Cálculo II Relación 4

1.-

Se pide expresar $p(x)=x^4-5x^3-3x^2+7x+6$ como potencias de $(x-2)$. Para ello calculemos el polinomio de Taylor centrado en 2 y de grado 4.

$$\left.\begin{array}{ll} p(x)=x^4-5x^3-3x^2+7x+6 & \Rightarrow p(2)=-16 \\ p'(x)=4x^3-15x^2-6x+7 & \Rightarrow p'(2)=-33 \\ p''(x)=12x^2-30x-6 & \Rightarrow p''(2)=-18 \\ p^{(3)}(x)=24x-30 & \Rightarrow p^{(3)}(2)=18 \\ p^{(4)}(x)=24 & \Rightarrow p^{(4)}(2)=24 \end{array}\right\}$$

$$P_4(x)=p(2)+\frac{p'(2)}{1!}(x-2)+\frac{p''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{p^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{p^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4=$$

$$=-16-33(x-2)-9(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$$

2.-

Sea $f\,/\,P_3(f,x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ centrado en 0. Se pide calcular el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 de la función $g(x)=xf(x)$. Deducimos, de ello, que $f(x)$ es, al menos, 3 veces derivable. Al ser g composición de funciones 3 veces derivables $\Rightarrow$ $\Rightarrow g$ es, al menos, 3 veces derivable, y podemos hallar el polinomio pedido.

$$\begin{array}{ll} g(x)=xf(x) & \Rightarrow g(0)=0\cdot f(0)=0 \\ g'(x)=f(x)+xf'(x) & \Rightarrow g'(0)=f(0)+0\cdot f'(0)=f(0)=1 \\ g''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)=2f'(x)+xf''(x) & \Rightarrow g''(0)=2f'(0)+0\cdot f''(0)=2f'(0)=2 \\ g'''(x)=2f''(x)+f''(x)+xf'''(x)=3f''(x)+xf'''(x) & \Rightarrow g'''(0)=3f''(0)+0\cdot f'''(0)=3f''(0)=3 \end{array}$$

Dado que $P_3(f,x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3 \Rightarrow$ deducimos que $f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=1$.

Por tanto, $P_3(g,x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{3}{3!}x^3=x+x^2+\frac{x^3}{2}$

3.-

Se pide estudiar el comportamiento de $f:A\to\mathbb{R}$ en el punto α, para lo cual simplificaremos f hasta convertirla en una función con el mismo comportamiento en α

a) $A=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x)=\frac{tg(x)\,arctg(x)-x^2}{x^6}$, $\alpha=0$

Sea $g:\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=tg(x)$ y calculemos el polinomio de Taylor de orden 6 centrado en $\alpha=0$.

$g(x)=tg(x)$ $\Rightarrow g(0)=0$

$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow g'(0)=1$

$g''(x)=-2\cos^{-3}x(-\operatorname{sen}x)=\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}$ $\Rightarrow g''(0)=0$

$$g'''(x)=\frac{2\cos^4 x-2\operatorname{sen}x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\operatorname{sen}x)}{\cos^6 x}=\frac{2\cos^4 x+6(1-\cos^2 x)\cos^2 x}{\cos^6 x}= \qquad \Rightarrow g'''(0)=2$$

$$=\frac{2\cos^4 x+6\cos^2 x-6\cos^4 x}{\cos^6 x}=\frac{-4\cos^4 x+6\cos^2 x}{\cos^6 x}=-\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{6}{\cos^4 x}$$

$$g^{(4)}(x)=-4(-2)\cos^{-3}x(-\operatorname{sen}x)+6\cdot(-4)\cos^{-5}x(-\operatorname{sen}x)=-\frac{8\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}+\frac{24\operatorname{sen}x}{\cos^5 x} \qquad \Rightarrow g^{(4)}(0)=0$$

$$g^{(5)}(x)=-4\left(-\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{6}{\cos^4 x}\right)+24\frac{\cos^6 x-\operatorname{sen}x\cdot 5\cos^4 x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^{10}x}=\frac{16}{\cos^2 x}-\frac{24}{\cos^4 x}+24\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\cdot 5}{\cos^6 x}=$$

$$=\frac{16}{\cos^2 x}-\cancel{\frac{24}{\cos^4 x}}+\cancel{\frac{24}{\cos^4 x}}+\frac{120(1-\cos^2 x)}{\cos^6 x}=\frac{16}{\cos^2 x}-\frac{120}{\cos^4 x}+\frac{120}{\cos^6 x} \qquad \Rightarrow g^{(5)}(0)=16$$

$$g^{(6)}(x)=16(-2)\cos^{-3}x(-\operatorname{sen}x)-120(-4)\cos^{-5}x(-\operatorname{sen}x)+120(-6)\cos^{-7}x(-\operatorname{sen}x) \qquad \Rightarrow g^{(6)}(0)=0$$

Por tanto, $P_6(g,x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{16}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$

Sea $h: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \,/\, h(x)=\operatorname{arctg}(x)$ y calculemos igualmente su polinomio de Taylor de orden 6 en α.

