TEMA 3

Espacios vectoriales euclídeos

En este tema nos vamos a centrar en un caso particular de las métricas estudiadas en el tema anterior, las métricas euclídeas o definidas positivas. El ejemplo por excelencia de este tipo de métrica es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Veremos a lo largo de este tema que si tenemos una métrica euclídea podemos definir, como en el caso del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, los conceptos de norma de un vector y ángulo entre vectores. Probaremos que algunos de los resultados clásicos de $\mathbb{R}^n$ como el Teorema de Cauchy-Schwarz, la Desigualdad triangular o el Teorema de Pitágoras son también ciertos en un espacio vectorial euclídeo general. También estudiaremos en profundidad las isometrías entre dos espacios vectoriales euclídeos y veremos que conservan la norma de un vector (de ahí el nombre de isometría) y los ángulos entre vectores. Finalmente daremos la clasificación de dichas isometrías en los casos de dimensiones 2 y 3.

1. Métricas euclídeas. Norma, ángulos, perpendicularidad. Bases ortonormales.

Sea V un espacio vectorial real y g una métrica euclídea en V. Diremos entonces que (V, g) es un **espacio vectorial métrico euclídeo** o simplemente un **espacio vectorial euclídeo**. En algunos textos se denomina producto escalar a las métricas euclídeas.

A lo largo de este tema siempre supondremos que estamos en un espacio vectorial euclídeo.

Recordemos algunos de los ejemplos de espacios vectoriales euclídeos que han ido apareciendo en el tema anterior:

EJEMPLOS 3.1:

1. Si denotamos g_0 a la métrica de $\mathbb{R}^n$ dada por el producto escalar usual tenemos que $(\mathbb{R}^n, g_0)$ es un espacio vectorial euclídeo.
2. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ con $g(A, C) = \text{traza}(A \cdot C^t)$ es un espacio vectorial euclídeo (ejercicio 20 de la relación 2).
3. $(\mathbb{R}^2, g)$ donde $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es un espacio vectorial euclídeo.

A continuación enunciaremos algunas de las propiedades que se tienen para los espacios vectoriales euclídeos. La mayoría de ellas se demostraron en el tema anterior:

PROPIEDADES 3.2: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces se tiene:*

i) *El único vector luminoso es el vector nulo.*
ii) *Si U es un subespacio vectorial de V entonces* $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$.
iii) *Si U es un subespacio vectorial de V entonces* $(U^\perp)^\perp = U$.
iv) *Si U, W son subespacios vectoriales de V entonces* $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

v) *Si* U *es un subespacio vectorial de* V *entonces* (U, g_U) *es un espacio vectorial euclídeo y* $V = U \oplus U^{\perp}$.
vi) *Si* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *son no nulos y ortogonales entre sí entonces son linealmente independientes.*
vii) *Si* $U_1, \ldots, U_k$ *son subespacios vectoriales de* V *ortogonales entre sí entonces* $U_1 + \cdots + U_k = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$.

Demostración: Las propiedades i)-v) ya fueron demostradas en el tema anterior.

$\boxed{\text{vi)}}$ Sean $\{v_1, \ldots, v_k\}$ vectores no nulos y ortogonales dos a dos. Veamos que son linealmente independientes. Para ello vamos a considerar una combinación lineal de dichos vectores.

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \ , \lambda_i \in \mathbb{R} \ , i = 1, \ldots, k \ .$$

De aquí

$$0 = g(v, v_i) = g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i) = \lambda_1 g(v_1, v_i) + \cdots + \lambda_k g(v_k, v_i) \underset{g(u_i,u_j)=0,\, i\neq j}{\underset{\uparrow}{=}} \lambda_i g(v_i, v_i)$$

Por tanto tenemos $\lambda_i g(v_i, v_i) = 0$. Como $g(v_i, v_i) > 0$ deducimos que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$ y por tanto los vectores son linealmente independientes.

$\boxed{\text{vi)}}$ Tenemos que probar que $U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_k) = \{0\}$, para $j = 1, \ldots, k$. Sea $v \in U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_k) = \{0\}$. Entonces $v \in U_j$ y $v = v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_k$, con $v_i \in U_i$, para $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k$. De aquí

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(v, v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_k) \\ &\underset{g \text{ bilineal}}{\underset{\uparrow}{=}} g(v, v_1) + \cdots + g(v, v_{j-1}) + g(v, v_{j+1}) + \cdots + g(v, v_k) \underset{U_j \perp U_i}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \ . \end{aligned}$$

Como g es definida positiva de lo anterior deducimos que $v = 0$. □

1.1. Norma de un vector. Si (V, g) un espacio vectorial euclídeo siempre tenemos que $g(v, v) \geqslant 0$ y por tanto podemos dar la siguiente definición:

Definición 3.3: Denominaremos **norma** o **módulo** de un vector v al número real $||v||_g > 0$ dado por

$$||v||_g = \sqrt{g(v, v)} = \sqrt{\omega_g(v)}$$

Observación 3.4: Notemos que la norma depende de la métrica y es por esto que utilizamos en la definición anterior la notación $|| \cdot ||_g$. Sin embargo cuando no haya lugar a confusión prescindiremos de la métrica escribiendo simplemente $|| \cdot ||$.

