PARCIAL 2 CALII

TAYLOR

Si f derivable n veces y $f^{n)}(x) \neq 0 \Longrightarrow \exists f^{-1}$ derivable n veces

Suma, producto y composición derivables

Se define C^n y $C^\infty \Longrightarrow C^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^{n+1}(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^1(I) \subsetneq C(I)$

$e^x \Longrightarrow f^{n)}(x) = e^x$

$\log(x) \Longrightarrow f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$

$\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow f^{n)}(x) = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$ (análogo coseno)

$x^\alpha \Longrightarrow f^{n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \cdot x^{\alpha - n}$

a es raíz de $p(x)$ con multiplicidad $k \Longleftrightarrow p(a) = p'(a) = \cdots = p^{k-1)}(a) = 0$ y $p^{k}(a) \neq 0$

def: (Taylor) Polinomio de Taylor de orden n de f centrado en a:

$$P_n(f, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$P_n'(x) = P_{n-1}(x)$

P_n es el único polinomio que coincide con la función y las primeras n derivadas en a.

$$e^x \overset{a=0}{\Longrightarrow} P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\log(x+1) \overset{a=1}{\Longrightarrow} P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^k}{k}$$

$$\cos(x) \overset{a=0}{\Longrightarrow} P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{sen}(x) \overset{a=0}{\Longrightarrow} P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Fórmula infinitesimal del resto:

Sea, I, $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ n-1 veces derivable en I y n veces derivable en $a \in I \Longrightarrow$

1) $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ 2) Si $q(x)$ cumple que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Longrightarrow q(x) = P_n(x)$

dem:

1) $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} \overset{L'H(n-1\text{ veces})}{=} \lim_{x \to a} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(a) - f^{n}(a) \cdot (x-a)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(a)}{n!(x-a)} - \frac{f^{n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} \right) =$

$= \frac{f^{n)}(a)}{n!} - \frac{f^{n)}(a)}{n!} = 0$

2) Sea $p(x) = P_n(x) - q(x) \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} \quad \frac{P_n(x) - f(x) + f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Longrightarrow p(a) = P_n(a) - q(a) = f(a) - f(a) = 0$

Supongamos $p(x) \neq 0$ y k multiplicidad de a como raíz $\Longrightarrow p(x) = (x-a)^k \cdot r(x) \Longrightarrow r(a) \neq 0$

$0 = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{r(x) \cdot (x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^{n-k}} \overset{r(a) \neq 0}{\neq} 0 \Longrightarrow 0 \neq 0$ contradicción

$\Downarrow$

$p(x) \equiv 0$

Se cumple: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{n)}(a)}{n!}$

Si f derivable par $\Rightarrow f'$ impar y viceversa

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\dots+x^n) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

f tiene un cero de orden α en a si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=0 \Rightarrow f(x)=P_n(x)+o(x^n)$

Si $f'(a)=\dots=f^{n-1)}(a)=0$ y $f^{n)}(a)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} n \text{ par y } f^{n)}(a)>0 \Rightarrow \text{mínimo} \\ n \text{ par y } f^{n)}(a)<0 \Rightarrow \text{máximo} \\ n \text{ impar} \Rightarrow f \text{ no tiene extremo en } a \end{cases}$

Fórmula de Taylor (Resto de Lagrange)

$f: I\to\mathbb{R}$ derivable $n+1$ veces $\Rightarrow \forall a, x_0\in I\ \exists c\in]a,x_0[$ tal que $f(x_0)-P_n(x_0) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0-a)^{n+1}$

dem:

Sea $K\in\mathbb{R}$ tq $f(x_0)=P_n(x_0)+K\cdot(x_0-a)^{n+1} \Rightarrow K=\frac{f(x_0)-P_n(x_0)}{(x_0-a)^{n+1}}$

Sea $g(x)=f(x)-P_n(x)-K\cdot(x-a)^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} g(a)=g(x_0)=0 \to \exists c_1\in]a,x_0[\text{ tq } g'(c_1)=0 \\ g'(a)=g'(c_1)=0 \to \exists c_2\in]a,c_1[\text{ tq } g''(c_2)=0 \\ \vdots \\ g^{n)}(a)=g^{n)}(c_n)=0 \to \exists c\in]a,c_n[\text{ tq } g^{n+1)}(c)=0 \\ \text{, o sea, } g^{n+1)}(c)=f^{n+1)}(c)-K\cdot(n+1)!=0 \\ \Updownarrow \\ K=\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \end{cases}$

Si $f^{n+1)}(x)=0\ \forall x\in I \Rightarrow f$ es un polinomio de grado n

Fórmula de Taylor alternativa (Resto de Cauchy).

