TEMA 3

Espacios vectoriales euclídeos

En este tema nos vamos a centrar en un caso particular de las métricas estudiadas en el tema anterior, las métricas euclídeas o definidas positivas. El ejemplo por excelencia de este tipo de métrica es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Veremos a lo largo de este tema que si tenemos una métrica euclídea podemos definir, como en el caso del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, los conceptos de norma de un vector y ángulo entre vectores. Probaremos que algunos de los resultados clásicos de $\mathbb{R}^n$ como el Teorema de Cauchy-Schwarz, la Desigualdad triangular o el Teorema de Pitágoras son también ciertos en un espacio vectorial euclídeo general. También estudiaremos en profundidad las isometrías entre dos espacios vectoriales euclídeos y veremos que conservan la norma de un vector (de ahí el nombre de isometría) y los ángulos entre vectores. Finalmente daremos la clasificación de dichas isometrías en los casos de dimensiones 2 y 3.

1. Métricas euclídeas. Norma, ángulos, perpendicularidad. Bases ortonormales.

Sea V un espacio vectorial real y g una métrica euclídea en V. Diremos entonces que (V, g) es un **espacio vectorial métrico euclídeo** o simplemente un **espacio vectorial euclídeo**. En algunos textos se denomina producto escalar a las métricas euclídeas.

A lo largo de este tema siempre supondremos que estamos en un espacio vectorial euclídeo.

Recordemos algunos de los ejemplos de espacios vectoriales euclídeos que han ido apareciendo en el tema anterior:

Ejemplos 3.1:
1. Si denotamos g_0 a la métrica de $\mathbb{R}^n$ dada por el producto escalar usual tenemos que $(\mathbb{R}^n, g_0)$ es un espacio vectorial euclídeo.
2. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ con $g(A, C) = \text{traza}(A \cdot C^t)$ es un espacio vectorial euclídeo (ejercicio 20 de la relación 2).
3. $(\mathbb{R}^2, g)$ donde $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es un espacio vectorial euclídeo.

A continuación enunciaremos algunas de las propiedades que se tienen para los espacios vectoriales euclídeos. La mayoría de ellas se demostraron en el tema anterior:

Propiedades 3.2: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces se tiene:*

i) *El único vector luminoso es el vector nulo.*
ii) *Si U es un subespacio vectorial de V entonces* $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$.
iii) *Si U es un subespacio vectorial de V entonces* $(U^\perp)^\perp = U$.
iv) *Si U, W son subespacios vectoriales de V entonces* $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

v) *Si* U *es un subespacio vectorial de* V *entonces* (U, g_U) *es un espacio vectorial euclídeo y* $V = U \oplus U^\perp$.

vi) *Si* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *son no nulos y ortogonales entre sí entonces son linealmente independientes.*

vii) *Si* $U_1, \ldots, U_k$ *son subespacios vectoriales de* V *ortogonales entre sí entonces* $U_1 + \cdots + U_k = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$.

Demostración: Las propiedades i)-v) ya fueron demostradas en el tema anterior.

$\boxed{\text{vi)}}$ Sean $\{v_1, \ldots, v_k\}$ vectores no nulos y ortogonales dos a dos. Veamos que son linealmente independientes. Para ello vamos a considerar una combinación lineal de dichos vectores.

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \ , \lambda_i \in \mathbb{R} \ , i = 1, \ldots, k \ .$$

De aquí

$$0 = g(v, v_i) = g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i) = \lambda_1 g(v_1, v_i) + \cdots + \lambda_k g(v_k, v_i) \underset{g(u_i,u_j)=0,\, i \neq j}{=} \lambda_i g(v_i, v_i)$$

Por tanto tenemos $\lambda_i g(v_i, v_i) = 0$. Como $g(v_i, v_i) > 0$ deducimos que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$ y por tanto los vectores son linealmente independientes.

$\boxed{\text{vi)}}$ Tenemos que probar que $U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_k) = \{0\}$, para $j = 1, \ldots, k$. Sea $v \in U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_k)$. Entonces $v \in U_j$ y $v = v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_k$, con $v_i \in U_i$, para $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k$. De aquí

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(v, v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_k) \\ &\underset{g \text{ bilineal}}{=} g(v, v_1) + \cdots + g(v, v_{j-1}) + g(v, v_{j+1}) + \cdots + g(v, v_k) \underset{U_j \perp U_i}{=} 0 \ . \end{aligned}$$

Como g es definida positiva de lo anterior deducimos que $v = 0$. □

1.1. Norma de un vector. Si (V, g) un espacio vectorial euclídeo siempre tenemos que $g(v, v) \geqslant 0$ y por tanto podemos dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.3: Denominaremos **norma** o **módulo** de un vector v al número real $||v||_g > 0$ dado por

$$||v||_g = \sqrt{g(v, v)} = \sqrt{\omega_g(v)}$$

OBSERVACIÓN 3.4: Notemos que la norma depende de la métrica y es por esto que utilizamos en la definición anterior la notación $|| \cdot ||_g$. Sin embargo cuando no haya lugar a confusión prescindiremos de la métrica escribiendo simplemente $|| \cdot ||$.

EJEMPLOS 3.5: 1. En $(\mathbb{R}^n, g_0)$ la norma es la norma usual:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{g_0((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n))} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. Si $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ es el espacio vectorial euclídeo dado en el apartado 2) de los ejemplos 3.1, entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$$

Propiedades 3.6: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces se tiene:*

i) $\|v\| \geqslant 0$ *para todo* $v \in V$*, y además* $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$.
ii) $\|av\| = |a|\|v\|$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$*,* $v \in V$.
iii) $\left\| \pm \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$*, para todo* $v \in V$*,* $v \neq 0$.

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ La desigualdad $\|v\| \geqslant 0$ se sigue de haber considerado en la definición de la norma la raíz positiva. Si $\|v\| = \sqrt{g(v,v)} = 0$ tendríamos $g(v,v) = 0$ y por ser la métrica euclídea concluiríamos que $v = 0$.
$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que

$$\|av\| = \sqrt{g(av, av)} \underset{\uparrow \atop g \text{ bilineal}}{=} \sqrt{a^2 g(v,v)} = |a|\|v\|$$

$\boxed{\text{iii)}}$ $\left\| \pm \frac{v}{\|v\|} \right\| \underset{\uparrow \atop \text{ii)}}{=} \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$ □

Definición 3.7: Dado (V, g) un espacio vectorial euclídeo diremos que $v \in V$ es un **vector unitario** si $\|v\| = 1$.

De la propiedad iii) de la propiedades 3.6 deducimos que si $v \neq 0$ entonces $\pm\frac{v}{\|v\|}$ son dos vectores unitarios. A continuación probaremos algunos de los teoremas clásicos relacionados con la norma.

Teorema de Cauchy-Schwarz : *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$ entonces se tiene*

$$|g(u,v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

Además la igualdad se da si y solo si u y v son linealmente dependientes.

Demostración: Si $v = 0$ tendríamos que ambas partes de la desigualdad son nulas. Podemos suponer por tanto que $v \neq 0$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$0 \underset{\uparrow \atop g \text{ euclídea}}{\leqslant} g(u-\lambda v, u-\lambda v) \underset{\uparrow \atop g \text{ métrica}}{=} g(u,u) - 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v) = \|u\|^2 - 2\lambda g(u,v) + \lambda^2\|v\|^2 = p(\lambda)$$

Observemos que el polinomio cuadrático $p(\lambda) \geqslant 0$. Pero la única forma de que esto ocurra es que $p(\lambda)$ no tenga dos raíces reales distintas o equivalentemente, que el discriminante de dicho polinomio

$$(-2g(u,v))^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 4(g(u,v)^2 - \|u\|^2\|v\|^2) \leqslant 0 \tag{10}$$

De donde deducimos $g(u,v)^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$. Tomando raíces cuadradas positivas en ambas partes obtenemos la desigualdad del teorema.

Probemos ahora que se da la igualdad si y solo si los vectores u y v son linealmente dependientes. Comencemos asumiendo que se da la igualdad. Entonces el discriminante de $p(\lambda)$ dado por la ecuación (10) debe ser cero. Pero esto quiere decir que el polinomio $p(\lambda)$

tiene una única raíz real, es decir existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda_0) = 0$. Pero por la definición de $p(\lambda)$ tenemos

$$0 = p(\lambda_0) = g(u - \lambda_0 v, u - \lambda_0 v)$$

Como la métrica es euclídea de aquí deducimos que $u - \lambda_0 v = 0$ y por tanto los vectores u y v son linealmente dependientes.

Recíprocamente, supongamos que los vectores u y v son linealmente dependientes. Entonces existirían $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tal que $\alpha u + \beta v = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$ (análogamente si $\beta \neq 0$). Podemos escribir $u = -\frac{\beta}{\alpha} v$ y de aquí

$$|g(u,v)| = \left| g\left(-\frac{\beta}{\alpha} v, v\right)\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |g(v,v)| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \|v\|^2 = \left\|-\frac{\beta}{\alpha} v\right\| \|v\| = \|u\|\|v\|$$

□

Desigualdad triangular o de Minkowski : *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$ entonces se tiene*

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

Además se da la igualdad si y solo si $u = \lambda v$ o $v = \lambda u$ para $\lambda \geqslant 0$.

Demostración: Observemos que

$$\begin{aligned} (11) \quad \|u+v\|^2 &= g(u+v, u+v) \underset{g \text{ métrica}}{=} g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) \\ &= \|u\|^2 + 2g(u,v) + \|v\|^2 \underset{\text{Desigualdad C-S}}{\leqslant} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Luego considerando raíces cuadradas positivas en ambos miembros de la expresión anterior obtendríamos la desigualdad del enunciado.

Probemos ahora que se da la igualdad si y solo si $u = \lambda v$ o $v = \lambda u$ para $\lambda \geqslant 0$. Observemos que si $u = 0$ o $v = 0$ esta doble implicación se verifica de forma trivial. Supongamos por tanto que $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Supongamos primero que se da la igualdad, entonces de (11) se tendría la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto tendríamos que los vectores son linealmente dependientes, es decir existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tal que $\alpha u + \beta v = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$ (análogamente si $\beta \neq 0$). Podemos escribir $u = \lambda v$ con $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$ y de aquí

$$g(u,v) = g(\lambda v, v) = \lambda g(v,v) = \lambda \|v\|^2$$

Por otra parte

$$\|u\|\|v\| = |\lambda| \|v\|^2$$

De estas dos expresiones deducimos que $\lambda = |\lambda|$ y por tanto $\lambda \geqslant 0$.

