Fundamentals Físicos y Tecnológicos

Herramientas matemáticas

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores
Universidad de Granada

isabelt@ugr.es

GIM y GIADE
Curso 2019-2020

1. Introducción
2. Números Complejos
3. Señales sinusoidales
4. Relación entre números complejos y señales sinusoidales
5. Representación de funciones complejas.

1 Introducción

2 Números Complejos

3 Señales sinusoidales

4 Relación entre números complejos y señales sinusoidales

5 Representación de funciones complejas.

1 Introducción

2 Números Complejos

3 Señales sinusoidales

4 Relación entre números complejos y señales sinusoidales

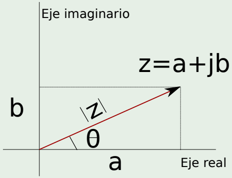
5 Representación de funciones complejas.

Números Complejos: presentación

- ¿Qué es un número complejo?
  - Los números complejos están relacionados con las raices de números negativos.
  - Nosotros vamos a usar la notación $j \equiv \sqrt{-1}$
- ¿Cómo se expresan los números complejos?
  - Forma binomial: $z = a + jb$.
  - Forma polar: $z = |z|e^{j\theta}$.
  - Forma trigonométrica: $z = |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta$

- Transformaciones.
- Representación gráfica.
- Complejo conjugado.
- Opuesto de un número complejo.
- Igualdad de números complejos.

Representación



Números Complejos: familiarizándose con los complejos

Vamos a familiarizarnos con algunos números complejos y sus expresiones más usuales.

- j
- $-j$
- 1
- -1

Números Complejos: operaciones

- Operaciones con números complejos: dependiendo de la operación a realizar, será más conveniente tener el número complejo expresado en una forma u otra.
  1. Suma (binomial)
  2. Resta (binomial)
  3. Producto (polar)
  4. División (polar)
- Para hacer ejemplos sobre operaciones con números complejos, usar el pdf sobre complejos que está dentro de la carpeta Curso cero de matemáticas básicas disponible en el moodle (material extra en semana 1).

1 Introducción

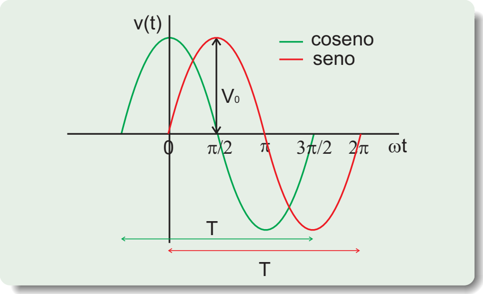
2 Números Complejos

3 Señales sinusoidales

4 Relación entre números complejos y señales sinusoidales

5 Representación de funciones complejas.

Señal sinusoidal (tipo seno o tipo coseno)



- $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \alpha) = V_0 \cos(\omega t + \alpha - \pi/2)$
- $v(t) = V_0 \sin(2\pi f t + \alpha) = V_0 \cos(2\pi f t + \alpha - \pi/2)$
- $v(t) = V_0 \sin(\frac{2\pi t}{T} + \alpha) = V_0 \cos(\frac{2\pi t}{T} + \alpha - \pi/2)$

Algunas definiciones

- Frecuencia angular (ω), frecuencia (f), y Periodo (T).
- Diferencia de fase entre dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. $x_1(t)$ adelantada si $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$. $x_2(t)$ adelantada si $-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$.
- Valor instantáneo.
- Valor pico a pico.
- Valor eficaz (r.m.s)= $\sqrt{\int_0^T v^2(t)dt} = V_0/\sqrt{2}$. Relación con la potencia.

