Relación de Ejercicios del Tema II

Métodos Numéricos I – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada – Curso 2019/2020

En la resolución de los ejercicios que consideres conveniente puedes hacer uso de *Maxima*.

1. ¿Es posible aplicar el método de Gauss al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 8.8 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \\ 4/5 \\ 5/6 \end{bmatrix} ?$$

¿Por qué?

2. Describe en forma de algoritmo la obtención, cuando es factible, de la factorización LU tipo Crout de una matriz regular. Prográmalo y aplícalo a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0 & 0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2 & 5.2 & 6 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2 \\ 3 & 6 & 10.3 & 0.78 & 0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0 & 1 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6.5 & 3 & 6.5 & 2 \\ 1 & 3 & 3.7 & 2.42 & 3 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2 & 2.3 & 3.48 & 6 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1 & 2 & 3.9 & 1.54 & 2 & 10.63 & 60.22 & 69.61 \end{bmatrix}.$$

Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos independientes $[1, 0, -1, 0, -2, 1, 2, 2]^T$.

3. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix}$$

y los vectores

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

resuelve los cuatro sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método más eficiente.

4. Supongamos que una matriz regular y tridiagonal

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_N & a_N \end{bmatrix}$$

admite una descomposición LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes matrices triangulares adoptan la forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & l_{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & l_N & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & d_N \end{bmatrix},$$

con

$$d_1 = a_1$$

e

$$i = 2, \ldots, N \ \Rightarrow \ l_i = \frac{b_i}{d_{i-1}}, \quad d_i = a_i - l_i c_{i-1}.$$

5. Decide razonadamente si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

es o no definida positiva, y aplica tu argumento para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 + \sqrt{2} \\ 26 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix},$$

cuya solución exacta es $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

- Demuestra que los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss–Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.
- Si modificamos el sistema anterior aplicándole una transformación elemental que consiste en intercambiar de posición sus ecuaciones obtenemos este otro equivalente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

  Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel asociados.
- Ilustra los resultados anteriores realizando 5 iteraciones con ambos métodos iterativos, partiendo en el primer sistema de la estimación inicial $\mathbf{x}_0 = [-50, -40]^T$ y en el segundo de $\mathbf{x}_0 = [1.1, 1.1]^T$.

7. Para las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ de la Sección 2.2, ilustra con los sistemas de ecuaciones lineales que se describen a continuación las velocidad de convergencia calculada para dichas matrices. En concreto, considera los dos sistemas s_1 y s_2 cuyas matrices de coeficientes son $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, respectivamente, y tienen por vectores de términos independientes los que hacen que la solución sea $\mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$. Construye para estos sistemas s_1 y s_2 los 4 y 6 primeros iteradores, respectivamente, generados tanto por el método de Jacobi como por el de Gauss–Seidel, partiendo de la estimación inicial nula.

8. Decide razonadamente cuáles de los siguientes métodos iterativos es convergente para cualquier estimación inicial:

- Jacobi y Gauss–Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 9/2 & 0.5 & -1 \\ 1 & 2 & 3000 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \\ \sqrt{21} \\ -1234 \end{bmatrix}.$
- Jacobi y Gauss–Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix},$$

- prueba que el correspondiente método de Jacobi es convergente y mide su velocidad de convergencia,
- aplica el método de Jacobi al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$ y realizando 12, 45 y 100 iteraciones, y
- calcula la solución exacta mediante un adecuado comando de *Maxima*. ¿Guardan relación los razonamientos del primer apartado y los resultados numéricos del segundo? ¿Por qué?

10. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 2/11 & 3/7 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 547/770 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix},$$

- estudia la convergencia del correspondiente método de Gauss–Seidel,
- aplica el método de Gauss–Seidel al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$ y realizando 9 iteraciones y
- resuelve el sistema anterior mediante un adecuado comando de *Maxima* y halla el error relativo (norma $\|\cdot\|_\infty$ del máximo) que se comete al tomar $\mathbf{x}_9$ como aproximación de la solución exacta $\mathbf{x}$. Interpreta dicho error a la luz del primer apartado.

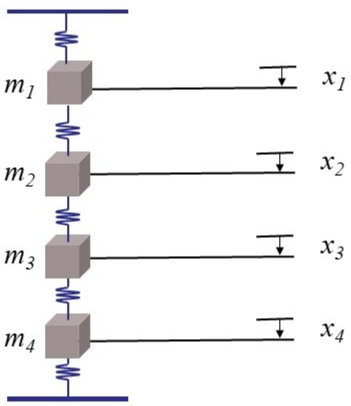
11. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz regular con $a_{11} \cdots a_{NN} \neq 0$

- Comprueba que la correspondiente matriz del método de Jacobi $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F})$ tiene norma infinito menor estrictamente que 1 si, y solo si, $\mathbf{A}$ es diagonalmente estrictamente dominante.
- Deduce que si $\mathbf{A}$ es diagonalmente estrictamente dominante, entonces el método de Jacobi correspondiente es convergente, cualesquiera sean el vector de términos independientes y la estimación inicial fijados.

12. Considera un sistema formado por 5 muelles alineados verticalmente y 4 cuerpos entre los mismos de masas $m_1 = 5\ kg$, $m_2 = 4\ kg$, $m_3 = 3\ kg$ y $m_4 = 2\ kg$, de forma que el extremo superior del muelle de arriba y el extremo inferior del que está abajo permanecen fijos: véase la figura adjunta. Suponemos además que los cuerpos están sometidos únicamente a la acción de sus pesos p_1, p_2, p_3 y p_4 y que el sistema está en equilibrio.

- Sabiendo que los coeficientes de elasticidad de los muelles son $c_1 = 1\ Nw/m$, $c_2 = 1.1\ Nw/m$, $c_3 = 0.9\ Nw/m$, $c_4 = 0.2\ Nw/m$ y $c_5 = 3\ Nw/m$, expresa los desplazamientos x_1, x_2, x_3 y x_4 de los cuerpos en función de sus pesos mediante un conveniente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}.$$



- ¿Admite la matriz $\mathbf{K}$ de coeficientes, conocida en este contexto como matriz de rigidez, una factorización LU tipo Cholesky? En caso afirmativo determínala y úsala para resolver el sistema anterior.
- Demuestra que tanto el método de Jacobi como el de Gauss–Seidel convergen hacia la solución del sistema, a pesar de que la matriz de rigidez no es diagonalmente estrictamente dominante, y calcula para cada uno de dichos métodos iterativos las 7 primeras iteraciones, partiendo de la estimación inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$.
- Comprueba que para la iteración séptima del método de Gauss–Seidel se verifican las 3 estimaciones del error absoluto establecidas en la Sección 2.3