$\forall a,x\in I,\ \exists d\in]a,x[$ tq $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a)$

dem:

Sea $g(x)=\left(f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(x_0-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x_0-x)^2+\dots+\frac{f^{n)}(x)}{n!}(x_0-x)^n\right)-f(x_0)$

$g'(x)=\frac{f^{n+1)}(x)}{n!}(x_0-x)^n$ (se anulan todos dos a dos) y $g(x_0)=0$, $g(a)=P_n(x_0)-f(x_0)$

T.V.M a g en $[a,x_0] \Rightarrow \exists d\in]a,x_0[$ tq $g(x_0)-g(a)=g'(d)(x_0-a)=\frac{f^{n+1)}(d)}{n!}\cdot(x_0-d)^n\cdot(x_0-a)$

$g(x_0)-g(a) = 0-(P_n(x_0)-f(x_0)) = f(x_0)-P_n(x_0)$

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{(serie de Taylor)}$$

Si $\exists M\in\mathbb{R}$ tq $|f^{n)}(x)|\leq M\ \forall x\in I, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ La serie de Taylor representa a f en todo I

$$\operatorname{arctg}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

$$\operatorname{arc\,sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Convexas

si $x \in [a,b] \Rightarrow x = (1-t)a + tb$

si f convexa $\Rightarrow f((1-t)a+tb) \leq (1-t)\cdot f(a) + t\cdot f(b)$

si f estr. convexa $\Rightarrow$ des. estricta

f cóncava $\Leftrightarrow -f$ convexa

si f, g convexas y $\alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} f+g \text{ convexa} \\ \alpha \cdot f \text{ convexa} \\ \max\{f,g\} \text{ convexa} \end{cases}$

NOTA: $f \cdot g$ puede no ser convexa y $\min\{f,g\}$ tampoco
$\overset{\shortparallel}{x}\ \overset{\shortparallel}{x^2}$

si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa $\Rightarrow f$ acotada

Lema de las 3 secantes:

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa y sean $x_1 < x_2 < x_3 \in I \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

dem:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1) + (x_2-x_1)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

$$= \frac{f(x_1)(x_3-x_1) + (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1))}{x_3-x_1}$$

$$= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\cdot f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\cdot f(x_3) \text{ , cierto por def. de convexa}$$

Si f convexa en $I \Rightarrow f_a : I/\{a\} \to \mathbb{R}$ $\quad f_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad \forall x \in I/\{a\}$ es creciente

Teorema de Stolz:

Sea I intervalo abierto $\neq \emptyset$ $f: I \to \mathbb{R}$ convexa $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene derivadas laterales en todos los puntos y } f \text{ continua} \\ f'_+ \text{ y } f'_- \text{ son crecientes} \end{cases}$

dem:

Sea $a, u \in I$ y $a < u \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(u)-f(a)}{u-a} \Rightarrow f_a$ acotada superiormente y creciente

f tiene derivadas laterales en todo $I \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(u)-f(a)}{u-a}$ $\quad \forall u > a$

Análogo dcha. y si $x < y \Rightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$

Si f convexa $\Rightarrow$ el conjunto de puntos donde f no es derivable es numerable

Si f convexa y derivable $\Rightarrow f'$ continua

Si $f: I \to \mathbb{R}$, derivable, equivalen: $\begin{cases} f \text{ convexa} \\ f' \text{ creciente} \\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad (f \text{ por debajo de la tg}) \end{cases}$

f convexa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

CONT. UNIFORME

f unif. continua en $A \iff \left[\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ tal que si } |x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right]$

$f+g$ unif. continua y si f y g acotadas $\implies fg$ unif. continuas

Si f unif. cont. en A, $f(A)=B$, g unif. cont. en B $\implies g\circ f$ unif. cont. en A

Si $f:A\to\mathbb{R}$ función, equivalen $\begin{cases} f \text{ unif. continua} \\ \text{Para dos sucesiones } \{x_n\}, \{y_n\} \text{ de } A \text{ tales que } \lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0 \implies \\ \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0 \end{cases}$

Teorema de Heine:

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\implies f$ unif. cont.

dem:

Absurdo $\implies \exists\varepsilon_0$ y $\{x_n\},\{y_n\}\in[a,b]$ tq $|x_n-y_n|<1/n$ y $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Como $a\leq x_n\leq b \overset{\text{TB-W}}{\implies} \{x_{\sigma(n)}\}\to x_0$ y $\{y_{\sigma(n)}\}\to x_0 \overset{f \text{ cont.}}{\implies} |f(x_n)-f(y_n)|\to 0$, Absurdo

f unif. cont.

