1) \to -\frac{3}{4}$ y, por tanto, $\lim\{x_n\} = e^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$.

g) $x_n = n\left[\left(1 + \frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$. Pongamos $z_n = \left(1 + \frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n$. La sucesión $\{z_n\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Tenemos que:

$$n\frac{1}{n^3\log(1+1/n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{n\log(1+1/n)} \to 0 \implies z_n \to 1.$$

En consecuencia:

$$x_n \sim n\log(z_n) = n^2\log\left(1 + \frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \sim n^2\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Luego $\lim\{x_n\} = \lim \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$. ☺

20. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$$a)\ x_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} \qquad b)\ x_n = \frac{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}\cdots\sqrt[n]{e}}{n}$$

$$c)\ x_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$$

$$e)\ x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j \qquad f)\ x_n = \frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

$$g)\ x_n = \log n\left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right] \qquad h)\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\ \ (p,q\in\mathbb{N})$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{5\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}\right)^n \qquad j)\ x_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

$$k)\ x_n = n\frac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} \qquad l)\ x_n = \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

Solución. a) Usaremos la estrategia **??**. Pongamos $H_n = \log n + x_n$ donde $\{x_n\} \to \gamma$. Tenemos que:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} = \frac{\log(\log n + x_n)}{\log(\log n)} = \frac{\log\left(\log n\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)\right)}{\log(\log n)} =$$

$$= \frac{\log(\log n) + \log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} \to 1.$$

Observacion. Es sabido que $H_n \sim \log n$, pero de aquí no puede deducirse directamente que $\log(H_n) \sim \log(\log n)$ que es lo que hemos probado. La razón es que no es cierto en general que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ también sea $\log(x_n) \sim \log(y_n)$. Por ejemplo, las sucesiones $\{e^{\frac{1}{n}}\}$ y $\{e^{\frac{1}{n^2}}\}$ son asintóticamente equivalentes porque ambas convergen a 1, pero sus logaritmos son las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}$ que no son asintóticamente equivalentes.

En general, no hay garantías de que una equivalencia asintótica entre sucesiones se conserve por una determinada función. □

c) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log x_n = n\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \log n = n\left(\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}\right)$$

Esta expresión es de la forma $\log(1+u_n)-u_n$ donde $u_n\to 0$. Recordemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Tenemos que:

$$\log x_n=\frac{\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right)-\frac{\log n}{n}}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}\frac{(\log n)^2}{n}$$

Poniendo $u_n=\frac{\log n}{n}$, como $u_n\to 0$, deducimos que la primera de las dos fracciones anteriores converge a $-\frac{1}{2}$ y la segunda $\frac{(\log n)^2}{n}\to 0$. Concluimos que $\log x_n\to 0$ y, por tanto, $\{x_n\}\to 1$.

e) $x_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j$. Pongamos:

$$z_k=\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}j\log\left(1+\frac{1}{j}\right)}{k}.$$

De esta forma, se tiene que:

$$x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}z_k}{n}.$$

Como $\{z_n\}$ es la sucesión de medias aritméticas de la sucesión $y_n=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, y $\lim\{y_n\}=1$, se sigue, por el criterio de la media aritmética, que $\{z_n\}\to 1$. Como $\{x_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{z_n\}$, volviendo ahora a aplicar el mismo criterio, deducimos que $\{x_n\}\to 1$.

f) $x_n=\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$. Pongamos:

$$x_n=\left(\frac{2\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n=\left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right)^n$$

Se trata de una sucesión de potencias de la forma $x_n=u_n^{v_n}$ donde $u_n=2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ y $v_n=n$. Claramente $u_n\to 1$, por lo que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1)=n\left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}-1\right)=-n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-1\right)^2\sim$$

$$\sim -n\left(\log\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2=\frac{\log n}{n}\to 0.$$

Deducimos que $x_n\to 1$.

g) La sucesión $x_n=\log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n-1\right]$ es de la forma $b_n(a_n-1)$ donde $a_n=\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$, $b_n=\log n$. Veamos que $\{a_n\}\to 1$. Para ello, como se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right)=\frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log n}\to 0$$

Por tanto, $\{a_n\} \to 1$. Podemos aplicar ahora el criterio de equivalencia logarítmica a la sucesión $b_n(a_n - 1)$. Tenemos que:

$$a_n^{b_n} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

Esta sucesión es una indeterminación del tipo 1^∞ y podemos volver a aplicarle el criterio de equivalencia logarítmica.