$h(x)=\operatorname{arctg}(x) \Rightarrow h(0)=0$

$h'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow h'(0)=1$

$h''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{x^4+2x^2+1} \Rightarrow h''(0)=0$

$h'''(x)=\frac{-2(x^4+2x^2+1)+2x(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2}=-\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow h'''(0)=-2$

$h^{(4)}(x)=\frac{24x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow h^{(4)}(0)=0$

$h^{(5)}(x)=\frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5} \Rightarrow h^{(5)}(0)=24$

$h^{(6)}(x)=\frac{240x(-3x^4+10x^2-3)}{(x^2+1)^6} \Rightarrow h^{(6)}(0)=0$

Así, $P_3(h,x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-2)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{24}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6=$
$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

De esta manera, $f(x)=\frac{g(x)h(x)-x^2}{x^6}$, luego aproximando mediante los polinomios de Taylor de grado 3

$$f(x)\simeq\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)-x^2}{x^6}=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{\frac{x^4}{3}}+\frac{x^6}{5}+\cancel{\frac{x^4}{3}}-\frac{x^6}{9}+\frac{x^8}{15}+\frac{2x^6}{15}-\frac{2x^8}{45}+\frac{2x^{10}}{75}-\cancel{x^2}}{x^6}=\frac{2}{9}+\frac{x^2}{45}+\frac{2x^{10}}{75}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{2}{9},$$ luego f se aproxima a $\frac{2}{9}$ en un entorno de $\alpha=0$.

b) $A=\mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{6x^2}-\frac{\operatorname{sen}x}{x^5}$, $\alpha=0$

Ahora calcularemos el polinomio de Taylor de grado 5 para la función $g(x)=\operatorname{sen}x$

$g(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow g(0)=0$

$g'(x)=\cos x \Rightarrow g'(0)=1$

$g''(x)=-\operatorname{sen}x \Rightarrow g''(0)=0$

$g'''(x)=-\cos x \Rightarrow g'''(0)=-1$

$g^{(4)}(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow g^{(4)}(0)=0$

$g^{(5)}(x)=\cos x \Rightarrow g^{(5)}(0)=1$

Así, $P_5(g,x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5=$
$=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$

Por tanto, $f(x)\simeq\frac{1}{x^4}-\frac{1}{6x^2}-\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5}{x^5}=\cancel{\frac{1}{x^4}}-\cancel{\frac{1}{6x^2}}-\cancel{\frac{1}{x^4}}+\cancel{\frac{1}{6x^2}}-\frac{1}{120}=\frac{-1}{120}$ en un entorno de $\alpha=0$.

4.-

Para probar la igualdad $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}-2-2x-x^2\right)=\frac{5}{12}$, apliquemos la fórmula infinitesimal del resto, si bien sabemos que $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$. Observemos que para $n=4$ y $\alpha=0$, la forma de las expresiones coincide, siendo $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}-2-2x-x^2}{x^4}=\frac{10}{4!}$. Identificando $f(x)=2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}$, lo que debemos probar es que $P_3(f,x)=2+2x+x^2$ centrado en $\alpha=0$, y que $f^{(4)}(0)=10$.

