ÁLGEBRA I. 2015/16

RELACIÓN 7

Ejercicio 1: Un grupo abeliano A está definido por tres generadores a, b, y c, con las relaciones $3a+3c=0$, $6b+6c=0$, $3a+6b+9c=0$. Mostrar sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.

Ejercicio 2: Un grupo abeliano tiene a la siguiente

$$(2^2, 2^5, 2^6, 5, 5, 5^3, 5^3, 11^3, 11^3)$$

como lista de sus divisores elementales. ¿Cual es la lista de sus factores invariantes? Determina su anulador minimal.

Ejercicio 3: Sean A el grupos abeliano generado por elementos x_1,x_2, x_3 y x_4, con las relaciones siguientes

$$\left\{\begin{array}{lllll} 6x_1 & -36x_2 & -30x_3 & +36x_4 & =0 \\ 12x_1 & +54x_2 & +48x_3 & -54x_4 & =0 \\ 18x_1 & +54x_2 & +54x_3 & -54x_4 & =0 \end{array}\right.$$

Determinar sus los factores invariantes, divisores elementales, y su rango.

Ejercicio 4: Se conocen cinco grupos abelianos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 por los siguientes datos

- El grupo A_1 tiene a $\begin{pmatrix} 63 & -63 & -60 \\ 117 & -141 & -144 \\ 120 & -132 & -132 \end{pmatrix}$ como una matriz de relaciones.
- El grupo A_2 puede ser generado por elementos a, b y c, con las relaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 9a & -36b & +30c & =0 \\ -36a & +192b & -180c & =0 \\ 30a & -180b & 180c & =0 \end{array}\right.$$

- $A_3 = \langle x, y, z \mid 3x+9y+12z=0, -60x+72y+72z=0, -57x+69y+72z=0\rangle$.
- El grupo A_4 tiene como lista de divisores elementales (3,3,3,2^2,2^2,5).
- $A_5 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

Razonar que todos los grupos A_i, i=1,2,3,4,5, son isomorfos entre si.

Ejercicio 5: Determinar todos los grupos abelianos con 144 elementos (salvo isomorfismo), mostrando sus correspondientes descomposiciones cíclicas y primarias.

Ejercicio 6: ¿Es cierto que todo grupo abeliano de orden 36 es isomorfo a uno de los tres siguientes: $\mathbb{Z}_{36}$, $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$?

Ejercicio 7: Determinar todos los grupos abelianos con 360 elementos (salvo isomorfismo), mostrando sus correspondientes descomposiciones cíclicas y primarias.

Ejercicio 8: Determinar todos los grupos abelianos con 1080 elementos (salvo isomorfismo), mostrando sus correspondientes descomposiciones cíclicas y primarias.

Ejercicio 9: ¿Son isomorfos los grupos $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_{84}$ y $\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{168}$? ¿Y $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$ y $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{48}$?.

Ejercicio 10: Razonar que el anulador minimal de un grupo abeliano finito es un divisor del orden del grupo.