RELACIÓN 1 MN

INTRO. A LOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS NUMÉRICO:

3 Calcula el radio espectral de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$ ¿Qué se puede afirmar sobre $\{A^n\}_{n \geq 1}$?

$$P_\lambda(A) = \det \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{8} = \frac{-\lambda}{2} + \lambda^2 - \frac{1}{8} = 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{8}}}{2} \quad \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} < 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 1 \end{cases}$$ Por tanto $\{A^n\} \longrightarrow 0$

$$\boxed{\{A^n\} \to 0 \iff \rho(A) < 1}$$

4 Encuentra $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\|\cdot\| \in \mathbb{R}^3$ $\|A\| \geq 1$ y $\rho(A) < 1$

$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 500 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, comprobamos $\|A\|_\infty = 500{,}1 > 1$

y $\rho(A) = 0{,}9 < 1$

5 Demuestra que una función real definida en I y de clase C^1 es estable, pero que el recíproco no es cierto. Comprueba que $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ no es estable en $x = 0$

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

! ESTABILIDAD
- $\exists \delta > 0,\ M > 0 : \|y - y_0\| < \delta$
  $\Rightarrow \|f(y) - f(y_0)\| \leq M\|y - y_0\|$

I continua y derivable en $]a,b[$,
por T.V.M $\exists c$ tq

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Rightarrow f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

CONCEPTO DE ESTABILIDAD. $\exists \delta > 0,\ M > 0$

$\|f(y) - f(y_0)\| \leq M\|y - y_0\|$

Tenemos que

$$|f(y) - f(y_0)| = f'(c)(y - y_0) \leq \underbrace{\sup f'(c)}_{M} |y - y_0|$$

$\rightarrow f$ es estable $\rightarrow f$ es continua

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

sea $0{,}1$

$$\left.\begin{array}{l} \|f(0) - f(0{,}1)\| = \|+\sqrt{0{,}1}\| = \sqrt{0{,}1} \\ \|y - y_0\| = +0{,}1 \end{array}\right\} \sup \frac{\sqrt{0} - \sqrt{0{,}1}}{0{,}1} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1}} < M \cdot 0{,}1$$

↳ NO

Demuestra si es cierta:

Toda función real que esté definida en un intervalo y sea estable en todo su dominio es de clase C^1.

$\boxed{\text{FALSO}}$ → contraejemplo $|x|$

$$\sup \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \sup \frac{\|\,|x| - |x_0|\,\|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = 1$$

es estable, pero no es derivable.

6 Decide en función de $\alpha \in \mathbb{R}$ si el problema siguiente está bien planteado.

dado $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ estudiar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Para que esté bien planteado $\begin{cases} \to \text{UNISOLVENTE (tiene resolvente)} \\ \to \text{ESTABLE} \end{cases}$

Estudiamos su resolvente:

$$Ax = y \Rightarrow A^{-1}y = x \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1-a^2}$$

Para $a = 1$ o $a = -1$ → NO ESTÁ BIEN PLANTEADO.

Estudiamos el condicionamiento en $\left.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix} \right\}$ $A^{-1}\begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix} =$

$$c(A, y) = \frac{\|A^{-1}\|\,\|y\|}{\|A^{-1}y\|}$$

y tenemos que $\|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{1+a}{1-a^2} = \dfrac{1}{1-a}$

$$\left\|A^{-1}\begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} 1.1 - 0.22a \\ -1.1a + 0.22 \end{bmatrix}\right\|_\infty$$

si $a > 1$ → $\dfrac{1.1 + 0.22a}{1-a^2}$

si $a < 1$ → $\dfrac{1.1a + 0{,}22}{1-a^2}$

$$\left\|\begin{matrix} 1.1 \\ 0.22 \end{matrix}\right\|_\infty = 1.1$$

$$C(A,y) = \frac{\frac{1}{1-a} \cdot 1{,}1}{\frac{1{,}1 + 0{,}22a}{(1+a)(\cancel{1-a})}} = \frac{1{,}1\,(1+a)}{1{,}1 + 0{,}22a} \quad \text{si} \quad a > 1$$

$$C(A,y) = \frac{1{,}1\,(1+a)}{1{,}1a + 0{,}22} \quad \text{si} \quad a < 1$$

Hemos estudiado el condicionamiento de A (matriz de coeficientes), que coincide con el del problema, por ser A^{-1} la matriz de la resolvente (triplaza) → MAL $\quad C(A,y) = \|A^{-1}\|\|A\|$