Recíprocamente supongamos por ejemplo que $u = \lambda v$ con $\lambda \geqslant 0$. Si $v = \lambda u$ se razonaría de forma análoga. Tendríamos por una parte que

$$(12) \qquad \|u+v\| = \|(\lambda+1)v\| = |\lambda+1|\|v\| \underset{\lambda \geqslant 0}{=} (\lambda+1)\|v\|$$

Por otra parte

$$(13) \qquad \|u\| + \|v\| = \|\lambda v\| + \|v\| = |\lambda|\|v\| + \|v\| \underset{\lambda \geqslant 0}{=} (\lambda+1)\|v\|$$

De (12) y (13) tendríamos la igualdad en la desigualdad triangular. □

Estudiemos ahora cómo se escriben estas desigualdades para el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, g_0)$. Si particularizamos las desigualdades anteriores para esta métrica obtenemos:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

(14) $$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\ , \quad \forall (x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Desigualdad triangular

(15) $$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\ , \quad \forall (x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Ángulo formado por dos vectores. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y $u, v \in V\backslash\{0\}$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que

$$-\|u\|\|v\| \leqslant g(u,v) \leqslant \|u\|\|v\|$$

Como $\|u\| \neq 0$ y $\|v\| \neq 0$ de la expresión anterior obtenemos

$$-1 \leqslant \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|} \leqslant 1$$

Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.8: Dados $u, v \in V\backslash\{0\}$ se define el **ángulo** formado por los vectores u y v como el único $\theta \in [0, \pi]$ que verifica

$$\cos(\theta) = \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

Equivalentemente, $\theta = \arccos\left(\frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}\right)$. Denotaremos $\measuredangle(u,v) = \theta$.

Observemos que de la definición anterior también tenemos:

$$\boxed{g(u,v) = \|u\|\|v\| \cos(\measuredangle(u,v))}$$

Ejemplos 3.9: 1. Observemos que, si $u, v \in V\backslash\{0\}$, $g(u,v) = 0$ si y solo si $\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$. Luego dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

2. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^2, g_0)$ consideremos los vectores $u = (1,1)$ y $v = (1,0)$. Tenemos entonces

$$\cos(\measuredangle(u,v)) = \frac{g((1,1),(1,0))}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto $\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{4}$.

3. Sea $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ el espacio vectorial euclídeo dado en el apartado 2) de los ejemplos 3.1, $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos

$$\cos(\measuredangle(A, C)) = \frac{g(A, C)}{\|A\|\|C\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{6}$.

En el apartado c) del ejercicio 4 de la relación 3 probaremos la siguiente generalización del famoso Teorema de Pitágoras.

TEOREMA 3.10: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V \backslash \{0\}$. Tenemos entonces que*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$$

1.3. Bases ortonormales. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo $\dim(V) = n$. Observemos que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son n vectores no nulos y ortogonales entre sí, entonces por el apartado vi) de la proposición 3.2 tenemos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).

Supongamos que tenemos ahora $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo (V, g), es decir $M(g, B) = I_n$. Por tanto si $v, w \in V$ son vectores con coordenadas $v_B = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w_B = (y_1, \ldots, y_n)$ entonces

$$g(v, w) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Observemos que además en este caso es muy sencillo calcular las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base B ya que si $v = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ entonces tenemos para $i = 1, \ldots, n$

$$g(v, u_i) = g(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n, u_i) \underset{\boxed{g \text{ bilineal}}}{=} x_1 g(u_1, u_i) + \cdots + x_n g(u_n, u_i) \underset{\boxed{g(u_i, u_j) = \delta_{ij}}}{=} x_i$$

Por tanto $v_B = (g(v, u_1), \ldots, g(v, u_n))$.

Además de los dos métodos que hemos visto para obtener bases ortonormales en el Tema 2, si el espacio vectorial métrico es euclídeo podemos utilizar otro método que se conoce como el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

PROPOSICIÓN 3.11: (MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT) *Sea (V, g) una espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Entonces existe una base ortogonal $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de (V, g) tal que*

$$L(\{v_1, \ldots, v_k\}) = L(\{u_1, \ldots, u_k\}), \quad \forall k = 1, \ldots, n \tag{16}$$

Demostración: Consideremos la siguiente afirmación

Afirmación A_k : *Existen* $\{u_1, \ldots, u_k\}$ *vectores linealmente independientes y ortogonales entre sí tal que*

$$L(\{v_1, \ldots, v_k\}) = L(\{u_1, \ldots, u_k\})$$

Observemos que la proposición coincide con la afirmación A_n. Para demostrar dicha afirmación utilizaremos un proceso de inducción sobre k.

Considerando $u_1 = v_1$ se obtiene la afirmación A_1. Supongamos que se verifica A_k y probemos que entonces se tiene A_{k+1}. Tomemos los vectores $\{u_1, \ldots, u_k\}$ linealmente independientes y ortogonales que nos proporciona la afirmación A_k. Definimos ahora el vector

$$\boxed{u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2}u_k} \tag{17}$$

Observemos que para $i = 1, \ldots, k$ tenemos

$$\begin{aligned}
g(u_{k+1}, u_i) &= g\left(v_{k+1} - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2}u_k, u_i\right) \\
&\underset{g \text{ bilineal}}{=} g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2}g(u_1, u_i) - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2}g(u_k, u_i) \\
&\underset{g(u_j, u_i) = \delta_{ij}}{=} g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_i)}{\|u_i\|^2}g(u_i, u_i) = g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_i)}{\|u_i\|^2}\|u_i\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Observación 3.12: Observemos que la expresión (17) de la demostración de la proposición anterior nos proporciona la manera de calcular los vectores de la base ortonormal del Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

Ejemplo 3.13: Utilizando el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt calcula una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica dada en la base usual por la matriz

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partimos de la base usual $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, es decir $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$. Tenemos que $u_1 = v_1 = (1,0,0)$.

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 = (0,1,0) - \frac{g((0,1,0),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) = (0,1,0) - \frac{(-1)}{1}(1,0,0) \\ &= (1,1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{g(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{g(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}u_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{g((0,0,1),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) - \frac{g((0,0,1),(1,1,0))}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{1}(1,1,0) = (-1,-1,1) \end{aligned}$$

Por tanto $B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(-1,-1,1)\}$ es una base ortogonal. Dividiendo cada vector por su norma obtendríamos la base ortonormal:

$$B'' = \left\{(1,0,0),(1,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Vamos a estudiar cómo es la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales en un espacio vectorial euclídeo (V,g). Si B y B' son bases ortonormales de g tenemos

$$M(g,B') = M(B',B)^t \cdot M(g,B) \cdot M(B',B)$$

Pero como B y B' son bases ortonormales $M(g,B) = M(g,B') = I_n$ y por tanto de la igualdad anterior obtenemos

$$I_n = M(B',B)^t \cdot M(B',B)$$

Es decir $M(B',B) \in O(n)$. Obtenemos por tanto la siguiente conclusion:

Conclusión 3.14: Sean B y B' dos bases ortonormales del espacio vectorial euclídeo (V,g) entonces $M(B',B) \in O(n)$.

1.4. Proyecciones y simetrías ortogonales. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. De del apartado v) de las propiedades 3.2 tenemos que $V = U \oplus U^\perp$. Por tanto podemos considerar π_U la proyección sobre U paralela a $U^\perp$ y σ_U la simetría respecto de U paralela a $U^\perp$.

Definición 3.15: A π_U se le denomina la **proyección ortogonal sobre** U y a σ_U la **simetría ortogonal respecto de** U.

Además de las propiedades que ya conocemos de las proyecciones y las simetrías, en el caso de las proyecciones y las simetrías ortogonales tenemos además otras propiedades:

Propiedades 3.16: *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. Entonces tenemos:*

i) *Existen bases ortonormales de (V,g) que diagonalizan π_U y σ_U.*

ii) *La matriz de π_U en cualquier base ortonormal es simétrica.*
iii) *La matriz de σ_U en cualquier base ortonormal es simétrica y ortogonal.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Consideremos B_1 una base ortonormal de (U, g_U) y B_2 una base ortonormal de $(U^\perp, g_{U^\perp})$. Entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base ortonormal de (V, g) que diagonaliza tanto π_U como σ_U. Observemos que si $k = \dim(U)$ las matrices diagonales $M(\pi_U, B)$ y $M(\sigma_U, B)$ tendrían la siguiente forma

$$M(\pi_U, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right) \quad , \quad M(\sigma_U, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right) \tag{18}$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Consideremos B la base dada en el apartado anterior y B' otra base ortonormal de (V, g). Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} M(\pi_U, B') &= M(B, B') \cdot M(\pi_U, B) \cdot M(B', B) \\ &= M(B', B)^{-1} \cdot M(\pi_U, B) \cdot M(B', B) \\ &\underset{\boxed{M(\pi_U, B) \text{ diagonal}}}{\overset{\boxed{M(B', B) \text{ ortogonal}}}{=}} M(B', B)^t \cdot M(\pi_U, B)^t \cdot M(B', B) = M(\pi_U, B')^t \end{aligned}$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Sea B la base dada en el apartado i) y B' otra base ortonormal de (V, g). Entonces utilizando exactamente el mismo argumento que en el apartado anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} M(\sigma_U, B') &= M(B, B') \cdot M(\sigma_U, B) \cdot M(B', B) \\ &= M(B', B)^{-1} \cdot M(\sigma_U, B) \cdot M(B', B) \\ &\underset{\boxed{M(\sigma_U, B) \text{ diagonal}}}{\overset{\boxed{M(B', B) \text{ ortogonal}}}{=}} M(B', B)^t \cdot M(\sigma_U, B)^t \cdot M(B', B) = M(\sigma_U, B')^t \end{aligned}$$

De aquí deducimos

$$\begin{aligned} M(\sigma_U, B')^{-1} &= \big(M(B', B)^{-1} \cdot M(\sigma_U, B) \cdot M(B', B)\big)^{-1} \\ &= M(B', B)^{-1} \cdot M(\sigma_U, B)^{-1} \cdot M(B', B) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (18) se tiene $M(\sigma_U, B)^{-1} = M(\sigma_U, B)$ y de aquí

$$M(\sigma_U, B')^{-1} = M(B', B)^{-1} \cdot M(\sigma_U, B) \cdot M(B', B) = M(\sigma_U, B')^t$$

$\square$

Ejemplo 3.17: Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica dada en la base usual por la matriz

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Vamos a calcular las matrices de la proyección y la simetría ortogonales respecto de U en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

Para hacer el ejercicio razonamos como en el apartado i) de las propiedades 3.16. Calculamos primero una base de U. Es sencillo comprobar que $B_1 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de U. Calculemos ahora su subespacio ortogonal.

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,0),(x,y,z)) = 0, g((0,0,1),(x,y,z)) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z = 0, y+3z = 0\} = L(\{(1,0,0)\}) \end{aligned}$$

Luego una base de $U^{\perp}$ viene dada por $B_2 = \{(1,0,0)\}$. Por tanto si consideramos la base $B = B_1 \cup B_2 = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ tenemos

$$M(\pi_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M(\sigma_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular ahora la matriz de las aplicaciones lineales en la base usual podemos usar las matrices cambio de base correspondientes. Obtendríamos así

$$M(\pi_U, B_u) = M(B, B_u) \cdot M(\pi_U, B) \cdot M(B_u, B) = M(B, B_u) \cdot M(\pi_U, B) \cdot M(B, B_u)^{-1}$$

Observemos que las columnas de la matriz $M(B, B_u)$ son simplemente las componenetes de los vectores de la base B, es decir

$$M(B, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calcularíamos

$$M(B, B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos

$$M(\pi_U, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$M(\sigma_U, B_u) = M(B, B_u) \cdot M(\sigma_U, B) \cdot M(B, B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para finalizar esta sección probaremos un resultado que caracteriza las proyecciones ortogonales mediante una propiedad métrica.

