TEMA 2

Formas bilineales y formas cuadráticas

3. Clasificación de métricas y formas cuadráticas reales.

A lo largo de todo este apartado V denotará un espacio vectorial real y g una métrica en V, es decir una forma bilineal simétrica de V.

3.1. Tipos de métricas.

Definición 2.1: Diremos que g es **degenerada** o que (V, g) es un **espacio vectorial métrico degenerado** si $\exists u \in V \setminus \{0\}$ tal que $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$. En otro caso diremos que g es **no degenerada** o que (V, g) es un **espacio vectorial métrico no degenerado**. Observemos que si g es una métrica no degenerada y existe $u \in V$ que verifica $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$ entonces $u = 0$.

Definición 2.2: Diremos que g es un métrica **semidefinida positiva** si y sólo si $g(u, u) \geqslant 0$, $\forall u \in V$. Asímismo, diremos que g es **semidefinida negativa** si y sólo si $g(u, u) \leqslant 0$, $\forall u \in V$. Si una métrica no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa diremos que es **indefinida**. En este caso $\exists u_1, u_2 \in V$ tal que $g(u_1, u_1) > 0$ y $g(u_2, u_2) < 0$.

Definición 2.3: Diremos que g es un métrica **definida positiva** o **euclídea** si y sólo si $g(u, u) > 0$, $\forall u \in V$. Asímismo, diremos que g es **definida negativa** si y sólo si $g(u, u) < 0$, $\forall u \in V$.

Proposición 2.4: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *g es definida positiva.*
ii) *g es semidefinida positiva y no degenerada.*
iii) *g es semidefinida positiva y si $g(u, u) = 0$ entonces $u = 0$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Si g es definida positiva es claro que es semidefinida positiva. Comprobemos que es también no degenerada. Para ello supongamos que existe $u \in U$ tal que $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$. En particular $g(u, u) = 0$. Como la métrica es definida positiva deducimos que $u = 0$.
$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Supongamos que $g(u, u) = 0$ y veamos que $u = 0$. Consideremos $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Tenemos entonces que

$$g(\lambda u+v, \lambda u+v) \underset{g \text{ métrica}}{=} \lambda^2 g(u, u)+2\lambda g(u, v)+g(v, v) \underset{g(u,u)=0}{=} 2\lambda g(u, v)+g(v, v) \underset{g \text{ semid. posit.}}{\geqslant} 0\,.$$

Observemos que $2\lambda g(u,v)+g(v,v)$ representa una recta de $\mathbb{R}^2$ sin puntos por debajo del eje de abcisas. Por tanto esa recta debe ser paralela a dicho eje y esto solo es posible si $g(u,v)=0$. Como esto era para un vector v cualquiera y la métrica es no degenerada deducimos que $u=0$.
$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Es trivial. □

Observación 2.5: Observemos que tendríamos las mismas equivalencias sustituyendo en la proposición anterior positiva por negativa.

Definición 2.6: Se define el **radical de** g como el subconjunto dado por

$$\mathrm{Rad}(g) = \{u \in V \mid g(u,v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Observemos que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V el $\mathrm{Rad}(g)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(g) &= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = 0, i = 1, \ldots, n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; M(g,B) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned} \tag{1}$$

De lo anterior observamos que las coordenadas de los vectores de $\mathrm{Rad}(g)$ verifican un sistema de ecuaciones lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es $M(g,B)$. Por tanto $\mathrm{Rad}(g)$ es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - \mathrm{rang}(g)$. De todo lo anterior se sigue directamente la siguiente caracterización para las métricas no degeneradas.

Proposición 2.7: *Sea (V,g) un espacio vectorial métrico y B una base de V. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *g es no degenerada.*
ii) $\mathrm{Rad}(g) = \{0\}$.
iii) *$M(g,B)$ es regular.*
iv) $\det(M(g,B)) \neq 0$.

Sea U un subespacio vectorial de V. Recordemos que entonces $(U, g|_U)$ es también un espacio vectorial métrico. El siguiente ejemplo muestra que (V,g) puede ser no degenerado pero que $(U, g|_U)$ puede ser degenerado. A partir de ahora denotaremos $g_U = g|_U$.

Ejemplo 2.8: Consideremos el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $U = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$. De la proposición 2.7 tenemos que g es no degenerada ya que $\det(M(g,B_u)) = 1 \neq 0$. Comprobemos ahora que (U, g_U) es degenerado. Observemos que

$B' = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de U y que

$$M(g_U, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí $\det(M(g_U, B')) = 0$ y por tanto g_U es degenerada.

Observación 2.9: Observemos que lo que sí podemos afirmar es que si g es una métrica euclídea entonces g_U es una métrica euclídea.

3.2. Subespacio ortogonal. Dado (V, g) un espacio vectorial métrico y U un subespacio vectorial de V consideramos el subconjunto

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\}\ .$$

Es sencillo comprobar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V. En efecto, si $u_1, u_2 \in U^\perp$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) = 0$$

Observemos que en el anterior razonamiento no se ha usado que U sea un subespacio. Por tanto se tiene que si C es un subconjunto de V entonces $C^\perp = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in C\}$ es un subespacio. Además es claro que $U^\perp$ es un subespacio perpendicular a U.

Definición 2.10: A $U^\perp$ se le denomina **el subespacio ortogonal de U respecto de g.**

Observación 2.11: Notemos que, como el subespacio ortogonal de U respecto de g depende de la métrica, deberíamos adoptar una notación más rigurosa como $U^{\perp_g}$. Sin embargo debido a lo farragoso de esta notación la utilizaremos sólo cuando estemos manejando varias métricas a la vez y se puedan producir confusiones.

Ejemplo 2.12: Sea g la métrica en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y $U = L(\{(0,1)\})$. Entonces el subespacio ortogonal de U respecto de g viene dado por

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g((0,1),(x,y)) = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\} = L(\{(-3,1)\}) \end{aligned}$$

Para el subespacio ortogonal tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades 2.13: *Sea (V, g) espacio vectorial métrico y U, W subespacios de V. Entonces se tiene:*

i) $V^\perp = \mathrm{Rad}(g)$ *y* $\{0\}^\perp = V$.
ii) *Si* $W \subset U$ *entonces* $U^\perp \subset W^\perp$.
iii) *Si* $W \subset U$ *entonces* $W^{\perp_{g_U}} = W^{\perp_g} \cap U$. *En particular* $\mathrm{Rad}(g_U) = U^{\perp_g} \cap U$.

iv) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Además si g es una <u>*métrica no degenerada*</u> *se tiene:*

v) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$.

vi) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

vii) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

viii) (U, g_U) *es un espacio vectorial métrico no degenerado si y sólo si* $V = U \oplus U^{\perp}$, *es decir* $U^{\perp}$ *es el suplemento ortogonal de* U. *En particular si* g *es una métrica euclídea* $V = U \oplus U^{\perp}$.

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Es trivial.