1 Introducción

2 Números Complejos

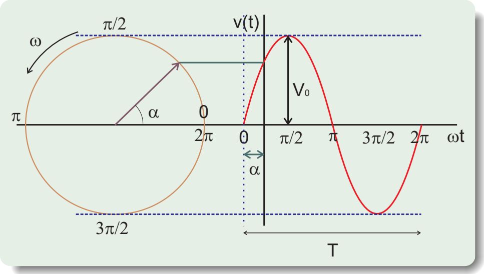
3 Señales sinusoidales

4 Relación entre números complejos y señales sinusoidales

5 Representación de funciones complejas.

Fasores y números complejos

- Puedo usar números complejos para representar señales sinusoidales (ver $http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor$ o $http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor$):
  $v(t) = V_0(\cos(\omega t + \alpha) + j\sin(\omega t + \alpha))$ **¡¡Sólo nos interesa una parte!!**
- Representación fasorial: $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$ si $V = V_0 e^{j\alpha} \Rightarrow v(t) = Ve^{j\omega t}$



Fasor ($V_0 e^{j\alpha}$)

Es un número complejo que representa el módulo V_0 y la fase inicial $e^{j\alpha}$ de una señal sinusoidal $v(t)$.

- ¿Por qué trabajar con números complejos?
  - Ventaja: permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas fáciles de resolver.(Derivada e integral de la exponencial).
  - Desventaja: hay que familiarizarse con los números complejos.

1 Introducción

2 Números Complejos

3 Señales sinusoidales

4 Relación entre números complejos y señales sinusoidales

5 Representación de funciones complejas.

Función Compleja

En esta asignatura vamos a trabajar con funciones complejas que dependen de una variable. Vamos a notar a esas funciones complejas con la letra **T** y a la variable de la que dependen la llamaremos ω. Entenderemos esta notación en el Tema 3.

$$\begin{array}{rccl} T(\omega): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\omega) & \longmapsto & T(\omega) = a + jb = |T(\omega)|e^{jarg(T(\omega))} \end{array}$$

Como puede verse, cada valor del número real ω, tiene asociado un número complejo con parte real y parte imaginaria o, alternativamente, con módulo y argumento. El módulo de ese número complejo puede ser cualquier valor positivo entre cero e infinito. El argumento, sin embargo, está acotado pudiendo tomar valores entre 0 y 2π o entre $-\pi$ y π.

Representacion gráfica de funciones complejas

¿Cómo puedo estudiar gráficamente una función compleja?

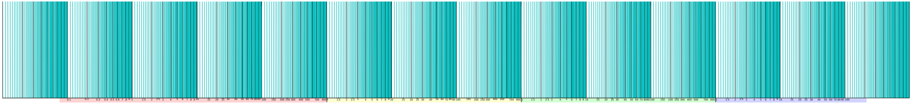
Uso su representación: Diagrama de Bode

¿Cómo se pinta un Diagrama de Bode?

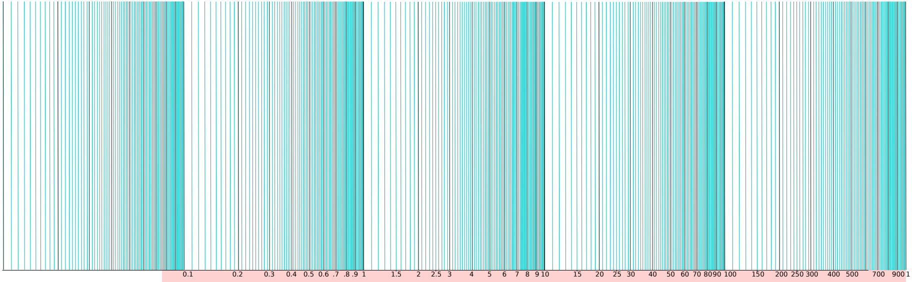
- Puesto que la función compleja asocia a cada valor de ω un número complejo, para representar su comportamiento en función de ω (Diagrama de Bode) necesitamos hacer **dos** dibujos: el del argumento y el del módulo.
- Para estudiar el **módulo**, representamos $20log|T(\omega)|$ (en decibelios) frente a la frecuencia (ω) usando una escala logarítmica para la frecuencia.
- Se representa $20log|T(\omega)|$ en lugar de $|T(\omega)|$ para mantenernos dentro de un rango de valores razonable.
- Se utiliza escala logarítmica para poder apreciar adecuadamente el comportamiento para valores de ω que se diferencian en varios órdenes de magnitud.
- Para estudiar el **argumento**, representamos su valor frente a la frecuencia usando para esta última una escala logarítmica.

