TEMA 2

Formas bilineales y formas cuadráticas

3. Clasificación de métricas y formas cuadráticas reales.

A lo largo de todo este apartado V denotará un espacio vectorial real y g una métrica en V, es decir una forma bilineal simétrica de V.

3.1. Tipos de métricas.

Definición 2.1: Diremos que g es **degenerada** o que (V, g) es un **espacio vectorial métrico degenerado** si $\exists u \in V \backslash \{0\}$ tal que $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$. En otro caso diremos que g es **no degenerada** o que (V, g) es un **espacio vectorial métrico no degenerado**. Observemos que si g es una métrica no degenerada y existe $u \in V$ que verifica $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$ entonces $u = 0$.

Definición 2.2: Diremos que g es un métrica **semidefinida positiva** si y sólo si $g(u, u) \geqslant 0$, $\forall u \in V$. Asímismo, diremos que g es **semidefinida negativa** si y sólo si $g(u, u) \leqslant 0$, $\forall u \in V$. Si una métrica no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa diremos que es **indefinida**. En este caso $\exists u_1, u_2 \in V$ tal que $g(u_1, u_1) > 0$ y $g(u_2, u_2) < 0$.

Definición 2.3: Diremos que g es un métrica **definida positiva** o **euclídea** si y sólo si $g(u, u) > 0$, $\forall u \in V$. Asímismo, diremos que g es **definida negativa** si y sólo si $g(u, u) < 0$, $\forall u \in V$.

Proposición 2.4: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *g es definida positiva.*
ii) *g es semidefinida positiva y no degenerada.*
iii) *g es semidefinida positiva y si $g(u, u) = 0$ entonces $u = 0$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Si g es definida positiva es claro que es semidefinida positiva. Comprobemos que es también no degenerada. Para ello supongamos que existe $u \in U$ tal que $g(u, v) = 0$, $\forall v \in V$. En particular $g(u, u) = 0$. Como la métrica es definida positiva deducimos que $u = 0$.
$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Supongamos que $g(u, u) = 0$ y veamos que $u = 0$. Consideremos $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Tenemos entonces que

$$g(\lambda u+v, \lambda u+v) \underset{g \text{ métrica}}{=} \lambda^2 g(u, u)+2\lambda g(u, v)+g(v, v) \underset{g(u,u)=0}{=} 2\lambda g(u, v)+g(v, v) \underset{g \text{ semid. posit.}}{\geqslant} 0 .$$

Observemos que $2\lambda g(u,v)+g(v,v)$ representa una recta de $\mathbb{R}^2$ sin puntos por debajo del eje de abcisas. Por tanto esa recta debe ser paralela a dicho eje y esto solo es posible si $g(u,v)=0$. Como esto era para un vector v cualquiera y la métrica es no degenerada deducimos que $u=0$.
$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Es trivial. □

OBSERVACIÓN 2.5: Observemos que tendríamos las mismas equivalencias sustituyendo en la proposición anterior positiva por negativa.

DEFINICIÓN 2.6: Se define el **radical de** g como el subconjunto dado por

$$\mathrm{Rad}(g) = \{u \in V \mid g(u,v) = 0, \forall v \in V\} .$$

Observemos que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V el $\mathrm{Rad}(g)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(g) &= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = 0, i = 1, \ldots, n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; M(g,B) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

De lo anterior observamos que las coordenadas de los vectores de $\mathrm{Rad}(g)$ verifican un sistema de ecuaciones lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es $M(g,B)$. Por tanto $\mathrm{Rad}(g)$ es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - \mathrm{rang}(g)$. De todo lo anterior se sigue directamente la siguiente caracterización para las métricas no degeneradas.

PROPOSICIÓN 2.7: *Sea (V,g) un espacio vectorial métrico y B una base de V. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *g es no degenerada.*
ii) $\mathrm{Rad}(g) = \{0\}$.
iii) *$M(g,B)$ es regular.*
iv) $\det(M(g,B)) \neq 0$.

Sea U un subespacio vectorial de V. Recordemos que entonces $(U, g|_U)$ es también un espacio vectorial métrico. El siguiente ejemplo muestra que (V,g) puede ser no degenerado pero que $(U, g|_U)$ puede ser degenerado. A partir de ahora denotaremos $g_U = g|_U$.

EJEMPLO 2.8: Consideremos el espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^3, g)$ donde g es la métrica cuya matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $U = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$. De la proposición 2.7 tenemos que g es no degenerada ya que $\det(M(g,B_u)) = 1 \neq 0$. Comprobemos ahora que (U, g_U) es degenerado. Observemos que

$B' = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de U y que

$$M(g_U, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí $\det(M(g_U, B')) = 0$ y por tanto g_U es degenerada.

