FORMAS BILINEALES

Forma bilineal

Sea $V(\mathbb{K})$ e.v. $f: V \times V \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal si verifica:

1) $f(u+w, v) = f(u,v) + f(w,v)$
2) $f(u, v+w) = f(u,v) + f(v,w)$
3) $f(au, v) = a f(u,v)$
4) $f(u, av) = a f(u,v)$

Se resumen en:

1) $f(au+bw, v) = a f(u,v) + b f(w,v)$ $\forall u,v,w \in V$
2) $f(u, av+bw) = a f(u,v) + b f(u,w)$ $\forall a \in \mathbb{K}$

Esto es, es bilineal si es lineal en sus dos variables.

- Matriz asociada a f en B. $M_B(f) = (a_{ij})$; $a_{ij} = f(v_i, v_j)$

Si B' es otra base de $V(\mathbb{K}) \Rightarrow M_{B'}(f) = P^t M_B(f) P$

donde P siempre es la matriz cambio de base de B' a B

Congruencia

Sean $A, C \in M_n(\mathbb{K})$ se dice que son congruentes si

$\exists\ P \in GL(\mathbb{K}) : C = P^t A P$

- Dos matrices asociadas a la misma forma bilineal en distintas bases son congruentes.

- f simétrica si $f(u,v) = f(v,u) \Leftrightarrow M_B(f)$ es simétrica $\forall$ base

Métrica

f es una métrica "g" si f es una forma bilineal simétrica.

Entonces, (V, g) es un esp. vectorial métrico.

- f antisimétrica si $f(u,v) = -f(v,u) \Leftrightarrow M_B(g)$ es antisimétrica $\forall$ base.

(Para que sea antisimétrica debe tener ceros en la diag)

Clasificación de métricas

sea (V, g) e.v. métrico $\Rightarrow$ g es forma bilineal simétrica.

⇝ g def$\oplus$ o euclídea $\Leftrightarrow$ $g(v,v) \geq 0$ y $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\Leftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g) > 0$

⇝ g def$\ominus$ $\Leftrightarrow$ $g(v,v) \leq 0$ y $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\Leftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g) < 0$

⇝ g semidef$\oplus$ $\Leftrightarrow$ $g(v,v) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g) \geq 0$

⇝ g semidef$\ominus$ $\Leftrightarrow$ $g(v,v) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g) \leq 0$

⇝ g indefinida en otro caso.

Radical

$$\operatorname{rad}(g) = \{v \in V : g(u,v) = 0 \quad \forall u \in V\}$$
$$= \{v \in V : M_B(g)(V) = 0\}$$

⇝ Si g es definida $\Rightarrow$ $\operatorname{rad}(g) = \{\vec{0}\}$

⇝ g es no degenerada $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rad}(g) = \{\vec{0}\}$

⇝ g es degenerada $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rad}(g) \neq \{\vec{0}\}$

- $\operatorname{nul}(g) = \dim \operatorname{rad}(g) = \dim V - \operatorname{rang}(M_B(g))$

  nulidad.

Forma cuadrática.

Sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal. Se def la f. cuadrática asociada a f como:

$$F: V \longrightarrow K$$
$$F(v) = f(v,v)$$

si $A = M_B(f) \Rightarrow \frac{A + A^t}{2} = M_B(F)$

La forma cuadrática de una f. bilineal es única.

La forma bilineal de una f. cuadrática **NO** es única, son ∞.

De todas estas $\exists$ una única forma bilineal simétrica

Se verifica:

$M_B(g) = M_B(F)$. Las propiedades de las formas cuadráticas

1) $F(a v) = a^2 F(v)$

2) $g(u,v) = \frac{1}{2}[F(u+v) - F(u) - F(v)]$

Ortogonalidad

(V,g) e.v. métrico. Decimos que $u, v \in V$ son ortogonales/conjugentes

$u \perp v \iff g(u,v) = 0$

- Si g es no degenerada $\Rightarrow$ vectores ortogonales son l.i.
- Se llama <u>base ortogonal</u> de (V,g) a una base formada por vectores ortogonales dos a dos
- La matriz de una métrica en una base ortogonal siempre es una matriz diagonal.

~ Si g es def $\oplus$ o euclídea $\begin{cases} r=0 \\ \text{rang}=n \end{cases}$

~ Si g es def $\ominus$ $\begin{cases} r=n \\ \text{rang}=n \end{cases}$

~ Si g es semidef $\oplus$ $\begin{cases} r=0 \\ \text{rang}<n \end{cases}$

Teorema de Sylvester o ley de Inercia

Sea (V,g) ev métrico.

$\exists\, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una base ordenada

$$B = \{\underbrace{v_1, \dots v_r}_{r}, \underbrace{v_{r+1}, \dots\dots, v_{r+s}}_{s}, \underbrace{v_{r+s+1}, \dots\dots v_n}_{n-(s+r)}\}$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y una base ordenada tal que la matriz de la métrica a la base B se denomina <u>base ortonormal</u> o <u>base de Sylvester</u>

- Índice = nº elementos negativos
- Nulidad = nº ceros

CALCULAR LA BASE DE SYLVESTER

① Calculamos la base ortogonal

② Calculamos los $g(v_i, v_i)$ y reordenamos la base B colocando:

1° los vectores: $g(v_i, v_i) > 0$

2° los vectores: $g(v_i, v_i) < 0$

3° los vectores: $g(v_i, v_i) = 0$

③ Divides

$1 \leq i \leq r \qquad e_i = \dfrac{1}{\sqrt{|g(u_i, u_i)|}} u_i$

$r+1 \leq j \leq r+s \qquad e_j = \dfrac{1}{\sqrt{g(u_j, u_j)}} u_j$

$r+s+1 \leq k \leq n \qquad e_k = u_k$

- la matriz que obtenemos como resultado es congruente a la inicial

Espacio vectorial euclideo.

(V, g)

Norma, $\|v\| = +\sqrt{g(v,v)}$

1) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = \vec{0}$

2) $\|av\| = |a| \, \|v\| \qquad a \in \mathbb{R}$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Desigualdad triangular

4) $g(x,y) \leq \|x\| \, \|y\|$ Desigualdad de Schwarz

se verifica la igualdad $\iff$ vectores l.d.

Ángulo

El ángulo de dos vectores se define como el menor que verifica:

$$\cos \widehat{xy} = \frac{g(x,y)}{\|x\| \, \|y\|}$$

1) Si $x \perp y \iff \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$

2) Si x, y L.D $\iff \widehat{xy} = 0$ o π

3) $g(x,y) = \|x\| \, \|y\| \cos \widehat{xy}$

Base ortonormal

Es una base formada por vectores ortonormales, esto es, ortogonales dos a dos y unitarios

v es unitario $\Leftrightarrow \|v\| = 1$

$v \neq 0$ no unitario $\Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ unitario.

- En cualquier esp. vectorial hay una métrica denominada métrica usual, que es el producto escalar

$\underbrace{g_0 = g_u}$ → met. usual = producto escalar usual.

hace que la base canónica sea ortonormal.

$$g_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$$

- La base canonica no siempre es ortogonal ni ortonormal, depende de la métrica.
- La matriz de una métrica en una base ortogonal es una matriz diagonal
- La matriz de una métrica euclidea en una base ortonormal es la identidad.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea (V, g) e.v. euclideo, y $B = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$

el proceso consiste en construir una base ortonormal a partir de la base B. Dos pasos:

1) Construimos B ortogonal $= \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1$ $\qquad a_{12} = \frac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)}$

$v_3 = u_3 - a_{13} v_1 - a_{23} v_2$

$$a_{13} = \frac{g(v_1, u_3)}{g(v_1, v_1)} \qquad a_{23} = \frac{g(v_2, u_3)}{g(v_2, v_2)}$$

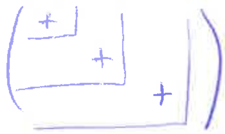
$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} v_j \qquad a_{ji} = \frac{g(v_j, u_i)}{g(v_j, v_j)}$$

2) Construimos B ortonormal $= \{e_1, e_2 \ldots e_n\}$ $\qquad e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

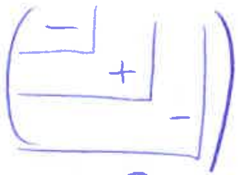
Como clasificar métricas.