Representacion gráfica de funciones complejas

Escala logarítmica



Zoom



Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$

Los tipos de funciones sencillas que nos podemos encontrar son:

1. $T(\omega) = K$ donde K es un valor constante (no depende de ω).
2. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$ donde ω_0 es un valor constante.
3. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donde ω_0 es un valor constante.
4. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$ donde ω_0 es un valor constante.
5. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donde ω_0 es un valor constante.
6. Producto de las anteriores

Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos.

Para pintar funciones complejas, el procedimiento a seguir es el mismo que seguimos cuando queremos pintar una función real: le vamos dando valores a la variable (ω), sustituimos en la expresión de $T(\omega)$ y pintamos el valor obtenido.

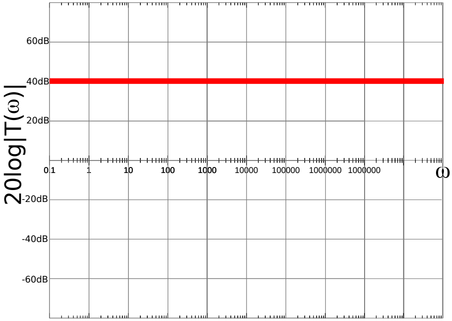
Ejemplo 1: $T(\omega) = -100$

ω (rad/s)	$\lvert T(\omega)\rvert$	$20\log\lvert T(\omega)\rvert$ (dB)	$argT(\omega)$ (rad)
10^{-1}	100	40	π
10^{1}	100	40	π
10^{3}	100	40	π
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^{6}	100	40	π

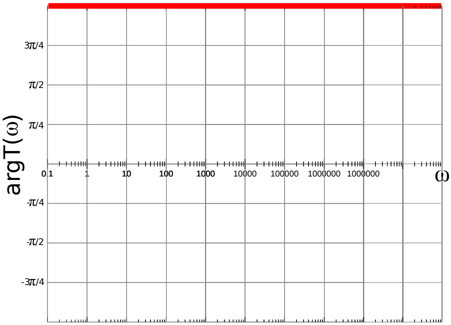
Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos

Ejemplo 1: $T(\omega) = -100$

Módulo



Argumento



Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos.

Para dar valores a la variable ω, no hay ninguna regla fija. Damos tantos valores como sea necesario para poder hacer un dibujo adecuado de la función. El número de valores y el intervalo de los mismo depende de la función.

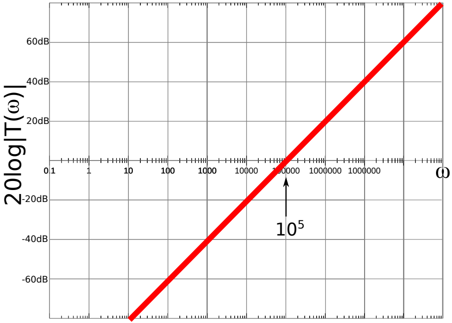
Ejemplo 2: $T(\omega) = j\frac{\omega}{10^5}$

ω (rad/s)	$\lvert T(\omega)\rvert$	$20\log\lvert T(\omega)\rvert$ (dB)	$argT(\omega)$ (rad)
10^1	10^{-4}	-80	$\pi/2$
10^3	10^{-2}	-40	$\pi/2$
10^5	1	0	$\pi/2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^7	10^2	40	$\pi/2$
10^9	10^4	80	$\pi/2$

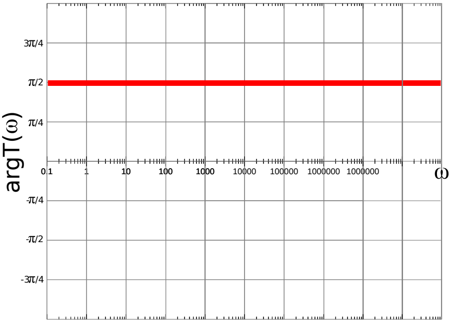
Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos

Ejemplo 2: $T(\omega) = j\,\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos.