$f(x)=2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(0)=2$

$f'(x)=2\sqrt[3]{1+x^3}+2x\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+2\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(0)=2$

$f''(x)=\frac{2(2x^4+4x^2)}{\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}+\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \Rightarrow f''(0)=2$

$f'''(x)=\frac{4x(-x^3+4)}{\sqrt[3]{(1+x^3)^8}}-\frac{6x}{\sqrt{(1+x^2)^5}} \Rightarrow f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=\frac{4((-4x^3+4)\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-8x^3(-x^3+4)\sqrt[3]{(x^3+1)^5})}{\sqrt[3]{(1+x^3)^{16}}}-\frac{6(-4x^2+1)}{\sqrt{(1+x^2)^7}} \Rightarrow f^{(4)}(0)=10$

Efectivamente, $P_3(f,x)=2+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3=2+2x+x^2$

5.-

Se pide estudiar el comportamiento en $-\infty$, $+\infty$ y 0 de $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

- Estudio en $-\infty$ y $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\operatorname{sen}x}{x^6}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}x - x}{x^6}\left(e^{-x}-1+x+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}x-x}{x^3}\cdot\frac{e^{-x}-1+x+\frac{x^2}{2}}{x^3} = 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-1+x+\frac{x^2}{2}}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}+1+x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{6x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^6}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x-\operatorname{sen}x)\,\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^6} = +\infty\,(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^6} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1-x}{6x^5} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{30x^4} = +\infty$$

- Estudio en 0

Para este definiremos $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $h(x)=e^x$ y calcularemos sus polinomios de Taylor centrados en 0 de grados 6 y 3, respectivamente. Según calculamos en 3.-, $P_6(g,x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.
Por su parte $h(x)=h'(x)=h''(x)=h'''(x)=e^x \Rightarrow h(0)=h'(0)=h''(0)=h'''(0)=1 \Rightarrow P_3(h,x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Así, $f(x) \simeq \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5}{x^6}\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}-\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{\frac{x^6}{36}-\frac{x^8}{720}}{x^6} = \frac{1}{36} - \frac{x^2}{720}$; evaluando en 0, el resultado es $\frac{1}{36}$, luego en un entorno de 0, la función se aproxima a $\frac{1}{36}$.

6.-

Se pide calcular los extremos relativos de las siguientes funciones, para lo cual emplearemos la consecuencia de la fórmula de Peano.

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = x^2(5x^2-20x+15) \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2(5x^2-20x+15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x^2-20x+15=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2-4\cdot5\cdot15}}{10} = \frac{2\cancel{0}\pm1\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 2\pm1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(1) = -10 < 0 \Rightarrow f \text{ presenta un máx. rel en } x=1 \text{ (por ser derivada par)} \\ f''(3) = 90 > 0 \Rightarrow f \text{ presenta un mín. rel en } x=3 \text{ (por ser derivada par)} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30 \;\{ f'''(0) = 30 > 0 \Rightarrow f \text{ no presenta extremo relativo en } x=0 \text{ (por ser derivada impar)}$$

b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1)-(x^2-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+2x-3x^2-3-\cancel{2x^3}+6x^2-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-2x-3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3(-3)}}{6} = \frac{2\pm2\sqrt{10}}{6} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(6x-2)(x^2+1)^2-(3x^2-2x-3)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(-3x^3+3x^2+9x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f''\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) > 0 \Rightarrow f$ presenta un mín. rel. en $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ (por ser derivada par)

$f''\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) < 0 \Rightarrow f$ presenta un máx. rel. en $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ (por ser derivada par)

c) $f(x)=x^2|x|e^{-|x|}=\begin{cases}-x^3e^{x} & \text{si } x\leq 0\\ x^3e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$ f cont. en $\mathbb{R}$ al ser composición de funciones continuas.

$f'(x)=\begin{cases}-3x^2e^{x}-x^3e^{x}=-x^2e^{x}(3+x) & \text{si } x\leq 0\\ 3x^2e^{-x}+x^3(-e^{-x})=x^2e^{-x}(3-x) & \text{si } x>0\end{cases}$

Estudiemos si $\exists$ derivada en 0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -x^2e^{x}(3+x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2e^{-x}(3-x)=0\end{array}\right\}\exists f'(0)=0$

Igualando a 0, $-x^2e^{x}(3+x)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$, $x^2e^{-x}(3-x)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

$f''(x)=\begin{cases}(-2xe^{x}-x^2e^{x})(3+x)-x^2e^{x}=-xe^{x}(2+x)(3+x)-x^2e^{x}=-e^{x}(x(2+x)(3+x)+x^2)=-e^{x}(x^3+6x^2+6x) & \text{si } x\leq 0\\ (2xe^{-x}+x^2(-e^{-x}))(3-x)-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)(3-x)-x^2e^{-x}=e^{-x}(x(2-x)(3-x)-x^2)=e^{-x}(x^3-6x^2+6x) & \text{si } x>0\end{cases}$

Veamos que $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\exists f''(0)=0$. $\begin{cases}f''(-3)=-9e^{-3}<0\\ f''(3)=-9e^{-3}<0\end{cases}$ f presenta dos máx. rel. uno en $x_1=-3$ y otro en $x_2=3$ (por ser derivada par).