$\Downarrow$ f lleva suc. de Cauchy en suc. de Cauchy $\Uparrow$ si A acotado

$\Downarrow$ f lleva suc. conv. en suc. conv. $\Uparrow$ si A cerrado

$\Updownarrow$ f continua

Sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$, equivalen $\begin{cases} \exists g:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continua tal que } g(x)=f(x) \quad \forall x\in]a,b[\\ f \text{ unif. continua} \end{cases}$

f lipschitziana si $\exists K>0$ tq $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq K \quad \forall x,y\in A \implies$ constante de Lipschitz es la mayor de todas

f contractiva si $K<1$

Lipschitziana $\implies$ Unif. continua

Si f derivable $\implies f$ lipschitziana $\iff f'$ acotada y $K=\sup\{|f'(x)| : x\in I\}$

si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $f\in C^1 \implies f$ lipschitziana

si f contractiva $\implies \exists! c$ tq $f(c)=c$ (punto fijo)

INTEGRAL DE RIEMANN

Una partición de $[a,b]$ es un conjunto de puntos de $[a,b]$, más puntos $\Rightarrow$ más fina

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{suma superior } S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sup f([x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1}) \\ \text{suma inferior } I(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\inf f([x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Si P_1 más fina que P_2, $I(f,P_2)\le I(f,P_1)\le S(f,P_1)\le S(f,P_2)$
y $I(f,P_1)\le S(f,P_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Integral superior de Darboux} = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P)\} \\ \text{Integral inferior de Darboux} = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{I(f,P)\} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f integrable $\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx$ (Integral de Riemann)

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists P$ tq $I-\varepsilon< I(f,P)\le I\le S(f,P)<I+\varepsilon$

Criterio de Cauchy:

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, equivalen $\begin{cases} f \text{ integrable} \\ \forall\varepsilon>0\ \exists P\in\mathcal{P}([a,b]) \text{ tq } S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon \\ \exists\{P_n\} \text{ tq } \lim_{n\to\infty}(S(f,P_n)-I(f,P_n))=0 \end{cases}$

dem:

1) $\Rightarrow$ 2)

$\forall\varepsilon>0 \begin{cases} \exists P_1 \text{ tq } \overline{\int_a^b} f-\varepsilon/4<S(f,P_1)\le\overline{\int_a^b} f \\ \exists P_2 \text{ tq } \underline{\int_a^b} f\le I(f,P_2)<\underline{\int_a^b} f+\varepsilon/4 \end{cases}$ Sea $P=P_1\cup P_2$

$I-\varepsilon/2<I(f,P_2)\le I(f,P)\le I\le S(f,P)\le S(f,P_1)<I+\varepsilon/2 \Leftrightarrow S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon$

2) $\Rightarrow$ 3)

Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $\varepsilon=1/n \Rightarrow$ Encontramos $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq $S(f,P_n)-I(f,P_n)<1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3) $\Rightarrow$ 1)

$0\le\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\le S(f,P_n)-I(f,P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow$ coinciden las integrales de Darboux

Si f continua ó ~~integrable~~ monótona $\Rightarrow f$ integrable

Una partición etiquetada es un par $\{P,t_i\}\in\mathcal{P}([a,b])$

La suma de Riemann de f asociada a una partición es $\Sigma(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$

$\inf f([x_{i-1},x_i])\le f(t_i)\le\sup f([x_{i-1},x_i])$ y $I(f,P)\le\Sigma(f,P)\le S(f,P)$

La norma de P es: $\|P\|=\max\{|x_i-x_{i-1}|\}$ (mayor amplitud)

Si $c\in]a,b[$, $P'=P\cup\{c\}$ y $|f(x)|\le K \Rightarrow |S(f,P')-S(f,P)|\le 2K\|P\|$ (si la dif. son n puntos, será $2K\cdot n\cdot\|P\|$)

Teorema de Darboux:

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tq si $\|P\|<\delta \Rightarrow \int_a^b f-\varepsilon<I(f,P)\le\underline{\int_a^b} f\le\overline{\int_a^b} f\le \underbrace{S(f,P)<\overline{\int_a^b} f+\varepsilon}_{\text{dem}}$

dem:

Sea K tq $|f(x)|\le K$, $\forall\varepsilon>0\ \exists P_0$ tq $S(f,P_0)<\overline{\int_a^b} f+\varepsilon/2$, si P_0 tiene m puntos $\Rightarrow \delta=\varepsilon/4mK$

Sea P con $\|P\|<\delta$, $P_1=P\cup P_0 \Rightarrow S(f,P_1)\ge S(f,P)-2rK\|P\|\ge S(f,P)-2mK\|P\|\ge S(f,P)-\varepsilon/2$

