11 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

11.1 EL ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES

Lema 11.1.1. *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones acotadas,* $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ *y sea* P *una partición del intervalo* $[a,b]$*. Se cumple que*

1) $S(\lambda f, P) = \lambda S(f,P)$, $I(\lambda f, P) = \lambda I(f,P)$,

2) $S(-f,P) = -I(f,P)$, *y*

3) $S(f+g,P) \leqslant S(f,P) + S(g,P)$, $I(f+g,P) \geqslant I(f,P) + I(g,P)$.

Demostración. Usar las propiedades de supremo e ínfimo. □

11.1.1 Linealidad

Proposición 11.1.2. *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones integrables y sea* λ *un número real.*

1) *La función* λf *es integrable y*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

2) *La función* $f+g$ *es integrable y*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. 1) Por el lema 11.1.1, dada una partición P

$$|S(f,P) - I(f,P)| = |S(-f,P) - I(-f,P)|$$

de donde se deduce que f es integrable si, y sólo si, lo es $-f$.
Si $\lambda > 0$, entonces $S(\lambda f, P) = \lambda S(f,P)$ y $I(\lambda f, P) = \lambda I(f,P)$. Por tanto,

$$|S(\lambda f,P) - I(\lambda f,P)| = \lambda\,|S(f,P) - I(f,P)|\,,$$

de donde se deduce que λf es integrable. En resumen, si f es integrable, λf es integrable para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Sea P una partición del intervalo $[a,b]$. Usando el lema 11.1.1, se obtiene que

$$\begin{aligned} S(f+g,P) - I(f+g,P) &\leqslant S(f,P) + S(g,P) - I(f,P) - I(g,P) \\ &= \left(S(f,P) - I(f,P)\right) + \left(S(g,P) - I(g,P)\right), \end{aligned}$$

de donde se deduce que $f+g$ es integrable.

Una vez que sabemos que $\lambda f + \mu g$ es integrable, para λ y μ reales, podemos comprobar la linealidad de la integral usando sumas de Riemann:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda f + \mu g)\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu g\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

11.1.2 Monotonía

Proposición 11.1.3. *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones integrables.*

1) *Si* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) *La función* $|f|$ *es integrable y*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demostración. 1) Como $f(x) \leqslant g(x)$, para cualquier $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

2) De la desigualdad $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$ válida para $x, y \in [a,b]$, se deduce que

$$S(|f|, P) - I(|f|, P) \leqslant S(f,P) - I(f,P), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}([a,b]).$$

De aquí se obtiene como consecuencia que $|f|$ es integrable si f lo es. Además, como $-|f|(x) \leqslant f(x) \leqslant |f|(x)$ para cualquier x, se tiene que

$$-\int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx,$$

y, por tanto,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Observación 11.1.4. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

no es integrable aunque su valor absoluto sí lo sea.

Corolario 11.1.5. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable y sea* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leqslant M$ *para cualquier* $x \in [a,b]$. *Entonces*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant M(b-a).$$

11.1.3 Producto

Proposición 11.1.6. *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones integrables.*

1) *El producto de las funciones,* fg, *es integrable.*

2) $\left(\int_a^b (fg)(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

3) $\left(\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$ *Desigualdad de Minkowski*

Demostración. 1) En primer lugar, usando que

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

es suficiente con demostrar que si f es integrable, entonces f^2 es integrable. Además, podemos suponer que $f(x) \geqslant 0$ ya que $f^2 = |f|^2$. Por tanto, sea f una función integrable verificando que $f(x) \geqslant 0$ para cualquier $x \in [a,b]$ y sea M tal que $|f(x)| \leqslant M$. De la desigualdad

$$\left|f(x)^2 - f(y)^2\right| = \left|\big(f(x)-f(y)\big)\big(f(x)+f(y)\big)\right| \leqslant 2M\,|f(x)-f(y)|$$

se deduce que

$$\left|S(f^2,P) - I(f^2,P)\right| \leqslant 2M\,|S(f,P) - I(f,P)|\,, \quad (P \in \mathcal{P}([a,b])),$$

y, en consecuencia, que f^2 es integrable.

2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b (\lambda f + g)^2\,(x)\,dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b f(x)^2\,dx + 2\lambda \int_a^b (fg)(x)\,dx + \int_a^b g(x)^2\,dx. \end{aligned}$$

Tenemos un polinomio de grado dos en la variable λ, por lo que su discriminante tiene que ser menor o igual que cero:

$$\left(2\int_a^b (fg)(x)\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right) \leqslant 0,$$

de donde se deduce la desigualdad buscada.

3) Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en cada uno de los sumandos siguientes

$$(f+g)^2 = f(f+g) + g(f+g),$$

se tiene que

$$\int_a^b f(f+g) \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ y}$$
$$\int_a^b g(f+g) \leqslant \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$\int_a^b (f+g)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dividiendo por $\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ en ambos lados se obtiene la desigualdad buscada.