$f'''(x)=\begin{cases}-e^{x}(x^3+6x^2+6x)-e^{x}(3x^2+12x+6) & \text{si } x<0\\ -e^{-x}(x^3-6x^2+6x)+e^{-x}(3x^2-12x+6) & \text{si } >0\end{cases}$

Notemos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'''(x)=-6$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'''(x)=6\Rightarrow$ $\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 0} f'''(x)=f'''(0)$. Al ser inexistente, deducimos que no podemos aplicar el teorema.

Dado que $\begin{array}{c} f'<0 \quad f'>0\\ \hline -3 \;\; f\downarrow \;\; 0 \;\; f\uparrow \;\; 3\end{array}$, f presenta un mín rel en $x=0$.

7.-

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivable con $f'(0)=0$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,g(x)=x^2f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Se pide probar que si $f(0)\neq 0\Rightarrow g$ tiene extremo relativo en $x=0$.

Para demostrarlo, emplearemos la consecuencia de la fórmula de Peano, el "test de la segunda derivada".

Vemos que $g(x)$ es derivable dos veces al serlo tanto x^2 como f, funciones de las que g es composición. Así, $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$, luego $g'(0)=0$ y podemos pensar que 0 es extremo relativo. Para confirmarlo, hagamos la segunda derivada.
$g''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)$, luego $g''(0)=2f(0)$.
De esto deducimos que si $f(0)=0\Rightarrow g''(0)=0$, luego no conocemos lo que sucede dado que las hipótesis no permiten nuevas derivadas, pero si $f(0)\neq 0\Rightarrow g''(0)\neq 0$, luego f presenta un extremo relativo en $x=0$, dado que la primera derivada que no se anula en 0 es par.

8.-

Sea $f:I\to\mathbb{R}$ dos veces derivable $/\,f''(x)=f(x)\ \forall x\in I$. Se pide probar que si $\exists a\in I\,/\,f(a)=f'(a)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)=0\ \forall x\in I$.

Dado que f es dos veces derivable y $f=f''\Rightarrow f''$ es dos veces derivable. Por inducción, f es derivable n veces $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow f\in C^{\infty}(I)$. Por otro lado, f está definida, al igual que f', en $I=[\alpha,\beta]$. Luego al ser continuas por su derivabilidad, entonces su imagen también será un intervalo cerrado y acotado por el T. de Wierstrass. Así, para toda derivada de f y para ella misma, existe $M_n=\text{máx}\{|f^{(n)}(x)|:x\in[\alpha,\beta]\}$, $n\in\mathbb{N}_0\Rightarrow|f^{(n)}(x)|\leq M_n$, lo que implica que f es igual a su desarrollo de Taylor; esto es, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ \forall a,x\in[\alpha,\beta]$. En concreto, dado que $\exists b\in I\,/\,f(b)=f'(b)=0\Rightarrow f^{(n)}(b)=0\ \forall n\in\mathbb{N}_0\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}0=0\Rightarrow f(x)=0\ \forall x\in I$.

(9.-)

Se pide probar que $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ $\forall x \in [0,\pi]$. Notemos que $1-\frac{x^2}{2}=P_2(\cos,x)$ y que $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=P_4(\cos,x)$. Por tanto, podemos utilizar un recurso: el resto de Lagrange, que verifica que $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún $c\in]a,x[$.
En este caso, centrando el polinomio en $\alpha=0$, consideramos el intervalo $[0,\pi]$.

a) $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x \Rightarrow \cos x-1+\frac{x^2}{2}=\cos x-P_2(\cos,x)\geqslant 0$. Para ello veamos que
$\cos x-P_2(\cos,x)=\frac{\cos^{(3)}(c)}{3!}x^3=\frac{\operatorname{sen}(c)}{6}x^3$ para algún $c\in]0,x[\Rightarrow R_2=\frac{\operatorname{sen}(c)}{6}x^3>\frac{\operatorname{sen}0}{6}x^3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x-P_2(\cos,x)\geqslant 0$

b) $\cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \Rightarrow \cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}=\cos x-P_4(\cos,x)\leq 0$. Para ello veamos que
$\cos x-P_4(\cos,x)=\frac{\cos^{(5)}(c)}{5!}x^3=\frac{-\operatorname{sen}(c)}{120}x^3$ para algún $c\in]0,x[\Rightarrow R_4=-\frac{\operatorname{sen}(c)}{120}x^3\leq\frac{-\operatorname{sen}0}{120}x^3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x-P_4(\cos,x)\leq 0$

