# Solucion relacion 1.pdf

*Ejercicios Resueltos*

1º Cálculo I

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

# Ejercicios de Cálculo I

## Relación 1

## Soluciones

**1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos, y sea $C = \{a\,b \,:\, a \in A\,,\; b \in B\}$. Probar que $C$ está mayorado y que

$$\sup C \,=\, \sup A \,\cdot\, \sup B$$

Probar también que $\inf C \,=\, \inf A \,\cdot\, \inf B$.

**Solución**

Para simplificar la notación, sean $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Es claro que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Para $c \in C$ tenemos $c = ab$ con $a \in A$ y $b \in B$. Por ser $0 < a \leq \alpha$ y $0 < b \leq \beta$, al multiplicar ambas desigualdades obtenemos $c \leq \alpha\beta$. Como esta desigualdad es válida para todo $c \in C$, hemos probado que $\alpha\beta$ es mayorante de $C$, luego $C$ está mayorado y $\sup C \leq \alpha\beta$.

Sea ahora $\gamma = \sup C$ y veamos que $\gamma \geq \alpha\beta$. Dados $a \in A$ y $b \in B$ tenemos $ab \in C$, luego $ab \leq \gamma$. Entonces $a \leq \gamma/b$ para todo $a \in A$ y vemos que $\gamma/b$ es mayorante de $A$, luego $\alpha \leq \gamma/b$, o lo que es lo mismo, $b \leq \gamma/\alpha$. Como esta desigualdad es válida para todo $b \in B$, vemos que $\gamma/\alpha$ es mayorante de $B$, así que $\gamma/\alpha \geq \beta$, como queríamos.

Sean $u = \inf A$, $v = \inf B$ y $w = \inf C$, para probar que $uv = w$. El razonamiento es similar al usado con los supremos, pero hay que tener cuidado si algún ínfimo se anula, ya que ahora sólo sabemos que $u, v, w \in \mathbb{R}_0^+$.

Para $c \in C$ tenemos $c = ab$ con $a \in A$ y $b \in B$. Por ser $0 \leq u \leq a$ y $0 \leq v \leq b$, tenemos $uv \leq c$. Como esta desigualdad es válida para todo $c \in C$, deducimos que $uv$ es minorante de $C$, así que $uv \leq w$

La otra desigualdad es evidente si $w = 0$, luego podemos suponer que $w > 0$. Dados $a \in A$ y $b \in B$ tenemos $ab \in C$, luego $ab \geq w$. Entonces $a \geq w/b$ para todo $a \in A$ y vemos que $w/b$ es minorante de $A$, luego $u \geq w/b > 0$, de donde $b \geq w/u$. Como esta desigualdad es válida para todo $b \in B$, vemos que $w/u$ es minorante de $B$, así que $v \geq w/u$, de donde $uv \geq w$, como queríamos.

**2.** Se consideran los conjuntos siguientes:

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ 3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$C = \left\{ \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Probar que están mayorados, calcular sus supremos y averiguar si tienen máximo. ¿Se verifica la igualdad $\sup C = \sup A \cdot \sup B$? ¿Hay alguna contradicción con lo afirmado en el ejercicio anterior?

**Solución**

Se tiene evidentemente $2 - (1/n) < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego 2 es mayorante de $A$ y, en particular, $A$ está mayorado. Supongamos que $\alpha$ fuese un mayorante de $A$ verificando que $\alpha < 2$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ tendremos $2 - (1/n) \leq \alpha$, de donde $n \leq 1/(2-\alpha)$, lo que contradice la propiedad arquimediana. Por tanto $\alpha \geq 2$ y hemos probado que 2 es el mínimo del conjunto de los mayorantes de $A$, es decir, $2 = \sup A$. Como $2 \notin A$, concluimos que $A$ no tiene máximo.

Es evidente que $3 + (1/n) \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego 4 es mayorante de $B$, pero $4 \in B$, luego $4 = \max B = \sup B$.

Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\big(2-(1/n)\big)\big(3+(1/n)\big) = 6-(1/n)-(1/n^2) < 6$, luego 6 es mayorante de $C$ y $6 \notin C$. Para ver que $\sup C = 6$ se razona igual que con el conjunto $A$. Supongamos que $\gamma$ fuese un mayorante de $C$ verificando que $\gamma < 6$. Tendríamos entonces

$$\gamma \geq 6 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \geq 6 - \frac{2}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

de donde $n \leq 2/(6-\gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que contradice la propiedad arquimediana. Así pues, si $\gamma$ es mayorante de $C$ se ha de tener $\gamma \geq 6$. Por tanto, $\sup C = 6$ y $C$ no tiene máximo.

No se verifica la igualdad en cuestión, ya que $\sup C = 6 \neq 8 = \sup A \sup B$. Esto no contradice lo probado en el ejercicio anterior, porque allí el conjunto $C$ se definía de manera diferente: era el conjunto de *todos* los posibles productos de elementos de $A$ por elementos de $B$, aquí sólo consideramos *algunos* de esos productos. Para el conjunto

$$C' = \left\{ \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

el ejercicio anterior sí nos dice que $\sup C' = 8$, pero está claro que $C' \neq C$.

**3.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ con $c^2 + d^2 > 0$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ¿Qué condición necesaria y suficiente deben cumplir $a, b, c, d$ para que $\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$ sea un número racional?

**Solución**

Suponiendo $\dfrac{ax+b}{cx+d} = r \in \mathbb{Q}$, tenemos $ax+b = r(cx+d)$, es decir, $(a-rc)x = rd-b \in \mathbb{Q}$. Si fuese $a - rc \neq 0$, deduciríamos $x = \dfrac{rd-b}{a-rc} \in \mathbb{Q}$, contra la hipótesis, luego $a = rc$ y, por tanto, $b = rd$. Deducimos que $ad = rcd = bc$. Hemos probado así que la condición $ad = bc$ es necesaria.

Recíprocamente, supongamos que $ad = bc$. Entonces, si $d \neq 0$, tenemos

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{dax+db}{d(cx+d)} = \frac{bcx+bd}{d(cx+d)} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$$

Si $d = 0$, tendremos $bc = ad = 0$, pero de $c^2 + d^2 > 0$ deducimos que $c \neq 0$, luego $b = 0$. Entonces $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} \in \mathbb{Q}$.

En resumen, hemos probado que $(ax+b)/(cx+d) \in \mathbb{Q}$ si, y sólo si, $ad = bc$.

**4.** Sea $D$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$ y sea $I$ un intervalo no trivial. Probar que el conjunto $D \cap I$ es infinito.

**Solución**

Como $I$ es un intervalo no trivial, existen $a, b \in I$ tales que $a < b$. Entonces, por ser $I$ un intervalo, tenemos que $]a, b[ \subset I$, luego $D \cap ]a, b[ \subset D \cap I$. Bastará pues probar que el conjunto $E = D \cap ]a, b[$ es infinito. Por ser $D$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$, existe $x \in D$ tal que $a < x < b$, así que $x \in E$ y $E \neq \emptyset$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $E$ es finito. Entonces, por ser un conjunto de números reales no vacío y finito, $E$ tiene mínimo, sea $y = \min E$. Como $a < y$, por ser $D$ denso en $\mathbb{R}$, existirá $z \in D$ tal que $a < z < y$. Tenemos $a < z < b$, luego $z \in E$. Esto es una contradicción, ya que $z < y = \min E$.