$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \forall w \in W\} \underset{U \subset W}{\subset} \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\} = U^{\perp} \ .$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Basta con observar que

$$W^{\perp_{g_U}} = \{u \in U \mid g_U(u,w) = 0, \forall w \in W\} = \{u \in U \mid g(u,w) = 0, \forall w \in W\} = W^{\perp_g} \cap U \ .$$

$\boxed{\text{iv)}}$ Como $U \subset U + W$ y $W \subset U + W$ del apartado ii) tenemos $(U+W)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Veamos ahora la otra inclusión. Consideremos $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ y veamos que $v \in (U+W)^{\perp}$. Para ello sea $u + w \in U + W$. Tenemos entonces

$$g(u+w, v) \underset{v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}}{=} g(u,v) + g(w,v) = 0 \ .$$

$\boxed{\text{v)}}$ Sea $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ base de U. Por el Teorema de completación de la base podemos completar B hasta tener una base $B' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ de V. El ortogonal de U vendría entonces dado por

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \ \middle| \ g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \ \middle| \ \sum_{j=1}^{n} x_j g(u_i, u_j) = 0, i = 1, \ldots, m \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \ \middle| \ M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

donde M es la matriz de orden $m \times n$ cuyas filas son las m primeras filas de la matriz $M(g, B')$. Teniendo en cuenta que la métrica g es no degenerada podemos afirmar que $M(g, B')$ es una matriz regular (Proposición 2.7) y por tanto la matriz M tiene rango m. Como las coordenadas de los vectores de $U^{\perp}$ verifican un sistema de ecuaciones lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M tenemos que

$$\dim(U^{\perp}) = n - \operatorname{rang}(M) = n - m = \dim(V) - \dim(U) \ .$$

$\boxed{\text{vi)}}$ Es claro que $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. Para probar que U y $(U^{\perp})^{\perp}$ son iguales basta con probar que tienen la misma dimensión. Efectivamente,

$$\dim((U^{\perp})^{\perp}) \underset{\text{v)}}{=} \dim(V) - \dim(U^{\perp}) \underset{\text{v)}}{=} \dim(V) - (\dim(V) - \dim(U)) = \dim(U)$$

$\boxed{\text{vii)}}$ Dado $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U^\perp$ y $v_2 \in W^\perp$, veamos que $v \in (U \cap W)^\perp$. Para ello consideremos $u \in U \cap W$. Tenemos entonces

$$g(u,v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{g es bilineal}}}{=} g(u,v_1) + g(u,v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ v_1 \in U^\perp,\, v_2 \in W^\perp}}{=} 0\,.$$

Por tanto $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Para probar la igualdad de estos subespacios basta con probar que tienen la misma dimensión. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\dim(U^\perp + W^\perp) &= \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim(U^\perp \cap W^\perp)\\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{iv)}}}{=} \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim((U+W)^\perp)\\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim(V) - \dim(U) + \dim(V) - \dim(W) - (\dim(V) - \dim(U+W))\\
&= \dim(V) - \dim(U \cap W) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim((U \cap W)^\perp)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{viii)}}$ Observemos que

$$g_U \;\text{ es no degenerada} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proposición 2.7}}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Rad}(g_U) = \{0\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iii)}}}{\Longleftrightarrow} U^\perp \cap U = \{0\} \Longleftrightarrow \dim(U^\perp \cap U) = 0$$

Notemos que

$$\dim(U^\perp + U) = \dim(U^\perp) + \dim(U) - \dim(U^\perp \cap U) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim(V) - \dim(U^\perp \cap U)$$

y por tanto

$$g_U \;\text{ es no degenerada} \Longleftrightarrow \dim(U^\perp + U) = \dim(V) \Longleftrightarrow V = U + U^\perp\,.$$

Como $U \perp U^\perp$ obtenemos finalmente que

$$g_U \;\text{ es no degenerada} \Longleftrightarrow V = U \oplus U^\perp\,.$$

□

Observación 2.14: Supongamos que g es una métrica no degenerada. Entonces:

1. De viii) se tiene que g_U es no degenerada si y sólo si $g_{U^\perp}$ es no degenerada.
2. De v) y viii) se deduce que el suplemento ortogonal es único, es decir si existe un subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$ entonces $W = U^\perp$.

Si g es degenerada las cuatro últimas propiedades no se verifican en general como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.15: Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la métrica g dada por

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que g es degenerada ya que $\det(M(g, B_u)) = 0$. Consideremos $U = L(\{(1,0,0), (1,1,1)\})$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in U\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0, g((1,1,1),(x,y,z)) = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\big\} = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\}) \ . \end{aligned}$$

Por tanto U no verifica el apartado v) de la proposición anterior. Consideremos ahora el subespacio $W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$. Su ortogonal viene dado por

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in U\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0, g((0,1,0),(x,y,z)) = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x - z = 0\big\} = L(\{(1,1,1)\}) \ . \end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} (W^{\perp})^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in W\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,1),(x,y,z)) = 0\big\} = \mathbb{R}^3 \ . \end{aligned}$$

Luego W no verifica el apartado vi) de la Proposición anterior. Es fácil comprobar también que los subespacios U y $W^{\perp}$ no verifican el apartado vii).

Para acabar esta sección vamos a ver cómo podemos reducir el estudio de las métricas degeneradas al estudio de las métricas no degeneradas.

Observación 2.16: Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y sea W un suplementario de $\operatorname{Rad}(g)$ es decir un subespacio vectorial de V tal que $V = \operatorname{Rad}(g) \oplus W$. Entonces tenemos

i) $V = \operatorname{Rad}(g) \obot W$
ii) $g_{\operatorname{Rad}(g)} \equiv 0$.
iii) g_W es una métrica no degenerada.
iv) $\dim(W) = \operatorname{rang}(g)$.

Demostración: Los dos primeros apartados son triviales. Para probar iii) consideramos $w \in W$ tal que $g(w, w') = 0, \forall w' \in W$ y veamos que $w = 0$. Para ello observemos que si $v \in V$ podemos escribir $v = v' + w'$, donde $v' \in \operatorname{Rad}(g)$ y $w' \in W$. De aquí

$$g(w, v) = g(w, v' + w') \underset{g \text{ bilineal}}{=} g(w, v') + g(w, w') = 0$$

y por tanto $w \in \operatorname{Rad}(g) \cap W = \{0\}$. En conclusión $w = 0$ y g_W es por tanto una métrica no degenerada.

El apartado iv) se obtiene con un cálculo directo ya que

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Rad}(g)) = \dim(V) - (\dim(V) - \operatorname{rang}(g)) = \operatorname{rang}(g) \ .$$

□

La observación anterior es trivial cuando la métrica g es no degenerada. Pero si (V, g) es un espacio métrico degenerado y W es un suplementario de $\operatorname{Rad}(g)$ de dicha observación tenemos que $g_{\operatorname{Rad}(g)} \equiv 0$ y g_W es una métrica no degenerada. Luego todo lo que obtengamos para métricas no degeneradas se aplicará a g_W. Hay que resaltar que el suplementario W no es único. Sólo tenemos asegurada la unicidad del suplementario ortogonal cuando la métrica es no degenerada (Propiedad 2.13 viii)).

3.3. Isomorfismos musicales. El objetivo de esta sección es introducir unos isomorfismos que nos serán muy útiles más adelante. Sea ahora (V, g) un espacio vectorial métrico y V^* el dual de V. Podemos definir una aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & V & \longrightarrow & V^* \\ & & & \\ & v & \mapsto & \Phi(v) : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \end{array}$$

Es fácil comprobar que esta aplicación está bien definida, es decir $\Phi(v)$ es una forma lineal. Para Φ se tienen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES 2.17: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, B una base de V y B^* su base dual. Entonces se tiene:*

i) *Φ es una aplicación lineal.*
ii) *$\Phi(u)(v) = \Phi(v)(u)$, $\forall u, v \in V$.*
iii) *$M(\Phi, B, B^*) = M(g, B)$.*
iv) *$\ker(\Phi) = \mathrm{Rad}(g)$.*
v) *Φ es un isomorfismo si y solo si g es no degenerada.*
vi) *Sea g no degenerada y Φ^{-1} la inversa de Φ que sabemos que existe por* v). *Dado $\varphi \in V^*$ se tiene que $\Phi^{-1}(\varphi)$ es el único vector de V que verifica que*
$$g(v, \Phi^{-1}(\varphi)) = \varphi(v) \text{ , } \forall v \in V \text{ .}$$
Además en este caso se tiene $\varphi(\Phi^{-1}(\psi)) = \psi(\Phi^{-1}(\varphi))$, $\forall \varphi, \psi \in V^*$.