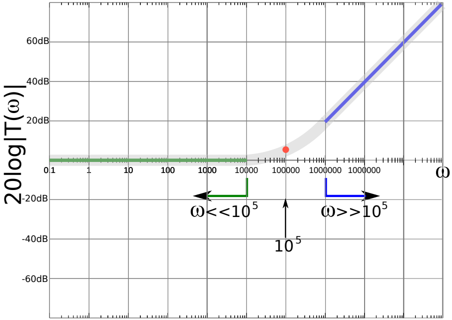
Ejemplo 3: $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{10^5}$

ω (rad/s)	$\|T(\omega)\|$	$20\log\|T(\omega)\|$ (dB)	$argT(\omega)$ (rad)
10^1	$1,000000005$	$0,000000043$	$0,001$
10^3	$1,000049999$	$0,000434273$	$0,01$
10^4	$1,004987562$	$0,043213738$	$0,1$
10^5	$1,414213562$	$3,010299957$	$\pi/4$
10^6	$10,049875621$	$20,043213738$	$1,47$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

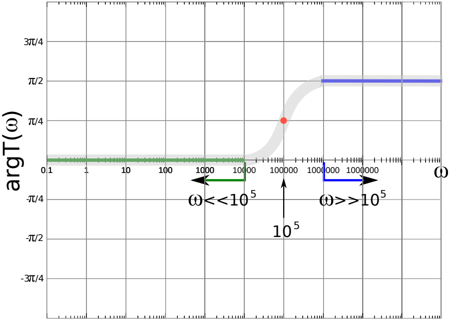
Pintando Bode de una función compleja $T(\omega)$. Ejemplos

Ejemplo 3: $T(\omega) = 1 + j\,\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

La forma del diagrama de Bode de $T(\omega) = K$ depende del signo de K. Vamos a escribir la función de transferencia $T(\omega) = K$ en forma polar:

- $T(\omega) = |K|e^{j0}$ si K es positivo.
- $T(\omega) = |K|e^{j\pi}$ si K es negativo.

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log |K| dB$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

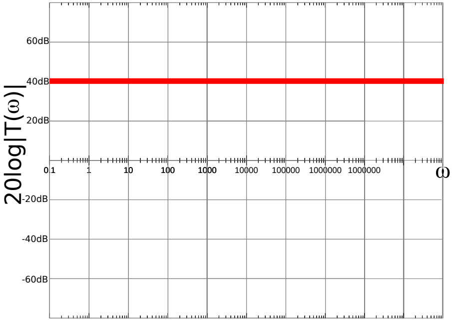
$$\begin{aligned} \arg T(\omega) &= 0 \ si \ K \ es \ positivo. \\ \arg T(\omega) &= \pi \ si \ K \ es \ negativo. \end{aligned}$$

Conclusión: El diagrama de Bode tanto del módulo como del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

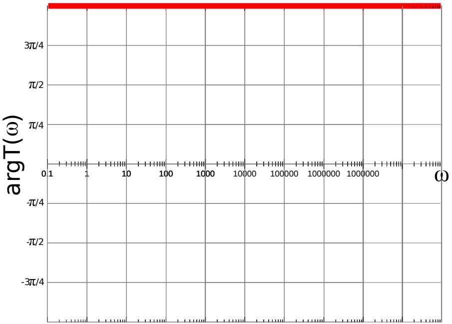
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