Hay varios caminos

1) <u>las cajas</u>: consiste en hallar el determinante de las submatrices principales y segun el resultado podemos clasificar:



g def ⊕ o euclidea



g def ⊖

Si no verifica ninguno de estos patrones no sabemos que ocurre.

2) <u>Teorema de los signos de Descartes</u>: Hallamos el polinomio caracteristico y vemos el nº de cambios de signo que hay. El nº de cambios de signo nos indica el nº de positivos. Esto es el nº de 1 en la matriz ortonormal. Luego, hallando el nº de 0 y -1 ya podemos identificar la métrica.

3) <u>Hallar directamente la base de Sylvester</u> y ver el nº de $1, -1$, y 0. (Es recomendable cuando tienes que calcular la base de Sylvester en otro apartado).

4) <u>Mirando los valores propios</u>, que tienen el mismo signo que la matriz ortonormal, esto es, si hay 2 valores propios negativos, es como si hubiera dos -1 en la matriz ortonormal

Subespacio ortogonal

Sea (V, g) ev métrico, U s.v se denomina <u>subespacio ortogonal</u> a U al formado por los vectores que son ortogonales a todos los de U.

$$U^\perp = \{v \in V : v \perp u \ \forall u \in U\} = \{v \in V : g(v,u) = 0 \ \forall u \in U\}$$

- Si g es no degenerada $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$

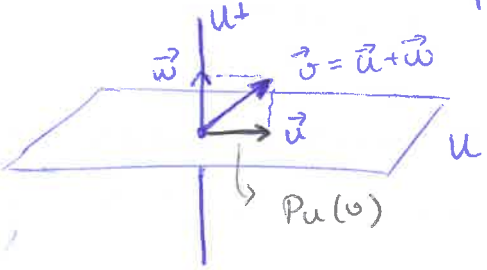
  descomposición única.

  $\forall v \in V, \ v = u + w \quad \forall u \in U, \forall w \in U^\perp$

- Se llama proyección ortogonal sobre U del vector v a la parte de la suma directa que pertenece a U.

$P_U(v) = U$.

~ Explicación ~



Endomorfismos autoadjuntos

sea $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo de (V, g) e v métrico

Si $\forall u, v \in V$ $\quad g(f(u), v) = g(u, f(v))$

En la práctica haremos lo siguiente para comprobar si algo es end. autoadjunto

$A = M(f, B)$

$G = M_B(g)$ $\qquad (A(u))^t\, G\, (V) = (U)^t G\, (A(V))$

esto sale de $g(u, v) = (\underset{u}{\text{——}})(\underset{G}{\equiv})(\underset{V}{|}) = U^t G V$

$$U^t A^t G V = U^t G A V \quad \forall u, v \in V$$

$$\boxed{A^t G = G A}$$

$$\boxed{M(f, B)^t \cdot M_B(g) = M_B(g)\, M(f, B)}$$

- Si g fuese euclídea, B ortonormal $\Rightarrow$
  $M(f, B)^t = M(f, B) \Rightarrow$ simétrica

- La matriz de un end. autoadjunto en una base ortonormal es una matriz simétrica IMP!!

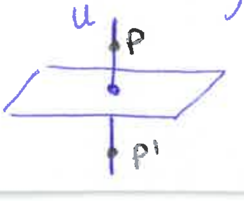
PROPIEDADES

sea (V, g) e v. m. euclídeo. y $f: V \to V$ end. autoadjunto.

1) vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

2) Si U es un s.v. invariante por f, entonces $U^\perp$ también es invariante por f.

- Invariante es $f(U) = U$ esto es, $\forall u \in U$, $f(u) \in U$



$f(U) = U$

P pasa a ser P' pero U no varía, por lo que U es invariante.

3) $M(f, B_{ortonormal})$ es simétrica.

Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos

Si f es un end. autoadjunto $\Rightarrow$

$\exists$ base ortonormal en (V, g) formada por vectores propios de f.

- Para calcular la base ortonormal de vectores propios de f diagonalizamos f (normalmente) y aplicamos GS a la base de cada subespacio propio.

La base ortonormal pedida es la unión de las bases ortonormales de los subespacios propios.

Matriz ortogonal

$P \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que P es ortogonal si su inversa es traspuesta, esto es, $P^{-1} = P^t$

$$P^{-1} = P^t \iff P \cdot P^t = I$$

PROPIEDAD

① Si P es ortogonal $\Rightarrow |P| = \pm 1$

$|PP^t| = |I_n| \Rightarrow |P||P^t| = 1 \Rightarrow |P|^2 = 1 \quad |P| = \pm 1;$

- La matriz asociada a un cambio de base entre bases ortonormales es una matriz ortogonal.

Se suele notar $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in M_n(\mathbb{R}) : P \text{ ortogonal}\}$

Isometrías

(V, g) y (V', g') dos e.v. métricos. $f: V \to V'$ una app lineal se dice que g es una isometría si

$$g(u, v) = g'(f(u), f(v))$$

Matricialmente...

$G = M_B(g)$

$G' = M_{B'}(g')$

$A = M(f, B, B')$

$$(U)^t G (V) = (A(U))^t G'(A(V))$$

$$U^t G V = U^t A^t G' A V$$

$$G = A^t G' A \Rightarrow M_B(f, B, B')$$

$$\boxed{M_B(g) = M(f, B, B')^t M_{B'}(g) M(f, B, B')}$$

- Es condición necesaria para que f sea una isometría que f sea un isomorfismo, esto es, biyectivo
- las isometrías mantienen los ángulos y las medidas.
- $f: V \to V'$ isomorfismo $\iff \begin{cases} \ker f = \{\vec{0}\} \\ \operatorname{Im} f = V' \end{cases} \Rightarrow \dim V = \dim V' = n$

$$\Downarrow$$

$$rg(M(f, B, B')) = n$$

$f(V, g) \to (V', g')$ isometría $\iff$

g y g' tienen igual $\begin{cases} \text{rango} \\ \text{índice (nº negativos)} \\ \text{nulidad (nº de ceros)} \end{cases}$

TEMA 2: FORMAS BILINEALES

Def. Sea $V(K)$ e.v. $f: V \times V \to K$ f es una forma bilineal si cumple las siguientes condiciones.

1º) $f(u+w, v) = f(u,v) + f(w,v)$

2º) $f(u, v+w) = f(u+v) + f(u,w)$

3º) $f(au, v) = a f(u,v)$ $\quad \forall u, v, w \in V$

4º) $f(u, av) = a f(u,v)$ $\quad \forall a \in K$

se pueden resumir en dos:

1 y 3 - $f(au+bw, v) = a f(u,v) + b f(w,v)$

2 y 4 - $f(u, av+bw) = a f(u,v) + b f(u,w)$

Se denomina forma bilineal si es lineal en sus dos variables.

Ej: $f(2u_1 - u_2, \underbrace{3v_1+2v_2}) = f(2u_1, \underbrace{3v_1+2v_2}) + f(-u_2, \underbrace{3v_1+2v_2})$

$= f(2u_1, 3v_1) + f(2u_1, 2v_2) + f(-u_2, 3v_1) + f(-u_2, 2v_2)$

$= 6 f(u_1, v_1) + 4 f(u_1, v_2) - 3 f(u_2, v_1) - 2 f(u_2, v_2)$

$B = \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ base de $V(K)$

$V(K)$ $\quad f: V \times V \to K$

Matriz asociada a f en B $\quad M_B(f) = (a_{ij})$; $a_{ij} = f(v_i, v_j)$

Si B' es otra base de $V(K) \Rightarrow$ $\boxed{M_{B'}(f) = P^t M_B(f) P}$

P <u>SIEMPRE</u> es la matriz cambio de base de B' a B.

Def. Sean $A, C \in M_n(K)$, se dice que son congruentes si $\exists P \in GL(K) : C = P^t A P$

Dos matrices asociadas a la misma forma bilineal en distintas bases son congruentes.