7 Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\|\cdot\| \in \mathbb{R}^{N\times N}$ norma matricial inducida. Prueba que

$$\min\{c(A) : A \in \mathbb{R}^{N\times N} \text{ regular}\} = 1$$

y que si $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ son matrices regulares, entonces $c(AB) \leq c(A)c(B)$

CONDICIONAMIENTO:

$$\boxed{c(A) = \|A^{-1}\|\|A\|}$$

$\min\{c(A) \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N}\} = \min\{\|A^{-1}\|\|A\| \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N}\} =$

* $\|A^{-1}\| = \sup\{\|A^{-1}x\| \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ y } \|x\| = 1\}$

$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ y } \|x\| = 1$

Tenemos que demostrar que $\boxed{c(A) \geq 1}$

$$c(A) = \|A^{-1}\|\|A\| = \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \geq \|A^{-1}Ax\| = 1$$

$A, B \in Gl_n(\mathbb{R})$

$$c(AB) = \|(AB)^{-1}\| \cdot \|AB\| \leq \|B^{-1}\|\|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|B\| = c(A) \cdot c(B)$$

8 Estudia el condicionamiento de las siguientes funciones

a) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x \quad (0 < x < \pi)$

$f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

$$C(f, x_0) = \frac{\cancel{e^x}(\operatorname{sen} x + \cos x)\, x}{\cancel{e^x} \operatorname{sen} x} = x - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, x$$

$\operatorname{sen} x > (\operatorname{sen} x - \cos x)\, x$

(x tiene que tender a

b) $f(x) = 2 - 4\cos x$

$$f'(x) = -4 \operatorname{sen} x$$

$$C(f,x) = \frac{-4 \operatorname{sen} x \cdot x}{2 - 4\cos x} = \frac{-2 \operatorname{sen} x \cdot x}{1 - 2\cos x}$$

c) $f(x) = \log \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$C(f,x) = \frac{\frac{1 \cancel{x}}{2 \cancel{x}}}{\log \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \log \sqrt{x}}$$

9 PAGE - RANK (al final)

10 Decide si el siguiente razonamiento es correcto:

"En la sucesión de Fibonacci, al ser $n \in \mathbb{N}: x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dividiendo por x_{n+1} obtenemos $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}}$

y si $\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$,

tenemos que

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0 \qquad \ell = \phi \text{"}$$

Probamos que la sucesión $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$ es convergente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\phi^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{\cancel{\phi^n}\left(\phi - \phi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right)^{n+1}\right)}{\cancel{\phi^n}\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right)^n\right)} = \longrightarrow \frac{\phi}{1}$$

y como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right)^n \longrightarrow 0$

(13) Fijada una base b. sean $k \geq 1$, $0 \leq a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots \leq b-1$
$0 \leq a_k < b-1$

Demuestra que $(0.0\ldots 0a_k a_{k+1} a_{k+2}\ldots)_b \leq (0.0\ldots 0a_k+1)_b$

$$(0.0\ldots 0a_k a_{k+1}\ldots)_b = \sum_{n=k}^{N} a_n b^{-n} \leq \frac{a_k}{b^k} \cdot (b-1)\cdot \sum_{n=k+1}^{N} b^{-n} =$$

$$= \frac{a_k}{b^k} + \cancel{(b-1)} \cdot \frac{\frac{1}{b^{k+1}}}{\frac{\cancel{(b-1)}}{b}} = \frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^k} = \frac{a_k+1}{b^k}$$

(14) Describe todos los puntos estrictamente positivos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2,3,-1,2)$. Calcula ε_M y $\frac{\varepsilon_M}{2}$.
Obtén la truncatura y redondeo de 3,25, comprobando la acotación de los errores relativos // absolutos.