Proposición 3.18: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio vectorial de V. Entonces para todo $v \in V$ se tiene*

$$\pi_U(v) = u_0 \Longleftrightarrow \|v - u_0\| < \|v - u\| \quad \forall u \in U \backslash \{u_0\}$$

Es decir el vector $\pi_U(v)$ es el vector de U que está "más cerca" de v.

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Recordemos que π_U es la proyección sobre U paralela a $U^\perp$. Supongamos que $\pi_U(v) = u_0$. Entonces $v = u_0 + w$ donde $w \in U^\perp$. De aquí $v - u_0 = w \in U^\perp$. Dado $u \in U\backslash\{u_0\}$ veamos que $v - u_0$ y $u_0 - u$ son ortogonales.

$$g(v - u_0, u_0 - u) = g(w, u_0 - u) \underset{\boxed{w \in U^\perp}}{\overset{}{=}} 0$$

Por tanto usando el teorema 3.10 que generalizaba el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\|v - u\|^2 = \|(v - u_0) + (u_0 - u)\|^2 = \|v - u_0\|^2 + \|u_0 - u\|^2 \underset{\boxed{u_0 \neq u}}{>} \|v - u_0\|^2$$

Tomando raíces cuadradas a ambos lados de la desigualdad obtenemos $\|v - u_0\| < \|v - u\|$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que u_0 verifica $\|v - u_0\| < \|v - u\|, \forall u \in U\backslash\{u_0\}$ y $\pi_U(v) = u_1$. Tenemos que demostrar que $u_1 = u_0$. Utilizando el mismo argumento que en la implicación anterior deduciríamos que $v - u_1$ es ortogonal a $u_1 - u_0$. Por tanto aplicando el teorema 3.10 obtendríamos

$$\|v - u_1\|^2 \geqslant \|v - u_0\|^2 = \|(v - u_1) + (u_1 - u_0)\|^2 = \|v - u_1\|^2 + \|u_1 - u_0\|^2 \geqslant \|v - u_1\|^2$$

Mirando al principio y al final deducimos que todas las desigualdades en la anterior expresión son igualdades y por tanto $\|u_1 - u_0\| = 0$. Por las propiedades de la norma esto solo es posible si $u_1 = u_0$. □

2. Endomorfismo adjunto. Endomorfismos autoadjuntos y su diagonalización.

2.1. Endomorfismo adjunto. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Recordemos que en la sección 3.3 habíamos definido para cualquier métrica no degenerada un isomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \mapsto & \Phi(v): \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \end{array}$$

Por otra parte dada $f \in \mathrm{End}(V)$ podemos considerar su aplicación traspuesta (o endomorfismo dual) $f^t \in \mathrm{End}(V^*)$ que se definía como

$$\begin{array}{rccc} f^t: & V^* & \longrightarrow & V^* \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Recordemos que si B era una base de V y B^* la base dual asociada entonces

$$M(f^t, B^*) = M(f, B)^t \tag{19}$$

A partir de los homomorfismos anteriores podemos definir un endomorfismo $\widehat{f} \in \mathrm{End}(V)$ dado por

$$\widehat{f} = \Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi \tag{20}$$

Observemos que $\widehat{f}$ es el endomorfismo que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V^* \arrow[r, "f^t"'] & V^* \end{tikzcd}$$

Definición 3.19: A $\widehat{f}$ se le denomina **el endomorfismo adjunto de f respecto de g**.

Observación 3.20: Observemos que el endomorfismo adjunto de f depende de g ya que el isomorfismo Φ depende de la métrica g.

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización del endomorfismo adjunto.

Proposición 3.21: *Dado $f \in \mathrm{End}(V)$, el endomorfismo adjunto de f respecto de g es el único endomorfismo que verifica:*

$$g(v, f(u)) = g(\widehat{f}(v), u) \ , \quad \forall u, v \in V \ . \tag{21}$$

Demostración: De la definición de $\widehat{f}$ tenemos para todo $u, v \in V$

$$\begin{aligned} g(\widehat{f}(v), u) &= g((\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi)(v), u) = g(\Phi^{-1}(f^t \circ \Phi(v)), u) \underset{\text{Proposición 2.17 vi)}}{=} (f^t \circ \Phi(v))(u) \\ &= (\Phi(v) \circ f)(u) = \Phi(v)(f(u)) \underset{\text{Definición de } \Phi}{=} g(v, f(u)) \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que dicho endomorfismo es único. Supongamos que exista $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(V)$ que verifique

$$g(v, f(u)) = g(\widetilde{f}(v), u) \ , \quad \forall u, v \in V \ . \tag{22}$$

Entonces de las ecuaciones (21) y (22) tendríamos

$$g(\widehat{f}(v) - \widetilde{f}(v), u) \underset{\uparrow \atop g \text{ bilineal}}{=} g(\widehat{f}(v), u) - g(\widetilde{f}(v), u) \underset{\uparrow \atop \text{(21) y (22)}}{=} g(v, f(u)) - g(v, f(u)) = 0$$

Como g es euclídea y por tanto no degenerada tendríamos

$$\widehat{f}(v) - \widetilde{f}(v) = 0 \ , \quad \forall v \in V \ .$$

Y por tanto $\widehat{f} = \widetilde{f}$. □

Estudiemos ahora las propiedades que tiene la aplicación adjunta.

Propiedades 3.22: *Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo, $f, h \in \mathrm{End}(V)$ y $\widehat{f}, \widehat{h}$ sus correspondientes endomorfismos adjuntos respecto de g. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Para cualquier base B de V se tiene*

$$M(\widehat{f}, B) = M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B) \ .$$

ii) *Para cualquier base ortonormal B' de (V, g) se tiene*

$$M(\widehat{f}, B') = M(f, B')^t \ .$$

iii) $\widehat{\widehat{f}} = f$.
iv) $\widehat{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ *y* $\widehat{f_0} = f_0$*, donde f_0 denota la aplicación idénticamente nula.*
v) $\widehat{h \circ f} = \widehat{h} \circ \widehat{g}$.
vi) $f \in \mathrm{Aut(V)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathrm{Aut(V)}$*. Además en este caso* $\widehat{f^{-1}} = \widehat{f}^{-1}$.
vii) $\mathrm{Ker}(\widehat{f}) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ *y* $\mathrm{Im}(\widehat{f}) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.
viii) *Sea U un subespacio vectorial de V. Si $f(U) \subset U$ entonces $\widehat{f}(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$.*
ix) *Los polinomios característicos de f y $\widehat{f}$ coinciden.*
x) *Si λ es un valor propio de f con multiplicidad geométrica k si y solo si λ es un valor propio de $\widehat{f}$ con multiplicidad geométrica k.*
xi) *f es diagonalizable si y solo si $\widehat{f}$ es diagonalizable.*
xii) *Sea $f \in \mathrm{Aut(V)}$. Entonces se tiene que f es una isometría de (V, g) si y solo si $\widehat{f} = f^{-1}$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Tenemos

$$\begin{aligned} M(\widehat{f}, B) &= M(\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi, B) = M(\Phi^{-1}, B^*, B) \cdot M(f^t, B^*) \cdot M(\Phi, B, B^*) \\ &\overset{(19) \atop \downarrow}{\underset{\uparrow \atop \text{Proposición 2.17 iii)}}{=}} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B) \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Es una consecuencia inmediata del apartado i).

$\boxed{\text{iii) y iv)}}$ Se siguen directamente de la Proposición 3.21.

$\boxed{\text{v)}}$

$$\widehat{h \circ f} = \Phi^{-1} \circ (h \circ f)^t \circ \Phi \underset{(h\circ f)^t = f^t \circ h^t}{=} \Phi^{-1} \circ (f^t \circ h^t) \circ \Phi = (\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ h^t \circ \Phi) = \widehat{f} \circ \widehat{h}$$

$\boxed{\text{vi)}}$ Observemos que si $f \in \mathrm{Aut(V)}$ entonces tenemos

$$\mathrm{Id} \underset{\text{iv)}}{=} \widehat{\mathrm{Id}} = \widehat{f^{-1} \circ f} \underset{\text{v)}}{=} \widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}}$$

de donde se deduce la implicación de izquierda a derecha en vi). Teniendo en cuenta esto y el apartado iii) tendríamos la otra implicación.

$\boxed{\text{vii)}}$ Notemos que

$$v \in \mathrm{Ker}(\widehat{f}\,) \iff \widehat{f}(v) = 0 \overset{g \text{ es no degenerada}}{\iff} g(\widehat{f}(v), u) = 0\ , \forall u \in V \overset{\text{Proposición 3.21}}{\iff}$$
$$\iff g(v, f(u)) = 0\ , \forall u \in V \iff v \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$\mathrm{Ker}(f) \underset{\text{iii)}}{=} \mathrm{Ker}(\widehat{\widehat{f}}\,) = \mathrm{Im}(\widehat{f}\,)^{\perp}$$

Calculando los subespacios perpendiculares en la igualdad anterior tenemos

$$\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \left(\mathrm{Im}(\widehat{f}\,)^{\perp}\right)^{\perp} \underset{\text{Propiedad 3.2 iii)}}{=} \mathrm{Im}(\widehat{f}\,)$$

$\boxed{\text{viii)}}$ Supongamos que U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ y veamos que $\widehat{f}(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$, Para ello consideremos $v \in U^{\perp}$ y $u \in U$. Tenemos

$$g(\widehat{f}(v), u) \underset{\text{Proposición 3.21}}{=} g(v, f(u)) \underset{v \in U^{\perp} \text{ y } f(u) \in U}{=} 0$$

$\boxed{\text{ix), x) y xi)}}$ Se deducen directamente del aparatado ii).

$\boxed{\text{xii)} \Longrightarrow}$ Supongamos que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces para $u, v \in V$ tenemos

$$g(f^{-1}(v), u) \underset{f \text{ isometría}}{=} g(f(f^{-1}(v)), f(u)) = g(v, f(u))$$

Es decir f^{-1} verifica la ecuación (21) y por tanto $\widehat{f} = f^{-1}$.

$\boxed{\text{xii)} \Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $\widehat{f} = f^{-1}$ y consideremos $u, v \in V$. Entonces tenemos

$$g(f(v), f(u)) \underset{\text{Proposición 3.21}}{=} g\left(\widehat{f}(f(v)), u\right) = g(v, u)$$

De donde deducimos que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. $\square$

2.2. Endomorfismos autoadjuntos y su diagonalización. Vamos a estudiar ahora un tipo especial de endomorfismos que serán muy importantes en lo que sigue.

Definición 3.23: Diremos que $f \in \text{End}(V)$ es un **endomorfismo autoadjunto respecto de g** si $\widehat{f} = f$, es decir si

$$g(v, f(u)) = g(f(v), u)\ , \quad \forall u, v \in V\ . \tag{23}$$

A continuación probaremos un teorema que caracteriza los endomorfismos autoadjuntos en función de su matriz respecto de una base.

