4. Bases ortogonales y ortonormales. Ley de inercia de Sylvester. Criterio de Sylvester.

4.1. Bases ortogonales. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico. Queremos buscar una base B tal que $M(g, B)$ sea lo más sencilla posible, es decir diagonal. Si la base es $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ esto es equivalente a $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.

Definición 2.18: Dado (V, g) un espacio vectorial métrico diremos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una **base ortogonal** de (V, g) si verifica $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.

Podemos plantearnos el siguiente problema:

Dado un espacio vectorial métrico ¿existen bases ortogonales?

Equivalentemente podemos trasladar la pregunta al contexto de matrices:

¿Es toda matriz simétrica congruente a una matriz diagonal?

Veremos en esta sección que la respuesta a la primera pregunta, y por lo tanto también a la segunda, es afirmativa.

Notemos que no se trata de diagonalizar una matriz como en el Tema 1 porque en este caso las matrices de una métrica en distintas bases son congruentes no semejantes. Algunos autores se refieren a esta diagonalización como diagonalización por congruencia.

Proposición 2.19: (Existencia de bases ortogonales) *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, entonces existe una base ortogonal de (V, g), es decir, existe $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V tal que $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.*

Demostración: Vamos a realizar la demostración de esta proposición en dos pasos.

$\boxed{\text{Paso 1.-}}$ En primer lugar demostraremos que existen bases ortogonales cuando (V, g) es un espacio vectorial métrico no degenerado.

Veamos en primer lugar que si la métrica es no degenerada siempre es posible encontrar $u_1 \in V$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Si no fuese así tendríamos que $g(u, u) = 0$, $\forall u \in V$ y de aquí para todo $v \in V$ tendríamos

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\left(\omega_g(u + v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)\right) = 0 \,.$$

y por tanto g sería degenerada.

Utilizaremos ahora un proceso inductivo sobre $\dim(V) = n$. Si $n = 1$ no tendríamos nada que probar. Supongamos que es cierto para $n - 1 \geqslant 1$ y veamos que es cierto para n.

Consideremos $U = L(\{u_1\})$. Como $g(u_1, u_1) \neq 0$ tenemos que (U, g_U) es un espacio vectorial métrico no degenerado y por el apartado viii) de las propiedades 2.13 tenemos que $V = U \oplus U^{\perp}$. De la observación 2.14 tenemos que $(U^{\perp}, g_{U^{\perp}})$ es un subespacio vectorial métrico no degenerado con $\dim(U^{\perp}) = n - 1$. Luego podemos aplicar la hipótesis de inducción a este espacio vectorial métrico no degenerado y obtener así $\{u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal de $(U^{\perp}, g_{U^{\perp}})$. Es claro entonces que $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).

$\boxed{\text{Paso 2.-}}$ Demostraremos ahora que también existen bases ortogonales cuando (V, g) es un espacio vectorial métrico degenerado.

Consideremos W un suplementario del espacio $\mathrm{Rad}(g)$. De los apartados iii) y iv) de la observación 2.16 tenemos entonces que (W, g_W) es un espacio vectorial métrico no degenerado con $\dim(W) = \mathrm{rang}(g) = r$. Por tanto podemos aplicarle el paso 1 y obtendríamos así una base $\{u_1, \ldots, u_r\}$ base ortogonal de (W, g_W). Consideremos ahora $\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ cualquier base de $\mathrm{Rad}(g)$. Es claro entonces que $B = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g). □

Ejemplo 2.20: Consideremos el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular una base ortogonal para este espacio vectorial métrico. En primer lugar vamos a averiguar si la métrica g es o no degenerada. Para ello calculamos

$$\det(M(g, B_u)) = -5 \neq 0 \ .$$

Por la proposición 2.7 podemos afirmar que la métrica g es no degenerada. Además, simplemente observando los elementos de la diagonal de $M(g, B_u)$ podemos afirmar que la métrica g es indefinida ya que por ejemplo se tiene que $g((1,0,0),(1,0,0)) = -1 < 0$ y $g((0,1,0),(0,1,0)) = 2 > 0$. Por tanto g es una métrica indefinida no degenerada.