Ej: $P_2(\mathbb{R})$ se consideran la formas lineales

$\phi, \psi : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$\phi(p(t)) = p(1)$

$\psi(q(t)) = \int_{-1}^{1} q(t)\, dt$

$\phi \otimes \psi : P_2(\mathbb{R}) \times P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\phi \otimes \psi)(p(t), q(t)) = \phi(p(t)) \cdot \psi(q(t))$

Demostrar $\phi \otimes \psi$ es una forma bilineal y calcula su matriz asociada a la base $B = \{1, t, t^2\}$

Probamos las 4 prop:

1 y 3- $(\phi \otimes \psi)(a\, p(t) + b r(t), q(t)) \overset{?}{=} a(\phi \otimes \psi)(p(t), q(t)) + b(\phi \otimes \psi)(r(t), q(t))$

$(\phi \otimes \psi)(a\, p(t) + b x(t), q(t)) = \phi(a\, p(t) + b r(t)) \cdot \psi(q(t))$

$= (a p(1) + b r(1)) \cdot \int_{-1}^{1} q(t)\, dt$

$= \underbrace{a p(1) \int_{-1}^{1} q(t)\, dt}_{= \phi p(t)\ \psi(q(t))} + \underbrace{b r(1) \int_{-1}^{1} q(t)\, dt}_{= \phi(r(t))\ \psi(q(t))}$

$= a\, \phi(p(t))\, \psi(q(t)) + b\, \phi(r(t))\, \psi(q(t))$

2 y 4 − $(\phi\otimes\psi)(p(t), a\,q(t)+b\,r(t)) = a(\phi\otimes\psi)(p(t), q(t)) + b(\phi\otimes\psi)(p(t), r(t))$

$$(\phi\otimes\psi)(p(t), a\,q(t)+b\,r(t)) = \phi(p(t))\cdot\psi(a\,q(t)+b\,r(t)) =$$

$$= p(1)\cdot\int_{-1}^{1}(a\,q(t)+b\,r(t))\,dt =$$

$$= p(1)\left[a\int_{-1}^{1}q(t)\,dt + b\int_{-1}^{1}r(t)\,dt\right]$$

$$= a\,p(1)\int_{-1}^{1}q(t)\,dt + b\,p(1)\int_{-1}^{1}r(t)\,dt$$

$$= a\,\phi(p(t))\,\psi(q(t)) + b\,\phi(p(t))\,\psi(r(t))$$

Calcular la matriz

$$\mathcal{B} = \{\underset{p_1}{1}, \underset{p_2}{t}, \underset{p_3}{t^2}\}$$

$M_{\mathcal{B}}(\phi\otimes\psi) = (a_{ij})$ $\qquad a_{ij} = (\phi\otimes\psi)(p_i, p_j)$

$$a_{11} = (\phi\otimes\psi)(p_1,p_1) = \phi(p_1)\,\psi(p_1) = p_1(1)\int_{-1}^{1}dt = 1\cdot 2 = 2$$

$$a_{12} = (\phi\otimes\psi)(p_1,p_2) = \phi(p_1)\,\psi(p_2) = p_1(1)\int_{-1}^{1}t\,dt = 0$$

$$a_{13} = (\phi\otimes\psi)(p_1,p_3) = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_{21} = (\phi\otimes\psi)(p_2,p_1) = 1\cdot 2 = 2$$

$$a_{22} = (\phi\otimes\psi)(p_2,p_2) = 1\cdot 0 = 0$$

$$a_{23} = (\phi\otimes\psi)(p_2,p_3) = 1\cdot\frac{2}{3}$$

$$a_{31} = (\phi\otimes\psi)(p_3,p_1) = 2$$

$$a_{32} = (\phi\otimes\psi)(p_3,p_2) = 0$$

$$a_{33} = (\phi\otimes\psi)(p_3,p_3) = \frac{2}{3}$$

$$M_{\mathcal{B}}(\phi\otimes\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$(\phi \otimes \psi)(\underset{\overset{\shortparallel}{a_0+a_1t+a_2t^2}}{p(t)}, \underset{\overset{\shortparallel}{b_0+b_1t+b_2t^2}}{q(t)}) = \underbrace{(a_0, a_1, a_2)}_{p(t)^t} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{q(t)}$$

$$f(u,v) = u^t \, M_B(f) \, V$$

otro ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 - 3x_3y_3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$B = \{u_1(1,-1,2), u_2(0,1,-1), u_3(2,1,2)\}$$

$$M_B(f) = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

$$a_{11} = f(u_1, u_1)$$

Vamos a hacerlo en la base canónica y luego lo pasamos a la B que sea, con los cambios de base.

$$a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

$$a_{11} = f(e_1, e_1) = 1$$

$$a_{12} = f(e_1, e_2) = 2$$

$$a_{13} = f(e_1, e_3) = 0$$

$$a_{21} = f(e_2, e_1) = 1$$

$$a_{22} = f(e_2, e_2) = 2$$

$$a_{23} = f(e_2, e_3) = 0$$

$$a_{31} = f(e_3, e_1) = -1$$

$$a_{32} = f(e_3, e_2) = 1$$

$$a_{33} = f(e_3, e_3) = -3$$

$$M_{B_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_B(f) = P^t \, M_{B_C}(f) \, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \cdots$$

$f: V \times V \to K$ forma bilineal

⇝ f simétrica si $f(u,v) = f(v,u)$ $\Longleftrightarrow$ $M_B(f)$ es simétrica
$\forall u, v \in V$ $\forall B$ base

f forma bilineal simétrica = f métrica "g"
(V,g) esp. vectorial métrico.

⇝ f antisimétrica si $f(u,v) = -f(v,u)$ $\Longleftrightarrow$ $M_B(g)$ es antisimétrica
$\forall u, v \in V$ $\forall B$ base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ simétrica } A = A^t \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ Nada}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ antisimétrica } B = -B^t$$

Clasificación de las métricas

Sea (V,g) e.v. métrico. $\Rightarrow$ g es forma bilineal simétrica

⇝ g es definida positiva o euclídea si $g(v,v) \geq 0$ $\forall v \in V$
y $g(v,v) = 0$ si $v = 0$

⇝ g es definida positiva o euclídea $\Longleftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g)$ son > 0

⇝ g es definida negativa si $g(v,v) \leq 0$ y
$g(v,v) = 0$ si $v = 0$ $\Longleftrightarrow$ todos los valores propios
de $M_B(g)$ son < 0.

⇝ g es semidefinida positiva si $g(v,v) \geq 0$ $\forall v \in V$ $\Longleftrightarrow$ todos los valores propios de $M_B(g)$ son ≥ 0

⇝ semidefinida negativa es igual cambiando el signo.

g es indefinida en cualquier otro caso.

- Sea. (V, g) ev métrico.

Radical de g, $\quad rad(g) = \{v \in V : g(u,v) = 0 \ \forall u \in V\}$

= también puede llamarse núcleo

$= \{v \in V : M_B(g)(V) = 0\}$

Una métrica si es definida $\Rightarrow rad(g) = \{\vec{0}\}$

Una métrica se dice no degenerada $\Leftrightarrow rad(g) = \{\vec{0}\}$

En caso contrario se dice degenerada. $\Leftrightarrow rad(g) \neq \{\vec{0}\}$

Definida $\Rightarrow$ No generada.

$$\underset{\text{nulidad }(g)}{\underset{\|}{nul(g)}} = \dim rad(g) = \dim V - rang(M_B(g))$$

- g: $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

) Hallar rg, nul, rad. (g)

) Clasificar la métrica.

$\rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\rightarrow nul(g) = \dim rad(g) = \dim \mathbb{R}^3 - rang = 3 - 2 = 1$

$\rightarrow rad(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; M_B(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$$'' \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array}\right\} \text{ Ec. cartesianas.}$$

$z = -x$

$y = 0$

$B_{rad(g)} = \{(1, 0, -1)\}$

$g((1,0,-1), v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$

g es degenerada. $\iff$ rang $(M_B(g)) < \dim V$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) \lambda + 0$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$= \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \begin{cases} \lambda = -4 \\ \lambda = 2 \end{cases} \end{cases}$$

f es degenerada e indefinida.

Def.

