

ÁLGEBRA I

RELACIÓN 1

- (1) ¿Cuáles de los siguientes son monoides? (i) $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ con la operación de adición
(ii) \mathbb{N} con la operación de multiplicación
(iii) Todos los naturales impares con la operación de multiplicación
(iv) Todos los naturales pares con la operación de adición
(v) Todos los naturales pares con la operación de multiplicación
(vi) Todos los números racionales no negativos que son mitades de números enteros con la operación de adición.
(vii) Todos los números racionales positivos que son mitades de números naturales con la operación de multiplicación.
- (2) Si X es cualquier conjunto no vacío ¿Es el conjunto X^X de todas las aplicaciones de X en si mismo un monoide con la operación de composición? ¿Es conmutativo? ¿Que elementos tiene su grupo de unidades $U(X^X)$? Si $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ ¿Cuántos elementos tiene $\mathbf{n}^{\mathbf{n}}$? ¿Y $U(\mathbf{n}^{\mathbf{n}})$?
- (3) Sea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el conjunto de pares de naturales (x_1, x_2) . Definimos

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Probar esta multiplicación define una estructura de monoide en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ¿Qué elemento es el neutro?

- (4) En \mathbb{Z} definimos $a \circ b = a + b - ab$. ¿Es \mathbb{Z} con esa operación de multiplicación un monoide? ¿Es un grupo? ¿Qué unidades tiene?
- (5) En el conjunto de todos los pares de números reales $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y definimos $(a, b)(c, d) = (ac, b + ad)$ ¿Es un monoide? ¿Es abeliano? ¿Es un grupo
- (6) En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos $(n, n') + (m, m') = (n + m, n' + m')$ y $(n, n') \cdot (m, m') = (nm, nm' + n'm)$. ¿Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un anillo con estas operaciones? ¿Es un dominio de integridad? ¿Que unidades tiene? ¿Es un cuerpo?
- (7) En \mathbb{Z} definimos $a \oplus b = a + b - 1$ y $a \otimes b = a + b - ab$. ¿Es \mathbb{Z} un anillo con estas operaciones? ¿Es un dominio de integridad?
- (8) ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?
(i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$,
(ii) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3^n x \in \mathbb{Z} \text{ para algún } n \geq 0\} \subseteq \mathbb{Q}$,
(iii) $\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$,
(iv) $\{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \text{ mcd}(m, n) = 1 \text{ y } n \text{ es impar}\} \subseteq \mathbb{Q}$.
- (9) Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos \mathbb{Z}_5 y \mathbb{Z}_6 .
- (10) Escribir las tablas de sumar y de multiplicar del anillo producto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ ¿Es un dominio de identidad?.