(10.-)

A continuación aproximaremos los siguientes valores con un error menor de 10^{-2}:

a) $\alpha=\sqrt{e}$
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ / f(x)=e^x$, calculemos el grado del polinomio de Taylor centrado en 0, para f, que logra calcular $e^{1/2}=\sqrt{e}$, con error menor a la centésima. Para hacerlo, emplearemos la fórmula del Resto de Lagrange: $f(x)-P_n(f,x)=R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, con $c\in]\min\{x,a\},\max\{x,a\}[$.
En nuestro caso, $f(x)=f^{(n)}(x)=e^x$ $\forall n\in\mathbb{N}$, luego siendo $a=0$ y $x=\frac{1}{2}$, $R_n=\frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Debemos hacer que $R_n<10^{-2}$, lo que se logrará si mayoramos R_n, $R_n<\frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}(n+1)!}<\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{1}{2^n(n+1)!}<\frac{1}{100}$, lo cual es cierto $\forall n\geq 3$

Sea entonces $P_3(f,x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, haciendo $P_3(f,\frac{1}{2})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}=\frac{79}{48}$, tenemos la aproximación.

b) $\alpha=\operatorname{sen}\frac{1}{2}$
Sea $f:\mathbb{R}\to[-1,1] / f(x)=\operatorname{sen}x$. Repetiremos el proceso anterior, hallando el n que logra un error menor a la centésima del polinomio de Taylor centrado en 0. $\Rightarrow a=0$, $x=\frac{1}{2}$.
$|f(x)-P_n(f,x)|=|R_n|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$ para algún $c\in]\min(x,a),\max(x,a)[$ $\Rightarrow$ Como $f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}(x+n\frac{\pi}{2})\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} |R_n|=\left|\frac{\operatorname{sen}(c+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|<\left|\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}+(2n)\frac{\pi}{2})}{2^{2n}(2n)!}\right|<\frac{1}{2^{2n}(2n)!} \\ |R_n|=\left|\frac{\operatorname{sen}(c+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|<\left|\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{2n+1}(2n+1)!}\right|<\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!}\end{cases}\right\} <\frac{1}{100}\Leftrightarrow\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow n\geq 3$$

Calculamos $P_3(f,x)=x-\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow$ haciendo $P_3(f,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}=\frac{23}{48}$, tenemos la aproximación

c) $\alpha = \sqrt[3]{7}$

Sea ahora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt[3]{x}$, realicemos el mismo proceso con $a=8$, $x=7$.

$f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún $c \in]\min\{x,a\}, \max\{x,a\}[$. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, ...,

$f^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-k\right)x^{\frac{1}{3}-n} \Rightarrow |f(x) - P_n(f,x)| = |R_n| = \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}-k\right)c^{\frac{1}{3}-n-1}}{(n+1)!}\right| < \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}-k\right)7^{\frac{1}{3}-n-1}}{(n+1)!}\right| \not<$

$< \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}-k\right)2}{(n+1)!\,7^{n+1}}\right| < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow n \geq 1$

Calculamos $P_1(f,x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$, luego haciendo $P_1(f,7) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$, tenemos la aproximación.

d) $\alpha = \sqrt{102}$

Sea, por último, $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, f(x) = \sqrt{x}$. $a=100$, $x=102$ $|f(x) - P_n| = |R_n| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$ para algún $c \in]100, 102[$.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, ..., $f^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)x^{\frac{1}{2}-n} \Rightarrow |f(x) - P_n| = |R_n| = \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right)c^{\frac{1}{2}-n-1}}{(n+1)!}2^{n+1}\right| <$

$< \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right)100^{\frac{1}{2}-n-1}\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right)\cdot 10 \cdot 2^{n+1}}{100^{n+1}(n+1)!}\right| = \left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right)\cdot 2}{5^n(n+1)!}\right| < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow n \geq 2$

Calculamos $P_2(f,x) = 10 + \frac{1/20}{1!}(x-100) - \frac{1/4000}{2!}(x-100)^2 = 10 + \frac{x-100}{20} - \frac{(x-100)^2}{8000}$, luego haciendo

$P_2(f,102) = 10'0995$, tenemos la aproximación.