Forma cuadrática:

sea $f: V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Se define la forma cuadrática asociada a f como

$\Phi: F: V \longrightarrow K$

$F(v) = f(v,v)$ si $A = M_B(f) \Rightarrow \dfrac{A + A^t}{2} = M_B(F)$

La forma cuadrática de una forma bilineal es única

Si te piden una forma bilineal a partir de una cuadrática, existen ∞ formas bilineales.

De todas estas solo hay una simétrica, esto es, <u>métrica</u>

Se verifica: $M_B(g) = M_B(F)$

1 - $F(av) = a^2 F(v)$

2 - $f(u,v) = \frac{1}{2}[F(u+v) - F(u) - F(v)]$

Propiedades de las formas cuadráticas.

Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_2 + 3x_3y_3$$

forma bilineal.

$x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$

Calculemos la formas cuadrática asociada a esta forma bilineal.

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = f(x,x) = 2x_1^2 - x x_3 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3x_1 + 4x_3x_2 + 3x_3^2$$

$$= \underbrace{2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}_{\text{diagonal}} - \underbrace{2x_1x_3}_{\substack{13\\31}} + \underbrace{7x_2x_3}_{\substack{23\\32}}$$

$$M_{B_c}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} \\ -1 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

ya que SIEMPRE son simétricas

$$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$M_{B_c}(F) = \frac{A + A^t}{2}$$

otra forma bilineal que defina la misma forma cuadrática.

$$h(x,y) = 2x_1y_1 - x_3y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_2 - x_1y_3 + 4x_2y_3 + 3x_3y_3$$

$$j(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_1y_3 - 6x_3y_1 + 15x_2y_3 - 8x_3y_2$$

Es truco está en $\frac{A + A^T}{2} = M_{B_c}(F)$

la diagonal se mantienes siempre.

De todas estas formas bilineales existe una única que es simétrica, esto es, métrica.

$$g(x,y)=2x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3-x_1y_3+\frac{7}{2}x_2y_3-x_3y_1+\frac{7}{2}x_3y_2$$

ORTOGONALIDAD

(V,g) ev. métrico. $u,v\in V$. ortogonales / conjugados.

$u\perp v \qquad g(u,v)=0$

Si g métrica no degenerada, vectores ortogonales entre sí son l.i.

Se llama base ortogonal de (V,g) a una base formada por vectores ortogonales dos a dos.

Ej: Sea $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se considera la métrica cuya matriz respecto de la base canonica es:

$$M_{BC}(g)=\begin{pmatrix}4&3&1\\3&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$$

Calcular una base ortogonal para $(\mathbb{R}^3,g)$

→ Elegimos un vector arbitrario tal que $g(v_1,v_1)\neq 0$. Normalmente la diagonal, cuando no sea 0.

$a_{ij}=g(e_i,e_j)$; $a_{ii}=g(e_i,e_i)$

→ Elegir el que tenga raiz cuadrada exacta.

$v_1=(0,1,0) \qquad g(v_1,v_1)\neq 0$

→ Elegimos un segundo vector que sea ortogonal a v_1.

$v_2(x,y,z): v_2\perp v_1$, esto es, $g(v_1,v_2)=0$

$$g(v_1,v_2)=(0,1,0)\begin{pmatrix}4&3&1\\3&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(3,1,2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=3x+y+2z=0$$

por ejemplo: $(1,-3,0)=v_2$

$v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,-3,0)$

Elegimos ahora un vector v_3 ortogonal a v_1 y v_2

$v_3(x,y,z)$: $v_3 \perp v_2$ y $v_3 \perp v_1$: $g(v_1, v_3) = 0$
$g(v_2, v_3) = 0$

$$g(v_1, v_3) = \boxed{3x + y + 2z = 0}$$

$$g(v_2, v_3) = (1, -3, 0)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-5, 0, -5)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{-5x - 5z = 0.}$$

debe cumplir ambas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} z = -x \\ x + y = 0 \Rightarrow y = -x \end{array}\right\} (1, -1, -1)$$

Así, tenemos:

$v_1 = (0,1,0)$, $v_2(1,-3,0)$, $v_3(1,-1,-1)$

comprobamos que es base o que la métrica es degenerada.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq \emptyset$$

$B = \{ v_1(0,1,0), v_2(1,-3,0), v_3(1,-1,-1)$

$\downarrow$
base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g)$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & 0 & 0 \\ 0 & g(v_2,v_2) & 0 \\ 0 & 0 & g(v_3,v_3) \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji} = g(v_i, v_j)$

La matriz de una métrica en una base ortogonal <u>siempre</u> es una matriz diagonal.

Si g es definida positiva o euclídea, $\begin{cases} r=0 \\ rang=n \end{cases}$

g " negativa, $\begin{cases} r=n \\ rang=n \end{cases}$

Si g es semidefinida positiva $\begin{cases} r=0 \\ rang<n \end{cases}$

Retomamos el ejercicio anterior (sí, he puesto ejercicio)

¿Cómo se calcula la base de Sylvester?

1º → Calcular una base ortogonal.

$$M_{Bc}(g)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\{v_1(0,1,0), v_2(1,-3,0), v_3(1,-1,-$$

2º Calculamos $g(v_i,v_i)$, y reordenamos la base B (la ortogonal) colocando primero los vectores para los cuales $g(v_i,v_i)<0$ a continuación $g(v_i,v_i)>0$ y luego $g(v_i,v_i)=0$.

En el ej: $g(v_1,v_1)=1>0$

$g(v_2,v_2)=-5<0$

$g(v_3,v_3)=5>0$

$$B'=\{\underset{u_1}{v_2(1,-3,0)}, \underbrace{\underset{u_2}{v_1(0,1,0)}, \underset{u_3}{v_3(1,-1,-1)}}_{\text{este orden da igual.}}\}$$

3º La base de Sylvester se calcula:

$1\leq i\leq r \qquad e_i=\dfrac{1}{\sqrt{|g(u_i,u_i)|}}u_i$

$r+1\leq j\leq r+s \qquad e_j=\dfrac{1}{\sqrt{g(u_j,u_j)}}u_j$

$r+s+1\leq k\leq n \qquad e_k=u_k$

$g(v_1, v_1) = 1$

$$g(v_2, v_2) = (1,-3,0)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-5,0,-5)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -5$$

$$g(v_3, v_3) = (1,-1,-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,0,-5)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Estos valores de la diagonal NO son los valores propios.

Esta matriz es congruente a la inicial.

Aunque estos valores no sean valores propios, sí que conservan el signo, por tanto sabemos que los autovalores de la inicial son dos positivos y uno negativo.

Así, g es no degenerada indefinida (métrica de Lorentz)

Teorema de Sylvester o ley de Inercia.

Sea (V, g) ev métrica $\exists$ números naturales,

$\exists\, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una base ordenada.

$$B = \{\underbrace{v_1, v_2 \dots v_r}_{r}, \underbrace{v_{r+1}, \dots v_{r+s}}_{s}, \underbrace{v_{r+s+1} \dots v_n}_{n-(s+r)}\}$$

tal que la matriz de la métrica

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A la base B se denomina base ortonormal o base de Sylvester.

Se llama índice de $g = r$ (nº de elementos negativos)

rango de $g = r + s$

nulidad de $g = n-(r+s)$ (nº de ceros)

La base de Sylvester para esta métrica es:

$$B'' = \left\{ e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-3}{\sqrt{5}}, 0\right), e_2(0,1,0), e_3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$$

$$M_{B''}(g) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$g(e_1, e_1) = -1$

$g(e_2, e_2) = 1$

$g(e_3, e_3) = 1$

$g(e_i, e_j) = 0$

Ejercicio:

$S_2(\mathbb{R})$

$$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentra una base de $S_2(\mathbb{R})$: matriz (g) sea diagonal con ± 1 o 0 en la diagonal principal

¿Qué tipo de métrica es g?

1º) $v_1 \,/\, g(v_1, v_1) \neq 0$

$\rightsquigarrow v_1 = (1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad g(v_1, v_1) = -1$

$g_{ij} = g_{ji} = g(v_i, v_j)$

$v_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow v_2 \,/\, g(v_1, v_2) = 0 \iff v_1 \perp v_2$

$$g(v_1, v_2) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + y = 0$$

$v_2 = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow v_3 \,/\, v_1 \perp v_3$ y $v_2 \perp v_3 \iff g(v_1, v_3) = 0$

$g(v_2, v_3) = 0$

$$g(v_2, v_3) = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (0, 1, 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + 2z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = y \\ y = -2z \end{array}\right\} \quad v_3(2, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Base? $\nearrow$ g es no degenerada rang$(g) = 3$

ó

$\searrow$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq \emptyset$$

$$g(v_1, v_1) = -1 < 0$$

$$g(v_2, v_2) = 2 > 0$$

$$g(v_3, v_3) = (2, 2, -1) \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0, 3, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

finalmente

$$B = \Big\{ \underbrace{u_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_i = \frac{1}{\sqrt{|g(v_i, v_i)|}} v_i}, \underbrace{u_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{u_i = \frac{1}{\sqrt{g(v_i, v_i)}} v_i} \Big\}$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

signatura $\nearrow$ $(\overset{-}{1}, \overset{+}{2})$

$\searrow$ $\underbrace{1}_{\text{Indice}}$ (nº $-$)

diremos que g es una métrica no degenerada ya que rang $= 3$ y además indefinida.

Esta métrica se denomina Métrica de Lorentz ($1 -$ y el resto positivos)

Otro ejercicio

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ g_α en $\mathbb{R}^3$

$$M_{B_C}(g_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

según el valor de α halla la signatura.

Encuentra una base B_α de $\mathbb{R}^3$ tal que su diagonal se forme con ± 1 y 0. (sylvester)

$\rightsquigarrow$ $v_1(0,1,0)$ $\qquad g(v_1, v_1) = 1$

$\rightsquigarrow$ $v_2 \,/\, v_1 \perp v_2 \iff g(v_1, v_2) = 0$

$$g(v_1, v_2) = (0,1,0)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (0,1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y = 0 \qquad v_2\,(1,0,1)$$

$\rightsquigarrow$ $v_3 \,/\, v_1 \perp v_3$ y $v_2 \perp v_3 \iff g(v_1, v_3) = 0$
$g(v_2, v_3) = 0$

$$g(v_2, v_3) = (1,0,1)\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0,1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} v_3(1,0,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y base ortogonal } (\mathbb{R}^3, g_\alpha)$$

$$B = \{ v_1 (0,1,0), v_2 (1,0,1), v_3 (1,0,-1) \}$$

$$g(v_1, v_1) = 1 > 0$$

$$g(v_2, v_2) = (1,0,1) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$g(v_3, v_3) = (1,0,-1) \left(\equiv \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2\alpha - 1, 0, 1 - 2\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\alpha - 2$$

$$4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$ $B = \left\{ u_1 \left(\frac{1}{\sqrt{|4\alpha - 2|}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{|4\alpha-2|}} \right), u_2 (0,1,0), u_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$$M_B(g_\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Metrica no degenerada e indefinida.

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ $B = \left\{ u_1 (0,1,0), u_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), u_3 (1,0,- \right.$

$$M_B(g_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ degenerada y semi-definida positiva

$\boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$ $B = \left\{ u_1 (0,1,0), u_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), u_3 \left(\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{4\alpha-2}} \right. \right.$

$$M_B(g_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ No degenerada y definida positiva.

Espacio vectorial euclídeo.

(V, g)

norma $\|v\| = +\sqrt{g(v,v)}$

1 - $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = \vec{0}$

2 - $\|av\| = |a|\,\|v\|$ $a \in \mathbb{R}$

3 - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ desigualdad triangular

4 - $g(x,y) \leq \|x\|\,\|y\|$ desigualdad de Schwarz

y se verifica la igualdad si solo si los vectores son l.d.

definimo el concepto de ángulo de dos vectores como el menor que verifica

$$\cos \widehat{xy} = \frac{g(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$$

1 - Si $x \perp y \iff \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$

2 - Si x, y L.D $\iff \widehat{xy} = 0$ o π

3 - $g(x,y) = \|x\|\,\|y\| \cos \widehat{xy}$

Se llama base ortonormal a una base formada por vectores ortonormales 2 a 2 unitarios

v es unitario si $\|v\| = 1$

$v \neq \vec{0}$ no unitario $\Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ unitario

en cualquier espacio vectorial hay una métrica denominada métrica usual, que es el producto escalar

$\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ $\underbrace{g_0 = g_u}$ $\rightarrow$ mét. usual = prod. escalar. usual.

$\downarrow$

hace que la base canónica sea ortonormal

$$g_0(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$x(x_1, x_2, \dots x_n)$
$y(y_1, y_2, \dots y_n)$ en B_c

la base canonica no siempre es ortogonal ni ortonormal, depende de la métrica.

la matriz de una métrica en una base ortogonal es una matriz diagonal.

la matriz de una métrica euclidea en una base ortonormal es la identidad

g euclidea

$M_B(g) = I \iff B$ ortonormal

Proceso de ortogonormalización de Gram-Schmidt

(V, g) e.v. euclideo. y $B = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$

el proceso consiste en construir una base ortonormal a partir de la base B. Dos pasos:

1- Construimos B ortogonal $= \{v_1, v_2 \dots v_n\}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1 \qquad a_{12} = \dfrac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)}$

$v_3 = u_3 - a_{13} v_1 - a_{23} v_2$

$a_{13} = \dfrac{g(v_1, u_3)}{g(v_1, v_1)} \qquad a_{23} = \dfrac{g(v_2, u_3)}{g(v_2, v_2)}$

$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} v_j \qquad a_{ji} = \dfrac{g(v_j, u_i)}{g(v_j, v_j)}$

2 - B ortonormal $= \{e_1, e_2, \dots e_n\} \qquad e_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$

Ejemplo:

$(\mathbb{R}^3, g_0)$ $\quad B = \{u_1(1,-1,0), u_2\ (2,1,1), u_3(1,1,-3)\}$

$B_{ortogonal} = \{v_1(1,-1,0), v_2(3,3,2), v_3(1,1,-3)\}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1 = (2,1,1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$$a_{12} = \frac{g_0(v_1, u_2)}{g_0(v_1, v_1)} = \frac{2-1+0}{1+1+0} = \frac{1}{2}$$

$\cdot 2$

$(3, 3, 2)$

$v_3 = u_3 - a_{13} v_1 - a_{23} v_2 = (1,1,-3)$

$$a_{13} = \frac{g(v_1, u_3)}{g(v_1, v_1)} = \frac{1-1+0}{1+1+0} = 0$$

$$a_{23} = \frac{g(v_2, u_3)}{g(v_2, v_2)} = \frac{3+3-6}{9+9+4} = 0$$

$\|v_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$\|v_2\| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$

$\|v_3\| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

B ortonormal $= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}\right.\right.$

Ejercicio de clase:

$P_2(\mathbb{R})$

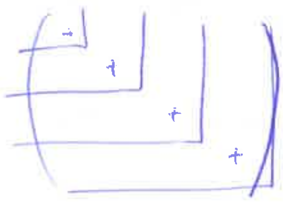
$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Clasificar la métrica.

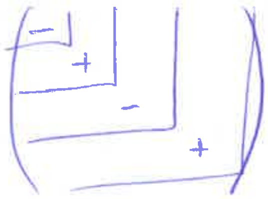
b) Calcular una base ortonormal (Sylvester)

c) Sea $U = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\}$ calcula base ortonormal

Hacemos cajas



g definida positiva o euclídea



g definida negativa

si tiene otra forma no sabemos que ocurre

$B_u = \{1, x, x^2\}$

como la matriz no es la identidad, la base canónica NO es ortonormal.

Normalmente la gente aplica el proceso de Grand Smith a la base ortonormal pero es un latazo.

$v_1 = x \qquad g(v_1, v_1) = 1 \neq 0$
$(0,1,0)$

$v_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \; v_1 \perp v_2 \qquad g(v_1, v_2) = 0$

$$g(v_1, v_2) = (0, 1, 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1, 1, -1)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -a_0 + a_1 - a_2 = 0$$

$v_2 = (1, 1, 0) = 1 + x$

$v_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \quad \begin{matrix} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{matrix} \iff \begin{matrix} g(v_1, v_3) = 0 \\ g(v_2, v_3) = 0 \end{matrix}$

$$g(v_2, v_3) = (1, 1, 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2, 0, 1)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2a_0 + a_2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} -a_0 + a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_0 + a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} a_2 = -2a_0 \\ a_1 = -a_0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (1, -1, -2) \\ 1 - x - 2x^2 \end{matrix}$$

$\{ v_1 = x \ , \ v_2 = 1 + x \ , \ v_3 = 1 - x - 2x^2 \} =$ base ortogon. $(P_2(\mathbb{R}), g)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \leftarrow \text{Hay que comprobarlo}$$

$g(v_1, v_1) = 1 > 0$

$g(v_2, v_2) = (1,1,0)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= (2, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \geq 0$

$g(v_3, v_3) = (1, -1, -2)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= (0, 0, -5)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 10 \geq 0$

g es definida positiva o euclidea y no degenerada

$$B = \{ u_1 = x, \ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} x \ , u_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} x - \frac{2}{\sqrt{10}} x^2 \}$$

$\uparrow$

base ortonormal de $(P_2(\mathbb{R}), g)$

$\| v \| = + \sqrt{g(v, v)}$

$\| v_1 \| = 1$

$\| v_2 \| = \sqrt{2}$

$\| v_3 \| = \sqrt{10}$

c) $U = \{ p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : \underbrace{p'(1) = 0}_{\text{Propiedad}} \} \Rightarrow$ ec. implícitas

$\downarrow$

B_U

$\downarrow$ G-S

solución

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ p'(x) = a_1 + 2a_2 x$

$p'(1) = a_1 + 2a_2 = 0$

ec. implícita.

$\Downarrow$

$\dim U = 2$

$(0,2,-1) \qquad (1,0,0)$

$2x - x^2 \qquad 1$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{ LI}$$

$B_U = \{ u_1 = 2x - x^2 \ , \ u_2 = 1 \}$ queremos hacerla ortonormal y para ello → GS.

B_U ortogonal $= \{ v_1 = 2x - x^2 \ , v_2 = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1$

$$a_{12} = \frac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)} = \frac{(0,2,-1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(0,2,-1)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$v_2 = 1 + \frac{1}{3}(2x - x^2)$

$= 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \qquad = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

B_U ortonormal $= \{$

(Dividir cada uno por su norma)

$\|v_1\| = \sqrt{g(v_1, v_1)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\|v_2\| = \sqrt{g(v_2, v_2)} = \sqrt{\left(1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{3}, 0, 0\right)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

B_U ortonormal $= \{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 , \ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}x - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}x^2 \}$

Subespacio ortogonal.

(V, g) e.v. métrico. U s.v., se denomina subespacio ortogonal a U al formado por los vectores que son ortogonales a todos los de U

$$U^\perp = \{ v \in V : v \perp u \ \forall u \in U \} = \{ v \in V : g(v, u) = 0 \ \forall u \in U$$

- Si la métrica g es no degenerada $\Rightarrow$ $V = U \oplus U^{\perp}$

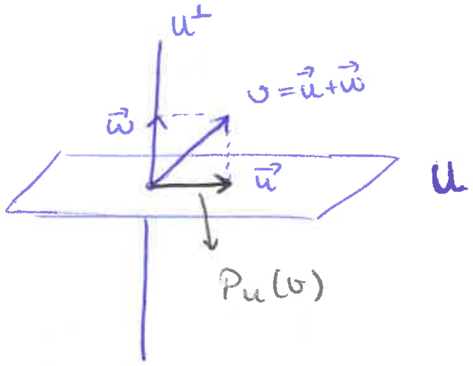
  $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

$\forall v \in V,\ v = u + w\ ,\ \begin{matrix} u \in U \\ w \in U^{\perp} \end{matrix}$ Esta descomposición es única.

- Se llama proyección ortogonal sobre U del vector v a la parte de la suma directa que pertenece a U

  $P_U(v) = u$.

~ Explicación ~



Ejercicio

$S_2(\mathbb{R})$

$$M_{B_U}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que es una métrica euclídea en $S_2(\mathbb{R})$

b) $U = \{ A \in S_2(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \}$

Calcular una base ortogonal para U. y una base ortonormal del subespacio ortogonal a U.

g métrica euclídea $\to$ valores propios > 0

$\to g(v,v) \geq 0$ y $0 \Leftrightarrow v = 0$

$\downarrow$

signatura o índice (Sylvester)

Las cajas: $3 > 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$\to$ base ortogonal de U

$\to$ base ortonormal del $\underbrace{\text{subespacio ortogonal de } U}_{U^{\perp}}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ b+c & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ a+b & b+c \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b = a+b \\ a+b = b+c \\ b+c = a+b \\ b+c = b+c \end{array}\right\} \quad a = c \leftarrow \text{Ec. implícita.}$$

$\dim U = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(1,0,1)} \text{ y } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{(0,1,0)}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

b) $B_U\left\{\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\right\}$

$\downarrow GS$

B_U ortogonal $= \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$

$$v_2 = u_2 - a_{12} v_1$$

$$a_{12} = \frac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, u_1)} = \frac{(1,0,1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1,0,1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2}{5}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ B ortonormal $U^{\perp}$ $\qquad B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M$

$U^{\perp}$ sea $M \in U^{\perp} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \perp M \Leftrightarrow g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M\right) = 0$

$\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp M \qquad g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (1,0,1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (3,2,2)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3a + 2b + 2c = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad LI \\ (0,1,0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + c = 0 \end{array}\right\} (0,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Ec. implícitas de $U^{\perp} \rightarrow \dim U^{\perp} = 1$

$$B_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\downarrow$ G-S

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{g\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{(0,-1,1) \begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(-1,0,1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$B_{U^\perp} \text{ ortonormal} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Endomorfismos autoadjuntos.

$f: V \to V$ endomorfismo de (V, g) e.v métrico.

si $\forall u, v \in V \quad g(f(u), v) = g(u, f(v))$

En la práctica haremos lo siguiente para comprobar si algo es un end. autoadjunto.

$A = M(f, B)$

$G = M_B(g)$

$(AC)^t = C^t A^t$

$$(A(u))^t \, G(V) = (u)^t \, G(A(V))$$

$$g(u,v) = (\overset{u}{\text{———}}) \begin{pmatrix} G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \end{pmatrix} = u^t G V$$

$$u^t A^t G V = u^t G A V \quad \forall u, v \in V$$

$$\boxed{A^t G = G A}$$

$$\boxed{M(f,B)^t \cdot M_B(g) = M_B(g) \, M(f,B)}$$

- Si g fuese euclídea y B fuese ortonormal

$$M(f,B)^t = M(f,B) \Rightarrow \text{simétrica}$$

[la matriz de un end autoadjunto en una base ortonormal es una matriz simétrica] IMP!

PROPIEDADES

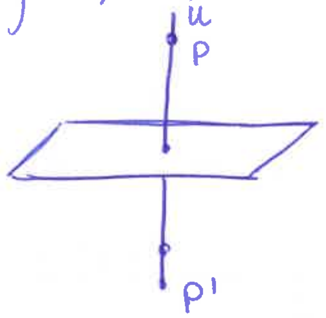
(V,g) evm euclídeo y $f: V \to V$ end. autoadjunto.

1) Vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales

2) Si U es un s.v. invariante por $f \Rightarrow U^\perp$ también es invariante por f.

Invariante es $f(U) = U$, esto es,

$\forall u \in U,\ f(u) \in U$.



$f(U) = U$.

P pasa a ser P' pero U no varía, por lo que U es invariante.

3) $M(f, B_{\text{ortonormal}})$ es simétrica.

Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos

Si $f \in End(V)$ autoadjunto $\Rightarrow \exists$ una base ortonormal en (V,g) formada por vectores propios de f.

