Ejercicios de Cálculo II
Relación 3: Derivadas (II)

1) Determina la imagen de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = [0, 2]$, $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1$, $\forall x \in A$;

   b) $A = [-2, 2]$, $f(x) = 1 - \sqrt{2|x| - x^2}$, $\forall x \in A$;

   c) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$, $\forall x \in A$;

2) *a*) Calcula los extremos relativos y la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$.

   b) ¿Qué número es mayor e^π o π^e? ¿Que número es mayor $999999^{1000000}$ o 1000000^{999999}?

3) Calcula $\max\left\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

4) Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

5) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Prueba que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real.

6) Determina el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor del número real m.

7) Demuestra que la ecuación $\operatorname{tg}(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

8) Prueba que:

   a) $1 + x \leq e^x \leq 1 + x\,e^x$, con $x \in \mathbb{R}$;

   b) $\frac{x}{1+x} \leq \log(1 + x) \leq x$, con $x > -1$.

   c) $\frac{\log(x)}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, con $x > 0$, $x \neq 1$.

9) (*) Demuestra la desigualdad de Bernoulli: $(1 + x)^a \geq 1 + ax$, para $a \geq 1$ y $x > -1$.

10) (*) Sea $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Estudia la continuidad y su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcula su imagen.

11) Demuestra que, para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, se tiene que

$$\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{tg}(x).$$

12) Sea a un número positivo. Demuestra que

$$\left(\frac{ex}{a}\right)^a \leq e^x,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$ y que la igualdad se da si, y sólo si, $x = a$.

13) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ con $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Prueba que la función $g\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, para todo $x \in]0,1]$, también es creciente.

14) Sea $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que $\text{ínf}\,\{f'(x) : x \geq 0\} > 0$. Demuestra que $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

15) (*) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ con $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

16) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \alpha\, f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, siendo α una constante. Prueba que $f(x) = f(0)\, e^{\alpha x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

17) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, prueba que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda\, f(c)$.

18) Da un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}^*$, con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, que no sea monótona.

19) Sea $a > 0$ con $a \neq 1$. Se define la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \log(a), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia su derivabilidad.

20) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudia la derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x^\alpha, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

21) Sea $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable y supongamos que la derivada es continua en 0. Estudia la derivabilidad de las extensiones par, g_1, e impar, g_2, de f, es decir, las funciones definidas por

$$g_1(x) = f(|x|), \quad g_2(x) = (\operatorname{sgn} x) f(|x|)$$

22) Estudia la continuidad, derivabilidad y el comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

23) Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad, derivabilidad y continuidad de la derivada de la función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

24) Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas como sigue, siendo $a \in \mathbb{R}^+$ una constante:

a) $f(x) = \dfrac{\log(2 + a\, e^x)}{\sqrt{2 + a\, x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}^+$; *b)* $f(x) = (a^x + x)^{1/x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

25) Estudia el comportamiento en $+\infty$ de la función $h\colon]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) (*) $h(x) = \dfrac{x\left(x^{1/x}-1\right)}{\log(x)}$,

   b) $h(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$,

   c) $h(x) = \left(\dfrac{x+5}{2x^2-1}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$.

26) Sea $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ una función derivable en 1 y verificando que

$$f(f(x)) = x^2,$$

para todo x positivo. Demuestra que $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ o que $f(x) = x^{-\sqrt{2}}$.

27) Sea $g\colon \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ la función definida por $g(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. Prueba que g es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Da una expresión explícita de su inversa.

28) Estudia el comportamiento de la función $f\colon A\to\mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A =]2,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

   b) $A =]1,+\infty[\setminus\{2\}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$, $\alpha = 1,\ 2$.

   c) $A =]-1,1[\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{\log\left(1-x^2\right)}{x^2-x^4}$, $\alpha = \pm 1,\ 0$.

   d) $A =]-\pi/3,\pi/3[\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2+x}-2}{\operatorname{sen}(3x)}$, $\alpha = \pm\frac{\pi}{3},\ 0$.

29) Calcula los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2-2\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x-9+9\sqrt[3]{1+x}}{x^3}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}(x/2)}{\cos(x)\operatorname{sen}^3(2x)}$

30) Estudia el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

c) $f(x) = \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{(x^3+2)/x}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(x)\right)^{1/\log(x+1)}$

31) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que la función $f + f'$ tiene límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Sugerencia: Usa la regla de L'Hôpital con la función $e^x f(x)$)

32) Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que f es biyectiva y que f^{-1} es derivable en todo $\mathbb{R}$. Calcula $(f^{-1})'(1)$ y $(f^{-1})'(1+e)$.

33) Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verificando:

$$\log f(x) + \sqrt{f(x)} = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prueba también que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcula $f'(1)$.

34) **(*)** Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica que

$$f(x) + \exp\left(f(x)\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(f(x)\right) + x.$$

Demuestra que f es derivable y calcula $f'(1)$.

35) De los vértices de un cuadrado de cartón se recortan cuatro cuadrados iguales y, plegando hacia arriba los rectángulos laterales resultantes, se fabrica una caja de base cuadrada, sin tapa. ¿Cómo podemos conseguir que el volumen de la caja obtenida sea el máximo posible?

36) Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

37) A un espejo rectangular de medidas 80x90cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. como indica el dibujo. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

38) Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

39) (*) Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

40) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

41) Calcula el área máxima del rectángulo circunscrito a un rectángulo de lados a y b.