Teorema 3.24: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \text{End}(V)$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *f es un endomorfismo autoadjunto.*
ii) *Para toda base B de V se tiene que*

$$M(g, B) \cdot M(f, B) = M(f, B)^t \cdot M(g, B) \tag{24}$$

Equivalentemente, $M(g, B) \cdot M(f, B)$ es una matriz simétrica.
iii) *Existe una base B de V tal que se verifica la ecuación (24).*
iv) *Para toda base ortonormal B' de (V, g) se tiene que $M(f, B')$ es simétrica.*
v) *Existe una base ortonormal B' de (V, g) tal que $M(f, B')$ es simétrica.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}}$ Observemos que tenemos

$$M(f, B) \underset{\uparrow \atop \text{f autoadjunto}}{=} M(\widehat{f}, B) \underset{\uparrow \atop \text{Propiedad 3.22 i)}}{=} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B)\ .$$

Multiplicando por la izquierda en la igualdad anterior por la matriz $M(g, B)$ obtenemos la ecuación (24).
$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{iii)}}$ y $\boxed{\text{iv)} \Longrightarrow \text{v)}}$ Son inmediatas.
$\boxed{\text{iii)} \Longrightarrow \text{i)}}$ Usando de nuevo la propiedad 3.22 i) tenemos

$$M(\widehat{f}, B) \underset{\uparrow \atop \text{Propiedad 3.22 i)}}{=} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B) \underset{\uparrow \atop (24)}{=} M(f, B)\ .$$

De donde deducimos que $\widehat{f} = f$, es decir f es autoadjunta.
$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{iv)}}$ Si B' es una base ortonormal entonces $M(g, B') = I_n$. Sustituyendo esta matriz en la ecuación (24) obtenemos $M(f, B') = M(f, B')^t$, es decir $M(f, B')$ es simétrica.
$\boxed{\text{v)} \Longrightarrow \text{iii)}}$ De v) sabemos que existe B' base ortonormal tal que $M(f, B') = M(f, B')^t$. Como $M(g, B') = I_n$ tenemos que se verifica la ecuación (24). □

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de endomorfismos autoadjuntos.

Ejemplos 3.25: 1. Por la propiedad iv) tenemos que Id y f_0 son endomorfismos autoadjuntos.

2. Sean U un subespacio de V, π_U la proyección ortogonal sobre U y σ_U la simetría ortogonal respecto de U. Recordemos que habíamos comprobado en las propiedades 3.16 ii) e iii) que existía una base ortonormal B' de (V, g) tal que $M(\pi_U, B')$ y $M(\sigma_U, B')$ son simétricas. Entonces como se verifica el apartado v) del teorema 3.24 deducimos que las proyecciones y las simetrías ortogonales son endomorfismos autoadjuntos.

Probaremos ahora dos propiedades clave de los endomorfismos autoadjuntos que serán de gran importancia más adelante.

PROPOSICIÓN 3.26: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces tenemos*

i) *Si U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ entonces $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Además $f_{|U}$ es un endomorfismo autoadjunto de (U, g_U).*

ii) *Dos subespacios propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Si U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ tenemos de la propiedad 3.22 viii) que $\widehat{f}(U^\perp) \subset U^\perp$. Pero como $\widehat{f} = f$ concluimos que $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Claramente $f_{|U} \in \operatorname{End}(U)$ y es un endomorfismo autoadjunto de (U, g_U)

$\boxed{\text{ii)}}$ Sean V_μ y V_ν subespacios propios de f asociados a dos valores propios distintos μ y ν. Veamos que dichos subespacios son ortogonales. Para ello consideramos $v \in V_\mu$ y $w \in V_\nu$. Observemos que

$$g(f(v), w) \underset{v \in V_\mu}{=} g(\mu v, w) \underset{g \text{ bilineal}}{=} \mu g(v, w) \tag{25}$$

Análogamente tenemos

$$g(v, f(w)) \underset{w \in V_\nu}{=} g(v, \nu w) \underset{g \text{ bilineal}}{=} \nu g(v, w) \tag{26}$$

Por ser f un endomorfismo autoadjunto sabemos que las expresiones en (25) y (26) son iguales y por lo tanto

$$\mu g(v, w) = \nu g(v, w) \qquad \text{de donde se deduce} \qquad (\mu - \nu) g(v, w) = 0$$

Como $\mu - \nu \neq 0$ se sigue que $g(v, w) = 0$ y por tanto V_μ y V_ν son ortogonales. □

Recordemos que si $f \in \operatorname{End}(V)$ teníamos las siguientes caracterizaciones para las proyecciones y simetrías generales :

$$\boxed{f \text{ es una proyección} \iff f \circ f = f} \quad \boxed{f \text{ es una simetría} \iff f \circ f = \operatorname{Id}}$$

Podemos obtener ahora una caracterización de las proyecciones y simetrías ortogonales.

PROPOSICIÓN 3.27: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \operatorname{End}(V)$, entonces se tiene:*

i) *f es una proyección ortogonal si y sólo si $f \circ f = f$ y f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.*

ii) *f es una simetría ortogonal si y sólo si $f \circ f = \operatorname{Id}$ y f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.*

Demostración: Las implicaciones $\boxed{\text{i) e ii)} \Longrightarrow}$ Son consecuencia directa de la caracterización anterior y el ejemplo 2 de 3.25.

$\boxed{\text{i)} \Longleftarrow}$ De la caracterización anterior tenemos que f es una proyección. Además sabíamos que f era la proyección sobre $U = \text{Ker}(f - \text{Id}) = V_1$ paralela a $W = \text{Ker}(f) = V_0$. Para probar que es una proyección ortogonal faltaría demostrar que U y W son ortogonales, pero como estamos asumiendo que f es autoadjunto esto se sigue directamente del apartado ii) de la proposición 3.26.

$\boxed{\text{ii)} \Longleftarrow}$ De la caracterización previa tenemos que f es una simetría. Además sabíamos que f era la simetría respecto de $U = \text{Ker}(f - \text{Id}) = V_1$ paralela a $W = \text{Ker}(f + \text{Id}) = V_{-1}$. Para probar que es una simetría ortogonal faltaría demostrar que U y W son ortogonales, pero como estamos asumiendo que f es autoadjunto esto se sigue como en el caso anterior del apartado ii) de la proposición 3.26. □

2.3. Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos. Vamos a probar ahora el resultado más importante de esta sección. Vamos a ver que si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo y $f \in \text{End}(V)$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g entonces f es diagonalizable. Como consecuencia probaremos que toda matriz simétrica real es diagonalizable. Notemos que hasta ahora solo sabíamos que toda matriz simétrica real era congruente a una matriz diagonal (Corolario 2.28). Ahora probaremos que toda matriz simétrica real es equivalente a una matriz diagonal.

Para probar este resultado comenzaremos probando un resultado técnico. Vamos a fijar alguna notación relativa a los números complejos que utilizaremos a continuación.

Si $z \in \mathbb{C}$ denotaremos por $|z|$ al módulo de z. Recordemos que $|z|^2 = z\overline{z}$, donde $\overline{z}$ denota el conjugado de z.

Dada $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que $M = (m_{ij})$ denotaremos $\overline{M}$ a la matriz cuyas entradas son los números complejos conjugados de m_{ij}, es decir $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})$. Es sencillo comprobar que si $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $N \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ entonces

$$\overline{M \cdot N} = \overline{M} \cdot \overline{N}\,. \tag{27}$$

Probaremos a continuación el siguiente resultado.

Lema 3.28: i) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces A tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$.*

ii) *Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces todo valor propio de A es real. En particular, A admite algún valor propio real.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Recordemos que los valores propios de A son las raíces de su polinomio característico $p_A(\lambda)$, que es un polinomio de grado $n \geqslant 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existe alguna raíz de dicho polinomio y por tanto A tiene al menos un valor propio.

$\boxed{\text{ii)}}$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A. Entonces existe $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ tal que $A \cdot z = \lambda\, z$ donde recordemos que identificamos los vectores de $\mathbb{C}^n$ con las matrices columnas de n filas. Es decir la expresión anterior denota:

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Vamos a multiplicar por la izquierda ambas partes de esta igualdad por la matriz fila $\overline{z}^t = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \cdots & \overline{z_n} \end{pmatrix}$. Obtenemos así

$$\overline{z}^t \cdot A \cdot z = \lambda\, \overline{z}^t \cdot z = \lambda\,(\overline{z_1}z_1 + \cdots + \overline{z_n}z_n) = \lambda\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$$

Observemos que $\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$ es un número real positivo. Por tanto si probamos que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ entonces tendremos que λ también es real. Para comprobar que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ vamos a calcular su conjugado

$$\overline{\overline{z}^t \cdot A \cdot z} \underset{(27)}{=} \overline{\overline{z}}^t \cdot \overline{A} \cdot \overline{z} \overset{\overline{\overline{z}} = z}{\underset{A \text{ es real}}{=}} z^t \cdot A \cdot \overline{z} \underset{\text{Es una matriz } 1\times 1}{=} (z^t \cdot A \cdot \overline{z})^t = \overline{z}^t \cdot A^t \cdot z \underset{A \text{ es simétrica}}{=} \overline{z}^t \cdot A \cdot z$$

Como hemos comprobado que $\overline{\overline{z}^t \cdot A \cdot z} = \overline{z}^t \cdot A \cdot z$ tenemos que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ y por tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalmente como por el apartado i) sabemos que A tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ y acabamos de comprobar que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ los valores propios deben de ser reales concluimos que A tiene al menos un valor propio real. □

Como corolario obtenemos el siguiente resultado para los endormorfismos autoadjuntos.

COROLARIO 3.29: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ con f un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f tiene al menos un valor propio real.*

Demostración: Consideremos B' base ortonormal de (V, g). Entonces del apartado iv) del Teorema 3.24 tenemos que $M(f, B')$ es una matriz simétrica real. Aplicando a dicha matriz el apartado ii) del Lema 3.28 deduciríamos que $M(f, B')$, y por tanto f, tiene al menos una raíz real. □

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para poder probar el resultado que buscábamos:

TEOREMA 3.30: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f admite una base ortonormal de vectores propios y por tanto f es diagonalizable.*

Demostración: Sea $n = \dim(V)$. La demostración consistirá en aplicar un proceso de inducción sobre n.

Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que se verifica el Teorema en los espacios vectoriales euclídeos de dimensión $n - 1$ y probemos que entonces se verifica para n.

Por el Corolario 3.29 sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de f. Por tanto existirá $v \in V\backslash\{0\}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$. Denotemos $U = L(\{v\})$. Observemos que por ser la métrica euclídea sabemos de la Propiedad 3.2 ii) que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$.

Además por ser v un vector propio tenemos que $f(U) \subset U$. Entonces aplicando el apartado i) de la Proposición 3.26 tenemos que $f_{|U^\perp}$ es un endomorfismo autoadjunto del espacio vectorial euclídeo $\left(U^\perp, g_{U^\perp}\right)$. Por la hipótesis de inducción tenemos $B_1 = \{v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de $\left(U^\perp, g_{U^\perp}\right)$ formada por vectores propios de $f_{|U^\perp}$. Observemos que entonces $B = \left\{\frac{v}{\|v\|}, v_2, \ldots, v_n\right\}$ es una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de f. □

De este resultado obtendríamos el correspondiente resultado para matrices.