Seguiremos el primer paso de la demostración de la proposición 2.19 para construir la base ortogonal. Debemos comenzar eligiendo un vector $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Por lo dicho anteriormente el vector $u_1 = (1,0,0)$ verifica esta condición. Denotemos $U_1 = L(\{(1,0,0)\})$. Necesitamos calcular

$$\begin{aligned} U_1^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\} = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\}) \end{aligned}$$

Ahora debemos aplicar de nuevo el paso 1 de la demostración de la proposición 2.19 al espacio vectorial métrico $(U_1^{\perp}, g_{U_1^{\perp}})$ que sabemos que es no degenerado. Por tanto habrá que elegir un vector $u_2 \in U_1^{\perp}$ tal que $g(u_2, u_2) \neq 0$. Veamos si el vector $(1,1,0)$ sirve.

$$g((1,1,0),(1,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

y por tanto podemos considerar $u_2 = (1,1,0)$. Denotemos $U_2 = L(\{(1,1,0)\})$. El siguiente paso sería calcular $U_2^{\perp_{g_{U_1^{\perp}}}}$. Pero recordemos que en el apartado iii) de las propiedades 2.13

habíamos visto $U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}} = U_2^\perp \cap U_1^\perp$. Calculemos entonces

$$\begin{aligned} U_2^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,0),(x,y,z)) = 0\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 2z = 0\} \,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}} = U_2^\perp \cap U_1^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 2z = 0, -x + y + z = 0\} = L(\{(1,-2,3)\}) \,.$$

Observemos que tenemos $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}}$ y así si cogemos un vector en cada uno de esos subespacios obtenemos $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,-2,3)\}$ una base ortogonal de g. Para esta base tendríamos

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora <u>otra forma</u> de obtener una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g)$. Este procedimiento consiste en ir multiplicando la matriz $M(g,B_u)$ a la izquierda por una matriz elemental y a la derecha por su transpuesta hasta conseguir obtener una matriz diagonal. Tendríamos entonces $P^t \cdot M(g,B_u) \cdot P = D$ y por tanto $P = M(B,B_u)$ para B una base ortogonal. Las matrices elementales por las que tenemos que ir multiplicando son similares a las que se utilizan en el método de Gauss para obtener una matriz escalonada.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_2 \to C_2 + C_1}{\overset{F_2 \to F_2 + F_1}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{\overset{F_3 \to F_3 + F_1}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{C_3 \to 3C_3 - 2C_2}{\overset{F_3 \to 3F_3 - 2F_2}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se ha ido indicando en cada paso las operaciones que hemos ido haciendo sobre filas y columnas. Por ejemplo $F_2 \to F_2 + F_1$ indica que hemos sustituido la 2ª fila (F_2) por la suma de la segunda fila y la primera. Observemos que hacemos las mismas operaciones sobre filas y columnas ya que esto corresponde a multiplicar por una matriz regular por la izquierda y por su transpuesta por la derecha obteniendo así una matriz congruente a la anterior. Ahora para obtener la base ortogonal basta con multiplicar todas las matrices por las que hemos ido multiplicando a la derecha. Se tiene así

$$P = M(B,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto las columnas de esta última matriz son las coordenadas de la base B en la base B_u. De aquí $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,-2,3)\}$ es una base ortogonal para $(\mathbb{R}^3, g)$.

Observemos que las anotaciones que hemos ido haciendo sobre filas y columnas no nos han servido para calcular la matriz P. Se han incluido para que estuviese mejor explicado cada paso. Estas anotaciones sí servirían para obtener la matriz P de otra forma, realizando las operaciones que se indican a las columnas de la matriz identidad.

Hay que destacar que en este caso la base ortogonal que hemos obtenido es la misma en los dos métodos que hemos utilizado pero en general no tienen porque coincidir. Como la base ortogonal no es única dependiendo de las elecciones de vectores en el primer método o las operaciones a realizar en el segundo método obtendremos distintas bases.