$$n\log n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\} \to 1$.

h) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$. Es una sucesión del tipo $x_n = \sqrt[n]{z_n}$ donde $z_n = \frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}$. Tenemos que:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(pn+p)!}{(qn+q)^{pn+p}}\frac{(qn)^{pn}}{(pn)!} = \frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn}$$

La fracción $\frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}$ es un cociente de dos polinomios en la variable n del mismo grado p y coeficientes líder iguales a p^p y q^p respectivamente, por tanto su límite es igual a $\left(\frac{p}{q}\right)^p$. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{np}$ converge a e^{-p}. Por tanto, en virtud del corolario **??**, la sucesión dada converge a $\left(\frac{p}{q\,\mathrm{e}}\right)^p$.

k) $x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que $x_n = f(y_n)$. Como $y_n \to 0$, el límite de $\{x_n\}$ es igual al límite de $f(x)$ en $x = 0$. Tenemos que:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\frac{\mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x} \sim \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} \sim 1 \qquad (x \to 0)$$

Donde hemos usado que la función $\frac{\mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x}-1}{x-\operatorname{sen} x}$ es de la forma $\frac{e^{h(x)}-1}{h(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, por lo que dicha función tiene límite igual a 1 en $x = 0$. ☺

21. Sabiendo que $\{a_n\} \to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

Solución. b) Es una sucesión del tipo $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\exp\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) - 1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim n\frac{a_{n+1}}{n+1} \to a.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$ válida siempre que $z_n \to 0$ y $\log(1+y_n) \sim y_n$, válida siempre que $y_n \to 0$. Concluimos que $\{x_n\} \to a$. ☺

22. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L > 0$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}}$

Solución. Es una sucesión del tipo $w_n = \sqrt[n]{y_n}$ donde $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$. Aplicaremos el corolario **??**. Tenemos que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \frac{\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} \sim L \frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}} \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

En virtud, del citado corolario, se tiene que $\sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to L$. Sea $z_n = \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Consideremos la sucesión:

$$\log z_n = \frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)}{n(n+1)}$$

Pongamos $a_n = \log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)$, $b_n = n(n+1)$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\log(x_{n+1})}{2n+2} = \frac{1}{2} \log \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to \frac{1}{2} \log L = \log \sqrt{L}.$$

Deducimos que $\log z_n \to \log \sqrt{L}$, por lo que $z_n \to \sqrt{L}$ y también $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to \sqrt{L}$. El citado corolario **??** implica que $w_n \to \sqrt{L}$.

23. Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a + (k-1)b$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

Solución. Tenemos que $A_n = \dfrac{na + \frac{n(n-1)}{2} b}{n} = a + \dfrac{n-1}{n} b$. Por tanto:

$$\frac{G_n}{A_n} = \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{a + \frac{n-1}{n} b} = \frac{1}{\frac{a}{n} + \frac{n-1}{2n} b} \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$$

Calcularemos el límite de la sucesión $U_n = \sqrt[n]{\dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$, que es del tipo $U_n = \sqrt[n]{z_n}$, usando el corolario **??**, tenemos:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} n^n = \frac{x_{n+1}}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{b}{\mathrm{e}}.$$

Deducimos que $\{\frac{G_n}{A_n}\} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$. ☺

24. Sea $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. Definamos $z_{2n-1} = x_n$, y $z_{2n} = y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{ \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \right\}$$

es convergente.

Solución. Pongamos $u_n = \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{z_1 + z_3 + \cdots + z_{2n-1}}{2n} + \frac{z_2 + z_4 + \cdots + z_{2n}}{2n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{1}{2} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \to \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado el criterio de la media aritmética. Análogamente se comprueba que $\{u_{2n-1}\} \to \frac{x+y}{2}$. Concluimos que $\{u_n\} \to \frac{x+y}{2}$.

Observa que no se puede calcular el límite de $\{u_n\}$ aplicando el criterio de Stolz. Llamando $Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $V_n = n$, tenemos $u_n = \frac{Z_n}{V_n}$ y:

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{V_{n+1} - V_n} = Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} x_{m+1}, & \text{si } n = 2m \text{ es par;} \\ y_m, & \text{si } n = 2m - 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{V_{n+1}-V_n}$ no es convergente. ☺

25. a) Justifica las desigualdades:

$$0 < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < x \ \ (x > 0); \quad x < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < 0 \ \ (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

Solución. a) En virtud del teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^c$$

donde c es un punto comprendido entre x y 0, esto es, $c \in]0, x[$ si $x > 0$, y $c \in]x, 0[$ si $x < 0$. En el primer caso es $1 < \mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y en el segundo es $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^c < 1$. Á partir de aquí se deducen enseguida las desigualdades del enunciado.

b) Definamos $f(x) = \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ y $f(0) = 0$. La función f es continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que $x < 0$. Entonces, como consecuencia de la segunda de las desigualdades del apartado anterior, se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dicha sucesión converge y su límite es un número $\alpha \leqslant 0$, que debe verificar la igualdad $\alpha = f(\alpha)$ lo que exige que $\alpha = 0$. ☺

26. Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

a) Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.

b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

Solución. a) Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ y $f(1) = 1 > 0$ y, evidentemente, la función f es continua en $\mathbb{R}^+$, podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$, para deducir que f tiene algún cero en cada uno de ellos.

Como $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$ y estrictamente creciente en $]0, 1]$. Por tanto solamente puede anularse una vez en dichos intervalos.

b) Como la función $h(x) = \log x + 2$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y $h(\alpha) = \alpha$, $h(\beta) = \beta$, se deduce que para todo $x \in]\alpha, \beta[$ es $\alpha < h(x) < \beta$. Además, como $h(x) - x$ es continua y no se anula en $]\alpha, \beta[$ debe tener signo constante. Como $h(1) > 0$, deducimos que $x < h(x)$ para todo $x \in]\alpha, \beta[$. Por tanto, dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se tiene que $x_1 < h(x_1) = x_2$ y, supuesto que $x_{n-1} < x_n$ se tiene que $x_n = h(x_{n-1}) < h(x_n) = x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y, además, todos sus términos están en $]\alpha, \beta[$, luego dicha sucesión converge y su límite, λ, debe verificar la igualdad $\lambda = h(\lambda)$; puesto que $\alpha < \lambda \leqslant \beta$, se sigue que $\lambda = \beta$. ☺

27. Dado un número $\alpha \in]0,\pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen}\alpha,\ x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

   (a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

   (b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

   Solución. a) La conocida desigualdad $0 < \operatorname{sen} x < x$, válida para todo $x \in]0,\pi[$, implica que la sucesión es estrictamente decreciente y de números positivos. De aquí se deduce enseguida que es convergente y su límite es 0.

   b)

$$z_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^2 \operatorname{sen}^2(x_n)} \sim$$
$$\sim \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^4} = \frac{\operatorname{sen}(x_n) + x_n}{x_n}\,\frac{x_n - \operatorname{sen}(x_n)}{x_n^3} \to \frac{1}{3}.$$

☺

28. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

   Sugerencia. Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ es bien conocido.

   Solución.

$$z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - 1\right) + i\ \sqrt[n]{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \sqrt[n]{2} - 1\right) =$$
$$= n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) + \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\frac{\pi}{2n}} + i\,\sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \to \log 2 + i\,\frac{\pi}{2}$$

29. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

   Solución. Siguiendo la sugerencia, supongamos que $\{z^n\}$ converge a un número $w \in \mathbb{C}$. Como $|z^n| = |z|^n = 1$, debe ser $|w| = 1$. Por una parte, es claro que $\{z^{n+1}\} \to w$ y también $\{z^{n+1}\} = z\{z^n\} \to zw$, por tanto debe ser $z = wz$, lo que implica que $(z-1)w = 0$ lo cual es imposible porque $z \neq 1$ y $w \neq 0$. Concluimos que $\{z_n\}$ no converge.

   Sea φ un número real que no es un múltiplo entero de π. Pongamos $z = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$. Tenemos que $z \neq 1$ y $|z| = 1$. Por lo antes visto, la sucesión $\{z^n\} = \{\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no converge. Veamos que esto implica que ninguna de las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$, $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge.

   En efecto, de la igualdad:

$$\operatorname{sen}((n+1)\varphi) = \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi + \cos(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \Longrightarrow \cos(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\Big(\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi\Big)$$

   se deduce que si $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\cos(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio.

   Análogamente, de la igualdad:

$$\cos((n+1)\varphi) = \cos(n\varphi)\cos\varphi - \operatorname{sen}(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \Longrightarrow \operatorname{sen}(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\Big(\cos((n+1)\varphi) - \cos(n\varphi)\cos\varphi\Big)$$

   se deduce que si $\{\cos(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio. ☺