Corolario 3.31: *Toda matriz simétrica real es simultáneamente diagonalizable por semejanza y por congruencia.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Consideremos $(\mathbb{R}^n, g_0)$ el espacio vectorial euclídeo dado por el producto escalar usual y $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M(f, B_u) = A$. Como B_u es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y A es simétrica, del apartado v) del Teorema 3.24 tenemos que f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g_0. Utilizando ahora el Teorema 3.30 obtenemos B una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ formada por vectores propios de f y por tanto $M(f, B) = D$ es una matriz diagonal. Teniendo en cuenta como se relacionan dos matrices de un endomorfismo en dos bases distintas obtenemos

$$D = M(f, B) = M(B, B_u)^{-1} \cdot M(f, B_u) \cdot M(B, B_u) = M(B, B_u)^{-1} \cdot A \cdot M(B, B_u)$$

Además la matriz $P = M(B, B_u)$ es una matriz ortogonal por la Conclusión 3.14. Por tanto

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P$$

Y así A es diagonalizable simultáneamente por semejanza y por congruencia. □

3. Aplicaciones del Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Vamos a ver algunas aplicaciones del Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos (Teorema 3.30) probado en la sección anterior que nos permitirá, entre otras cosas, obtener otra manera de clasificar las métricas.

TEOREMA 3.32: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\widetilde{g}$ otra métrica cualquiera en V. Entonces se tiene:*

i) *Existe un único endomorfismo $f_{\widetilde{g}} \in \mathrm{End}(V)$ que verifica*

$$\widetilde{g}(u, v) = g(u, f_{\widetilde{g}}(v)) \ , \forall u, v \in V \ . \tag{28}$$

Además $f_{\widetilde{g}}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.

ii) *Si B es una base ortonormal para g, entonces*

$$M(f_{\widetilde{g}}, B) = M(\widetilde{g}, B) \ . \tag{29}$$

iii) *Existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de $f_{\widetilde{g}}$ asociados a los valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Además*

$$B' = \left\{ \frac{u_1}{a_1}, \ldots, \frac{u_n}{a_n} \right\} \ ,$$

donde $a_i = \sqrt{|\lambda_i|}$ si $\lambda_i \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ si $\lambda_i = 0$ es, salvo reordenación, una base ortonormal (o de Sylvester) para $\widetilde{g}$.

iv) *El número de 1, -1 y 0 de la matriz de Sylvester de $\widetilde{g}$ coinciden con el número de valores propios positivos, negativos y nulos de $M(\widetilde{g}, B)$ para B cualquier base ortonormal de (V, g). En particular, el índice de $\widetilde{g}$ coincide con el número de valores propios negativos de $M(\widetilde{g}, B)$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Como (V, g) es un espacio vectorial euclídeo tenemos el isomorfismo musical

$$\Phi_g : \ V \ \longrightarrow \ V^*$$

definido en la sección 3.3. Por otra parte también podríamos considerar la aplicación lineal

$$\Phi_{\widetilde{g}} : \ V \ \longrightarrow \ V^*$$

que en este caso no podemos asegurar que sea un isomorfismo porque $\widetilde{g}$ es una métrica cualquiera. Podemos definir entonces:

$$f_{\widetilde{g}} = \Phi_g^{-1} \circ \Phi_{\widetilde{g}} \in \mathrm{End}(V) \ .$$

Veamos que $f_{\widetilde{g}}$ verifica (28). Efectivamente si $u, v \in V$ tenemos

$$g(u, f_{\widetilde{g}}(v)) \ = \ g(u, (\Phi_g^{-1} \circ \Phi_{\widetilde{g}})(v)) = g(u, \Phi_g^{-1}(\Phi_{\widetilde{g}}(v))) \underset{\uparrow \atop \text{Proposición 2.17 vi)}}{=} \Phi_{\widetilde{g}}(v)(u) = \widetilde{g}(u, v)$$

Veamos ahora que $f_{\widetilde{g}}$ es el único endomorfismo que verifica esta propiedad. Supongamos que existiese $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(V)$ que verifique:

$$\widetilde{g}(u, v) = g(u, \widetilde{f}(v)) \ , \forall u, v \in V \ . \tag{30}$$

Entonces restando las ecuaciones 28 y 30 obtenemos para todo $u, v \in V$

$$g(u, f_{\widetilde{g}}(v)) - g(u, \widetilde{f}(v)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(u, f_{\widetilde{g}}(v) - \widetilde{f}(v)) = 0 \; .$$

Pero como la métrica g es no degenerada concluimos $f_{\widetilde{g}}(v) - \widetilde{f}(v) = 0$, para todo $v \in V$. Equivalentemente, $f_{\widetilde{g}} = \widetilde{f}$.

Para acabar la demostración de este apartado vamos a comprobar que $f_{\widetilde{g}}$ es un endomorfismo autoadjunto verificando la ecuación (23). Efectivamente si $u, v \in V$ tenemos

$$g(u, f_{\widetilde{g}}(v)) \underset{(26)}{=} \widetilde{g}(u, v) \underset{\text{Simetría de la métrica}}{=} \widetilde{g}(v, u) \underset{(26)}{=} g(v, f_{\widetilde{g}}(u)) \underset{\text{Simetría de la métrica } g}{=} g(f_{\widetilde{g}}(u), v) \; .$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Supongamos primero que B es una base de V cualquiera y denotemos B^* a su base dual. Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} (31)\; M(f_{\widetilde{g}}, B) &= M(\Phi_g^{-1} \circ \Phi_{\widetilde{g}}, B) = M(\Phi_g^{-1}, B^*, B) \cdot M(\Phi_{\widetilde{g}}, B, B^*) \\ &= M(\Phi_g, B, B^*)^{-1} \cdot M(\Phi_{\widetilde{g}}, B, B^*) \underset{\text{Propiedad 2.17 iii)}}{=} M(g, B)^{-1} \cdot M(\widetilde{g}, B) \; . \end{aligned}$$

Observemos que si particularizamos la igualdad anterior para el caso en el que B sea una base ortonormal de (V, g) tendríamos $M(g, B) = I_n$ y obtendríamos así la igualdad (29).

$\boxed{\text{iii)}}$ Observemos que por ser $f_{\widetilde{g}}$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g sabemos del Teorema 3.30 que existe $B_o = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de $f_{\widetilde{g}}$ asociados a los valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Faltaría comprobar que la base B' definida en el apartado iii) es, salvo reordenación, una base ortonormal para $(V, \widetilde{g})$. Para ello observemos que de la igualdad (31) tenemos que

$$\begin{aligned} (32)\quad M(\widetilde{g}, B') &= M(g, B') \cdot M(f_{\widetilde{g}}, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{a_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{a_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_n}{a_n^2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{cases} \frac{\lambda_i}{a_i^2} = 1 & \text{si } \lambda_i > 0 \\ \frac{\lambda_i}{a_i^2} = -1 & \text{si } \lambda_i < 0 \\ \frac{\lambda_i}{a_i^2} = 0 & \text{si } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Y por tanto B' es, salvo reordenación, una base ortonormal de $(V, \widetilde{g})$.

$\boxed{\text{iv)}}$ De la igualdad (32) deducimos que el número de 1, -1 y 0 de la matriz de Sylvester de $\widetilde{g}$ coincide con el número de elementos positivos, negativos y cero del conjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, es decir el número de valores propios positivos, negativos y cero de la matriz $M(f_{\widetilde{g}}, B) = M(\widetilde{g}, B)$, para B cualquier base ortonormal de (V, g). En particular el índice de la métrica es el número de valores propios negativos de $M(\widetilde{g}, B)$. □

Observación 3.33: El Teorema 3.32 nos proporciona otra manera para clasificar las métricas. Podemos considerar como espacio vectorial euclídeo de partida $(V, g) = (\mathbb{R}^n, g_0)$ y la métrica $\widetilde{g}$ es la métrica que queremos clasificar. Notemos que B_u es una base ortonormal para $(\mathbb{R}^n, g_0)$. El apartado iv) del Teorema 3.32 nos dice que el número de 1, -1 y 0 de la matriz de Sylvester de la métrica $\widetilde{g}$ coincide con el número de valores propios positivos, negativos y nulos de la matriz $M(\widetilde{g}, B_u)$.

Además hay una manera de calcular el número de valores propios positivos sin necesidad de calcular explícitamente las raíces del polinomio característico. Es lo que se conoce como **Regla de los signos de Descartes**. Este resultado demostrado por Descartes en su obra *La géométrie* afirma:

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con $n \geqslant 1$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_0 \neq 0$ entonces el número de raíces positivas del polinomio coincide con el número de cambios de signo entre los coeficientes del polinomio módulo 2.

Un caso particular de esta regla es cuando todas las raíces del polinomio son reales. En este caso tenemos:

Si todas las raíces del polinomio son reales entonces el número de cambios de signo coincide con el número de raíces positivas del polinomio.

Si $a_0 = 0$ en el polinomio anterior entonces $p(x) = x^k q(x)$ con $q(0) \neq 0$. El número k me dice la multiplicidad de la raíz 0 y aplicando la regla de los signos de Descartes al polinomio $q(x)$ obtendríamos el número de raíces positivas de $p(x)$.

Recordemos que en en nuestro caso el polinomio a estudiar es el polinomio característico de una matriz simétrica real y por tanto todas sus raíces son reales (apartado ii) del Lema 3.28) y por tanto podemos aplicar la segunda versión de la regla de los signos de Descartes.

Vamos a ver a continuación un par de ejemplos de lo visto en esta sección.

Ejemplo 3.34: Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy \, .$$

Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

Esta métrica es la que ya estudiamos en el ejercicio 28 de la relación del Tema 2. Vamos ahora a clasificar la métrica utilizando la Observación 3.33. Recordemos que habíamos calculado

$$M_a = M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1) \end{pmatrix}$$

y que su polinomio característico venía dado por

$$p_{M_a}(\lambda) = -(\lambda - (a-1))^2(\lambda - (a+1)) \ .$$

Por la Observación 3.33 sabemos que el número de 1, -1 y 0 de la matriz de Sylvester de g_a coinciden con el número de valores propios positivos, negativos y nulos de M_a. Por tanto basta con estudiar cúal es el signo de los valores propios $\lambda_1 = a-1$ y $\lambda_2 = a+1$. Este estudio se resume en la siguiente tabla.

a	λ_1 (doble)	λ_2	(rango,índice)	g_a
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	(3,3)	definida negativa
$(-1,1)$	$-$	$+$	(3,2)	indefinida
$(1,+\infty)$	$+$	$+$	(3,0)	euclídea
-1	$-$	0	(2,2)	semidefinida negativa
1	0	$+$	(1,0)	semidefinida positiva

Ejemplo 3.35: Sea $\widetilde{g}$ métrica de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = M(\widetilde{g}, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango y el índice de $\widetilde{g}$. Clasifica la métrica.