Ejemplo 2.21: Consideremos ahora el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular una base ortogonal para este espacio vectorial métrico. En primer lugar vamos a averiguar si la métrica g es o no degenerada. Para ello observamos que la primera fila y la tercera fila son proporcionales y por tanto $\det(M(g, B_u)) = 0$. Por la proposición 2.7 podemos afirmar que la métrica g es degenerada.

Como la métrica es degenerada seguiremos el segundo paso de la demostración de la proposición 2.19 para construir la base ortogonal. De la expresión (1) sabemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Rad}(g) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x - z = 0\} = L(\{(1,0,1)\}) \end{aligned}$$

Debemos buscar entonces un suplementario de este subespacio, por ejemplo podemos considerar

$$W = L(\{(1,1,0),(0,1,0)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} .$$

Ahora debemos aplicar el paso 1 de la demostración de la proposición 2.19 al espacio vectorial métrico (W, g_W) que sabemos que es no degenerado. Por tanto habrá que elegir un vector $u_1 \in W$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Veamos si el vector $(1,1,0)$ sirve.

$$g((1,1,0),(1,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

y por tanto podemos considerar $u_1 = (1,1,0)$. Denotemos $U_1 = L(\{(1,1,0)\})$. El siguiente paso sería calcular $U_1^{\perp_{g_W}}$. Pero recordemos que en el apartado iii) de las propiedades 2.13

habíamos visto $U_1^{\perp_{g_W}} = U_1^{\perp} \cap W$. Calculemos entonces

$$\begin{aligned}
U_1^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,0),(x,y,z)) = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \;.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$U_1^{\perp_{g_W}} = U_1^{\perp} \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, z = 0\} = L(\{(1,-1,0)\}) \;.$$

Observemos que tenemos $V = U_1 \oplus U_1^{\perp_{g_W}} \oplus \mathrm{Rad}(g)$ y así si cogemos un vector en cada uno de esos subespacios obtenemos $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,1)\}$ una base ortogonal de g. Para esta base tendríamos

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, simplemente observando esta matriz podemos afirmar que la métrica g es indefinida degenerada ya que $g((1,1,0),(1,1,0)) = 2 > 0$ y $g((1,-1,0),(1,-1,0)) = -2 < 0$.

Calculemos ahora la base ortogonal utilizando el segundo método para hacerlo. Observemos en primer lugar que como el elemento $(1,1)$ de la matriz es 0 no podemos utilizarlo de pivote. Un cambio de orden en las filas y columnas tampoco soluciona nada porque el resto de elementos de la diagonal también son cero. Esto nos obliga a realizar otro tipo de operación como sustituir la primera fila por la suma de la primera fila y la segunda y hacer lo propio con las columnas.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2}{\overset{F_1 \to F_1 + F_2}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{C_2 \to 2C_2 - C_1}{\overset{F_2 \to 2F_2 - F_1}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{C_3 \to 2C_3 + C_1}{\overset{F_3 \to 2F_3 + F_1}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{C_3 \to C_3 - C_2}{\overset{F_3 \to F_3 - F_2}{\sim}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora para obtener la base ortogonal basta con multiplicar todas las matrices por las que hemos ido multiplicando a la derecha. Se tiene así

$$P = M(B,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto las columnas de esta última matriz son las coordenadas de la base B en la base B_u. De aquí $B = \{(1,1,0),(-1,1,0),(2,0,2)\}$ es una base ortogonal para $(\mathbb{R}^3, g)$.

4.2. Bases ortonormales. Teorema de Sylvester. Queremos dar todavía un paso más en nuestra búsqueda de una base en la que la matriz de una métrica sea lo más sencilla posible. De la sección anterior ya sabemos que dado (V, g) un espacio vectorial métrico existe una base ortogonal, es decir una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ tal que $M(g, B)$ es de la forma

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} g(u_1,u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(u_2,u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(u_n,u_n) \end{pmatrix} .$$