Observación 2.9: Observemos que lo que sí podemos afirmar es que si g es una métrica euclídea entonces g_U es una métrica euclídea.

3.2. Subespacio ortogonal. Dado (V, g) un espacio vectorial métrico y U un subespacio vectorial de V consideramos el subconjunto

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\}\ .$$

Es sencillo comprobar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V. En efecto, si $u_1, u_2 \in U^\perp$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) = 0$$

Observemos que en el anterior razonamiento no se ha usado que U sea un subespacio. Por tanto se tiene que si C es un subconjunto de V entonces $C^\perp = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in C\}$ es un subespacio. Además es claro que $U^\perp$ es un subespacio perpendicular a U.

Definición 2.10: A $U^\perp$ se le denomina **el subespacio ortogonal de U respecto de g.**

Observación 2.11: Notemos que, como el subespacio ortogonal de U respecto de g depende de la métrica, deberíamos adoptar una notación más rigurosa como $U^{\perp_g}$. Sin embargo debido a lo farragoso de esta notación la utilizaremos sólo cuando estemos manejando varias métricas a la vez y se puedan producir confusiones.

Ejemplo 2.12: Sea g la métrica en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y $U = L(\{(0,1)\})$. Entonces el subespacio ortogonal de U respecto de g viene dado por

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g((0,1),(x,y)) = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\} = L(\{(-3,1)\}) \end{aligned}$$

Para el subespacio ortogonal tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades 2.13: *Sea (V, g) espacio vectorial métrico y U, W subespacios de V. Entonces se tiene:*

i) $V^\perp = \mathrm{Rad}(g)$ *y* $\{0\}^\perp = V$.
ii) *Si* $W \subset U$ *entonces* $U^\perp \subset W^\perp$.
iii) *Si* $W \subset U$ *entonces* $W^{\perp_{g_U}} = W^{\perp_g} \cap U$. *En particular* $\mathrm{Rad}(g_U) = U^{\perp_g} \cap U$.

iv) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Además si g es una métrica no degenerada se tiene:

v) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$.

vi) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

vii) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

viii) *(U, g_U) es un espacio vectorial métrico no degenerado si y sólo si $V = U \oplus U^{\perp}$, es decir $U^{\perp}$ es el suplemento ortogonal de U. En particular si g es una métrica euclídea $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Es trivial.

$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \forall w \in W\} \underset{\uparrow \atop U \subset W}{\subset} \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\} = U^{\perp} \ .$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Basta con observar que

$$W^{\perp_{g_U}} = \{u \in U \mid g_U(u,w) = 0, \forall w \in W\} = \{u \in U \mid g(u,w) = 0, \forall w \in W\} = W^{\perp_g} \cap U \ .$$

$\boxed{\text{iv)}}$ Como $U \subset U + W$ y $W \subset U + W$ del apartado ii) tenemos $(U+W)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Veamos ahora la otra inclusión. Consideremos $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ y veamos que $v \in (U+W)^{\perp}$. Para ello sea $u + w \in U + W$. Tenemos entonces

$$g(u+w, v) \underset{\uparrow \atop v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}}{=} g(u,v) + g(w,v) = 0 \ .$$

$\boxed{\text{v)}}$ Sea $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ base de U. Por el Teorema de completación de la base podemos completar B hasta tener una base $B' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ de V. El ortogonal de U vendría entonces dado por

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,u) = 0, \forall u \in U\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} x_j g(u_i, u_j) = 0, i = 1, \ldots, m \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;\middle|\; M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

donde M es la matriz de orden $m \times n$ cuyas filas son las m primeras filas de la matriz $M(g, B')$. Teniendo en cuenta que la métrica g es no degenerada podemos afirmar que $M(g, B')$ es una matriz regular (Proposición 2.7) y por tanto la matriz M tiene rango m. Como las coordenadas de los vectores de $U^{\perp}$ verifican un sistema de ecuaciones lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M tenemos que

$$\dim(U^{\perp}) = n - \operatorname{rang}(M) = n - m = \dim(V) - \dim(U) \ .$$

$\boxed{\text{vi)}}$ Es claro que $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. Para probar que U y $(U^{\perp})^{\perp}$ son iguales basta con probar que tienen la misma dimensión. Efectivamente,

$$\dim((U^{\perp})^{\perp}) \underset{\uparrow \atop \text{v)}}{=} \dim(V) - \dim(U^{\perp}) \underset{\uparrow \atop \text{v)}}{=} \dim(V) - (\dim(V) - \dim(U)) = \dim(U)$$