Ejercicio

$(\mathbb{R}^3, g)$ evm

$$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que g es una métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x + 2y, 3y, 4x - 4y + 3z)$

Comprobar que es autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g)$ y encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

a) $5 > 0$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 > 0$$

como las 3 cajas son positivas $\Rightarrow g$ es definida + o euclídea
(Menores que ~~o~~ están en la diagonal)

b) El endomorfismo es autoadjunto si
$\forall u, v \in \mathbb{R}^3 \quad g(f(u), v) = g(u, f(v))$
llamando G a la matriz de la métrica, y $A = M(f, B_u)$

$$(A(u))^t \, G(V) = U^t \, G(A(V))$$

$$U^t A^t G(V) = U^t G A(V) \iff A^t G = G A$$

$$M(f, B_u)^t \, M_{B_u}(g) = M_{B_u}(g) \, M(f, B_u)$$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,4)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (2,3,-4)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,0,3)$

$$A = M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es autoadjunta.

$$M(f, B_u)^t \, M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_u}(g) \, M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la base ortonormal de vectores propios de f diagonalizamos f (normalmente) y aplicamos GS a la base de cada subespacio propio.

La base ortonormal pedida es la unión de las bases ortonormales de los subespacios propios.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 3 \quad a_3 = 2$

$\lambda = 1 \quad a_1 = 1$

$\underline{\lambda=3}$ $V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \quad -x+y=0$$

$\dim V_3 = 2 = g_3 \equiv (1,1,0), (0,0,1)$

$B_{V_3} = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$

$\underline{\lambda=1}$ $V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (A-\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

$$\left.\begin{matrix} 2y = 0 \\ 4x - 4y + z = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=0 \\ 2x+z=0 \end{matrix}\right\} z=-2x$$

$B_{V_1} = \{(1,0,-2)\}$

A cada base por separado le aplicamos GS

B_{V_3} ortogonal $= \{ v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-2,-2,5) \}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1$

$$a_{12} = \frac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)} = \frac{(1,1,0)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1,1,0)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{(4,1,2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(4,1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{2}{5}$$

$$v_2 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right) \sim (-2,-2,5)$$

B_{V_3} ortonormal $= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{5}} \right) \right\}$

$$\|v_1\| = +\sqrt{g(v_1, v_1)} = \sqrt{5}$$

$$\|v_2\| = +\sqrt{g(v_2, v_2)} = \sqrt{(-2,-2,5)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}$$

$$B_{V_1} = \{ (1,0,-2) \} \xrightarrow[GS]{} \{ (1,0,-2) \}$$

$$\|(1,0,-2)\| = \sqrt{(1,0,-2)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}} = 1$$

B_{V_1} ortonormal $= \{ (1,0,-2) \}$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{5}} \right), (1,0,-2) \right\}$$

La base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$ formada por vectores propios de f.

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ↖ no lo pide solo que lo han presentado

Matriz ortogonal

$P \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que P es ortogonal si su inversa es su traspuesta, esto es, $P^{-1} = P^t$

$P^{-1} = P^t \iff P \cdot P^t = I$

Propiedades

① Si P es ortogonal $\Rightarrow |P| = \pm 1$

$|P P^t| = |I_n|$

$|P||P^t| = 1$

$|P|^2 = 1 \quad |P| = \pm 1$

La matriz asociada a un cambio de base entre bases ortonormales es una matriz ortogonal.

se suele notar $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in M_n(\mathbb{R}) : P \text{ ortogonal}\}$

Isometrías

(V, g) y (V', g') dos evm. $f : V \to V'$ una app lineal se dice que g es una isometría si

$g(u,v) = g'(f(u), f(v))$ (mantiene los angulos y las medidas.)

Matricialmente...

$f : \underset{B}{V} \to \underset{B'}{V'}$

$G = M_B(g) \qquad A = M(f, B, B')$

$G' = M_{B'}(g')$

$(u)^t \, G \, (v) = (A(u))^t \, G' \, (A(v))$

$(\quad)(\equiv)(\,) = (\quad)(\equiv)(\,)$

$(u)^t G (v) = (u)^t A^t G' A (v)$

$G = A^t G' A \Rightarrow M_B(f, B, B')$

$$\boxed{M_B(g) = M(f, B, B')^t \, M_{B'}(g) \, M(f, B, B')}$$

Es condición necesaria para que f sea una isometría que f sea un isomorfismo (biyectiva)

$f: V \to V'$ isomorfismo $\iff \begin{cases} \ker f = \{\vec{0}\} \\ \operatorname{Im} f = V' \end{cases} \Rightarrow \dim V = \dim V' = n$

$\Downarrow$

$\operatorname{rang}(M(f, B, B')) = n$

$f (V, g) \to (V', g')$ isometría $\iff g$ y g'

tienen igual $\begin{cases} \text{rango} \\ \text{índice } (\text{nº negativos}) \\ \text{nulidad o signatura } (\text{nº de ceros}) \end{cases}$

Ejercicio 26 de la relación

$\mathbb{R}^2 \quad g_1, g_2, g_3$

$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

¿ $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$, $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos?

En caso afirmativo construye una isometría.

$\operatorname{rang}(G_1) = 2$, aplicamos $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$

def + o euclídea $\Rightarrow$ $s = 0$

nulidad $= 0$

signatura $= (\overset{+}{2}, \overset{-}{0})$

$\operatorname{rang}(G_2) = 2 \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$ def + $\quad \begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$ def

$\begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$

Indefinida

$s = 1$ nulidad $= 0$

signatura $(1, 1)$

$\operatorname{rang}(G_3) = 2 \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$ def +

$s = 0$ (índice)

nulidad $= 0$

signatura $= (2, 0)$

$(\mathbb{R}^2, g_1)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ sí son ev isométricos ya que las dos métricas son iguales.

Al ser $(\mathbb{R}^2, g_1)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos, podemos definir

$$f : (\mathbb{R}^2, g_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_3) \text{ isometría}$$

f isometría $\iff$ f aplica una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g_1)$ (Sylvester) en una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g_3)$ (Sylvester)

Al definir una isometría debemos mandar los 1 con los 1, los -1, con los -1 y los 0 con los 0.

$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 (1,0)$

$v_2 (x,y) \perp v_1 \iff g(v_1, v_2) = 0$

$$g(v_1, v_2) = (1,0)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (4,1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x + y = 0$$

$v_2 (-1, 4)$

$B_{ortog} = \{(1,0), (-1,4)\}$ de $(\mathbb{R}^2, g_1)$

$\|v_1\| = \sqrt{4} = 2$

$$\|v_2\| = \sqrt{(-1,4)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$B = \{(\frac{1}{2}, 0) \ (\frac{-1}{2\sqrt{7}}, \frac{4}{2\sqrt{7}})\}$ base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g_1)$

$G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 (1,0)$

$v_2 (x,y) \perp v_1 \iff g_3(v_1, v_2) = 0$

$$g_3 = (1,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x - y = 0 \qquad v_2 (1,3)$$

$B' = \{(1,0), (1,3)\}$ base ortogonal en $(\mathbb{R}^2, g_3)$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$

$$\|v_2\| = \sqrt{(1,3)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$B' = \{ (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \ (\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}) \}$ base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g_3)$

Definimos la isometría

$$f : (\mathbb{R}^2, g_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_3)$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$f\left(\frac{-1}{2\sqrt{7}}, \frac{4}{2\sqrt{7}}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$

Ejercicio 18

Calcula las todas las soluciones de la ecuación

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2yz = 0$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(x,y,z) = \underset{11}{x^2} + \underset{22}{5y^2} + \underset{33}{z^2} + \underset{\substack{12\\21}}{4xy} + \underset{\substack{23\\32}}{2yz} = (x,y,z) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ M_B(g) \to \text{Sylvester}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tenemos que buscar en la base de Sylvester algún 0, así, los vectores asociados a ese 0 son las soluciones.