Pero queremos simplificar todavía más esta matriz. Supongamos que hemos ordenado la base B para que

$$\begin{array}{rcll} g(u_i,u_i) & > & 0 \ , & 1 \leqslant i \leqslant r-s \ , \\ g(u_i,u_i) & < & 0 \ , & r-s+1 \leqslant i \leqslant r \ , \\ g(u_i,u_i) & = & 0 \ , & r+1 \leqslant i \leqslant n \ , \end{array}$$

donde $r = \operatorname{rang}(g)$. Es decir, ordenamos la base B para que en la diagonal de la matriz $M(g, B)$ aparezcan primero los números positivos, después los negativos y después los nulos. Observemos que podemos considerar entonces una nueva base $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ dada por

$$\begin{array}{rcll} u'_i = & \frac{1}{\sqrt{g(u_i,u_i)}} u_i \ , & & 1 \leqslant i \leqslant r-s \ , \\ u'_i = & \frac{1}{\sqrt{-g(u_i,u_i)}} u_i \ , & & r-s+1 \leqslant i \leqslant r \ , \\ u'_i = & u_i \ , & & r+1 \leqslant i \leqslant n \ . \end{array}$$

Observemos que en esta nueva base se tiene

$$\begin{array}{rcll} g(u'_i,u'_i) & = & \frac{1}{g(u_i,u_i)} g(u_i,u_i) = \mathbf{1} \ , & 1 \leqslant i \leqslant r-s \ , \\ g(u'_i,u'_i) & = & \frac{1}{-g(u_i,u_i)} g(u_i,u_i) = -\mathbf{1} \ , & r-s+1 \leqslant i \leqslant r \ , \\ g(u'_i,u'_i) & = & g(u_i,u_i) = \mathbf{0} \ , & r+1 \leqslant i \leqslant n \ , \\ g(u'_i,u'_j) & = & \mathbf{0} \ , & 1 \leqslant i,j \leqslant n \ , i \neq j \ . \end{array} \tag{2}$$

Definición 2.22: Dado un espacio vectorial métrico (V, g), a una base $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ verificando (2) le denominaremos **base ortonormal** de (V, g).

Hasta ahora hemos visto que si (V, g) es un espacio vectorial métrico siempre existen bases ortonormales. Observemos además que ya sabemos que r es un invariante de la métrica. En este punto es natural plantearse la siguiente pregunta:

¿Es s también un invariante de la métrica?

Equivalentemente,

¿El número de unos, menos unos y ceros es un invariante de la métrica?

La respuesta a estas preguntas nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 2.23: (Ley de inercia de Sylvester, 1852) *Sea (V,g) un espacio vectorial métrico,* $\dim(V)=n$ *y* $r=\operatorname{rang}(g)$*. Entonces tenemos:*

i) *Existe una base ortonormal de (V,g), es decir existe una base B de V y existe $s\in\{0,1,\dots,r\}$ tal que*

$$M(g,B)=\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \underbrace{\ddots}_{r-s} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \underbrace{\ddots}_{s} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \underbrace{\ddots}_{n-r} & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \tag{3}$$

ii) *Se tiene*

$$r-s=\text{máx}\{\dim(U), U\leqslant V \mid g_U \text{ es definida positiva}\}$$
$$s=\text{máx}\{\dim(U), U\leqslant V \mid g_U \text{ es definida negativa}\}$$

iii) *El número s no depende de la base B sino que es un invariante de la métrica.*

Demostración: Observemos que $\boxed{\text{i)}}$ ha sido probado antes.

$\boxed{\text{ii)}}$ Denotemos

$$m_1=\text{máx}\{\dim(U), U\leqslant V \mid g_U \text{ es definida positiva}\}$$

y consideremos una base

$$B=\{u_1,\dots,u_{r-s},u_{r-s+1},\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_n\}$$

que verifica el apartado i). Entonces tenemos que

$$\operatorname{Rad}(g)=L(\{u_{r+1},\dots,u_n\})\ .$$

Denotemos ahora

$$U_1=L(\{u_1,\dots,u_{r-s}\})\ ,U_2=L(\{u_{r-s+1},\dots,u_r\})\ .$$

Observemos en primer lugar que g_{U_1} es definida positiva y por tanto

$$m_1\geqslant r-s \tag{4}$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Sea U un subespacio de V tal que g_U es definida positiva y sea $B'=\{v_1,\dots,v_l\}$ una base de U. Notemos que cada uno de los vectores v_i puede escribirse como