□

Proposición 11.1.7. *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones integrables. Supongamos que* $\inf\{|f(x)| : x \in [a,b]\} > 0$*. Entonces* $1/f$ *es integrable.*

Demostración. Sea $m = \inf\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Usando que

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{f(x)f(y)}\right| \leqslant \frac{|f(x)-f(y)|}{m^2}$$

se obtiene que

$$S(1/f, P) - I(1/f, P) \leqslant \frac{S(f,P) - I(f,P)}{m^2},$$

de donde se deduce lo pedido. □

Figura 40: Carl Johannes Thomae (1840–1921)

11.1.4 Composición*

La regla de la cadena no es válida para funciones integrables aunque en algunos casos particulares sí se cumple.

Proposición 11.1.8. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable y sea* $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *una función continua verificando que* $f([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$*. Entonces* $g \circ f$ *es integrable en* $[a,b]$

Demostración. En primer lugar, sea K tal que $|f(x)| \leqslant K$ para cualquier $x \in [\alpha,\beta]$. Además, por el teorema de Heine, f es uniformemente continua. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Consideremos los conjuntos

$$A = \{i : \sup g(I_i) - \inf g(I_i) < \delta\},$$
$$B = \{i : \sup g(I_i) - \inf g(I_i) \geqslant \delta\}$$

Entonces, si $I_i = [x_{i-1}, x_i]$,

$$\sum_{i=1}^n (\sup g(I_i) - \inf g(I_i))\, \ell(I_i) \geqslant \sum_{i \in B} (\sup g(I_i) - \inf g(I_i))\, \ell(I_i) \geqslant \sum_{i \in B} \delta \ell(I_i)$$

y, por tanto,

$$\sum_{i \in B} \ell(I_i) \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n (\sup g(I_i) - \inf g(I_i))\, \ell(I_i).$$

Entonces, usando la continuidad uniforme y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\big(\sup f(g(I_i)) - \text{ínf}\, f(g(I_i))\big)\ell(I_i) &\leqslant \sum_{i\in A} \left(\sup f(g(I_i)) - \text{ínf}\, f(g(I_i))\right) \ell(I_i) \\
&\quad + \sum_{i\in B} \left(\sup f(g(I_i)) - \text{ínf}\, f(g(I_i))\right) \ell(I_i) \\
&\leqslant \sum_{i\in} \varepsilon\ell(I_i) + \sum_{i\in B} 2K\ell(I_i) \\
&\leqslant \varepsilon(b-a) \\
&\quad + \frac{2K}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\big(\sup g(I_i) - \text{ínf}\, g(I_i)\big)\ell(I_i).
\end{aligned}$$

Como la función g es integrable, si elegimos una partición P tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\sup g(I_i) - \text{ínf}\, g(I_i)\big)\ell(I_i) < \frac{\varepsilon\delta}{2K},$$

obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\sup f(g(I_i)) - \text{ínf}\, f(g(I_i))\big)\ell(I_i) < \varepsilon(b-a+1),$$

con lo que $f \circ g$ es integrable al verificar la condición de Cauchy. □

Si la composición se hace en el orden opuesto, primero la función continua y después componemos con una función integrable, entonces no se puede asegurar que el resultado sea una función integrable. En el ejemplo siguiente usamos la función de Thomae para construir, valga la redundancia, un tal ejemplo.

Ejemplo 11.1.9 (La función de Riemann o de Thomae). Consideremos la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 1/q, & \text{si } x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

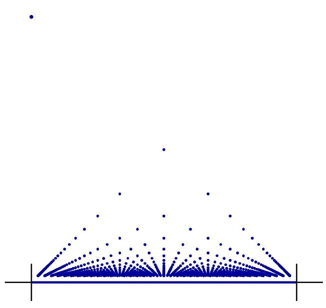


Figura 41: La función de Thomae es integrable a pesar de ser discontinua en los números racionales

1) La función f es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales.

   Esto es consecuencia de que $\text{lím}_{x\to x_0} f(x) = 0$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$. Para demostrar esto, observemos que sólo hay una cantidad finita de números racionales con denominador menor o igual que un natural n fijo:

   $$A_n = \left\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{p}{q} : 1 \leqslant p < q \leqslant n\right\}.$$

   Fijado $x_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Tomemos

   $$\delta < \operatorname{dist}\big(x_0, A_n \setminus \{x_0\}\big) = \text{mín}\big\{|x_0 - x| : x \in A_n\big\}.$$

   Si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $x \notin A_n$ y, por tanto, $|f(x)| = f(x) < 1/n < \varepsilon$.

2) La función f es integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

   De la densidad de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se sigue que, para cualquier partición P, tenemos valores en cada subintervalo donde la función se anula y, por tanto, $I(f, P) = 0$ siempre. Sólo nos queda comprobar que dado $\varepsilon > 0$, existe una partición tal que $S(f, P) < \varepsilon$.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Si $r > 0$, sólo existen una cantidad finita de números racionales $c_1, c_2, \ldots, c_N$ donde $f(c_i) > r$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición con $\|P\| < r/N$. Entonces

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

tiene dos tipos de sumandos: aquellos en los que el supremo de la función vale menos que r y aquellos en los vale mayor o igual. Esto depende de si alguno de los puntos c_i está en el subintervalo. Como un punto c_i puede estar en dos intervalos a lo sumo, hay un máximo de $2N$ sumandos en los que la función valga r o más. En esos acotamos la función por 1. En el resto acotamos la función por r y la suma de las longitudes de los subintervalos por la longitud total. Entonces

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant 2N \|P\| + r(b-a) \|P\| < r(2 + b - a). \end{aligned}$$

Es suficiente, por tanto, con tomar $r < \varepsilon/(2 + b - a)$.

Ejemplo 11.1.10. Sea $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función característica de $]0,1]$, esto es,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]0,1], \\ 0, & \text{si } x \notin]0,1]. \end{cases}$$

Si f es la función de Thomae, entonces $g \circ f$ es la función de Dirichlet

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

que no es integrable.

En [38] se puede encontrar un ejemplo de una función f monótona, de clase C^1 y una función integrable g tales que la composición $g \circ f$ no es integrable.

11.1.5 Aditividad de la integral

Proposición 11.1.11. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada y sea* $c \in]a,b[$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f *es integrable en* $[a,b]$.
2) f *es integrable en* $[a,c]$ *y es integrable en* $[c,b]$.

Aditividad de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, sea P una partición de $[a,b]$ verificando que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$. Consideremos la partición del intervalo $[a,c]$ definida como

$$P_1 = (P \cup \{c\}) \cap [a,c].$$

Entonces

$$S(f, P_1) - I(f, P_1) \leqslant S(f, P \cup \{c\}) - I(f, P \cup \{c\}) \leqslant S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon.$$

Por tanto, f es integrable en $[a, c]$. De forma análoga se demuestra que f es integrable en $[c, d]$.

Recíprocamente, supongamos que f es integrable en $[a, c]$ y es integrable en $[c, b]$. Sean $I_1 = \int_a^c f(x)\,dx$ e $I_2 = \int_c^d f(x)\,dx$. Dado $\varepsilon > 0$, por el lema 10.2.1, existen particiones P_1 y P_2 de $[a, c]$ y $[c, d]$ respectivamente tales que

$$I_1 - \varepsilon/2 \leqslant I(f, P_1) \leqslant I_1 \leqslant S(f, P_1) < I_1 + \varepsilon/2$$
$$I_2 - \varepsilon/2 \leqslant I(f, P_2) \leqslant I_2 \leqslant S(f, P_2) < I_2 + \varepsilon/2.$$

Si tomamos $P = P_1 \cup P_2$, se tiene que

$$(I_1 + I_2) - \varepsilon < I(f, P) \leqslant I_1 + I_2 \leqslant S(f, P) < (I_1 + I_2) + \varepsilon,$$

con lo que f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = I_1 + I_2$. □

Corolario 11.1.12. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entones f es integrable en cualquier intervalo $[c, d] \subset [a, b]$.*

11.2 MÁS CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

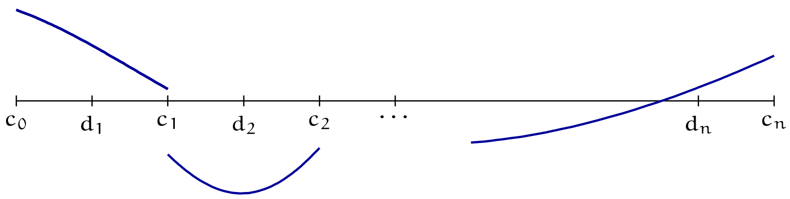
En esta sección vamos a ver que la continuidad puede fallar en algunos puntos y aún así se mantiene la integrabilidad.

Proposición 11.2.1. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Supongamos que f es integrable en el intervalo $[a + r, b]$ para cualquier $0 < r < b - a$. Entonces f es integrable en $[a, b]$. En ese caso, se tiene que*

$$\lim_{r \to 0} \int_{a+r}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposición 11.2.2. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si la función f tiene un número finito de discontinuidades, entonces es integrable.*

Demostración. Sea $A = \{a = c_0 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b\}$ tal que f es continua en $[a, b] \setminus A$.



Sea $d_i = (c_{i-1} + c_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$, el punto medio entre dos puntos de A consecutivos. Entonces f es integrable en cada uno de los intervalos $[c_{i-1}, d_i]$ o $[d_i, c_i]$ por la proposición 11.2.1, ya que la restricción de f a los correspondientes intervalos abiertos es continua. Para concluir, basta aplicar la aditividad de la integral. □

Ejemplo 11.2.3. La función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es integrable ya que sólo tiene un punto de discontinuidad.

Proposición 11.2.4. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función verificando que el conjunto*

$$\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$$

es finito. Entonces la función g es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.