Relación de Ejercicios del Tema I

Métodos Numéricos I – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada – Curso 2019/2020

En la resolución de los ejercicios que consideres conveniente puedes hacer uso de *Maxima*.

1. Comprueba que si $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces la aplicación $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ como
$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}$$
es una norma en dicho espacio vectorial.
(Indicación: el caso $p = 1$ es fácil de comprobar. En caso contrario, $1 < p < \infty$, sea p' el único número real tal que $1/p + 1/p' = 1$. Demuestra en primer lugar que se cumple la desigualdad:
$$x, y \geq 0 \;\Rightarrow\; xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}.$$
Para ello, basta con que, fijado $y \geq 0$ estudies la monotonía de la función
$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - xy.$$
A continuación deduce la *desigualdad de Hölder*, esto es:
$$x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^{p'} \right)^{1/p'}.$$
Concluye que $\| \cdot \|_p$ verifica la desigualdad triangular y, como las otras dos condiciones que definen a una norma se cumplen trivialmente, se tiene lo propuesto).

2. *Símbolos de Landau*. Sean $N \in \mathbb{N}$, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de acumulación de A y que existe $\gamma > 0$ de forma que
$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x} \in A \\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \gamma \end{array}\right| \;\Rightarrow\; g(\mathbf{x}) \neq 0.$$
   - Se dice que f es de orden *O grande* (u *O mayúscula*) respecto a g cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ si
$$\text{existen } M > 0 \text{ y } 0 < \delta < \gamma : \quad \left.\begin{array}{c} \mathbf{x} \in A \\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right| < M,$$
hecho que se nota como $f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

- La función f es de orden *o pequeña* (u *o minúscula*) respecto a g cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = 0,$$

  lo que se escribe $f(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

El papel de $\mathbf{x}_0$ puede ser reemplazado, cuando $N = 1$, por $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) si A no está acotado superiormente (respectivamente inferiormente).

Comprueba ($f_1, f_2, g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y g_1 y g_2 satisfacen la misma hipótesis que g de no nulidad en un entorno de $\mathbf{x}_0$):

- $f(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.
- $f(\mathbf{x}) = O(g_1(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ y $g_1(\mathbf{x}) = O(g_2(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) = O(g_2(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ (Ídem para o).
- $f_1(\mathbf{x}) = O(g_1(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ y $f_2(\mathbf{x}) = O(g_2(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \Rightarrow f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}) = O(g_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x}))$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ (Ídem para o).
- Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $an^2 + bn + c = O(n^2)$ cuando $n \to \infty$.
- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinómica, entonces $f(x) = o(e^x)$ cuando $x \to \infty$.

3. Calcula el radio espectral de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

   ¿Qué podemos afirmar sobre la sucesión $\{\mathbf{A}^n\}_{n\geq 1}$?

4. Encuentra una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una norma matricial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de forma que $\rho(\mathbf{A}) < 1$ pero $\|\mathbf{A}\| \geq 1$.

5. Demuestra que toda función real definida en un intervalo y de clase C^1 es estable, pero que el recíproco no es cierto. Comprueba además que la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in \mathbb{R}_+$ como

$$f(x) := \sqrt{x}$$

   no es estable en cero. ¿Podemos asegurar que toda función real definida en un intervalo que sea estable en todo su domino es de clase C^1? Justifica tu respuesta.

6. Decide en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ si el problema:

$$\text{dado } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ encontrar } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

   está bien planteado. Para los valores de a que hagan que dicho problema esté bien planteado, estudia su condicionamiento en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}$ y el de la matriz de coeficientes, referidos ambos a una conveniente norma que elijas.

7. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$. Prueba que

$$\text{mín}\{c(\mathbf{A}) : \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N} \text{ regular}\} = 1,$$

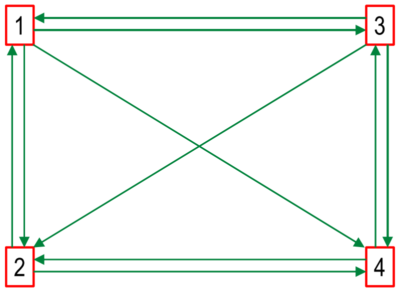
y que si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ son matrices regulares, entonces

$$c(\mathbf{AB}) \leq c(\mathbf{A})c(\mathbf{B}).$$

8. Estudia el condicionamiento de las siguientes funciones en todos los puntos de su dominio y discute los puntos de mal condicionamiento que eventualmente puedan existir:

   - $f(x) = e^x \operatorname{sen} x, \qquad (0 < x < \pi).$
   - $f(x) = 2 - 4\cos x, \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2).$
   - $f(x) = \log\sqrt{x}, \qquad (x > 0).$

9. Modeliza matemáticamente la relevancia de cada una de las cuatro páginas web que aparecen en la figura, de acuerdo con el algoritmo PageRank de Google y teniendo en cuenta la estructura de enlaces mutuos.



10. Decide razonadamente la validez del siguiente razonamiento: “En la sucesión de Fibonacci, al ser

$$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

dividiendo por x_{n+1} obtenemos

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}},$$

luego notando

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

se tiene de la igualdad anterior

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \ \Leftrightarrow \ \ell^2 - \ell - 1 = 0$$

y como $\ell \geq 0$, entonces $\ell = \Phi$."
(Indicación: habría que probar antes que la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. En general, el hecho de que una sucesión verifique una relación de recurrencia no garantiza su convergencia, como ocurre por ejemplo con la sucesión

$$x_1 = 1$$

y

$$n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x_{n+1} = -x_n + 1 \;).$$

11. Obtén la representación posicional binaria de los números

$$8.275, \quad -6.6875, \quad \frac{5}{7}.$$

12. ¿Es posible encontrar un número real con representación posicional decimal infinita y binaria finita? ¿Por qué? De forma más general, ¿qué debe cumplir una base b para que toda representación posicional finita en dicha base sea también finita en base 10?

13. Fijada una base b, sean $k \geq 1$, $0 \leq a_{k+1}, a_{k+2} \cdots \leq b-1$ y $0 \leq a_k < b-1$. Demuestra que

$$(0.0\ldots 0a_k a_{k+1} a_{k+2}\ldots)_b \leq (0.0\ldots 0a_k + 1)_b.$$

14. Describe todos los números estrictamente positivos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$. Calcula su épsilon máquina y su precisión. Obtén además la truncatura y el redondeo en dicho sistema del número real 3.25, comprobando que los correspondientes errores relativos están acotados por el épsilon máquina y la precisión.

15. Determina, para todos y cada uno de los sistemas decimales de punto flotante del estándar ISO/IEC/IEEE60559:2011, el rango de variación del valor absoluto de los números reales que incluye, el épsilon máquina y la precisión.

16. Considera un sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b, t, L, U)$ con $L < U$. Sean $L \leq e < e' \leq U$ y $(0.a_1 \ldots a_t) \cdot b^e,\ (0.\alpha_1 \ldots \alpha_t) \cdot b^{e'} \in \mathbb{F}(b, t, L, U)$. Demuestra que

$$(0.a_1 \ldots a_t) \cdot b^e < (0.\alpha_1 \ldots \alpha_t) \cdot b^{e'}.$$

Deduce la distribución de los puntos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b, t, L, U)$.

17. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de números reales definida para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como

$$x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx.$$

Justifica razonadamente que esta sucesión verifica la recurrencia

$$x_0 = \log(4/3)$$

y

$$n \geq 1 \;\Rightarrow\; x_n = \frac{1}{n} - 3x_{n-1}$$

(utiliza para ello la identidad

$$\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3},$$

multiplica por x^{n-1} e integra). Para estudiar la propagación del error, parte en la recurrencia anterior de un redondeo de x_0 con 5 cifras significativas ($t = 5$). De forma más general, analiza la propagación del error cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Expresa x_n como $f_n(x_0)$, para una conveniente función f_n y halla su condicionamiento en x_0.