$0,111 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $\quad 0,110 = \frac{3}{4}$ $\quad 0,101 = \frac{5}{8}$ $\quad 0,100 = \frac{1}{2}$

$0,011 = \frac{3}{8}$ $\quad 0,010 = \frac{1}{4}$ $\quad 0,001 = \frac{1}{8}$

$\boxed{e=-1}$

$0,111 \cdot 2^{-1} = \frac{7}{16}$ $\quad 0,110 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{8}$ $\quad 0,101 \cdot 2^{-1} = \frac{5}{16}$ $\quad 0,100 = \frac{1}{4}$

$0,011 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{16}$ $\quad 0,010 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{8}$ $\quad 0,001 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{16}$

$\boxed{e=0}$

$0,111 = \frac{7}{8}$ $\quad 0,110 = \frac{3}{4}$ $\quad 0,101 = \frac{5}{8}$ $\quad 0,100 = \frac{1}{4}$

$0,011 = \frac{3}{16}$ $\quad 0,010 = \frac{1}{8}$ $\quad 0,001 = \frac{1}{16}$

$\boxed{e=1}$

$0,111 \cdot 2 = \frac{14}{8}$ $\quad 0,110 = \frac{6}{4}$ $\quad 0,101 = \frac{10}{8}$ $\quad 0,100 = \frac{1}{2}$

$0,011 = \frac{6}{16}$ $\quad 0,010 = \frac{1}{4}$ $\quad 0,001 = \frac{1}{8}$

$\boxed{e=2}$

$0,111 \cdot 4 = \frac{7}{2}$ $\quad 0,110 = 3$ $\quad 0,101 = \frac{5}{2}$ $\quad 0,100 = 1$

$0,011 = \frac{3}{8}$ $\quad 0,010 = \frac{1}{2}$ $\quad 0,001 = \frac{1}{4}$

•) $\varepsilon_M = b^{1-t} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\qquad \frac{\varepsilon_M}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

•) $3{,}25 \rightarrow \quad 3 \rightarrow 011$ $\quad 0{,}11 , 01$ $\quad \nearrow x =$

$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ 2 \\ \hline 0{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}5 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}$ $\qquad 0{,}1101 \cdot 2^2$

$\rightarrow$ truncamiento $\rightarrow 0{,}110$
redondeo $\rightarrow 0{,}101$

$$\frac{|x - rd(x)|}{|x|} = 0{,}23 < 0{,}25$$

$$0{,}101 = \frac{5}{8}$$

$0{,}8125$

(16) Determina el rango de variación de $|x|$ en $\mathbb{F}(b,t,L,U)$, el épsilon máquina y su precisión.

$$\min(x) = (0{,}1000000)_b^{L} = b^{L} \cdot \frac{1}{b} = b^{L-1}$$

$$\max(x) = (0{,}(b-1)(b-1)\ldots)_b^{U} = (b-1) \cdot b^{U} \cdot \sum_{u=1}^{t} b^{-u} =$$

$$= \cancel{(b-1)}\, b^{U} \frac{b^{-1} - b^{-t-1}}{\frac{\cancel{(b-1)}}{b}} = b^{U} \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{b^{t+1}}}{\frac{1}{b}} = \frac{b^{U+\cancel{1}} \cdot (b^{t}-1)}{b^{t+\cancel{1}}} =$$

$$= b^{U} - b^{U-T} = \frac{b^{U}(b^{t}-1)}{b^{t}} = b^{U}\left(1 - \frac{1}{b^{t}}\right) = b^{U}(1 - b^{-t})$$

$$\varepsilon_M = (0{,}10\ldots\ldots1)_b - (0{,}1\ldots\ldots0)_b =$$

$$= b \cdot \left(\frac{1}{b^{1}} + \frac{1}{b^{t}}\right) - \frac{1}{b} b = b\left(\frac{1}{b^{t}}\right) = b^{1-t}$$

(17) Sea $\{x_u\}$ la sucesión

$$x_u := \int_0^1 \frac{x^u}{x+3}\,dx$$

Justifica razonadamente que verifica la recurrencia:

$$x_0 = \log\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$u \geq 1 \Rightarrow x_u = \frac{1}{u} - 3x_{u-1}$$