$\boxed{\text{vii)}}$ Dado $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U^\perp$ y $v_2 \in W^\perp$, veamos que $v \in (U \cap W)^\perp$. Para ello consideremos $u \in U \cap W$. Tenemos entonces

$$g(u,v) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es bilineal}}}{=} g(u,v_1) + g(u,v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ v_1 \in U^\perp,\, v_2 \in W^\perp}}{=} 0\,.$$

Por tanto $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Para probar la igualdad de estos subespacios basta con probar que tienen la misma dimensión. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\dim(U^\perp + W^\perp) &= \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim(U^\perp \cap W^\perp) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{iv)}}}{=} \dim(U^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim((U+W)^\perp) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim(V) - \dim(U) + \dim(V) - \dim(W) - (\dim(V) - \dim(U+W)) \\
&= \dim(V) - \dim(U \cap W) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim((U \cap W)^\perp)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{viii)}}$ Observemos que

$$g_U \ \text{es no degenerada} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proposición 2.7}}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Rad}(g_U) = \{0\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iii)}}}{\Longleftrightarrow} U^\perp \cap U = \{0\} \Longleftrightarrow \dim(U^\perp \cap U) = 0$$

Notemos que

$$\dim(U^\perp + U) = \dim(U^\perp) + \dim(U) - \dim(U^\perp \cap U) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{v)}}}{=} \dim(V) - \dim(U^\perp \cap U)$$

y por tanto

$$g_U \ \text{es no degenerada} \Longleftrightarrow \dim(U^\perp + U) = \dim(V) \Longleftrightarrow V = U + U^\perp\,.$$

Como $U \perp U^\perp$ obtenemos finalmente que

$$g_U \ \text{es no degenerada} \Longleftrightarrow V = U \oplus U^\perp\,.$$

□

Observación 2.14: Supongamos que g es una métrica no degenerada. Entonces:

1. De viii) se tiene que g_U es no degenerada si y sólo si $g_{U^\perp}$ es no degenerada.
2. De v) y viii) se deduce que el suplemento ortogonal es único, es decir si existe un subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$ entonces $W = U^\perp$.

Si g es degenerada las cuatro últimas propiedades no se verifican en general como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.15: Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la métrica g dada por

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que g es degenerada ya que $\det(M(g,B_u)) = 0$. Consideremos $U = L(\{(1,0,0),(1,1,1)\})$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in U\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0, g((1,1,1),(x,y,z)) = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\big\} = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\}) \,. \end{aligned}$$

Por tanto U no verifica el apartado v) de la proposición anterior. Consideremos ahora el subespacio $W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$. Su ortogonal viene dado por

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in U\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,0,0),(x,y,z)) = 0, g((0,1,0),(x,y,z)) = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x - z = 0\big\} = L(\{(1,1,1)\}) \,. \end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} (W^{\perp})^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,(x,y,z)) = 0, \forall u \in W\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,1),(x,y,z)) = 0\big\} = \mathbb{R}^3 \,. \end{aligned}$$

Luego W no verifica el apartado vi) de la Proposición anterior. Es fácil comprobar también que los subespacios U y $W^{\perp}$ no verifican el apartado vii).

Para acabar esta sección vamos a ver cómo podemos reducir el estudio de las métricas degeneradas al estudio de las métricas no degeneradas.

Observación 2.16: Sea (V,g) un espacio vectorial métrico y sea W un suplementario de $\mathrm{Rad}(g)$ es decir un subespacio vectorial de V tal que $V = \mathrm{Rad}(g) \oplus W$. Entonces tenemos

i) $V = \mathrm{Rad}(g) \ominus W$
ii) $g_{\mathrm{Rad}(g)} \equiv 0$.
iii) g_W es una métrica no degenerada.
iv) $\dim(W) = \mathrm{rang}(g)$.

Demostración: Los dos primeros apartados son triviales. Para probar iii) consideramos $w \in W$ tal que $g(w,w') = 0, \forall w' \in W$ y veamos que $w = 0$. Para ello observemos que si $v \in V$ podemos escribir $v = v' + w'$, donde $v' \in \mathrm{Rad}(g)$ y $w' \in W$. De aquí

$$g(w,v) = g(w,v'+w') \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ bilineal}}}{=} g(w,v') + g(w,w') = 0$$

y por tanto $w \in \mathrm{Rad}(g) \cap W = \{0\}$. En conclusión $w = 0$ y g_W es por tanto una métrica no degenerada.