Comenzaremos calculando el polinomio característico de M. Tenemos

$$p_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 3$$

No es sencillo calcular las raíces del polinomio anterior pero como la matriz es simétrica sabemos que todas sus raíces son reales y por tanto la Regla de los signos de Descartes nos dice que el número de raíces positivas del polinomio coincide con el número de cambios de signo entre los coeficientes del polinomio. Observemos que tenemos dos cambios de signo:

$$p_M(\lambda) = \underbrace{-\lambda^3 + 3\lambda^2}_{\text{un cambio de signo}} + \underbrace{3\lambda - 3}_{\text{otro cambio de signo}}$$

Por tanto en la matriz de Sylvester de la métrica $\widetilde{g}$ hay dos 1 y un -1, es decir rango$(\widetilde{g}) = 3$ e índice$(\widetilde{g}) = 1$. Concluimos por tanto que la métrica es indefinida y no degenerada.

Ejemplo 3.36: Consideremos $\widetilde{g}$ la métrica de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = M(\widetilde{g}, B_u) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango y el índice de $\widetilde{g}$. Clasifica la métrica.

Comenzaremos calculando el polinomio característico de M. Tenemos

$$p_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda$$

Como en el caso anterior podemos utilizar la Regla de los signos de Descartes para conocer el número de raíces positivas, negativas y nulas que tiene el polinomio característico. Observemos que tenemos un valor propio que vale 0 y un cambio de signo:

$$p_M(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \underbrace{4\lambda - 3)}_{\text{un cambio de signo}}$$

Por tanto en la matriz de Sylvester de la métrica $\widetilde{g}$ hay un 0, un 1 y un -1, es decir rango$(\widetilde{g}) = 2$ e índice$(\widetilde{g}) = 1$. Concluimos por tanto que la métrica es indefinida y degenerada.

Veamos ahora otra aplicación del Teorema 3.32.

Ejemplo 3.37: Sean ω_1 y ω_2 las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$\omega_1(x,y,z) = 2(xy + xz + yz) \quad , \quad \omega_2(x,y,z) = 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz) \ .$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector v en esa base entonces

$$\omega_1(v) = \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2 \quad , \quad \omega_2(v) = a^2 + b^2 + c^2 \ .$$

Denotemos g_1 y g_2 a las métricas asociadas a las formas cuadráticas anteriores. En primer lugar vamos a escribir la matriz de dichas métricas en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

$$A = M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = M(g_2, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Veamos que la métrica g_2 es una métrica euclídea. Para ello utilizamos el Criterio de Sylvester. Efectivamente, observemos que

$$\det(C_1) = 2 > 0 \ , \det(C_2) = 3 > 0 \ , \det(C) = 2 > 0 \ .$$

Del apartado iii) del Teorema 3.32 podemos encontrar una base ortonormal para la métrica g_2 formada por vectores propios de A. Esta es la base B que buscamos. Para encontrar esta base lo que teníamos que hacer era calcular los valores propios de A y los subespacios propios asociados a esos valores propios. En primer lugar tenemos

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda - 2)$$

Luego los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$. Calculemos los subespacios propios asociados.

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$
$$= L(\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}) \ .$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$
$$= L(\{(1,1,1)\}) \ .$$

Aplicaremos ahora el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base de V_{-1}. Obtenemos así

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,-1,0) \\ u_2 &= (1,0,-1) - \frac{g_2((1,0,-1),(1,-1,0))}{\|(1,-1,0)\|^2_{g_2}}(1,-1,0) = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)\ . \end{aligned}$$

Ahora solo necesitamos dividir cada vector por su norma para obtener la base ortonormal buscada.

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

Si consideramos $(a,b,c) = v_B$ entonces tendremos que

$$\omega_1(v) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M(g_1,B) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$\omega_2(v) = a^2 + b^2 + c^2\ .$$

4. Isometrías. Clasificación de isometrías.

Recordemos que en la sección 5 del Tema 2 habíamos introducido el concepto de isometría entre dos espacios vectoriales métricos. En este tema vamos a estudiar las isometrías para el caso particular de los espacios vectoriales euclídeos. El objetivo último de esta sección es dar la clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo en sí mismo.

En lo que sigue (V, g) y (V', g') serán espacios vectoriales euclídeos. Recordemos que una aplicación $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ era una **isometría** si verificaba:

1) f es un isomorfismo de espacios vectoriales.
2) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.

Además, denotábamos $\mathrm{Iso}(V, g)$ al conjunto de isometrías de (V, g) en sí mismo. Además en este caso si $f \in \mathrm{End}(V)$ verifica la condición 2) de la definición de isometría entonces se verifica también i). Efectivamente, supongamos que $v \in V$ es un vector tal que $f(v) = 0$ tenemos

$$0 = g(f(v), f(v)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ verifica 2)}}}{=} g(v, v) = \|v\|^2$$

y por ser la métrica euclídea de aquí deducimos que $v = 0$. Luego f es un monomorfismo y por tanto un isomorfismo.

De la Proposición 2.36 y el Corolario 2.40 demostradas en el Tema 2 obtenemos las siguientes equivalencias de la propiedad 2) de la anterior definición para el caso en el que las métricas son euclídeas.

Proposición 3.38: *Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

i) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.
ii) $\|f(v)\|_{g'} = \|v\|_g$, $\forall v \in V$.
iii) *Para B y B' bases cualesquiera de V y V', respectivamente, se tiene*

$$\boxed{M(f, B, B')^t \cdot M(g', B') \cdot M(f, B, B') = M(g, B)} \tag{33}$$

iv) *Existen B y B' bases de V y V', respectivamente, tal que verifican* (33).
v) *Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) entonces $B' = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V', g').*

Además de todas las propiedades anteriores también se puede comprobar que las isometrías conservan los ángulos. Más concretamente vamos a comprobar:

Propiedad 3.39: *Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ una isometría entonces*

$$\cos(\measuredangle(f(u), f(v))) = \cos(\measuredangle(u, v)) \ , \forall u, v \in V \backslash \{0\} \ .$$

Demostración: Sean $u, v \in V \backslash \{0\}$. Entonces

$$\cos\left(\measuredangle(f(u), f(v))\right) = \frac{g'(f(u), f(v))}{\|f(u)\|_{g'} \|f(v)\|_{g'}} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ isometría}}}{=} \frac{g(u, v)}{\|u\|_g \|v\|_g} = \cos(\measuredangle(u, v)) \ .$$

□

Observación 3.40: El recíproco no es cierto. Veamos que las homotecias verifican esta propiedad pero no son isometrías. Sea $h_\alpha : (V, g) \longrightarrow (V, g)$ dada por $h_\alpha(v) = \alpha v$ para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Entonces para $u, v \in V\backslash\{0\}$ tenemos

$$\cos(\measuredangle(h_\alpha(u), h_\alpha(v))) = \frac{g(h_\alpha(u), h_\alpha(v))}{\|h_\alpha(u)\|\|h_\alpha(v)\|} = \frac{g(\alpha u, \alpha v)}{\|\alpha u\|\|\alpha v\|} = \frac{\alpha^2 g(u, v)}{|\alpha|^2\|u\|\|v\|} = \cos(\measuredangle(u, v)) .$$

Por otra parte $\|h_\alpha(u)\| = |\alpha|\|u\|$ para $u \in V$. Entonces si $\alpha \neq \pm 1$ h_α no es una isometría.

Recordemos que si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo, $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$ y B es una base ortonormal de (V, g) entonces $M(f, B)$ es ortogonal. Esto nos permitía definir el siguiente isomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rrcl} F: & \operatorname{Iso}(V, g) & \longrightarrow & O(n) \\ & f & \mapsto & M(f, B) \end{array}$$

Además de las ya enunciadas tenemos las siguientes propiedades para las isometrías de un espacio vectorial euclídeo.

Propiedades 3.41: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$. Entonces tenemos:*

i) *Como hemos dicho anteriormente si B es una base ortonormal de (V, g) sabemos que $M(f, B) \in O(n)$, es decir $M(f, B) \cdot M(f, B)^t = I_n$. De aquí se tiene*

$$1 = \det(M(f, B) \cdot M(f, B)^t) = \det(M(f, B)) \det(M(f, B)^t) = \det(M(f, B))^2 .$$

Por tanto $\det(f) = \det(M(f, B)) = \pm 1$. Se suele denotar

$$\begin{array}{rcl} O^+(n) & = & SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\} \\ O^-(n) & = & \{M \in O(n) \mid \det(M) = -1\} \end{array}$$

Podemos escribir entonces $O(n) = O^+(n) \amalg O^-(n)$. De aquí podemos separar las isometrías en

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Iso}^+(V, g) & = & \{f \in \operatorname{Iso}(V, g) \mid \det(f) = 1\} \\ \operatorname{Iso}^-(V, g) & = & \{f \in \operatorname{Iso}(V, g) \mid \det(f) = -1\} \end{array}$$

Como en el caso anterior $\operatorname{Iso}(V, g) = \operatorname{Iso}^+(V, g) \amalg \operatorname{Iso}^-(V, g)$. Observemos que $O^+(n)$ y $\operatorname{Iso}^+(V, g)$ son subgrupos de $O(n)$ y $\operatorname{Iso}(V, g)$, respectivamente, mientras que $O^-(n)$ y $\operatorname{Iso}^-(V, g)$ no lo son. Al grupo $O^+(n) = SO(n)$ se le suele denominar el grupo especial ortogonal.

ii) *Si λ es un valor propio de f entonces $\lambda = \pm 1$.*

Efectivamente, sea λ un valor propio de f y sea $v \in V\backslash\{0\}$ un vector propio asociado a ese valor propio. Entonces tenemos:

$$\|v\| \underset{\uparrow \atop \text{Proposición 3.38 ii)}}{=} \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| .$$

De aquí $(1 - |\lambda|)\|v\| = 0$. Como $v \neq 0$ se tendría $|\lambda| = 1$, es decir $\lambda = \pm 1$.

iii) *Los subespacios propios de f, si los tiene, son ortogonales entre sí.*

Por lo dicho en el anterior apartado los únicos posibles subespacios propios son los asociados a los valores propios 1 y -1. Dados $u \in V_1$ y $v \in V_{-1}$ veamos que son ortogonales.

$$g(u,v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{f \text{ isometría}}}}{=} g(f(u),f(v)) = g(u,-v) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{g \text{ bilineal}}}}{=} -g(u,v)\ .$$

como $g(u,v) = -g(u,v)$ concluimos que $g(u,v) = 0$.

iv) *Si U es un subespacio vectorial de V tal que $f(U) \subset U$ entonces $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*

Observemos en primer lugar que por ser f isomorfismo, si $f(U) \subset U$ entonces $f(U) = U$. De aquí componiendo con f^{-1} deducimos $f^{-1}(U) = U$. Dado $v \in U^\perp$ tenemos que probar que $f(v) \in U^\perp$. Consideremos $u \in U$. Por lo visto anteriormente $f^{-1}(u) \in U$. Entonces tenemos

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{f^{-1}(u) \in U\ ,\ v \in U^\perp}}}{=} g(f^{-1}(u),v) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{f \text{ isometría}}}}{=} g(f(f^{-1}(u)),f(v)) = g(u,f(v))$$

Luego $f(v) \in U^\perp$. Por el mismo razonamiento que antes no solo $f(U^\perp) \subset U^\perp$ sino que también se tiene $f(U^\perp) = U^\perp$.

