19 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Utilizaremos la notación $\int f(x)\,dx$ para denotar una primitiva de la función f. Por tanto, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de "integral de la función" cuando deberíamos decir "primitiva de la función".

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y cubren la mayoría de los casos usuales, pero no debes olvidar que hay muchos más. En cualquier caso, lo primero y más importante es manejar con soltura las derivadas de las funciones elementales y la tabla de primitivas inmediatas.

19.1 CAMBIO DE VARIABLE

Nos vamos a remitir a la proposición que establece el cambio de variable (proposición 15.3.7) que ya hemos visto. Consiste en transformar una primitiva en otra más sencilla mediante un cambio de variable. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x)\,dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 19.1.1. Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx &= \begin{bmatrix} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy \\ &= \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy = \int\left(3 - \frac{5}{2+y}\right)dy \\ &= 3y - 5\log|y+2| = 3e^x - 5\log\left(e^x+2\right).\end{aligned}$$

19.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método se basa en la proposición 15.3.5. Vamos a cambiar un poco la notación. En concreto, si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplo 19.2.1. Calcular $\int x\,e^x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int x\,e^x\,dx &= \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x\,e^x - \int e^x\,dx \\ &= x\,e^x - e^x = e^x(x-1).\end{aligned}$$

Ejemplo 19.2.2. Calcular $\int \operatorname{sen}(x)\, e^x \, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x) e^x \, dx &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}(x), & du = \cos(x) dx \\ dv = e^x \, dx, & v = e^x \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{sen}(x) e^x - \int \cos(x) e^x \, dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \cos(x), & du = -\operatorname{sen}(x) dx \\ dv = e^x \, dx, & v = e^x \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x - \int \operatorname{sen}(x) e^x \, dx,
\end{aligned}$$

con lo que despejando tenemos

$$\int \operatorname{sen}(x) e^x \, dx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x \right).$$

19.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

19.3.1 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2 + bx + c = (x-d)^2 + k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} \, dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2} \, dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2} \, dx \\
&= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2} \, dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2} \, dx \\
&= \frac{M}{2} \log \left| (x-d)^2 + k^2 \right| + (N+Md) \int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}
\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 19.3.1. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} \, dx$.

Como $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$, hacemos el cambio $y = x + 1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} \, dx = \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1} \, dy &= \int \frac{2y}{y^2+1} \, dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\
&= \log(y^2+1) + \arctan(y) \\
&= \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1).
\end{aligned}$$

19.3.2 Raíces reales y/o complejas simples

En este caso

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)\dots(x^2 + b_mx + c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas (método de descomposición en fracciones simples) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}\\ &+ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots \frac{B_mx + C_m}{x^2 + b_mx + c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Observación 19.3.2. Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1,...,A_n dando a la variable x los valores a_1,..., a_n.

Ejemplo 19.3.3. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx$:

Como $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Desarrollamos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}\\ 1 &= (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D).\end{aligned}$$

e igualamos coeficientes,

$$\left.\begin{array}{lllll} A & +B & +C & & = 0\\ A & -B & & +D & = 0\\ A & +B & -C & & = 0\\ A & -B & & -D & = 1\end{array}\right\} \implies A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1}\\ &= \frac{1}{4}\log|x - 1| - \frac{1}{4}\log|x + 1| - \frac{1}{2}\arctan(x).\end{aligned}$$

19.3.3 Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}\dots(x - a_n)^{r_n},$$

y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x - a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x - a_2} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots \frac{C_{r_n}}{(x - a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 19.3.4. Calcular $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 1)^3}\, dx$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\ &= \frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\\ &= \frac{(A+B)x^3+(3A+B+C)x^2+(3A-B+D)x+A-B-C-D}{(x-1)(x+1)^3}\\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{llll} A+B & & &=0\\ 3A+B & +C & &=0\\ 3A-B & & +D &=0\\ A-B & -C-D & &=1\end{array}\right\} \iff A=\frac{1}{8},\ B=-\frac{1}{8},\ C=-\frac{1}{4},\ D=-\frac{1}{2}.$$

La integral nos queda

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^3}\\ &= \frac{1}{8}\log|x-1|-\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}.\end{aligned}$$

19.3.4 Raíces reales y complejas múltiples

Consideremos ahora la primitiva $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el denomimador se factoriza como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Volvemos a utilizar el método de descomposición en fracciones simples, pero para simplificar la notación, supondremos que $Q(x)$ es de la forma siguiente:

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}(x^2+bx+c)^{\beta}\ .$$

Así, la descomposición será:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}\\ &+\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+bx+c)^\beta}\end{aligned}$$

Todas las fracciones que aparecen son de fácil integración salvo aquellas en las que el polinomio numerador es constante y el denominador es de la forma $(x^2+bx+c)^n$ con $n\geqslant 2$. Vamos a verlo con un ejemplo:

Ejemplo 19.3.5. Vamos a calcular $\displaystyle\int\frac{2x^4+4x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}$. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^4+4x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} A &= 1\\ B &= 1\\ C &= 0\\ D = E &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

Al calcular la primitiva, todas las fracciones son de fácil integración, salvo el último sumando:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4+4x^2+x+1}{x(x^2+1)^2} &= \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \end{aligned}$$

Para calcular la última primitiva procedemos así:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \arctan(x) - \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Esta última integral la resolvemos por partes:

$$\begin{aligned} \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx &= \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx, & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Por tanto, la primitiva finalmente es:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4+4x^2+x+1}{x(x^2+1)^2} &= \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,. \end{aligned}$$

Observación 19.3.6. En el caso en que el polinomio denominador sea de la forma $(x^2+bx+c)^n$, con $n \geqslant 3$, razonamos así. En primer lugar, utilizamos que $x^2+bx+c = (x-d)^2+k^2$, y así:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{1}{((x-d)^2+k^2)^n}\,dx &= [y = x-d\ ;\ dy = dx] \\ &= \int \frac{1}{(y^2+k^2)^n}\,dy = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2}{(y^2+k^2)^n}\,dy \\ &= \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2+y^2-y^2}{(y^2+k^2)^n}\,dy \\ &= \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{(y^2+k^2)^{n-1}}\,dy - \frac{1}{k^2}\int y\,\frac{y}{(y^2+k^2)^n}\,dy \end{aligned}$$

El primer sumando se volvería a integrar con el mismo procedimiento, y el segundo se resolvería por partes.

19.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

19.4.1 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)$, $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)$, $\int \cos(ax)\cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big),\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big),\\
\operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)\big).
\end{aligned}$$

Ejemplo 19.4.1.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,dx\\
&= -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x).
\end{aligned}$$

19.4.2 Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \operatorname{cotan}^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\operatorname{cotan}^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x)-1$ y $\operatorname{cosec}^2(x)-1$.

Ejemplo 19.4.2. Calcular $\int \tan^5(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(x)\,dx &= \int \tan^3(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan^3(x)\left(\sec^2(x)-1\right)\,dx\\
&= \int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan^3(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\tan^4(x)\,dx \quad \text{(utilizando el cambio } y=\tan(x)\text{)}$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)\,dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan(x)(\sec^2(x)-1)\,dx\\
&= \int \tan(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) + \log|\cos(x)|.
\end{aligned}$$

19.4.3 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y=\cos(x)$ (si m es impar) o $y=\operatorname{sen}(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 19.4.3. Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx &= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \begin{bmatrix} y=\operatorname{sen}(x)\\ dy=\cos(x)\,dx\end{bmatrix}\\
&= \int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y}-y\\
&= \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

19.4.4 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big), \text{ y } \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big).$$

Ejemplo 19.4.4. Calcular $\int \cos^2(x)\,dx$.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}.$$

19.4.5 Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\right)$, R una función racional par.

Diremos que una función racional R es par si $R(\operatorname{sen}(x),\cos(x)) = R(-\operatorname{sen}(x),-\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y=\tan(x)$

Ejemplo 19.4.5. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)} &= \begin{bmatrix} y=\tan(x) \\ dy = \sec^2 x\,dx\end{bmatrix} = \int \frac{(1+y^2)^3}{y^3}\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}^2(x) + 3\log|\tan(x)| + \frac{3}{2}\tan^2(x) + \frac{1}{4}\tan^4(x)\,.\end{aligned}$$