Ejemplos 3.5: 1. En $(\mathbb{R}^n, g_0)$ la norma es la norma usual:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{g_0((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n))} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. Si $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ es el espacio vectorial euclídeo dado en el apartado 2) de los ejemplos 3.1, entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$$

Propiedades 3.6: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Entonces se tiene:*

i) $\|v\| \geqslant 0$ *para todo* $v \in V$*, y además* $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$.
ii) $\|av\| = |a|\|v\|$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$.
iii) $\left\| \pm \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$*, para todo* $v \in V$, $v \neq 0$.

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ La desigualdad $\|v\| \geqslant 0$ se sigue de haber considerado en la definición de la norma la raíz positiva. Si $\|v\| = \sqrt{g(v,v)} = 0$ tendríamos $g(v,v) = 0$ y por ser la métrica euclídea concluiríamos que $v = 0$.
$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que

$$\|av\| = \sqrt{g(av, av)} \underset{\uparrow \atop g \text{ bilineal}}{=} \sqrt{a^2 g(v,v)} = |a|\|v\|$$

$\boxed{\text{iii)}}$ $\left\| \pm \frac{v}{\|v\|} \right\| \underset{\uparrow \atop \text{ii)}}{=} \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$ □

Definición 3.7: Dado (V, g) un espacio vectorial euclídeo diremos que $v \in V$ es un **vector unitario** si $\|v\| = 1$.

De la propiedad iii) de la propiedades 3.6 deducimos que si $v \neq 0$ entonces $\pm \frac{v}{\|v\|}$ son dos vectores unitarios. A continuación probaremos algunos de los teoremas clásicos relacionados con la norma.

Teorema de Cauchy-Schwarz : *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$ entonces se tiene*

$$|g(u,v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

Además la igualdad se da si y solo si u y v son linealmente dependientes.

Demostración: Si $v = 0$ tendríamos que ambas partes de la desigualdad son nulas. Podemos suponer por tanto que $v \neq 0$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$0 \underset{\uparrow \atop g \text{ euclídea}}{\leqslant} g(u - \lambda v, u - \lambda v) \underset{\uparrow \atop g \text{ métrica}}{=} g(u,u) - 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v) = \|u\|^2 - 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 \|v\|^2 = p(\lambda)$$

Observemos que el polinomio cuadrático $p(\lambda) \geqslant 0$. Pero la única forma de que esto ocurra es que $p(\lambda)$ no tenga dos raíces reales distintas o equivalentemente, que el discriminante de dicho polinomio

$$(-2g(u,v))^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 4(g(u,v)^2 - \|u\|^2\|v\|^2) \leqslant 0 \tag{10}$$

De donde deducimos $g(u,v)^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$. Tomando raíces cuadradas positivas en ambas partes obtenemos la desigualdad del teorema.

Probemos ahora que se da la igualdad si y solo si los vectores u y v son linealmente dependientes. Comencemos asumiendo que se da la igualdad. Entonces el discriminante de $p(\lambda)$ dado por la ecuación (10) debe ser cero. Pero esto quiere decir que el polinomio $p(\lambda)$

tiene una única raíz real, es decir existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda_0) = 0$. Pero por la definición de $p(\lambda)$ tenemos

$$0 = p(\lambda_0) = g(u - \lambda_0 v, u - \lambda_0 v)$$

Como la métrica es euclídea de aquí deducimos que $u - \lambda_0 v = 0$ y por tanto los vectores u y v son linealmente dependientes.

Recíprocamente, supongamos que los vectores u y v son linealmente dependientes. Entonces existirían $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tal que $\alpha u + \beta v = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$ (análogamente si $\beta \neq 0$). Podemos escribir $u = -\frac{\beta}{\alpha} v$ y de aquí

$$|g(u,v)| = \left| g\left(-\frac{\beta}{\alpha} v, v\right)\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |g(v,v)| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \|v\|^2 = \left\| -\frac{\beta}{\alpha} v \right\| \|v\| = \|u\|\|v\|$$

□

Desigualdad triangular o de Minkowski : *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$ entonces se tiene*

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

Además se da la igualdad si y solo si $u = \lambda v$ o $v = \lambda u$ para $\lambda \geqslant 0$.