Para $u = 0$ $\qquad x_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+3} = \left[\log(x+3)\right]_0^1 = \log\left(\frac{4}{3}\right)$

Para $u \geq 1$

$$x_u = \int \frac{x^u}{x+3}dx = \int_0^1 x^{u+1} - \frac{3x^{u+1}}{x+3} = \int_0^1 x^{u+1} - \int_0^1 \frac{3x^{u+1}}{x+3} = \frac{x^u}{u} - 3\int_0^1 \frac{x^{u-1}}{x+3}$$

$$= \frac{1}{u} - 3x_{u-1}$$

(11) Obtén la representación binaria:

a) 8.275 $\quad 8 \longrightarrow 1000$

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}275 & 0{,}550 & 0{,}100 & 0{,}200 & 0{,}4 \\ \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 \\ \hline 0{,}550 & 1{,}100 & 0{,}200 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{array} \Bigg\} 1000{,}01000\ldots)_2$$

b) $-6{,}6875$

$6 \longrightarrow 0110$

$$\begin{array}{cccc} 0{,}6875 & 0{,}375 & 0{,}750 & 0{,}5 \\ \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 \\ \hline 1{,}3750 & 0{,}750 & 1{,}50 & 1 \end{array} \Bigg\} -0110{,}1011)_2$$

c) $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{101}$

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\cdot\left(1 + \frac{5}{7}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{5}{7}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\left(\frac{5}{7}\right)$$

(12) ¿Es posible encontrar un número decimal finito que en binario sea infinito? En general, ¿qué tiene que cumplir una base b para que toda representación finita en dicha base sea finita en b=10?

EJEMPLO $\rightarrow \; 0{,}2)_{10} \rightarrow 0{,}\overline{0011})_2$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Un número finito en $b=10$ x:

$$x = \sum_{n=-m}^{t} a_n 10^n$$

Un número finito en $b=2$

$$x = \sum_{n=-m}^{+} a_n b^{-n}$$

las series deben converger.

16 Considera $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ con $L<U$. Sean $L \le e < e' \le U$ y $(0.a_1 \dots a_t)\, b^e$, $(0.\alpha_1 \dots \alpha_t) \cdot b^{e'} \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$. Demuestra que

$$(0.a_1 \dots a_t)\, b^e < (0.\alpha_1 \dots \alpha_t)\, b^{e'}$$

tenemos que demostrar que:

$$\max (0.a_1 \dots a_t) b^e = (0.(b-1) \cdots (b-1))\, b^e = (b-1) \sum_{u=1}^{t} b^{-u} = (b-1) \cdot \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{b^{t+1}}}{\frac{(b-1)}{b}}$$

$$= (b-1) \cdot \frac{\frac{b^t - 1}{b^{t+1}}}{\frac{(b-1)}{b}} = (\cancel{b-1}) \cdot \frac{\cancel{b}(b^t - 1)}{b^{t+1}\cancel{(b-1)}} \cdot b^e = b^e (1 - b^{-t})$$

$$\min (0.1 \dots 0) \cdot b^{e'} = b^{e'} \cdot \frac{1}{b}$$

$$b^e (1 - b^{-t}) \le b^{e'-1} \quad \rightarrow \quad \text{y sabemos que}$$

$$b^e - \frac{b^e}{b^t} < b^{e'} - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e < e' \\ e \le e' - 1 \\ b^e \le b^{e'-1} \\ b^e - \gamma < b^{e'-1} \end{array}}$$

El sistema tendrá estructura de bloque

Scanned with CamScanner

1 Comprueba que si $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p}$$ es una norma en dicho e.v.

NORMA

- $\|\cdot\| \geq 0$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| \leq \lambda \|y\|$

$\boxed{\text{Comprobamos para } p=1}$

- $\|x\|_p = \sum_{j=1}^{N} |x_j| \geq 0$

 y si $\|x\|_p = 0$, entonces

 $\sum_{j=1}^{N} |x_j| = 0 \Rightarrow (x)_j = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

- $\|x+y\| = \sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j|$
- $\|\lambda x\|_p = \sum_{j=1}^{N} |\lambda x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda||x_i|\right) = |\lambda| \sum_{j=1}^{N} (x_i) = |\lambda| \|x\|_p$