4.1. Clasificación de las isometrías de un plano vectorial euclídeo. Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo. Como hemos visto que existe un isomorfismo entre $\mathrm{Iso}(V,g)$ y $O(2)$, tenemos que comenzar estudiando $O(2)$.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ vamos a denotar

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad , \quad \widetilde{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.42: Dados $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ se tiene que

i) $R(\theta) \in O^+(2)$ y $\widetilde{R}(\theta) \in O^-(2)$.

ii) $R(\theta) \cdot R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

iii) $R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$.

iv) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O^-(2)$, $\widetilde{R}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(\theta)$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{R}(\theta) = R(-\theta)$.

La matriz $R(\theta)$ corresponde a la matriz de un giro de ángulo θ en el sentido de las agujas del reloj. Observemos que de lo anterior se deduce que $\{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ forman un subgrupo de $O(2)$.

Teorema 3.43: (Clasificación de las matrices ortogonales de orden 2) *Sea $M \in O(2)$ entonces existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que*

i) *Si* $\det(M) = 1$ *entonces $M = R(\theta)$.*

ii) *Si* $\det(M) = -1$ *entonces $M = \widetilde{R}(\theta)$.*

Demostración: Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Impongamos a M la condición de ortogonalidad.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la igualdad anterior obtenemos

$$a^2 + c^2 = 1 \tag{34}$$
$$ab + cd = 0 \tag{35}$$
$$b^2 + d^2 = 1 \tag{36}$$

De (34) existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos(\theta)$ y $c = \operatorname{sen}(\theta)$. De (35) deducimos que

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ -d & b \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto el vector $(-d, b) = k(a, c) = k(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, para $k \in \mathbb{R}$. Si tenemos en cuenta (36) obtenemos que $1 = k^2$ de donde $k = \pm 1$. Si $k = -1$ obtenemos el primer caso y si $k = 1$ el segundo. □

Del resultado anterior obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.44: *Sea (V, g) plano vectorial euclídeo, B una base ortonormal de (V, g) y $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$. Entonces tenemos:*

i) *Si $f \in \operatorname{Iso}^+(V, g)$ entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f, B) = R(\theta)$. Además si B' es otra base ortonormal se tiene que $M(f, B') = R(\theta)$ o $M(f, B') = R(2\pi - \theta)$.*

ii) *Si $f \in \operatorname{Iso}^-(V, g)$ entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f, B) = \widetilde{R}(\theta)$. Además existe una base ortonormal B' tal que*

$$M(f, B') = \widetilde{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Si $f \in \operatorname{Iso}^+(V, g)$ y B es una base ortonormal de (V, g) sabemos que $M(f, B) \in O^+(2)$. Entonces por el Teorema 3.43 sabemos que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f, B) = R(\theta)$. Supongamos ahora que B' es otra base ortonormal de (V, g). Por la misma razón de antes existe $\theta' \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f, B') = R(\theta')$. Observemos que $M(f, B)$ y $M(f, B')$ son semejantes porque son matrices de un mismo endomorfismo y por tanto tienen la misma traza. De aquí

$$2\cos(\theta) = \operatorname{tr}(M(f, B)) = \operatorname{tr}(M(f, B')) = 2\cos(\theta')$$

De aquí deducimos $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ y por tanto $\theta' = \theta$ o $\theta' = 2\pi - \theta$.

$\boxed{\text{ii)}}$ Si $f \in \operatorname{Iso}^-(V, g)$ entonces $M(f, B) \in O^-(2)$. Entonces por el Teorema 3.43 sabemos que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M(f, B) = \widetilde{R}(\theta)$. Observemos que $\widetilde{R}(\theta)$ es simétrica y por tanto es diagonalizable. Además de sabemos que los únicos valores propios posibles son ± 1. Como $\det(f) = -1$ deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Consideremos $v_1 \in V_1 \backslash \{0\}$ y $v_2 \in V_{-1} \backslash \{0\}$. Es fácil comprobar que

$$B' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$$

es una base ortonormal de (V, g) tal que

$$M(f, B') = \widetilde{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

□

Corolario 3.45: *Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$. Entonces existe B base ortonormal tal que*

i) *Si $f \in \mathrm{Iso}^+(V,g)$ entonces $M(f,B) = R(\theta)$ para $\theta \in [0,\pi]$.*
ii) *Si $f \in \mathrm{Iso}^-(V,g)$ entonces*

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostración: Lo único que hay que demostrar es el apartado i). Supongamos que $f \in \mathrm{Iso}^+(V,g)$ y $B = \{u_1, u_2\}$ una base ortonormal para (V,g). Sabemos por el apartado i) del Teorema 3.44 que $M(f,B) = R(\theta)$ para $\theta \in [0, 2\pi)$. Si $\theta \in [0,\pi]$ ya habríamos acabado. Supongamos que $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Entonces podemos considerar la base ortonormal $B' = \{u_2, u_1\}$. Observemos que

$$\begin{aligned} M(f,B') &= M(B,B') \cdot M(f,B) \cdot M(B',B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\theta) & -\mathrm{sen}(2\pi-\theta) \\ \mathrm{sen}(2\pi-\theta) & \cos(2\pi-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Basta observar ahora que si $\theta \in (\pi, 2\pi)$ entonces $2\pi - \theta \in (0,\pi)$. □

Resumimos la clasificación de las isometrías de un plano vectorial euclídeo (V,g) en el siguiente esquema:

$$f \in \mathrm{Iso}(V,g) \left\{ \begin{array}{lcl} \star\ \begin{array}{c} f \in \mathrm{Iso}^+(V,g) \\ (\det(f) = 1) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} f \text{ es una rotación de} \\ \text{ángulo } \cos(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(f) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f = Id \rightarrow \text{Identidad} \\ \bullet\ f = -Id \rightarrow \text{Simetría central} \\ \bullet\ f \text{ es una rotación de ángulo} \\ \quad \theta \in (0,\pi) \end{array} \right. \\ & & \\ \star\ \begin{array}{c} f \in \mathrm{Iso}^-(V,g) \\ (\det(f) = -1) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} \text{Reflexión o simetría axial respecto de } U = V_1 \\ \text{paralela a } U^{\perp} = V_{-1} \end{array} \end{array} \right.$$

4.2. Clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Vamos a clasificar ahora las isometrías de los espacios vectoriales euclídeos de dimensión 3.

Teorema 3.46: *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$. Entonces tenemos:*

i) *Si $\det(f) = 1$ existe B una base ortonormal de (V,g) y $\theta \in [0,\pi]$ tal que*

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R(\theta) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array} \right)$$

ii) *Si* $\det(f) = -1$ *existe* B *una base ortonormal de* (V, g) *y* $\theta \in [0, \pi]$ *tal que*

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right)$$

Demostración: Si $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ tenemos que $p_f(\lambda)$ es un polinomio de grado 3. Por ser de grado impar tenemos que ese polinomio tiene al menos una raíz real, que por la propiedad iii) de 3.41 debe ser $\varepsilon = \pm 1$. Sea $u \in V_\varepsilon \backslash \{0\}$ y denotemos $U = L(\{u\})$. Por ser u un vector propio tenemos que $f(U) = U$. Utilizando ahora la propiedad iv) de 3.41 podemos afirmar que $f(U^\perp) = U^\perp$. Luego $f_1 = f_{|U^\perp} \in \mathrm{Iso}(U^\perp, g_{U^\perp})$. Como $(U^\perp, g_{U^\perp})$ es un plano vectorial podemos utilizar la clasificación de las isometrías para los planos vectoriales. En concreto, del Corolario 3.45 tenemos que existe $B_1 = \{u_1, u_2\}$ una base ortonormal de $(U^\perp, g_{U^\perp})$ tal que

$$M(f_1, B_1) = R(\theta) \text{ , para } \theta \in [0, \pi] \text{ o } M(f_1, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos la base ortonormal $B = \{\frac{u}{\|u\|}, u_1, u_2\}$. Observemos que

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & 0 \;\; 0 \\ \hline 0 & \multirow{2}{*}{$M(f_1, B_1)$} \\ 0 & \end{array}\right)$$

y por tanto $\det(f) = \det(M(f, B)) = \varepsilon \det(M(f_1, B_1))$.

$\boxed{\text{Si } \det(f_1) = 1}$ La base ortonormal B verifica las condiciones del enunciado del teorema.

$\boxed{\text{Si } \det(f_1) = -1}$ En este caso

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Si $\varepsilon = 1$ consideramos la nueva base $B' = \{u_2, u_1, \frac{u}{\|u\|}\}$. Observemos que

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si $\varepsilon = -1$ consideramos la nueva base $B' = \{u_1, u_2, \frac{u}{\|u\|}\}$. Observemos que

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\square$

Resumimos la clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo tridimensional (V, g) en el siguiente esquema:

$$
f \in \operatorname{Iso}(V,g) \begin{cases} \star\ \begin{matrix} f \in \operatorname{Iso}^+(V,g) \\ (\det(f)=1) \end{matrix} & \begin{cases} \bullet\ f = Id \to \text{Identidad} \\ \bullet\ \text{Reflexión o simetría axial respecto de } U = V_1 \\ \bullet\ f \text{ es una rotación de ángulo } \theta = \arccos(\frac{1}{2}(\operatorname{tr}(f)-1)) \in (0,\pi) \\ \quad \text{y eje } U = V_1 \end{cases} \\[2em] \star\ \begin{matrix} f \in \operatorname{Iso}^-(V,g) \\ (\det(f)=-1) \end{matrix} & \begin{cases} \bullet\ f = -Id \to \text{Simetría central} \\ \bullet\ \text{Simetría especular respecto de } U = V_1 \\ \bullet\ f \text{ es la composición de una rotación de ángulo} \\ \quad \theta = \arccos(\frac{1}{2}(\operatorname{tr}(f)+1)) \in (0,\pi) \text{ y eje } U = V_{-1} \text{ con una} \\ \quad \text{simetría especular respecto del plano } U^{\perp} \end{cases} \end{cases}
$$

Supongamos que tenemos (V,g) espacio vectorial euclídeo tridimensional y $f \in \operatorname{Iso}(V,g)$. Vamos a ver cómo podemos clasificar f conociendo $\det(f)$ y los subespacios propios V_1 y V_{-1}.

1) $\boxed{\det(f) = 1}$ En este caso calculamos V_1.

1.1 Si $\dim(V_1) = 3$ entonces $f = Id$.

1.2 Si $\dim(V_1) = 1$ entonces calculamos V_{-1}.

1.2.1 Si $\dim(V_{-1}) = 2$ entonces f es una simetría axial respecto de V_1.

1.2.2 Si $\dim(V_{-1}) = 0$ entonces f es una rotación de eje V_1 y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(f)-1}{2}\right)$.