Ejemplo: $T(\omega) = -100$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$ en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = |\frac{\omega}{\omega_0}| e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log |\frac{\omega}{\omega_0}| = \mathbf{20} \log \omega - 20 \log \omega_0$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

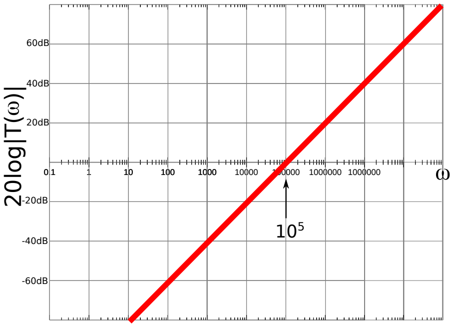
$$\arg T(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusiones: El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente 20dB que corta al eje X en $\omega = \omega_0$. El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

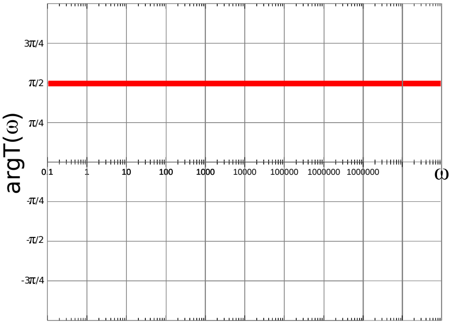
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Ejemplo: $T(\omega) = j\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = -j\frac{\omega_0}{\omega} = |\frac{\omega_0}{\omega}|e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20\log|T(\omega)| = 20\log|\frac{\omega_0}{\omega}| = 20\log\omega_0 \mathbf{-20}\log\omega$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

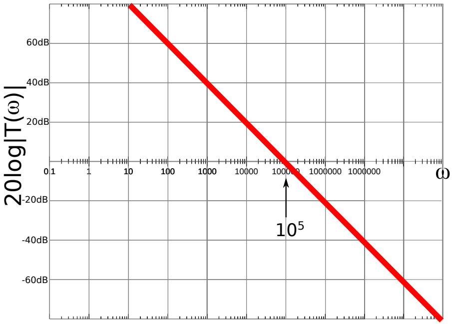
$$\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusiones: El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente -20dB que corta al eje X en $\omega = \omega_0$. El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

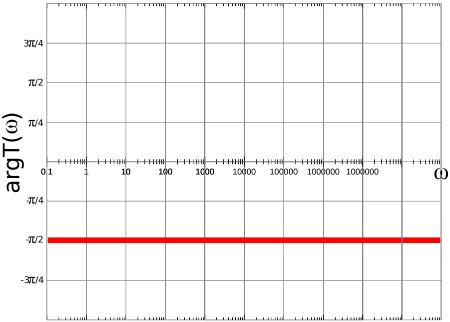
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$ en forma polar:

$$T(\omega) = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} e^{j \arctan \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$20\log|T(\omega)| = 20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log\frac{\omega}{\omega_0} = \mathbf{20}\log\omega - 20\log\omega_0$$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log 1 = 0dB$$

- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

  $$20\log|T(\omega)| = 20\log\sqrt{2} \approx 3dB$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

  $\arg T(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$
- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

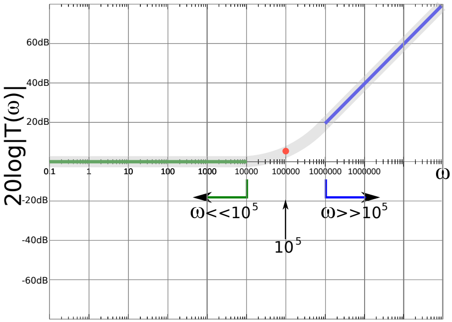
  $\arg T(\omega) \approx 0$
- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