Demostración: Observemos que

$$\begin{aligned} (11) \quad \|u+v\|^2 &= g(u+v, u+v) \underset{\uparrow\ g \text{ métrica}}{=} g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) \\ &= \|u\|^2 + 2g(u,v) + \|v\|^2 \underset{\uparrow\ \text{Desigualdad C-S}}{\leqslant} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Luego considerando raíces cuadradas positivas en ambos miembros de la expresión anterior obtendríamos la desigualdad del enunciado.

Probemos ahora que se da la igualdad si y solo si $u = \lambda v$ o $v = \lambda u$ para $\lambda \geqslant 0$. Observemos que si $u = 0$ o $v = 0$ esta doble implicación se verifica de forma trivial. Supongamos por tanto que $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Supongamos primero que se da la igualdad, entonces de (11) se tendría la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto tendríamos que los vectores son linealmente dependientes, es decir existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tal que $\alpha u + \beta v = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$ (análogamente si $\beta \neq 0$). Podemos escribir $u = \lambda v$ con $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$ y de aquí

$$g(u,v) = g(\lambda v, v) = \lambda g(v,v) = \lambda \|v\|^2$$

Por otra parte

$$\|u\|\|v\| = |\lambda| \|v\|^2$$

De estas dos expresiones deducimos que $\lambda = |\lambda|$ y por tanto $\lambda \geqslant 0$.

Recíprocamente supongamos por ejemplo que $u = \lambda v$ con $\lambda \geqslant 0$. Si $v = \lambda u$ se razonaría de forma análoga. Tendríamos por una parte que

$$(12) \qquad \|u + v\| = \|(\lambda + 1)v\| = |\lambda + 1| \|v\| \underset{\uparrow\ \lambda \geqslant 0}{=} (\lambda + 1)\|v\|$$

Por otra parte

$$(13) \qquad \|u\| + \|v\| = \|\lambda v\| + \|v\| = |\lambda| \|v\| + \|v\| \underset{\uparrow\ \lambda \geqslant 0}{=} (\lambda + 1)\|v\|$$

De (12) y (13) tendríamos la igualdad en la desigualdad triangular. □

Estudiemos ahora cómo se escriben estas desigualdades para el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, g_0)$. Si particularizamos las desigualdades anteriores para esta métrica obtenemos:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

(14) $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ , \quad \forall (x_1, \dots x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Desigualdad triangular

(15) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ , \quad \forall (x_1, \dots x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Ángulo formado por dos vectores. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y $u, v \in V \backslash \{0\}$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que

$$-\|u\|\|v\| \leqslant g(u, v) \leqslant \|u\|\|v\|$$

Como $\|u\| \neq 0$ y $\|v\| \neq 0$ de la expresión anterior obtenemos

$$-1 \leqslant \frac{g(u, v)}{\|u\|\|v\|} \leqslant 1$$

Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.8: Dados $u, v \in V \backslash \{0\}$ se define el **ángulo** formado por los vectores u y v como el único $\theta \in [0, \pi]$ que verifica

$$\cos(\theta) = \frac{g(u, v)}{\|u\|\|v\|}$$

Equivalentemente, $\theta = \arccos\left(\frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}\right)$. Denotaremos $\measuredangle(u, v) = \theta$.

Observemos que de la definición anterior también tenemos:

$$\boxed{g(u, v) = \|u\|\|v\| \cos\left(\measuredangle(u, v)\right)}$$

Ejemplos 3.9:
1. Observemos que, si $u, v \in V \backslash \{0\}$, $g(u, v) = 0$ si y solo si $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$. Luego dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.
2. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^2, g_0)$ consideremos los vectores $u = (1, 1)$ y $v = (1, 0)$. Tenemos entonces

$$\cos\left(\measuredangle(u, v)\right) = \frac{g((1, 1), (1, 0))}{\|(1, 1)\|\|(1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{4}$.

3. Sea $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ el espacio vectorial euclídeo dado en el apartado 2) de los ejemplos 3.1, $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos

$$\cos\left(\measuredangle(A, C)\right) = \frac{g(A, C)}{\|A\|\|C\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{6}$.

En el apartado c) del ejercicio 4 de la relación 3 probaremos la siguiente generalización del famoso Teorema de Pitágoras.

TEOREMA 3.10: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V\backslash\{0\}$. Tenemos entonces que*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$$

1.3. Bases ortonormales. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo $\dim(V) = n$. Observemos que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son n vectores no nulos y ortogonales entre sí, entonces por el apartado vi) de la proposición 3.2 tenemos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).

Supongamos que tenemos ahora $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo (V, g), es decir $M(g, B) = I_n$. Por tanto si $v, w \in V$ son vectores con coordenadas $v_B = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w_B = (y_1, \ldots, y_n)$ entonces

$$g(v, w) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Observemos que además en este caso es muy sencillo calcular las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base B ya que si $v = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ entonces tenemos para $i = 1, \ldots, n$

$$g(v, u_i) = g(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n, u_i) \underset{\boxed{g \text{ bilineal}}}{=} x_1 g(u_1, u_1) + \cdots + x_n g(u_n, u_i) \underset{\boxed{g(u_i, u_j) = \delta_{ij}}}{=} x_i$$

Por tanto $v_B = (g(v, u_1), \ldots, g(v, u_n))$.