$$v_i=a_i+b_i+c_i\ ,\quad i=1,\dots,l\ ,$$

donde $a_i\in U_1$, $b_i\in U_2$, $c_i\in\operatorname{Rad}(g)$. Demostremos que $\{a_1,\dots,a_l\}$ son linealmente independientes. Una vez probemos esto tendremos

$$\dim(U)=l\leqslant\dim(U_1)=r-s$$

y por tanto

$$m_1\leqslant r-s\ . \tag{5}$$

De (4) y (5) se tendría la igualdad. Planteamos
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i = 0\ .$$
con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos ahora el vector
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i\ .$$
Y así
$$g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i\right) + 2g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i\right) + g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i\right)\ .$$
Como $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i \in \mathrm{Rad}(g)$ la igualdad anterior quedaría
$$0 \underset{\boxed{g_U \text{ definida positiva}}}{\leqslant} g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i\right) \underset{\boxed{g_{U_2} \text{ definida negativa}}}{\leqslant} 0$$
y por tanto $g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = 0$. Pero como g_U es definida positiva tenemos $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = 0$. Teniendo en cuenta que B' es una base deducimos $\lambda_i = 0$, para $i = 1, \ldots, l$, demostrando así que los vectores $\{a_1, \ldots, a_l\}$ son linealmente independientes.

De forma análoga probaríamos la otra igualdad. La afirmación $\boxed{\text{iii)}}$ se sigue directamente de $\boxed{\text{ii)}}$. □

Definición 2.24: Llamaremos **índice de g** al número s. También se suele denominar **signatura de g** al par $(r - s, s)$ es decir al número de unos y menos unos que aparecen en $M(g, B)$ para B una base ortonormal.

Observación 2.25: Algunos textos denominan base de Sylvester a una base B tal que $M(g, B)$ es como en (3) y reservan la denominación de base ortonormal solo para el caso en el que la métrica es euclídea.

Ejemplos 2.26:
1. En el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^n, g_0)$ donde g_0 es la métrica usual la base usual es una base ortonormal ya que $M(g, B_u) = I_n$. En este caso $r = n$ y $s = 0$.
2. En el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^n, g_1)$ donde g_1 es la métrica de Lorentz-Minkowski la base usual es una base ortonormal. En este caso $r = n$ y $s = 1$. Esto justifica la notación que utilizamos para esta métrica.
3. Consideremos ahora el espacio vectorial métrico (V, g) dado en el ejemplo 2.20. Habíamos obtenido la base ortogonal $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -2, 3)\}$ y habíamos visto que
$$M(g, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Para obtener una base ortonomal a partir de ella ordenamos primero los vectores para que en la diagonal de la matriz anterior aparezcan primero los números positivos y después el negativo. Obtenemos así la base $B' = \{(1,1,0),(1,-2,3),(1,0,0)\}$. Realizando ahora el procedimiento indicado al principio de esta sección obtenemos la base ortonormal

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,3),(1,0,0) \right\} .$$

La matriz de la métrica en esta base es

$$M(g,B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Luego $\mathrm{rang}(g) = 3$ e $\mathrm{índice}(g) = 1$.

4. Consideremos ahora el espacio vectorial métrico dado en el ejemplo 2.21. Habíamos obtenido $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,1)\}$ una base ortogonal de g. Además para esta base teníamos

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Observemos que los vectores ya están convenientemente ordenados. Por tanto

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(1,0,1) \right\}$$

es una base ortonormal y la matriz de la métrica en esta base viene dada por

$$M(g,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De donde deducimos que $\mathrm{rang}(g) = 2$ e $\mathrm{índice}(g) = 1$.

Enunciemos ahora la versión de este teorema para las formas cuadráticas.

COROLARIO 2.27: (TEOREMA DE SYLVESTER PARA FORMAS CUADRÁTICAS) *Sea V un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$ y ω una forma cuadrática sobre V. Entonces existen $r \in \{0,1,\dots,n\}$, $s \in \{0,1,\dots,r\}$ y B una base de V tal que*

$$\omega(v) = \sum_{i=1}^{r-s} x_i^2 - \sum_{i=r-s+1}^{r} x_i^2 ,$$

donde $(x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas de v en la base B.