  $\arg T(\omega) = \frac{\pi}{4}$

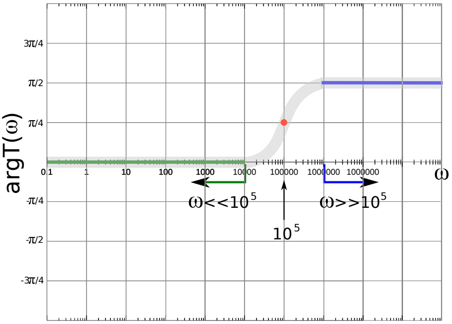
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

Ejemplo: $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en forma polar:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} e^{j\arctan\frac{\omega}{\omega_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}} e^{-j\arctan\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20\log|T(\omega)| = 0 - 20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$20\log|T(\omega)| = -20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

  $$20\log|T(\omega)| \approx -20\log\frac{\omega}{\omega_0} = \mathbf{-20}\log\omega + 20\log\omega_0$$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log 1 = 0dB$$

- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

  $$20\log|T(\omega)| = -20\log\sqrt{2} \approx -3dB$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\arg T(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

  $\arg T(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$
- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

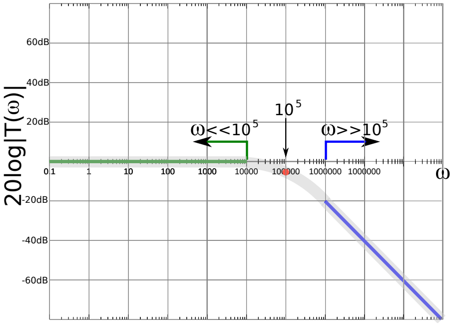
  $\arg T(\omega) \approx 0$
- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

  $\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{4}$

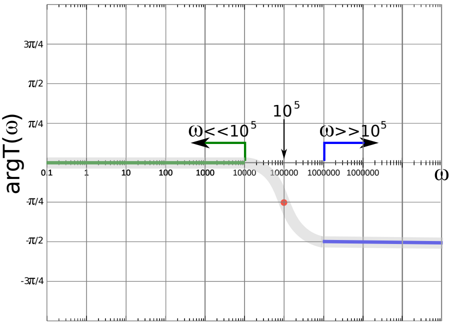
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada.

En general, en esta asignatura, vamos a poder escribir siempre una función de transferencia $T(\omega)$ como el producto de una serie de funciones de transferencia sencillas ($T_i(\omega)$):

$$T(\omega) = \prod_i T_i(\omega) = \prod_i \left(|T_i(\omega)|e^{j \arg T_i(\omega)}\right) = \left(\prod_i |T_i(\omega)|\right) e^{j \sum_i \arg T_i(\omega)} = |T(\omega)|e^{j \arg T$$

De la igualdad anterior podemos concluir que:

$$\begin{aligned} |T(\omega)| &= \prod_i |T_i(\omega)| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| = \sum_i (20 \log |T_i(\omega)|) \\ \arg T(\omega) &= \sum_i \arg T_i(\omega) \end{aligned}$$

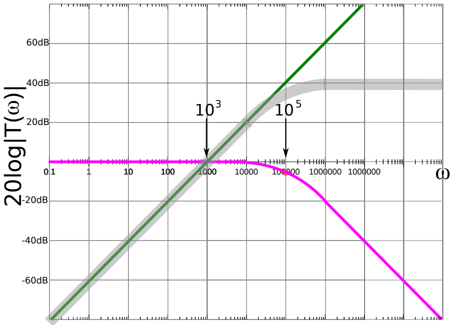
Entonces,

- si conozco el diagrama de Bode en módulo cada $T_i(\omega)$ podré calcular el de $T(\omega)$ simplemente sumándolos.
- si conozco el diagrama de Bode de cada $\arg T_i(\omega)$ podré calcular el de $\arg T(\omega)$ sumándolos.

Pintando Bode a mano alzada.

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{10^3}}{1+j\frac{\omega}{10^5}} \Rightarrow \mathbf{T}(\omega) = T_1(\omega)T_2(\omega) = (j\frac{\omega}{10^3})\frac{1}{1+j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento