Ejercicios de Cálculo II
Relación 2: Derivadas (I)

1) Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define la función $g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Prueba que si f es derivable en a, entonces g tiene límite en 0.

¿Es cierto el recíproco?

2) Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in A \cap A'$. Prueba que existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ verificando que:

$$x \in A,\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leq M|x-a|.$$

¿Es cierta esta afirmación suponiendo solamente que f es continua en el punto a?

3) Estudia la derivabilidad, y calcula la derivada donde sea posible, de las funciones siguientes :

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\forall x \in [-1, 1[$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^x$, si $x > 0$ y $f(0) = 1$;

d) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$.

4) Estudia la derivabilidad, y calcula la derivada donde sea posible, de las funciones siguientes :

a) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$;

b) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{|x-2|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = x\sqrt[n]{|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$.

5) Comprueba que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

6) Se considera $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

7) Calcula la derivada de:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

8) Calcula la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen;

b) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$;

c) $y = |x|$ en $(1, 1)$.

9) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + ax + b\ ,\ g(x) = x^3 - c$$

Determina los valores de a, b, c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1, 2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

10) (*) Calcula las rectas tangentes de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que pasan por el punto $(-1, 1)$.

11) Estudia la derivabilidad de la función parte entera.

12) Si g y h son funciones derivables en $\mathbb{R}$, estudia la derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Q},\ \ f(x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

13) Da un ejemplo de una función inyectiva $f\colon A \to \mathbb{R}$, derivable en un punto $a \in A \cap A'$ con $f'(a) \neq 0$, y tal que f^{-1} no sea derivable en el punto $f(a)$.

14) (*) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existen números reales $K \geq 0$ y $\alpha > 1$ tales que

$$|f(x)| \leq K|x|^{\alpha},$$

para cualquier x en un entorno de cero. Demuestra que la función f es derivable en 0. ¿Qué se puede decir si $\alpha = 1$?