Para $p > 1$, comprobamos si tenga las mismas propiedades

- $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} \geq 0$, las potencias y las raíces conservan el orden.
- $\|\lambda x\|_p = \underline{\text{desarrollo de antes}} \leq |\lambda|^{1/p} \|x\|_p$
- $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

INDICACIÓN p' el único número tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Leftrightarrow \boxed{pp' = p + p'}$

$pp' = p + p' \Leftrightarrow p = pp' - p' \Leftrightarrow p = p'(p-1) \Leftrightarrow p' = \frac{p}{p-1}$

Tenemos que demostrar dos cosas:

$$\boxed{x, y \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}}$$

tenemos p, p' con la condición anterior

definimos $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - xy$ $\qquad f'(x) = x^{p-1} - y = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{x = y^{\frac{1}{p-1}}}$

$f''(x) = (p-1)\, x^{p-2} = 0$

$f''\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = (p-1)\, y^{\frac{p-2}{p-1}}$, $> 0 \rightarrow$ es un mínimo absoluto.

$y \rightarrow f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^{p'}}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - y^{p'}$

2

$$y^{p'}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}-1\right)=0\,, \quad \text{esto es, } \forall x,\ f(x)\geq 0$$

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'}-xy\geq 0 \iff \boxed{\frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'}\geq xy}$$ como se quería demostrar

Lo seguido a demostrar es:

La desigualdad de Hölder:

$$x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N\in\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}|x_j y_j|\leq\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{N}|y_j|^{p'}\right)^{1/p'}$$

- si $x=y=0$, se verifica
- si $x\neq 0$ $y\neq 0$ y $\|x\|_p=1=\|y\|_p$

$$\sum_{j=1}^{N}x_j y_j\leq\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{x_j^p}{p}+\frac{y_j^{p'}}{p'}\right|\leq\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{x_j^p}{p}\right|+\left|\frac{y_j^{p'}}{p'}\right|=\sum_{j=1}^{N}\frac{|x_j|^p}{p}+\sum_{j=1}^{N}\frac{|y_j|^{p'}}{p'}=$$

$$=\frac{1}{p}(\|x\|_p)^p+\frac{1}{p'}(\|y\|_p)^{p'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

- en general

$$\frac{x}{\|x\|_p}$$

② (LANDAU)

Sean $\begin{cases} N \in \mathbb{N} \\ A \text{ subconjunto no vacío de } \mathbb{R}^N \\ f, g : A \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Supongamos que $x \in A'$ y existe $\gamma > 0$ tal que $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ 0 < \|x - x_0\| < \gamma \end{array}\right| \Rightarrow g(x) \neq 0$

- Se dice que f es de orden O respecto de g cuando $x \to x_0$ si existen $M > 0$ y $\delta > 0$: $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \end{array}\right| \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M$

- f de orden o r. g cuando $x \to x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Comprueba

a) $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0$ $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$

$f(x) = o\, g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, es decir, que

si $\|x - x_0\| < \delta$ $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0 < M \quad \forall M > 0$

b) $f(x) = O(g_1(x))$ cuando $x \to x_0$ y $g_1(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0$

$\Downarrow$

$f(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0$

<u>O grande</u>

$f(x) = O(g_1(x))$
$\hookrightarrow$ $\left|\dfrac{f(x)}{g_1(x)}\right| < \sqrt{M}$ y $\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} < \sqrt{M}$

$$\frac{f(x)}{\cancel{g_1(x)}} \cdot \frac{\cancel{g_1(x)}}{g_2(x)} = \frac{f(x)}{g_2(x)} < \sqrt{M}\sqrt{M} < M$$

c) $f_1(x) = O(g_1(x))$ $x \to x_0$ y $f_2(x) = O\, g_2(x)$ $x \to x_0$

$f_1(x) f_2(x) = O(g_1(x)\, g_2(x))$ $x \to x_0$

$\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} < \sqrt{M} \qquad \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} < \sqrt{M} \qquad \Rightarrow \dfrac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} < M$

Scanned with CamScanner