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Dados $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha u + \beta v)(w) &= g(w, \alpha u + \beta v) = \alpha g(w,u) + \beta g(w,v) = \alpha\Phi(u)(w) + \beta\Phi(v)(w) \\ &= (\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v))(w) \end{aligned}$$

y por tanto $\Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$.

$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que $\Phi(u)(v) = g(v,u) \underset{g \text{ simétrica}}{=} g(u,v) = \Phi(v)(u)$.

$\boxed{\text{iii)}}$ Supongamos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Tenemos entonces que la entrada (i,j) de la matriz $M(\Phi, B, B^*)$ es $\Phi(u_i)(u_j) = g(u_j, u_i) = g(u_i, u_j)$ que es la entrada (i,j) de $M(g, B)$.

$\boxed{\text{iv)}}$ Directamente tenemos

$$\ker(\Phi) = \{u \in V \mid \Phi(u) \equiv 0\} = \{u \in V \mid g(v,u) = 0, \forall v \in V\} = \mathrm{Rad}(g) \text{ .}$$

$\boxed{\text{v)}}$ De iv) se tiene

$$\Phi \text{ es un isomorfismo} \iff \ker(\Phi) = \{0\} \iff \mathrm{Rad}(g) = \{0\} \iff g \text{ es no degenerada .}$$

También podríamos llegar a la misma conclusión usando iii).
$\boxed{\text{vi)}}$ En primer lugar observamos que

$$g(v, \Phi^{-1}(\varphi)) = \Phi(\Phi^{-1}(\varphi))(v) = \varphi(v) \ .$$

Para probar la unicidad supongamos que exista otro vector $u \in V$ tal que $g(v, u) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$. Entonces se tendría $g(v, u) = \varphi(v) = g(v, \Phi^{-1}(\varphi))$. De la bilinealidad de g se deduciría $g(v, u - \Phi^{-1}(\varphi)) = 0$, $\forall v \in V$. Como g es no degenerada podemos concluir que $u - \Phi^{-1}(\varphi) = 0$ y por tanto $u = \Phi^{-1}(\varphi)$. $\square$

Acabaremos esta sección con un resumen de los distintos tipos de métricas:

$$\textbf{MÉTRICAS} \begin{cases} \text{- NO DEGENERADAS} \begin{cases} \bullet \text{ Definidas positivas} = \text{EUCLÍDEAS} \\ \bullet \text{ Definidas negativas} \\ \bullet \text{ Indefinidas no degeneradas} \end{cases} \\ \text{- DEGENERADAS} \begin{cases} \bullet \text{ Semidefinidas positivas} \\ \bullet \text{ Semidefinidas negativas} \\ \bullet \text{ Indefinidas degeneradas} \end{cases} \end{cases}$$

4. Bases ortogonales y ortonormales. Ley de inercia de Sylvester. Criterio de Sylvester.

4.1. Bases ortogonales. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico. Queremos buscar una base B tal que $M(g, B)$ sea lo más sencilla posible, es decir diagonal. Si la base es $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ esto es equivalente a $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.

Definición 2.18: Dado (V, g) un espacio vectorial métrico diremos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una **base ortogonal** de (V, g) si verifica $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.

Podemos plantearnos el siguiente problema:

Dado un espacio vectorial métrico ¿existen bases ortogonales?

Equivalentemente podemos trasladar la pregunta al contexto de matrices:

¿Es toda matriz simétrica congruente a una matriz diagonal?

Veremos en esta sección que la respuesta a la primera pregunta, y por lo tanto también a la segunda, es afirmativa.

Notemos que no se trata de diagonalizar una matriz como en el Tema 1 porque en este caso las matrices de una métrica en distintas bases son congruentes no semejantes. Algunos autores se refieren a esta diagonalización como diagonalización por congruencia.

Proposición 2.19: (Existencia de bases ortogonales) *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, entonces existe una base ortogonal de (V, g), es decir, existe $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V tal que $g(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$.*

Demostración: Vamos a realizar la demostración de esta proposición en dos pasos.

$\boxed{\text{Paso 1.-}}$ En primer lugar demostraremos que existen bases ortogonales cuando (V, g) es un espacio vectorial métrico no degenerado.

Veamos en primer lugar que si la métrica es no degenerada siempre es posible encontrar $u_1 \in V$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Si no fuese así tendríamos que $g(u, u) = 0$, $\forall u \in V$ y de aquí para todo $v \in V$ tendríamos

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\left(\omega_g(u+v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)\right) = 0 \,.$$

y por tanto g sería degenerada.

Utilizaremos ahora un proceso inductivo sobre $\dim(V) = n$. Si $n = 1$ no tendríamos nada que probar. Supongamos que es cierto para $n - 1 \geqslant 1$ y veamos que es cierto para n.

Consideremos $U = L(\{u_1\})$. Como $g(u_1, u_1) \neq 0$ tenemos que (U, g_U) es un espacio vectorial métrico no degenerado y por el apartado viii) de las propiedades 2.13 tenemos que $V = U \oplus U^{\perp}$. De la observación 2.14 tenemos que $(U^{\perp}, g_{U^{\perp}})$ es un subespacio vectorial métrico no degenerado con $\dim(U^{\perp}) = n - 1$. Luego podemos aplicar la hipótesis de inducción a este espacio vectorial métrico no degenerado y obtener así $\{u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal de $(U^{\perp}, g_{U^{\perp}})$. Es claro entonces que $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).

$\boxed{\text{Paso 2.-}}$ Demostraremos ahora que también existen bases ortogonales cuando (V, g) es un espacio vectorial métrico degenerado.

Consideremos W un suplementario del espacio $\mathrm{Rad}(g)$. De los apartados iii) y iv) de la observación 2.16 tenemos entonces que (W, g_W) es un espacio vectorial métrico no degenerado con $\dim(W) = \mathrm{rang}(g) = r$. Por tanto podemos aplicarle el paso 1 y obtendríamos así una base $\{u_1, \ldots, u_r\}$ base ortogonal de (W, g_W). Consideremos ahora $\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ cualquier base de $\mathrm{Rad}(g)$. Es claro entonces que $B = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de (V, g). □

Ejemplo 2.20: Consideremos el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular una base ortogonal para este espacio vectorial métrico. En primer lugar vamos a averiguar si la métrica g es o no degenerada. Para ello calculamos

$$\det(M(g, B_u)) = -5 \neq 0 \, .$$

Por la proposición 2.7 podemos afirmar que la métrica g es no degenerada. Además, simplemente observando los elementos de la diagonal de $M(g, B_u)$ podemos afirmar que la métrica g es indefinida ya que por ejemplo se tiene que $g((1,0,0),(1,0,0)) = -1 < 0$ y $g((0,1,0),(0,1,0)) = 2 > 0$. Por tanto g es una métrica indefinida no degenerada.

Seguiremos el primer paso de la demostración de la proposición 2.19 para construir la base ortogonal. Debemos comenzar eligiendo un vector $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Por lo dicho anteriormente el vector $u_1 = (1,0,0)$ verifica esta condición. Denotemos $U_1 = L(\{(1,0,0)\})$. Necesitamos calcular

$$\begin{aligned} U_1^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\} = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\}) \end{aligned}$$

Ahora debemos aplicar de nuevo el paso 1 de la demostración de la proposición 2.19 al espacio vectorial métrico $(U_1^{\perp}, g_{U_1^{\perp}})$ que sabemos que es no degenerado. Por tanto habrá que elegir un vector $u_2 \in U_1^{\perp}$ tal que $g(u_2, u_2) \neq 0$. Veamos si el vector $(1,1,0)$ sirve.

$$g((1,1,0),(1,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

y por tanto podemos considerar $u_2 = (1,1,0)$. Denotemos $U_2 = L(\{(1,1,0)\})$. El siguiente paso sería calcular $U_2^{\perp_{g_{U_1^{\perp}}}}$. Pero recordemos que en el apartado iii) de las propiedades 2.13

habíamos visto $U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}} = U_2^\perp \cap U_1^\perp$. Calculemos entonces

$$
\begin{aligned}
U_2^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,0),(x,y,z)) = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 2z = 0\} \,.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}} = U_2^\perp \cap U_1^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 2z = 0, -x + y + z = 0\} = L(\{(1,-2,3)\}) \,.
$$

Observemos que tenemos $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_2^{\perp_{g_{U_1^\perp}}}$ y así si cogemos un vector en cada uno de esos subespacios obtenemos $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,-2,3)\}$ una base ortogonal de g. Para esta base tendríamos

$$
M(g,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}
$$

Veamos ahora <u>otra forma</u> de obtener una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g)$. Este procedimiento consiste en ir multiplicando la matriz $M(g, B_u)$ a la izquierda por una matriz elemental y a la derecha por su transpuesta hasta conseguir obtener una matriz diagonal. Tendríamos entonces $P^t \cdot M(g, B_u) \cdot P = D$ y por tanto $P = M(B, B_u)$ para B una base ortogonal. Las matrices elementales por las que tenemos que ir multiplicando son similares a las que se utilizan en el método de Gauss para obtener una matriz escalonada.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
&\underset{C_2 \to C_2 + C_1}{\overset{F_2 \to F_2 + F_1}{\sim}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\underset{C_3 \to C_3 + C_1}{\overset{F_3 \to F_3 + F_1}{\sim}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\underset{C_3 \to 3C_3 - 2C_2}{\overset{F_3 \to 3F_3 - 2F_2}{\sim}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Se ha ido indicando en cada paso las operaciones que hemos ido haciendo sobre filas y columnas. Por ejemplo $F_2 \to F_2 + F_1$ indica que hemos sustituido la 2ª fila (F_2) por la suma de la segunda fila y la primera. Observemos que hacemos las mismas operaciones sobre filas y columnas ya que esto corresponde a multiplicar por una matriz regular por la izquierda y por su transpuesta por la derecha obteniendo así una matriz congruente a la anterior. Ahora para obtener la base ortogonal basta con multiplicar todas las matrices por las que hemos ido multiplicando a la derecha. Se tiene así

$$
P = M(B, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

Por tanto las columnas de esta última matriz son las coordenadas de la base B en la base B_u. De aquí $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,-2,3)\}$ es una base ortogonal para $(\mathbb{R}^3, g)$.

Observemos que las anotaciones que hemos ido haciendo sobre filas y columnas no nos han servido para calcular la matriz P. Se han incluido para que estuviese mejor explicado cada paso. Estas anotaciones sí servirían para obtener la matriz P de otra forma, realizando las operaciones que se indican a las columnas de la matriz identidad.

Hay que destacar que en este caso la base ortogonal que hemos obtenido es la misma en los dos métodos que hemos utilizado pero en general no tienen porque coincidir. Como la base ortogonal no es única dependiendo de las elecciones de vectores en el primer método o las operaciones a realizar en el segundo método obtendremos distintas bases.

Ejemplo 2.21: Consideremos ahora el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular una base ortogonal para este espacio vectorial métrico. En primer lugar vamos a averiguar si la métrica g es o no degenerada. Para ello observamos que la primera fila y la tercera fila son proporcionales y por tanto $\det(M(g, B_u)) = 0$. Por la proposición 2.7 podemos afirmar que la métrica g es degenerada.

Como la métrica es degenerada seguiremos el segundo paso de la demostración de la proposición 2.19 para construir la base ortogonal. De la expresión (1) sabemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(g) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x - z = 0\} = L(\{(1,0,1)\})\end{aligned}$$

Debemos buscar entonces un suplementario de este subespacio, por ejemplo podemos considerar

$$W = L(\{(1,1,0),(0,1,0)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \, .$$

Ahora debemos aplicar el paso 1 de la demostración de la proposición 2.19 al espacio vectorial métrico (W, g_W) que sabemos que es no degenerado. Por tanto habrá que elegir un vector $u_1 \in W$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Veamos si el vector $(1,1,0)$ sirve.

$$g((1,1,0),(1,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

y por tanto podemos considerar $u_1 = (1,1,0)$. Denotemos $U_1 = L(\{(1,1,0)\})$. El siguiente paso sería calcular $U_1^{\perp_{g_W}}$. Pero recordemos que en el apartado iii) de las propiedades 2.13

habíamos visto $U_1^{\perp_{g_W}} = U_1^{\perp} \cap W$. Calculemos entonces

$$\begin{aligned} U_1^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,0),(x,y,z)) = 0\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$U_1^{\perp_{g_W}} = U_1^{\perp} \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0, z=0\} = L(\{(1,-1,0)\}) \,.$$

Observemos que tenemos $V = U_1 \oplus U_1^{\perp_{g_W}} \oplus \mathrm{Rad}(g)$ y así si cogemos un vector en cada uno de esos subespacios obtenemos $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,1)\}$ una base ortogonal de g. Para esta base tendríamos

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, simplemente observando esta matriz podemos afirmar que la métrica g es indefinida degenerada ya que $g((1,1,0),(1,1,0)) = 2 > 0$ y $g((1,-1,0),(1,-1,0)) = -2 < 0$.

Calculemos ahora la base ortogonal utilizando el segundo método para hacerlo. Observemos en primer lugar que como el elemento $(1,1)$ de la matriz es 0 no podemos utilizarlo de pivote. Un cambio de orden en las filas y columnas tampoco soluciona nada porque el resto de elementos de la diagonal también son cero. Esto nos obliga a realizar otro tipo de operación como sustituir la primera fila por la suma de la primera fila y la segunda y hacer lo propio con las columnas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2}{\overset{F_1 \to F_1 + F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_2 \to 2C_2 - C_1}{\overset{F_2 \to 2F_2 - F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \to 2C_3 + C_1}{\overset{F_3 \to 2F_3 + F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \to C_3 - C_2}{\overset{F_3 \to F_3 - F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para obtener la base ortogonal basta con multiplicar todas las matrices por las que hemos ido multiplicando a la derecha. Se tiene así

$$P = M(B,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto las columnas de esta última matriz son las coordenadas de la base B en la base B_u. De aquí $B = \{(1,1,0),(-1,1,0),(2,0,2)\}$ es una base ortogonal para $(\mathbb{R}^3, g)$.

4.2. Bases ortonormales. Teorema de Sylvester. Queremos dar todavía un paso más en nuestra búsqueda de una base en la que la matriz de una métrica sea lo más sencilla posible. De la sección anterior ya sabemos que dado (V, g) un espacio vectorial métrico existe una base ortogonal, es decir una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que $M(g, B)$ es de la forma

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} g(u_1,u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(u_2,u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(u_n,u_n) \end{pmatrix}.$$

Pero queremos simplificar todavía más esta matriz. Supongamos que hemos ordenado la base B para que

$$\begin{aligned} g(u_i,u_i) &> 0\,, & 1 \leqslant i \leqslant r-s\,, \\ g(u_i,u_i) &< 0\,, & r-s+1 \leqslant i \leqslant r\,, \\ g(u_i,u_i) &= 0\,, & r+1 \leqslant i \leqslant n\,, \end{aligned}$$

donde $r = \operatorname{rang}(g)$. Es decir, ordenamos la base B para que en la diagonal de la matriz $M(g, B)$ aparezcan primero los números positivos, después los negativos y después los nulos. Observemos que podemos considerar entonces una nueva base $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ dada por

$$\begin{aligned} u'_i &= \tfrac{1}{\sqrt{g(u_i,u_i)}} u_i\,, & 1 \leqslant i \leqslant r-s\,, \\ u'_i &= \tfrac{1}{\sqrt{-g(u_i,u_i)}} u_i\,, & r-s+1 \leqslant i \leqslant r\,, \\ u'_i &= u_i\,, & r+1 \leqslant i \leqslant n\,. \end{aligned}$$

Observemos que en esta nueva base se tiene

$$\begin{aligned} g(u'_i,u'_i) &= \tfrac{1}{g(u_i,u_i)} g(u_i,u_i) = \mathbf{1}\,, & 1 \leqslant i \leqslant r-s\,, \\ g(u'_i,u'_i) &= \tfrac{1}{-g(u_i,u_i)} g(u_i,u_i) = -\mathbf{1}\,, & r-s+1 \leqslant i \leqslant r\,, \\ g(u'_i,u'_i) &= g(u_i,u_i) = \mathbf{0}\,, & r+1 \leqslant i \leqslant n\,, \\ g(u'_i,u'_j) &= \mathbf{0}\,, & 1 \leqslant i,j \leqslant n\,, i \neq j\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Definición 2.22: Dado un espacio vectorial métrico (V, g), a una base $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ verificando (2) le denominaremos **base ortonormal** de (V, g).

Hasta ahora hemos visto que si (V, g) es un espacio vectorial métrico siempre existen bases ortonormales. Observemos además que ya sabemos que r es un invariante de la métrica. En este punto es natural plantearse la siguiente pregunta:

¿Es s también un invariante de la métrica?

Equivalentemente,

¿El número de unos, menos unos y ceros es un invariante de la métrica?

La respuesta a estas preguntas nos la proporciona el siguiente teorema.

TEOREMA 2.23: (LEY DE INERCIA DE SYLVESTER, 1852) *Sea* (V, g) *un espacio vectorial métrico,* $\dim(V) = n$ *y* $r = \operatorname{rang}(g)$. *Entonces tenemos:*

i) *Existe una base ortonormal de* (V, g), *es decir existe una base* B *de* V *y existe* $s \in \{0, 1, \ldots, r\}$ *tal que*

$$(3) \qquad M(g, B) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r-s} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{s} & \\ & & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}_{n-r} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$$

ii) *Se tiene*

$$r - s = \max\{\dim(U), U \leqslant V \mid g_U \text{ es definida positiva}\}$$
$$s = \max\{\dim(U), U \leqslant V \mid g_U \text{ es definida negativa}\}$$

iii) *El número* s *no depende de la base* B *sino que es un invariante de la métrica.*

Demostración: Observemos que $\boxed{\text{i)}}$ ha sido probado antes.

$\boxed{\text{ii)}}$ Denotemos

$$m_1 = \max\{\dim(U), U \leqslant V \mid g_U \text{ es definida positiva}\}$$

y consideremos una base

$$B = \{u_1, \ldots, u_{r-s}, u_{r-s+1}, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$$

que verifica el apartado i). Entonces tenemos que

$$\operatorname{Rad}(g) = L(\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}) \ .$$

Denotemos ahora

$$U_1 = L(\{u_1, \ldots, u_{r-s}\}) \ , U_2 = L(\{u_{r-s+1}, \ldots, u_r\}) \ .$$

Observemos en primer lugar que g_{U_1} es definida positiva y por tanto

$$(4) \qquad m_1 \geqslant r - s$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Sea U un subespacio de V tal que g_U es definida positiva y sea $B' = \{v_1, \ldots, v_l\}$ una base de U. Notemos que cada uno de los vectores v_i puede escribirse como

$$v_i = a_i + b_i + c_i \ , \quad i = 1, \ldots, l \ ,$$

donde $a_i \in U_1$, $b_i \in U_2$, $c_i \in \operatorname{Rad}(g)$. Demostremos que $\{a_1, \ldots, a_l\}$ son linealmente independientes. Una vez probemos esto tendremos

$$\dim(U) = l \leqslant \dim(U_1) = r - s$$

y por tanto

$$(5) \qquad m_1 \leqslant r - s \ .$$

De (4) y (5) se tendría la igualdad. Planteamos
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i = 0 \; .$$
con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos ahora el vector
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i \; .$$
Y así
$$g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i\right) + 2g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i\right) + g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i\right) \; .$$
Como $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i \in \mathrm{Rad}(g)$ la igualdad anterior quedaría
$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ g_U \text{ definida positiva}}}{\leqslant} g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ g_{U_2} \text{ definida negativa}}}{\leqslant} 0$$
y por tanto $g\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\right) = 0$. Pero como g_U es definida positiva tenemos $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = 0$. Teniendo en cuenta que B' es una base deducimos $\lambda_i = 0$, para $i = 1, \ldots, l$, demostrando así que los vectores $\{a_1, \ldots, a_l\}$ son linealmente independientes.

De forma análoga probaríamos la otra igualdad. La afirmación $\boxed{\text{iii)}}$ se sigue directamente de $\boxed{\text{ii)}}$. □

Definición 2.24: Llamaremos **índice de g** al número s. También se suele denominar **signatura de g** al par $(r - s, s)$ es decir al número de unos y menos unos que aparecen en $M(g, B)$ para B una base ortonormal.

Observación 2.25: Algunos textos denominan base de Sylvester a una base B tal que $M(g, B)$ es como en (3) y reservan la denominación de base ortonormal solo para el caso en el que la métrica es euclídea.

Ejemplos 2.26:

1. En el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^n, g_0)$ donde g_0 es la métrica usual la base usual es una base ortonormal ya que $M(g, B_u) = I_n$. En este caso $r = n$ y $s = 0$.
2. En el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^n, g_1)$ donde g_1 es la métrica de Lorentz-Minkowski la base usual es una base ortonormal. En este caso $r = n$ y $s = 1$. Esto justifica la notación que utilizamos para esta métrica.
3. Consideremos ahora el espacio vectorial métrico (V, g) dado en el ejemplo 2.20. Habíamos obtenido la base ortogonal $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -2, 3)\}$ y habíamos visto que
$$M(g, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Para obtener una base ortonomal a partir de ella ordenamos primero los vectores para que en la diagonal de la matriz anterior aparezcan primero los números positivos y después el negativo. Obtenemos así la base $B' = \{(1,1,0), (1,-2,3), (1,0,0)\}$. Realizando ahora el procedimiento indicado al principio de esta sección obtenemos la base ortonormal

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,3), (1,0,0) \right\} .$$

La matriz de la métrica en esta base es

$$M(g, B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Luego $\operatorname{rang}(g) = 3$ e $\text{índice}(g) = 1$.

4. Consideremos ahora el espacio vectorial métrico dado en el ejemplo 2.21. Habíamos obtenido $B = \{(1,1,0), (1,-1,0), (1,0,1)\}$ una base ortogonal de g. Además para esta base teníamos

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Observemos que los vectores ya están convenientemente ordenados. Por tanto

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (1,0,1) \right\}$$

es una base ortonormal y la matriz de la métrica en esta base viene dada por

$$M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De donde deducimos que $\operatorname{rang}(g) = 2$ e $\text{índice}(g) = 1$.

Enunciemos ahora la versión de este teorema para las formas cuadráticas.

Corolario 2.27: (Teorema de Sylvester para formas cuadráticas) *Sea V un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$ y ω una forma cuadrática sobre V. Entonces existen $r \in \{0,1,\dots,n\}$, $s \in \{0,1,\dots,r\}$ y B una base de V tal que*

$$\omega(v) = \sum_{i=1}^{r-s} x_i^2 - \sum_{i=r-s+1}^{r} x_i^2 ,$$

donde $(x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas de v en la base B.

Demostración: Sea g_ω la métrica asociada a la forma cuadrática ω. Sea $r = \operatorname{rang}(g_\omega)$, $s = \text{índice}(g_\omega)$ y B una base ortonormal de (V, g_ω). Si $(x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas de v en la base B tendríamos

$$\omega(v) = g_\omega(v,v) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r-s} x_i^2 - \sum_{i=r-s+1}^{r} x_i^2 .$$

□

De la Ley de inercia de Sylvester podemos deducir el siguiente resultado para matrices.

Corolario 2.28: *Toda matriz simétrica real es congruente a una única matriz de la forma*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_{r-s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right).$$

Observación 2.29: El corolario anterior no dice que toda matriz simétrica real sea diagonalizable en el sentido del tema 1, sino que es congruente a una matriz diagonal. Algunos autores se refieren a esto como ser diagonalizable por congruencia.

De la Ley de inercia de Sylvester también podemos deducir el siguiente resultado de caracterización de las métricas.

Corolario 2.30: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico con $n = \dim(V)$, $r = \operatorname{rang}(g)$ e $s = \text{índice}(g)$. Entonces se tiene:*

i) *g es no degenerada si y solo si $n = r$.*
ii) *g es semidefinida positiva si $s = 0$.*
iii) *g es semidefinida negativa si $s = r$.*
iv) *g es definida positiva si $n = r$ y $s = 0$.*
v) *g es definida negativa si $n = r = s$.*
vi) *g es indefinida si $0 < s < r$.*

Tenemos también este resultado que nos proporciona una manera de clasificar la métrica sin necesidad de calcular una base ortonormal.

Proposición 2.31: (Criterio de Sylvester) *Sea (V, g) espacio vectorial métrico, $\dim(V) = n$, B base de V y $A = M(g, B)$. Entonces tenemos*

i) *g es definida positiva si y solo si el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_k obtenidas tomando las primeras k filas y columnas de A es positivo para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*
ii) *g es definida negativa si y solo si el signo de los determinantes de las submatrices cuadradas A_k obtenidas tomando las primeras k filas y columnas de A es $(-1)^k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*
iii) *Si g no es degenerada y los determinantes de las submatrices cuadradas A_k no verifican ni las condiciones de* i) *ni las de* ii)*, entonces g es indefinida.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow}$ En primer lugar vamos a probar que si (W, g') es un espacio vectorial euclídeo y B' es una base de W entonces $\det(M(g', B')) > 0$. Efectivamente, consideremos B'' una base ortonormal de (W, g'). Tendríamos entonces que $M(g', B'') = I_n$. Pero como $M(g', B') = P^t M(g', B'')P$, para P una matriz regular tenemos que $\det(M(g', B'))$ y $\det(M(g', B''))$ tienen el mismo signo. Teniendo en cuenta que $\det(M(g', B'')) = 1$ deducimos que $\det(M(g', B')) > 0$.

Supongamos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y denotemos $B_k = \{u_1, \ldots, u_k\}$ y $U_k = L(\{u_1, \ldots, u_k\})$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que (U_k, g_{U_k}) son espacios vectoriales euclídeos y que B_k es una base de U_k. Entonces aplicando lo anterior tenemos que $\det(M(g_{U_k}, B_k)) = \det(A_k) > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{\text{i)} \Leftarrow}$ Supongamos ahora que $\det(A_k) > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicaremos un proceso de inducción sobre n para probar que (V, g) es un espacio métrico euclídeo.

Si $n = 1$ es claro. Supongamos que es cierto para $n - 1$ y veamos que es cierto para n. Observemos que el espacio vectorial métrico $(U_{n-1}, g_{U_{n-1}})$ verifica la hipótesis de inducción y así podemos afirmar que $g_{U_{n-1}}$ es una métrica euclídea. Por tanto del apartado viii) de las propiedades 2.13 podemos escribir $V = U_{n-1} \oplus U_{n-1}^{\perp}$, con $\dim(U_{n-1}^{\perp}) = 1$. Si $v \in U_{n-1}^{\perp} \backslash \{0\}$ tenemos que $\tilde{B} = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ es una base de V que verifica

$$M(g, \tilde{B}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & g(v,v) \end{array} \right) .$$

Y por tanto $\det(M(g, \tilde{B})) = \det(A_{n-1}) g(v, v)$. De los términos de esta igualdad sabemos que $\det(M(g, \tilde{B})) > 0$ puesto que su signo coincide con el signo de $\det(A)$ y $\det(A_{n-1}) > 0$ por hipótesis. Por tanto $g(v, v) > 0$.

Observemos que si consideramos $\{u'_1, \ldots, u'_{n-1}\}$ base ortonormal de $(U_{n-1}, g_{U_{n-1}})$ entonces $\hat{B} = \{u'_1, \ldots, u'_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{g(v,v)}} v\}$ es una base ortonormal de (V, g) es decir

$$M(g, \hat{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

y por tanto g es euclídea.

Para demostrar $\boxed{\text{ii)}}$ vamos a considerar la métrica $-g$. Observemos que $M(-g, B) = -A$ y entonces

$$\begin{aligned} g \text{ es definida negativa} &\iff -g \text{ es definida positiva} \iff \det(-A_k) = (-1)^k \det(A_k) > 0 \\ &\underset{\text{i)}}{\iff} \det(A_k) \text{ y } (-1)^k \text{ tienen el mismo signo} \end{aligned}$$

El apartado iii) es consecuencia inmediata de los dos apartados anteriores. □

También se puede dar un criterio parecido al anterior para el caso semidefinido positivo y negativo. En este caso el criterio diría.

PROPOSICIÓN 2.32: *Sea (V, g) espacio vectorial métrico,* $\dim(V) = n$*, B base de V y $A = M(g, B)$. Entonces tenemos*

i) *g es semidefinida positiva si y solo si los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal principal de A son mayores o iguales que cero.*

ii) *g es semidefinida negativa si y solo si los determinantes de cualquier submatriz cuadrada que tenga su diagonal principal sobre la diagonal principal de A son mayores o iguales que cero si su orden es par y menores o iguales que cero si su orden es impar.*

Demostración: La demostración de esta proposición se deja como ejercicio. Nosotros no utilizaremos este resultado.

Vamos a analizar ahora con un poco más de detalle el caso de dimensión dos. Supongamos que (V, g) es un plano vectorial métrico, es decir $\dim(V) = 2$ y sea B es una base de V. Entonces tendríamos:

$$M(g, B) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos $A_1 = a_{11}$ y $A_2 = A$.

$$\begin{cases} \text{- } \det(A) \neq 0 \begin{cases} \det(A) > 0 \begin{cases} a_{11} > 0 \to \text{Métrica definida positiva } (r = 2, s = 0) \\ a_{11} < 0 \to \text{Métrica definida negativa } (r = s = 2) \end{cases} \\ \det(A) < 0 \qquad\qquad \to \text{Métrica indefinida no degenerada } (r = 2, s = 1) \end{cases} \\ \text{- } \det(A) = 0 \begin{cases} \text{Si } a_{11} > 0 \text{ o } a_{22} > 0 \to \text{Métrica semidefinida positiva } (r = 1, s = 0) \\ \text{Si } a_{11} < 0 \text{ o } a_{22} < 0 \to \text{Métrica semidefinida negativa } (r = s = 1) \\ \text{Si } a_{11} = a_{22} = 0 \qquad \to g \equiv 0 \ (r = s = 0) \end{cases} \end{cases}$$

De lo anterior tenemos por tanto que para clasificar una métrica en un plano vectorial métrico y calcular su rango e índice es suficiente con calcular su determinante y observar los elementos de la diagonal.

A modo de resumen de esta sección diremos que hemos visto dos formas de clasificar una métrica y calcular su rango y su índice:

1. La primera consiste en calcular una base ortonormal (o al menos ortogonal) de la métrica y comprobar el signo de los elementos de la diagonal.
2. La segunda es utilizar el Criterio de Sylvester.

En el Tema 3 se probará que cualquier matriz simétrica real es diagonalizable en el sentido del Tema 1 y esto nos proporcionará otra forma más de clasificar una métrica mediante el cálculo de los valores propios.

5. Isometrías entre espacios vectoriales métricos.

Cuando tenemos definida una estructura matemática sobre un conjunto buscamos a continuación las aplicaciones entre estas estructuras que la preservan. Por ejemplo cuando hablamos de grupos o espacios vectoriales tenemos los isomorfismos entre ellos que conservan la estructura de grupo o espacio vectorial, respectivamente. El objetivo de esta sección es buscar las aplicaciones entre espacios vectoriales métricos que preserven la estructura de espacio vectorial métrico, estas van a ser las isometrías (del griego, iso= misma, metría=medida). La justificación para esta denominación se verá en el Tema 3.

Es claro que para que se conserve la estructura de espacio vectorial métrico lo primero que debemos exigir a nuestras aplicaciones es que conserven la estructura de espacio vectorial, es decir que sean isomorfismos. Más concretamente:

Definición 2.33: Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos. Diremos que $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una **isometría** si verifica:

1) f es un isomorfismo de espacios vectorales.
2) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.

Asimismo, diremos que los espacios vectoriales métricos (V, g) y (V, g') son **isométricos** si existe $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ isometría. Además, denotaremos $\text{Iso}(V, g)$ al conjunto de isometrías del espacio vectorial métrico (V, g) en sí mismo.

Veamos a continuación algunas propiedades de las isometrías.

Propiedades 2.34: i) $\text{Id}_V \in \text{Iso}(V, g)$.
ii) *La composición de dos isometrías es una isometría.*
iii) *La inversa de una isometría es una isometría.*
iv) $\text{Iso}(V, g)$ *con la composición de aplicaciones es un grupo cuyo elemento neutro es* Id_V.

Aunque la condición 1) de la definición 2.33 ha quedado justificada antes, con algunas hipótesis se puede obtener de la condición 2).

Proposición 2.35: *Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos no degenerados. Si $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una aplicación sobreyectiva que verifica el apartado 2) de la definición 2.33 entonces f es un isomorfismo y por tanto una isometría.*

Demostración: Veamos en primer lugar que f es lineal. Para ello basta con probar que el vector

$$w = f(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha f(u_1) - \beta f(u_2)$$

es el vector nulo $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in V$. Como g' es no degenerada para obtener lo anterior basta comprobar que $g'(w, v') = 0$, $\forall v' \in V'$. Como f es sobreyectiva podemos escribir

$v' = f(v)$ para algún $v \in V$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
g'(w, v') &= g'(f(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha f(u_1) - \beta f(u_2), f(v)) \\
&\underset{g' \text{ bilinear}}{=} g'(f(\alpha u_1 + \beta u_2), f(v)) - \alpha g'(f(u_1), f(v)) - \beta g'(f(u_2), f(v)) \\
&\underset{f \text{ verifica } 2)}{=} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - \alpha g(u_1, v) - \beta g(u_2, v) \\
&\underset{g \text{ bilinear}}{=} \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) - \alpha g(u_1, v) - \beta g(u_2, v) = 0
\end{aligned}$$

Obteniendo así lo que queríamos probar $w = 0$.

Faltaría comprobar que f es inyectiva. Para ello consideremos $f(u) = 0$, tendríamos entonces que $\forall v \in V$

$$g(u, v) \underset{f \text{ verifica } 2)}{=} g'(f(u), f(v)) = 0 \,.$$

Como g es no degenerada de lo anterior se deduce que $u = 0$. □

Vamos a ver a continuación algunas equivalencias de la propiedad 2) de la definición 2.33.

PROPOSICIÓN 2.36: *Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos y $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

i) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.
ii) $\omega_{g'}(f(v)) = \omega_g(v)$, $\forall v \in V$.
iii) *Para B y B' bases cualesquiera de V y V', respectivamente, se tiene*

$$\boxed{M(f, B, B')^t \cdot M(g', B') \cdot M(f, B, B') = M(g, B)} \tag{6}$$

iv) *Existen B y B' bases de V y V', respectivamente, tal que verifican* (6).

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Observemos que $\forall v \in V$ tenemos

$$\omega_{g'}(f(v)) = g'(f(v), f(v)) \underset{\text{i)}}{=} g(v, v) = \omega_g(v)$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Recíprocamente, $\forall u, v \in V$ tenemos

$$\begin{aligned}
g'(f(u), f(v)) &= \frac{1}{2}(\omega_{g'}(f(u) + f(v)) - \omega_{g'}(f(u)) - \omega_{g'}(f(v))) \\
&\underset{f \text{ lineal}}{=} \frac{1}{2}(\omega_{g'}(f(u + v)) - \omega_{g'}(f(u)) - \omega_{g'}(f(v))) \\
&\underset{\text{ii)}}{=} \frac{1}{2}(\omega_g(u + v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)) = g(u, v)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Sean $u, v \in V$ y $u_B = (x_1, \ldots, x_n)$, $v_B = (y_1, \ldots, y_n)$, $f(u)_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)$ y $f(v)_{B'} = (y'_1, \ldots, y'_n)$. Recordemos que tenemos:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M(f, B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = M(f, B, B') \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Además:

$$\begin{aligned}
(7) \qquad g(u,v) &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot M(g,B) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \\
g'(f(u), f(v)) &= \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \cdot M(g',B') \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \\
(8) \qquad &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot M(f,B,B')^t \cdot M(g',B') \cdot M(f,B,B') \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De i) sabemos que las expresiones en (7) y (8) son iguales $\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y por tanto obtenemos la igualdad de matrices (6).

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}}$ Trivial.

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Observemos que si se da iv) para algún par de bases B y B' entonces de las ecuaciones (7) y (8) tenemos $g'(f(u), f(v)) = g(u,v)$. □

COROLARIO 2.37: *Sean (V,g) y (V',g') espacios vectoriales métricos y $f : (V,g) \longrightarrow (V',g')$ una isometría. Entonces se tiene que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V entonces $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V',g'), es decir f lleva bases ortonormales en bases ortonormales.*

Demostración: Basta observar que para las bases B y B' se tiene $M(f, B, B') = I_n$ y por tanto sustituyendo en la igualdad (6) que se verifica por el apartado iv) de la proposición 2.36 se obtiene

$$(9) \qquad M(g,B) = M(g',B')$$

de dónde se deduce que B es ortonormal para (V,g) si y solo si B' es ortonormal para (V',g'). □

COROLARIO 2.38: *Sean (V,g) y (V,g') espacios vectoriales métricos. Entonces equivalen:*

i) *(V,g) y (V',g') son isométricos.*

ii) $\dim(V) = \dim(V')$, $\operatorname{rang}(V) = \operatorname{rang}(V')$ *e* índice(V) =índice(V').

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Sea $f : (V,g) \longrightarrow (V',g')$ una isometría. Por el corolario 2.37 tendríamos que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V,g) y $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$

entonces se verifica la ecuación (9) de donde se obtiene inmediatamente ii).
$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Sean $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ bases ortonormales de (V, g) y (V', g'), respectivamente. Como se verifica ii) tenemos que se da la igualdad (9). Basta considerar entonces el isomorfismo $f : V \longrightarrow V'$ dado por $f(u_i) = u'_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Observemos que con esta elección de f se verifica el apartado iv) de la proposición 2.36 ya que para las bases B y B' se tiene la igualdad (6). Obtenemos así que $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría. □

Observación 2.39: Observemos que la demostración de este corolario nos da una manera de construir una isometría entre dos espacios vectoriales métricos que son isométricos. Basta con considerar B y B' bases ortonormales de los espacios vectoriales métricos isométricos (V, g) y (V', g') y definir $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación dada por $f(u_i) = u'_i$.

En el caso en el que las métricas son euclídeas podemos decir más de las isometrías. En primer lugar podemos probar que se verifica el recíproco del corolario 2.37.

Corolario 2.40: *Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

i) *$f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría.*
ii) *Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) entonces $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V, g').*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Se tiene por el corolario 2.37.
$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Recíprocamente, sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de (V, g) y $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ que por el apartado ii) sabemos que es una base ortonormal de (V', g'). Observemos que $M(g, B) = M(g', B') = M(f, B, B') = I_n$ y por tanto se verifica la ecuación (6). De la proposición 2.36 obtenemos entonces que f es una isometría. □

A continuación vamos a considerar un subgrupo especial del grupo de las matrices regulares.

Definición 2.41: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una **matriz ortogonal** si

$$A \cdot A^t = I_n \, .$$

Notemos que toda matriz ortogonal es regular. Denotaremos

$$O(n) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$$

Es sencillo comprobar que $O(n)$ es un grupo con el producto de matrices.

Definición 2.42: A $O(n)$ se le denomina **el grupo ortogonal de orden** n.

Supongamos que tenemos (V, g) un espacio vectorial euclídeo, B una base ortonormal de (V, g) y $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces de la igualdad (6) tenemos

$$M(f, B)^t \cdot M(g, B) \cdot M(f, B) = M(g, B)$$

Pero como la métrica es euclídea y B es una base ortonormal tenemos $M(g,B)=I_n$ y por tanto la igualdad anterior se escribe como

$$M(f,B)^t\cdot M(f,B)=I_n$$

Es decir, si $f\in \mathrm{Iso}(V,g)$ y B es ortonormal entonces $M(f,B)$ es ortogonal. Esto nos permite definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Iso}(V,g) & \longrightarrow & O(n) \\ & f & \mapsto & M(f,B) \end{array}$$

Es sencillo comprobar que F es un isomorfismo de grupos.

En el Tema 3 estudiaremos más en profundidad las isometrías de un espacio vectorial euclídeo y clasificaremos estas isometrías para los casos de dimensiones dos y tres.

Supongamos ahora que tenemos V y V' espacios vectoriales reales y $f:V\longrightarrow V'$ un isomorfismo. Entonces si g es una métrica en V existe una única métrica g' en V' tal que $f:(V,g)\longrightarrow (V',g')$ es una isometría. Efectivamente, basta con definir

$$g'(u',v')=g(f^{-1}(u'),f^{-1}(v'))\ ,\forall u',v'\in V'$$

Claramente f es una isometría y g' es única.

Ejercicio 2.43: Prueba que si g es no degenerada entonces g' es no degenerada y que si g es euclídea entonces g' es euclídea.

Recíprocamente, si g' métrica en V' existe una única métrica g en V tal que $f:(V,g)\longrightarrow (V',g')$ es una isometría. En este caso basta con definir

$$g(u,v)=g'(f(u),f(v))\ ,\forall u,v\in V$$

Recordemos que si (V,g) era un espacio vectorial métrico no degenerado teníamos el isomorfismo $\Phi:V\longrightarrow V^*$ definido en la sección 3.3. De lo anterior podemos considerar la métrica g^* en V^* que hace que $\Phi:(V,g)\longrightarrow (V^*,g^*)$ sea una isometría. Consideremos ahora B base de V y B^* su base dual. De la igualdad (6) tendríamos

$$M(\Phi,B,B^*)^t\cdot M(g^*,B^*)\cdot M(\Phi,B,B^*)=M(g,B)\ ,$$

Recordando que $M(\Phi,B,B^*)=M(g,B)$ (apartado iii) de las propiedades 2.17) tendríamos

$$M(g,B)^t\cdot M(g^*,B^*)\cdot M(g,B)=M(g,B)\ ,$$

Pero como la métrica g es no degenerada $M(g,B)$ es una matriz regular y podemos multiplicar la igualdad anterior por $M(g,B)^{-1}$ obteniendo:

$$M(g,B)^t\cdot M(g^*,B^*)=I_n\ ,$$

Pero como $M(g,B)$ es simétrica se verifica $M(g,B)^t=M(g,B)$ y obtenemos de esa manera

$$M(g^*,B^*)=M(g,B)^{-1}$$

Acabaremos el tema 2 con una aclaración sobre la denominación que reciben habitualmente los isomorfismos Φ y Φ^{-1} definidos en la sección 3.3 para un espacio vectorial métrico no degenerado (V,g). El isomorfismo Φ también se denota como

$$\Phi(v)=v^\flat\ ,\forall v\in V$$

y su inversa Φ^{-1} como

$$\Phi^{-1}(\varphi) = \varphi^{\sharp} \ , \forall \varphi \in V^*$$

y se les denomina isomorfismo bemol y sostenido, respectivamente. Esta denominación viene de que estos isomorfismos suben y bajan los índices al igual que el sostenido y el bemol suben y bajan un semitono la nota musical a la que acompañan. Por ejemplo, supongamos que (V, g) es un espacio vectorial euclídeo, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g), $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ es su base dual y $v \in V$ se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i u_i$$

Entonces

$$v^{\flat} = \Phi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi^j$$

Por tanto si lo aplicamos al vector u_i tenemos

$$x_i = \Phi(v)(u_i) = g(u_i, v) = x^i$$