Como $P_0\subseteq P_1 \Rightarrow S(f,P_1)\le S(f,P_0)<\overline{\int_a^b} f+\varepsilon/2 \Leftrightarrow S(f,P)-\varepsilon/2<\overline{\int_a^b} f+\varepsilon/2 \Leftrightarrow S(f,P)-\overline{\int_a^b} f<\varepsilon$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, equivalen $\begin{cases} f \text{ integrable} \\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tq si } P\in\mathcal{P}([a,b]) \text{ con } \|P\|<\delta \Rightarrow |\Sigma(f,P)-I|<\varepsilon \end{cases}$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotadas $\Rightarrow \begin{cases} S(\lambda f,P)=\lambda\cdot S(f,P) \\ S(-f,P) = -I(f,P) \\ S(f+g,P)\le S(f,P)+S(g,P)\end{cases}$

$\Rightarrow \lambda f$ integrable y $\int_a^b \lambda f = \lambda\cdot\int_a^b f$

$\Rightarrow f+g$ integrable y $\int_a^b f+g = \int_a^b f+\int_a^b g$

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrables $\Rightarrow$ si $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

$\Rightarrow |f|$ integrable y $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

$\Rightarrow f\cdot g$ integrable

$\Rightarrow \left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\cdot\left(\int_a^b g^2\right)$ (Cauchy-Schwarz)

$\Rightarrow \left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$ (Minkowski)

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $\inf\{|f(x)|\}>0 \Rightarrow 1/f$ integrable

Si f integrable y g continua ó monótona $\Rightarrow g\circ f$ integrable

si f acotada y $c\in\,]a,b[$, equivalen $\left.\begin{cases} f \text{ integrable en } [a,b] \\ f \text{ integrable en } [a,c] \text{ y } [c,b]\end{cases}\right\}$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Si f acotada tiene un número de discontinuidades de medida nula ($\le \mathbb{Q}$) $\Rightarrow f$ integrable

TFC

$\int_a^a f = 0$ y $\int_a^b f = -\int_b^a f$

f es localmente integrable en I si lo es en cualquier subintervalo compacto de I

Si f loc. integ. $\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt \; \forall x\in I$ es la integral indefinida de f con origen en a

$\Rightarrow$ si $|f(x)|\le M \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$

$\Rightarrow \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

TFC:

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ indef. $\Rightarrow \begin{cases} F \text{ es continua} \\ \text{si } f \text{ continua en } c\in[a,b], F \text{ derivable en } c \text{ y } F'(c)=f(c)\end{cases}$

dem:

1) Sea $\{x_n\}\to c \Rightarrow \exists M$ tq $|f(x)|\le M \Rightarrow |F(x_n)-F(c)| = \left|\int_a^{x_n} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right| = \left|\int_c^{x_n} f(t)dt\right| \le M|c-x_n|$

$0 \le \lim_{n\to\infty} |F(x_n)-F(c)| = \lim_{n\to\infty} M\cdot|c-x_n| = 0$

2) Como f continua $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tq si $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon/2 \Rightarrow$

$|F(x)-F(c)-f(c)(x-c)| = \left|\int_a^x f - \int_a^c f - f(c)(x-c)\right| = \left|\int_c^x f - f(c)(x-c)\right| = \left|\int_c^x (f(t)-f(c))dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot|x-c|$

Si $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt \implies F'(x) = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)$

F es primitiva de f si $F'(x) = f(x)$

Toda f continua tiene primitiva

Regla de Barrow:

Sea f integrable y F su primitiva $\implies \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

dem:

Sea $P \overset{TVM}{\implies} \exists c_i$ tq $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \implies F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \overset{TVM}{=} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) =$

$= \Sigma(f, P) \xrightarrow{\|P\| \to 0} \int_a^b f(x)dx$

$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ (Partes)

$\int_a^b (f \circ g) g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a))$ (Sustitución)

Teorema del Valor Medio:

Sean f, g integrables y $g(x) \geq 0 \implies \exists \mu \in f(x)$ tq $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx$

y si f continua, $\exists c$ tq $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$

dem:

Supongamos $\int_a^b g(x)dx > 0 \overset{\substack{m = \sup f \\ M = \inf f}}{\implies} m \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \iff m \leq \overset{\mu}{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}} \leq M$

Si f continua $\implies f([a,b]) = [m, M]$ y $\exists c \in [a,b]$ tq $\mu = f(c)$

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies \exists c \in [a,b]$ tq $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Si f, g integrables y g monótona $\implies \exists c \in [a,b]$ tq $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx$

Resto integral de Taylor:

Sea $f \in C^{n+1}$, $P_n \implies f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$