El apartado iv) se obtiene con un cálculo directo ya que

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Rad}(g)) = \dim(V) - (\dim(V) - \mathrm{rang}(g)) = \mathrm{rang}(g) \,.$$

□

La observación anterior es trivial cuando la métrica g es no degenerada. Pero si (V,g) es un espacio métrico degenerado y W es un suplementario de $\mathrm{Rad}(g)$ de dicha observación tenemos que $g_{\mathrm{Rad}(g)} \equiv 0$ y g_W es una métrica no degenerada. Luego todo lo que obtengamos para métricas no degeneradas se aplicará a g_W. Hay que resaltar que el suplementario W no es único. Sólo tenemos asegurada la unicidad del suplementario ortogonal cuando la métrica es no degenerada (Propiedad 2.13 *viii)*).

3.3. Isomorfismos musicales. El objetivo de esta sección es introducir unos isomorfismos que nos serán muy útiles más adelante. Sea ahora (V, g) un espacio vectorial métrico y V^* el dual de V. Podemos definir una aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & V & \longrightarrow & V^* \\ \\ & v & \mapsto & \Phi(v) : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \end{array}$$

Es fácil comprobar que esta aplicación está bien definida, es decir $\Phi(v)$ es una forma lineal. Para Φ se tienen las siguientes propiedades.

Propiedades 2.17: *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico, B una base de V y B^* su base dual. Entonces se tiene:*

i) *Φ es una aplicación lineal.*
ii) $\Phi(u)(v) = \Phi(v)(u)$, $\forall u, v \in V$.
iii) $M(\Phi, B, B^*) = M(g, B)$.
iv) $\ker(\Phi) = \mathrm{Rad}(g)$.
v) *Φ es un isomorfismo si y solo si g es no degenerada.*
vi) *Sea g no degenerada y Φ^{-1} la inversa de Φ que sabemos que existe por* v). *Dado $\varphi \in V^*$ se tiene que $\Phi^{-1}(\varphi)$ es el único vector de V que verifica que*

$$g(v, \Phi^{-1}(\varphi)) = \varphi(v) \ , \forall v \in V \ .$$

Además en este caso se tiene $\varphi(\Phi^{-1}(\psi)) = \psi(\Phi^{-1}(\varphi))$, $\forall \varphi, \psi \in V^*$.

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Dados $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha u + \beta v)(w) &= g(w, \alpha u + \beta v) = \alpha g(w, u) + \beta g(w, v) = \alpha\Phi(u)(w) + \beta\Phi(v)(w) \\ &= (\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v))(w) \end{aligned}$$

y por tanto $\Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$.

$\boxed{\text{ii)}}$ Observemos que $\Phi(u)(v) = g(v, u) \underset{\uparrow \atop g \text{ simétrica}}{=} g(u, v) = \Phi(v)(u)$.

$\boxed{\text{iii)}}$ Supongamos que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Tenemos entonces que la entrada (i, j) de la matriz $M(\Phi, B, B^*)$ es $\Phi(u_i)(u_j) = g(u_j, u_i) = g(u_i, u_j)$ que es la entrada (i, j) de $M(g, B)$.

$\boxed{\text{iv)}}$ Directamente tenemos

$$\ker(\Phi) = \{u \in V \mid \Phi(u) \equiv 0\} = \{u \in V \mid g(v, u) = 0, \forall v \in V\} = \mathrm{Rad}(g) \ .$$

$\boxed{\text{v)}}$ De iv) se tiene

$$\Phi \text{ es un isomorfismo} \Longleftrightarrow \ker(\Phi) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Rad}(g) = \{0\} \Longleftrightarrow g \text{ es no degenerada}\ .$$

También podríamos llegar a la misma conclusión usando iii).

$\boxed{\text{vi)}}$ En primer lugar observamos que

$$g(v, \Phi^{-1}(\varphi)) = \Phi(\Phi^{-1}(\varphi))(v) = \varphi(v) \ .$$

Para probar la unicidad supongamos que exista otro vector $u \in V$ tal que $g(v, u) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$. Entonces se tendría $g(v, u) = \varphi(v) = g(v, \Phi^{-1}(\varphi))$. De la bilinealidad de g se deduciría $g(v, u - \Phi^{-1}(\varphi)) = 0$, $\forall v \in V$. Como g es no degenerada podemos concluir que $u - \Phi^{-1}(\varphi) = 0$ y por tanto $u = \Phi^{-1}(\varphi)$. ▫

Acabaremos esta sección con un resumen de los distintos tipos de métricas:

$$\textbf{MÉTRICAS} \left\{ \begin{array}{l} \text{- NO DEGENERADAS} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Definidas positivas} = \text{EUCLÍDEAS} \\ \bullet \text{ Definidas negativas} \\ \bullet \text{ Indefinidas no degeneradas} \end{array} \right. \\ \\ \text{- DEGENERADAS} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Semidefinidas positivas} \\ \bullet \text{ Semidefinidas negativas} \\ \bullet \text{ Indefinidas degeneradas} \end{array} \right. \end{array} \right.$$