Además de los dos métodos que hemos visto para obtener bases ortonormales en el Tema 2, si el espacio vectorial métrico es euclídeo podemos utilizar otro método que se conoce como el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

PROPOSICIÓN 3.11: (MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT) *Sea (V, g) una espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Entonces existe una base ortogonal $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de (V, g) tal que*

$$L(\{v_1, \ldots, v_k\}) = L(\{u_1, \ldots, u_k\}), \quad \forall k = 1, \ldots, n \tag{16}$$

Demostración: Consideremos la siguiente afirmación

Afirmación A_k : *Existen $\{u_1, \ldots, u_k\}$ vectores linealmente independientes y ortogonales entre sí tal que*

$$L(\{v_1, \ldots, v_k\}) = L(\{u_1, \ldots, u_k\})$$

Observemos que la proposición coincide con la afirmación A_n. Para demostrar dicha afirmación utilizaremos un proceso de inducción sobre k.

Considerando $u_1 = v_1$ se obtiene la afirmación A_1. Supongamos que se verifica A_k y probemos que entonces se tiene A_{k+1}. Tomemos los vectores $\{u_1, \ldots, u_k\}$ linealmente independientes y ortogonales que nos proporciona la afirmación A_k. Definimos ahora el vector

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2} u_k \tag{17}$$

Observemos que para $i = 1, \ldots, k$ tenemos

$$\begin{aligned}
g(u_{k+1}, u_i) &= g\left(v_{k+1} - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2} u_k, u_i\right) \\
&\underset{\boxed{g \text{ bilineal}}}{\overset{\uparrow}{=}} g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_1)}{\|u_1\|^2} g(u_1, u_i) - \cdots - \frac{g(v_{k+1}, u_k)}{\|u_k\|^2} g(u_k, u_i) \\
&\underset{\boxed{g(u_j, u_i) = \delta_{ij}}}{\overset{\uparrow}{=}} g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_i)}{\|u_i\|^2} g(u_i, u_i) = g(v_{k+1}, u_i) - \frac{g(v_{k+1}, u_i)}{\|u_i\|^2} \|u_i\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Observación 3.12: Observemos que la expresión (17) de la demostración de la proposición anterior nos proporciona la manera de calcular los vectores de la base ortonormal del Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

Ejemplo 3.13: Utilizando el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt calcula una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica dada en la base usual por la matriz

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partimos de la base usual $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, es decir $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$. Tenemos que $u_1 = v_1 = (1,0,0)$.

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 = (0,1,0) - \frac{g((0,1,0),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) = (0,1,0) - \frac{(-1)}{1}(1,0,0) \\ &= (1,1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{g(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{g(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}u_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{g((0,0,1),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) - \frac{g((0,0,1),(1,1,0))}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{1}(1,1,0) = (-1,-1,1) \end{aligned}$$

Por tanto $B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(-1,-1,1)\}$ es una base ortogonal. Dividiendo cada vector por su norma obtendríamos la base ortonormal:

$$B'' = \left\{(1,0,0),(1,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Vamos a estudiar cómo es la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales en un espacio vectorial euclídeo (V,g). Si B y B' son bases ortonormales de g tenemos

$$M(g,B') = M(B',B)^t \cdot M(g,B) \cdot M(B',B)$$

Pero como B y B' son bases ortonormales $M(g,B) = M(g,B') = I_n$ y por tanto de la igualdad anterior obtenemos

$$I_n = M(B',B)^t \cdot M(B',B)$$

Es decir $M(B',B) \in O(n)$. Obtenemos por tanto la siguiente conclusion:

Conclusión 3.14: Sean B y B' dos bases ortonormales del espacio vectorial euclídeo (V,g) entonces $M(B',B) \in O(n)$.

1.4. Proyecciones y simetrías ortogonales. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. De la propiedad v) de 3.2 tenemos que $V = U \oplus U^{\perp}$. Por tanto podemos considerar π_U la proyección sobre U paralela a $U^{\perp}$ y σ_U la simetría respecto de U paralela a $U^{\perp}$.

Definición 3.15: A π_U se le denomina la proyección ortogonal sobre U y a σ_U la simetría ortogonal respecto de U.

Además de las propiedades que ya conocemos de las proyecciones y las simetrías, en el caso de las proyecciones y las simetrías ortogonales tenemos además otras propiedades:

Propiedades 3.16: *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. Entonces tenemos:*

i) *Existen bases ortonormales de (V,g) que diagonalizan π_U y σ_U.*