Demostración: Sea g_ω la métrica asociada a la forma cuadrática ω. Sea $r = \mathrm{rang}(g_\omega)$, $s = \mathrm{índice}(g_\omega)$ y B una base ortonormal de (V, g_ω). Si $(x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas de v en la base B tendríamos

$$\omega(v) = g_\omega(v,v) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r-s} x_i^2 - \sum_{i=r-s+1}^{r} x_i^2 .$$

□

De la Ley de inercia de Sylvester podemos deducir el siguiente resultado para matrices.

Corolario 2.28: *Toda matriz simétrica real es congruente a una única matriz de la forma*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right).$$

Observación 2.29: El corolario anterior no dice que toda matriz simétrica real sea diagonalizable en el sentido del tema 1, sino que es congruente a una matriz diagonal. Algunos autores se refieren a esto como ser diagonalizable por congruencia.

De la Ley de inercia de Sylvester también podemos deducir el siguiente resultado de caracterización de las métricas.

Corolario 2.30: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico con $n = \dim(V)$, $r = \operatorname{rang}(g)$ e $s =$ índice(g). Entonces se tiene:*

i) *g es no degenerada si y solo si $n = r$.*
ii) *g es semidefinida positiva si $s = 0$.*
iii) *g es semidefinida negativa si $s = r$.*
iv) *g es definida positiva si $n = r$ y $s = 0$.*
v) *g es definida negativa si $n = r = s$.*
vi) *g es indefinida si $0 < s < r$.*

Tenemos también este resultado que nos proporciona una manera de clasificar la métrica sin necesidad de calcular una base ortonormal.

Proposición 2.31: (Criterio de Sylvester) *Sea (V, g) espacio vectorial métrico, $\dim(V) = n$, B base de V y $A = M(g, B)$. Entonces tenemos*

i) *g es definida positiva si y solo si el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_k obtenidas tomando las primeras k filas y columnas de A es positivo para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*
ii) *g es definida negativa si y solo si el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_k obtenidas tomando las primeras k filas y columnas de A es $(-1)^k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*
iii) *Si g no es degenerada y los determinantes de las submatrices cuadradas A_k no verifican ni las condiciones de* i) *ni las de* ii), *entonces g es indefinida.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow}$ En primer lugar vamos a probar que si (W, g') es un espacio vectorial euclídeo y B' es una base de W entonces $\det(M(g', B')) > 0$. Efectivamente, consideremos B'' una base ortonormal de (W, g'). Tendríamos entonces que $M(g', B'') = I_n$. Pero como $M(g', B') = P^t M(g', B'')P$, para P una matriz regular tenemos que $\det(M(g', B'))$ y $\det(M(g', B''))$ tienen el mismo signo. Teniendo en cuenta que $\det(M(g', B'')) = 1$ deducimos que $\det(M(g', B')) > 0$.

Supongamos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y denotemos $B_k = \{u_1, \ldots, u_k\}$ y $U_k = L(\{u_1, \ldots, u_k\})$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que (U_k, g_{U_k}) son espacios vectoriales euclídeos y que B_k es una base de U_k. Entonces aplicando lo anterior tenemos que $\det(M(g_{U_k}, B_k)) = \det(A_k) > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{\text{i)} \Leftarrow}$ Supongamos ahora que $\det(A_k) > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicaremos un proceso de inducción sobre n para probar que (V, g) es un espacio métrico euclídeo.

Si $n = 1$ es claro. Supongamos que es cierto para $n - 1$ y veamos que es cierto para n. Observemos que el espacio vectorial métrico $(U_{n-1}, g_{U_{n-1}})$ verifica la hipótesis de inducción y así podemos afirmar que $g_{U_{n-1}}$ es una métrica euclídea. Por tanto del apartado viii) de las propiedades 2.13 podemos escribir $V = U_{n-1} \oplus U_{n-1}^{\perp}$, con $\dim(U_{n-1}^{\perp}) = 1$. Si $v \in U_{n-1}^{\perp} \backslash \{0\}$ tenemos que $\tilde{B} = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ es una base de V que verifica

$$M(g, \tilde{B}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & g(v,v) \end{array} \right) .$$

Y por tanto $\det(M(g, \tilde{B})) = \det(A_{n-1}) g(v,v)$. De los términos de esta igualdad sabemos que $\det(M(g, \tilde{B})) > 0$ puesto que su signo coincide con el signo de $\det(A)$ y $\det(A_{n-1}) > 0$ por hipótesis. Por tanto $g(v,v) > 0$.