19.4.6 Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y } dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 19.4.6. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)} &= \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}\,dx = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t\right] \\ &= \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt = \frac{1}{4t^2} + \frac{\log|t|}{2} \\ &= \frac{1}{4\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

19.5 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

19.5.1 Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{senh}(x),\cosh(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 19.5.1. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\,\mathrm{senh}(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+2\,\mathrm{senh}(x)+3\cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1+\frac{5}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ dx = dt/t \end{bmatrix} \\ &= 2\int \frac{dt}{5t^2+2t+1} = \arctan\left(\frac{5\,t+1}{2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{5\,e^x+1}{2}\right)\end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

19.5.2 Integrales de la forma $\int \mathrm{senh}(ax)\cosh(bx)$, $\int \mathrm{senh}(ax)\,\mathrm{senh}(bx)$ o $\int \cosh(ax)\cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}\mathrm{senh}(x)\,\mathrm{senh}(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)-\mathrm{senh}(x-y)\right)\\ \cosh(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)+\mathrm{senh}(x-y)\right)\\ \mathrm{senh}(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{senh}(x+y)+\mathrm{senh}(x-y)\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 19.5.2.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{senh}(3x)\cosh(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \mathrm{senh}(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{senh}(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{8}\cosh(4x)-\frac{1}{4}\cosh(2x).\end{aligned}$$

19.6 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

19.6.1 Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ejemplo 19.6.1. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\\ &= 2y^3-3y^2+6y-6\log|y+1|\\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log\left|\sqrt[6]{x}+1\right|.\end{aligned}$$

19.6.2 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a\,\mathrm{sen}(t)$ o $x = a\cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a\tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 19.6.2. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$:

Hacemos el cambio $x = 2\,\text{sen}(t)$, con lo que $dx = 2\cos(t)dt$ y

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\,\text{sen}^2(t)} = 2\cos(t).$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{2\cos(t)}{4\,\text{sen}^2(t)} 2\cos(t)\,dt = \int \text{cotan}^2(t)\,dt$$
$$= \int \left(\text{cosec}^2(t) - 1\right)\,dt = -\,\text{cotan}(t) - t$$

usando que $\text{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

19.6.3 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a\tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a\,\text{senh}(t)$.

Ejemplo 19.6.3. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t)\,dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t)\sec(t)}\,dt = \int \frac{dt}{\text{sen}(t)}$$
$$= -\log\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \log\left|\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Ejemplo 19.6.4. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Hacemos el cambio $x = \text{senh}(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \text{senh}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\cosh(2t) - 1)\,dt = \frac{1}{4}\,\text{senh}(2t) - \frac{t}{2}.$$

19.6.4 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a\sec(t)$ o $x = a\cosh(t)$.

Ejemplo 19.6.5. Calcular $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \tan(t)\frac{\text{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,dt = \int \frac{\text{sen}^2(t)}{\cos^3(t)}\,dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \text{senh}^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\,\text{senh}(2t)$$

usando que $\text{senh}(2t) = 2\,\text{senh}(t)\cosh(t) = 2\sqrt{\cosh^2(t) - 1}\cosh(t)$,

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\arg\cosh(x)}{2}.$$

19.6.5 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo ax^2+bx+c de la forma $a(x+\alpha)^2+\beta$.

Ejemplo 19.6.6. Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{8x-x^2}}\,dx$.

Transformamos el integrando:

$$8x-x^2 = -(x^2-8x+16)+16 = -(x-4)^2+16 = 16-(x-4)^2$$

y hacemos el cambio de variable $y = x-4$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} = \begin{bmatrix} y = x-4 \\ dy = dx \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{(y+4)dy}{\sqrt{16-y^2}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{16-y^2}} + \int \frac{4\,dy}{\sqrt{16-y^2}} \\
&= -\sqrt{16-y^2} + 4 \int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}}
\end{aligned}$$

En el último sumando aplicamos el cambio: $y = 4\,\mathrm{sen}(t) \iff dy = 4\cos(t)dt$, con lo que $\sqrt{16-y^2} = 4\cos(t)$:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}} = \int \frac{4\cos(t)dt}{4\cos(t)} = t = \operatorname{arc\,sen}(y/4) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-4}{4}\right)$$

Y finalmente:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x-x^2}} = -\sqrt{8x-x^2} + 4\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-4}{4}\right).$$