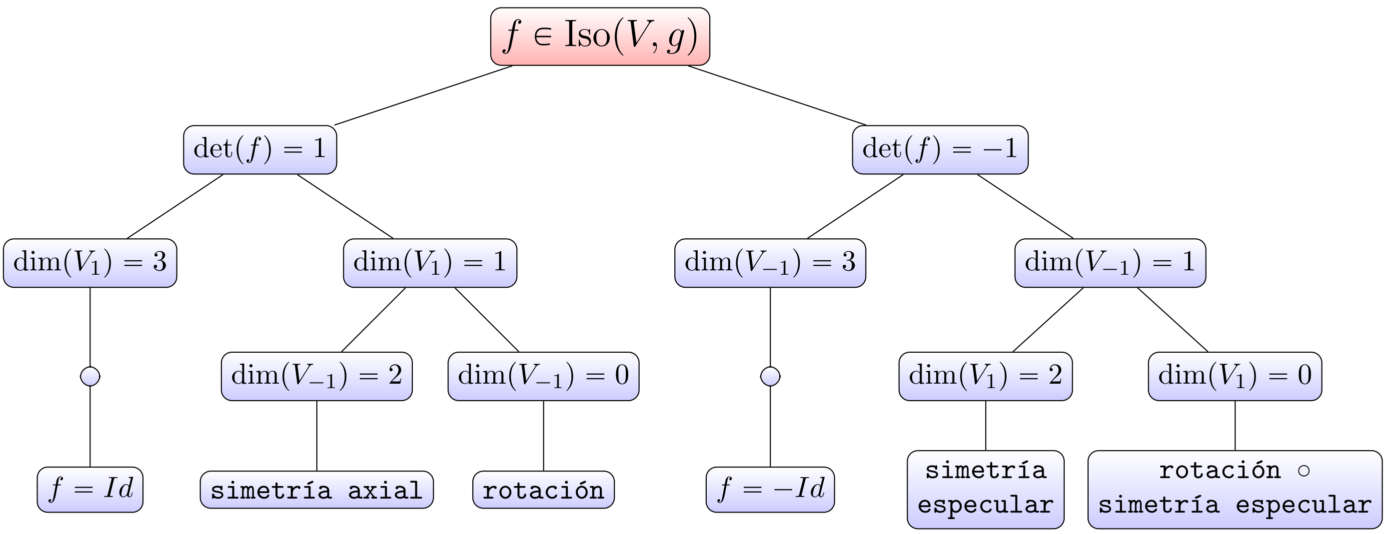
2) $\boxed{\det(f) = -1}$ En este caso calculamos V_{-1}.

1.1 Si $\dim(V_{-1}) = 3$ entonces $f = -Id$, es decir f es una simetría central.

1.2 Si $\dim(V_{-1}) = 1$ entonces calculamos V_1.

1.2.1 Si $\dim(V_1) = 2$ entonces f es una simetría especular respecto de V_1.

1.2.2 Si $\dim(V_1) = 0$ entonces f es una rotación con eje $U = V_{-1}$ y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(f)+1}{2}\right)$ compuesta con una simetría especular respecto de $U^{\perp}$.



Veamos ahora otra forma de clasificar las isometrías. Si $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ tenemos:

1) $\boxed{\det(f) = 1}$ En este caso calculamos $\theta = \arccos(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) - 1))$.

1.1 Si $\theta = 0$ entonces $f = Id$.

1.2 Si $\theta = \pi$ entonces f es una simetría axial respecto de V_1.

1.3 Si $\theta \in (0, \pi)$ entonces f es una rotación de ángulo θ y eje V_1.

2) $\boxed{\det(f) = -1}$ En este caso calculamos $\theta = \arccos(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(f) + 1))$.

1.1 Si $\theta = \pi$ entonces $f = -Id$, es decir f es una simetría central.

1.2 Si $\theta = 0$ entonces f es una simetría especular respecto de V_1.

1.3 Si $\theta \in (0, \pi)$ entonces f es una rotación con eje $U = V_{-1}$ y ángulo θ compuesta con una simetría especular respecto de $U^{\perp}$.

4.3. Clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo de dimensión n. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim(V) = n \geqslant 1$. Para clasificar las isometrías de (V, g) necesitamos demostrar algunos resultados previos.

PROPOSICIÓN 3.47: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ entonces:*

i) *El endomorfismo $h = f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V, g).*

ii) *Si $v \in V \backslash \{0\}$ es un vector propio de h pero no de f entonces*

$$\Pi = L(\{v, f(v)\})$$

es un plano que verifica $f(\Pi) = \Pi$ y por tanto $f_{|\Pi} \in \mathrm{Iso}(\Pi, g_{\Pi})$.

iii) *Si la isometría $f_{|\Pi}$ no tiene valores propios existe una base B de Π tal que*

$$M(f_{|\Pi}, B) = R(\theta) \ , \ \textit{para}\ \theta \in (0, \pi) \ .$$

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Vamos a comprobar que se verifica la condición de autoadjunto. Para ello consideremos $u, v \in V$

$$\begin{aligned} g(u, h(v)) &\underset{\text{Definición de } h}{=} g(u, f(v) + f^{-1}(v)) \underset{g \text{ bilineal}}{=} g(u, f(v)) + g(u, f^{-1}(v)) \\ &\underset{f \text{ y } f^{-1} \text{ isometrías}}{=} g(f^{-1}(u), v) + g(f(u), v) \underset{g \text{ bilineal}}{=} g(f^{-1}(u) + f(u), v) \\ &\underset{\text{Definición de } h}{=} g(h(u), v) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Veamos en primer lugar que Π es un plano, es decir que los vectores v y $f(v)$ son linealmente independientes. Para ello planteamos una combinación lineal de los mismos $\alpha v + \beta f(v) = 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$ entonces $f(v) = -\frac{\alpha}{\beta} v$ y por tanto v sería vector propio en contra de nuestra hipótesis. Por tanto $\beta = 0$ y de aquí $\alpha v = 0$. Como $v \neq 0$ tenemos $\alpha = 0$.

Probemos ahora que Π es invariante por f. Para esto basta probar que $f(f(v)) \in \Pi$. Efectivamente, como v es un vector propio de h existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(v) = f(v) + f^{-1}(v) = \lambda v$$

Y de aquí

$$f(f(v)) + f(f^{-1}(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \ .$$

De donde deducimos

$$f(f(v)) = -v + \lambda f(v) \ .$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Este apartado es consecuencia inmediata del Corolario 3.45 ya que éstas son las isometrías de los planos vectoriales que no tienen valores propios. □

Ya estamos en condiciones de abordar la clasificación de las isometrías en general.

TEOREMA 3.48: *Sea* (V, g) *un espacio vectorial euclídeo,* $\dim(V) = n \geqslant 1$ *y* $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. *Entonces existe una base ortonormal de* (V, g) *tal que*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{array}\right)$$

donde p, q, s *son enteros no negativos tal que* $p + q + 2s = n$*,* $\theta_i \in (0, \pi)$*,* $i = 1, \ldots, s$ *y no dependen de la base elegida.*

Demostración: $\boxed{\text{Caso 1}}$ Supongamos en primer lugar que f no tiene valores propios. Entonces sabemos que $\dim(V) = n = 2s$, para algún $s \in \mathbb{N}$. Razonaremos por inducción sobre s.

Si $s = 1$ entonces V es un plano vectorial y f es una isometría sin valores propios. Por el Corolario 3.45 tendríamos que existe B base ortonormal de (V, g) tal que

$$M(f, B) = R(\theta) \ \text{ con } \ \theta \in (0, \pi) \ .$$

Supongamos que para $\dim(V) = 2(s-1)$ se tiene B una base ortonormal de (V, g) tal que

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_{s-1}) \end{array}\right)$$

para $\theta_i \in (0, \pi)$, $i = 1, \ldots, s-1$ y veamos que es cierto para $\dim(V) = 2s$. Por el apartado i) de la Proposición 3.47 tenemos que el endomorfismo $h = f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Deducimos entonces del Corolario 3.29 que h tiene algún vector propio. Sea v un vector propio de h asociado a dicho valor propio. Observemos que v no puede ser un vector propio de f por la simple razón de que f no tiene valores propios. Tenemos entonces del apartado ii) de la Proposición 3.47 que $\Pi = L(\{v, f(v)\})$ es un plano y $f_{|\Pi} \in \mathrm{Iso}(\Pi, g_\Pi)$. Además como $f_{|\Pi}$ no tiene valores propios del apartado iii) de la Proposición 3.47 deducimos que existe B_1 base ortonormal de Π tal que

$$M(f_{|\Pi}, B_1) = R(\theta_1) \ \text{ con } \ \theta_1 \in (0, \pi) \ .$$

Por otra parte como $f(\Pi) = \Pi$ y f es isometría, de la propiedad iv) de 3.41 tenemos que $f(\Pi^\perp) = \Pi^\perp$. Pero por ser la métrica g euclídea tenemos $\dim(\Pi^\perp) = \dim(V) - \dim(\Pi) = 2s-2 = 2(s-1)$. Luego podemos aplicar la hipótesis de inducción al espacio vectorial euclídeo

$(\Pi^\perp, g_{|\Pi^\perp})$ y a la isometría sin valores propios $f_{|\Pi^\perp}$ obteniendo así una base B' ortonormal de $(\Pi^\perp, g_{|\Pi^\perp})$ tal que

$$M(f_{|\Pi^\perp}, B') = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta_3) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{array}\right)$$

para $\theta_i \in (0, \pi)$, $i = 2, \ldots, s$. Finalmente, si consideramos la base $B = B_1 \cup B'$ obtendríamos

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supongamos ahora que f tiene valores propios. Sabemos entonces por la propiedad ii) de 3.41 que los únicos valores propios posibles son 1 y -1. Denotemos $U = V_1 \oplus V_{-1}$. Claramente $f(U) = U$ y por tanto de la propiedad iv) de 3.41 tenemos que $f(U^\perp) = U^\perp$. Pero $f_{|U^\perp}$ es una isometría de $(U^\perp, g_{|U^\perp})$ que no tiene valores propios y por tanto aplicando el caso 1 deducimos que existe $\widehat{B}$ una base ortonormal de $(U^\perp, g_{|U^\perp})$ tal que

$$M(f_{|U^\perp}, \widehat{B}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{array}\right)$$

para $\theta_i \in (0, \pi)$, $i = 1, \ldots, s$. Si B_1 es una base de V_1 y B_2 es una base de V_{-1} tenemos que en la base $B = B_1 \cup B_2 \cup \widehat{B}$ la matriz de la isometría es como en enunciado del teorema. Observemos que $p = \dim(V_1)$, $q = \dim(V_{-1})$ y $s = \frac{1}{2}(n - p - q)$ no dependen de la base sino solo de la isometría f. □

Corolario 3.49: *Sea $A \in O(n)$, $n \geqslant 1$. Entonces existe $P \in O(n)$ tal que*

$$P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{array}\right)$$

donde p, q, s son enteros no negativos tal que $p + q + 2s = n$, $\theta_i \in (0, \pi)$, $i = 1, \ldots, s$.

Demostración: En $(\mathbb{R}^n, g_0)$ se considera el endomorfismo f tal que $M(f, B_u) = A$. Como $A \in O(n)$ tenemos que $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, g_0)$. Luego por el Teorema 3.48 sabemos que existe B base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ tal que

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & R(\theta_2) & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_s)
\end{array}\right) = M(f,B) = M(B,B_u)^{-1} \cdot M(f,B_u) \cdot M(B,B_u)$$

$$= P^{-1} \cdot A \cdot P \underset{\boxed{P \in O(n)}}{\overset{}{=}} P^t \cdot A \cdot P$$

$\square$