Observemos que si consideramos $\{u'_1, \ldots, u'_{n-1}\}$ base ortonormal de $(U_{n-1}, g_{U_{n-1}})$ entonces $\hat{B} = \{u'_1, \ldots, u'_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{g(v,v)}} v\}$ es una base ortonormal de (V, g) es decir

$$M(g, \hat{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

y por tanto g es euclídea.

Para demostrar $\boxed{\text{ii)}}$ vamos a considerar la métrica $-g$. Observemos que $M(-g, B) = -A$ y entonces

$$\begin{aligned} g \text{ es definida negativa} &\iff -g \text{ es definida positiva} \iff \det(-A_k) = (-1)^k \det(A_k) > 0 \\ &\underset{\text{i)}}{\iff} \det(A_k) \text{ y } (-1)^k \text{ tienen el mismo signo} \end{aligned}$$

El apartado iii) es consecuencia inmediata de los dos apartados anteriores. □

También se puede dar un criterio parecido al anterior para el caso semidefinido positivo y negativo. En este caso el criterio diría.

PROPOSICIÓN 2.32: *Sea* (V, g) *espacio vectorial métrico,* $\dim(V) = n$, B *base de* V *y* $A = M(g, B)$. *Entonces tenemos*

i) g *es semidefinida positiva si y solo si los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal principal de* A *son mayores o iguales que cero.*

ii) g *es semidefinida negativa si y solo si los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal principal de* A *son mayores o iguales que cero si su orden es par y menores o iguales que cero si su orden es impar.*

Demostración: La demostración de esta proposición se deja como ejercicio. Nosotros no utilizaremos este resultado.

Vamos a analizar ahora con un poco más de detalle el caso de dimensión dos. Supongamos que (V, g) es un plano vectorial métrico, es decir $\dim(V) = 2$ y sea B es una base de V. Entonces tendríamos:

$$M(g, B) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos $A_1 = a_{11}$ y $A_2 = A$.

$$\begin{cases} \text{- } \det(A) \neq 0 \begin{cases} \det(A) > 0 \begin{cases} a_{11} > 0 \rightarrow \text{Métrica definida positiva } (r = 2, s = 0) \\ a_{11} < 0 \rightarrow \text{Métrica definida negativa } (r = s = 2) \end{cases} \\ \det(A) < 0 \qquad\qquad \rightarrow \text{Métrica indefinida no degenerada } (r = 2, s = 1) \end{cases} \\ \text{- } \det(A) = 0 \begin{cases} \text{Si } a_{11} > 0 \text{ o } a_{22} > 0 \rightarrow \text{Métrica semidefinida positiva } (r = 1, s = 0) \\ \text{Si } a_{11} < 0 \text{ o } a_{22} < 0 \rightarrow \text{Métrica semidefinida negativa } (r = s = 1) \\ \text{Si } a_{11} = a_{22} = 0 \qquad \rightarrow g \equiv 0 \ (r = s = 0) \end{cases} \end{cases}$$

De lo anterior tenemos por tanto que para clasificar una métrica en un plano vectorial métrico y calcular su rango e índice es suficiente con calcular su determinante y observar los elementos de la diagonal.

A modo de resumen de esta sección diremos que hemos visto dos formas de clasificar una métrica y calcular su rango y su índice:

1. La primera consiste en calcular una base ortonormal (o al menos ortogonal) de la métrica y comprobar el signo de los elementos de la diagonal.
2. La segunda es utilizar el Criterio de Sylvester.

En el Tema 3 se probará que cualquier matriz simétrica real es diagonalizable en el sentido del Tema 1 y esto nos proporcionará otra forma más de clasificar una métrica mediante el cálculo de los valores propios.