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1\ (1,0,0) \qquad g(v_1, v_1) = 1$

$v_2 \ / \ v_1 \perp v_2 \qquad g(v_1, v_2) = 0$

$$g(v_1, v_2) = (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y = 0 \Rightarrow (0,0,1) = v_2$$

$v_3 \ / \ v_1 \perp v_3$ y $v_2 \perp v_3$

$$g(v_2, v_3) = (0,0,1) \left(\equiv \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ z = -y \end{array} \Rightarrow (2,-1,1) = v_3$$

Comprobamos que son base.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\{v_1(1,0,0),\ v_2(0,0,1),\ v_3(2,-1,1)\}$ = base ortogon

$B = \{(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)\}$

$g(v_1, v_1) = \underset{g_{11}}{1} > 0$

$g(v_2, v_2) = \underset{g_{33}}{1} > 0$

$$g(v_3, v_3) = (2,-1,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

es degenerada, por tanto el vector $(2,-1,1)$

$x = 2$
$y = -1$ es sol. particular de $x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz=0$
$z = 1$

Solución: $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z) = a(2,-1,1) \ \forall a \in \mathbb{R}\} =$

$= L\{(2,-1,1)\}$

Razonar la veracidad de las siguientes afirmaciones.

→ Todo endomorfismo autoadjunto en un esp. vect m. es un automorfismo. Falso

(V, g) ev. euclídeo $M(f, B)$ es simétrica $\Leftrightarrow$ f. autoadj.

Contraej $(\mathbb{R}^2, g_u)$ $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f es autoadj.
f no es biyectivo

→ Sea V e. euclídeo de dim impar. $\nexists$ isometrías : $f \circ f = -I$

Tema siguiente.

→ En $\mathbb{R}^4$, sea g métrica : $g|_U = 0$ $g|_V = 0$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z+t=0\}$

$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0 ;\ z-t=0\}$

Puede ser g no degenerada.

$$\left.\begin{array}{l} U \begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \\ V \begin{cases} x-y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} U \cap V = \{0,0,0,0\} \\ U+W = \mathbb{R}^4 \end{array}\right] \ \mathbb{R}^4 = U \oplus W \Rightarrow g \text{ es}$$

degenerada en $\mathbb{R}^4$

(25)

(V,g) evm.

$f: V \longrightarrow V'$ isomorfismo

Prueba que $\exists !\ g'$ métrica sobre V' que hace que f sea una isometría de (V,g) en (V',g')

(V,g) evm. $\quad B_{orton} = \{e_1 \dots e_r, e_{r+1} \dots e_{r+s}, e_{r+s+1} \dots e_n\}$

$g(e_i, e_i) = -1 \quad i \in \{1 \dots r\}$

$g(e_j, e_j) = 1 \quad j \in (r+1 \dots r+s\}$

$g(e_k, e_k) = 0 \quad k \in \{r+s+1 \dots n)$

Como f es un isomorfismo $\Rightarrow f(B)$ es base de V'

$f(e_i) = e'_i$

$f(e_j) = e'_j$

$f(e_k) = e'_k$

$f(B) = B' = \{e'_1 \dots e'_r, e'_{r+1} \dots e'_{r+s}, e'_{r+s+1} \dots e'_n\}$

Definimos g' en B'

$g'(e'_i, e'_i) = -1 \quad \forall i \in \{1, \dots r\}$

$g'(e'_j, e'_j) = 1 \quad \forall j \in \{r+1, \dots, r+s\}$

$g'(e'_k, e'_k) = 0 \quad \forall k \in \{r+s+1, \dots n\}$

g' es una métrica y además es única

$$M_{f(B)}(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_r & & \\ \hline & I_s & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio

$\mathbb{R}^4$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0, 2z+t=0\}$

$W = L\{(+1,-1,0,0),(0,0,1,1)\} = B_W$

Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ isometría

$f(U) = W$

$f(+1,1,0,0) = (1,1,0,0)$

$\det(f) = 1$

Prueba que f es diago. Comprueba que $\exists$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de f.

$$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2z+t=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=y \\ t=-2z \end{array} \quad (1,1,0,0), (0,0,1,-2)$$

$B_W = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$

$B_U = \{(1,1,0,0),(0,0,1,-2)\}$

TENER CUIDADO CON QUE ISOMETRIA $\Leftrightarrow \|x\| = \|f(x)\|$

Por tanto, ambas bases son ortogonales y debemos hacerlas del mismo tamaño, esto es, ortonormalizarlas.

B_U orton $= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

B_W orton $= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \Leftrightarrow f(\underline{1,1,0},0) = (1,-1,0,0)$

$f\left(0, \underline{0, \frac{1}{\sqrt{5}}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(1, \underline{-1, 0}, 0) = (1,1,0,0)$

Buscamos un cuarto vector l.i. a los 3 subrayados para tener una base de $\mathbb{R}^4$. por ej: $(0,0,0,1)$

$f(0,0,0,1) = (0,0,0,-1)$

TRUCO.

Podríamos poner 1 porque es l.i. a las imagenes formand una base. peeero...

Rosa nos ha explicado que el det del la base del dominio y del codominio deben tener el mismo signo por la orientación de los e.v. por ende debemos poner que $f(0,0,0,1) = (0,0,0,-1)$ y no $(0,0,0,1)$

Verdaderos o falsos.

1) (V,g) semidef $\oplus$ y $u \in V$ con $g(u,u)=0 \Rightarrow u \in rad(g)$

$rad(g) = \{v \in V : g(v,w)=0 \ \forall w \in V\}$

$$G(V)=0$$

matriz de g

semidef $\oplus \Rightarrow$ degenerada $\Rightarrow$ rad no es solo 0.

Falso.

Comprobemos que una matriz es semidef. $\oplus$ — Recordando

$(\mathbb{R}^2, g) \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda = 2 > 0 \end{matrix}$$

semidef. $\oplus$

Ahora hacemos el contraejemplo (se resiste)

2) $U \subset \mathbb{R}^2$ es una recta vectorial (dim = 1) $\Rightarrow \exists g \ \mathbb{R}^2 : U^\perp = U$

$U = L(\{(1,0)\}) \overset{?}{=} U^\perp$

$g((1,0),(1,0)) = 0$ esto se debe verificar

$g((1,0),(0,1)) = 1$ ← tiene que ser $\neq 0$ porque sino $(0,1) \in U^\perp$

$g((0,1),(0,1)) = 1$

$$M_{Bc}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos el sub. vect. ortogonal

$(1,0)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0 \} \equiv U^{\perp}$

$B_{U^{\perp}} = \{(1,0)\} = B_U$

3) Si (V, g) es no degenerado y $u \in V \Rightarrow \dim U^{\perp} = \dim V - \dim$

Si es no degenerado, $U \oplus U^{\perp} = V$, por lo que

$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim(\underbrace{U + U^{\perp}}_{V}) - \dim(U \cap U^{\perp})$

$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$

Ejercicio

Clasificar según a la métrica g definida por:

$a \in \mathbb{R}$

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a^2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -a^2 & -1 & a^3 \end{pmatrix}$$

Debemos calcular la base de sylvester sin coger el vector.

$v_1\ (0,1,0) \qquad g(v_1, v_1) = 1$

$v_2 : v_1 \perp v_2 \iff g(v_1, v_2) = 0$

$g(v_1, v_2) = (0,1,0)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z = 0 \qquad (1,-1,0)$

~Sucio~

Buscamos un vector que no acarree parámetros pero no lo encontramos

$v_3 : \begin{matrix} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{matrix} \iff g(v_1, v_3) = 0$ y $g(v_2, v_3) = 0$

$g(v_2, v_3) = (1,-1,0)\left(\equiv \right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a-1)x + (-a^2+1)z = 0$

$(a+1, -a, 1) = v_3$

Comprobamos que es base

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si en el supuesto nos da $a+3$, debemos distinguir casos

$$a+3 = \begin{cases} a=-3 \\ a\neq -3 \end{cases}$$

$\{v_1(0,1,0), v_2(1,-1,0), v_3(a+1,-a,1)\}$ base ortogonal $(\mathbb{R}^3, g)$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$g(v_1,v_1) = 1 > 0$

$g(v_2,v_2) = (1,-1,0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a-1$

$g(v_3,v_3) = (a+1,-a,1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} a+1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} = -a^2+a$

$a-1=0 \iff a=1$

$-a^2+a=0 \begin{cases} a=0 \\ a(-a+1)=0 \iff a=1 \end{cases}$

$\boxed{a<0}$

$g(v_1,v_1)=1>0$

$g(v_2,v_2)=-1<0$

$g(v_3,v_3)=<0$

Indefinida no degenerada

$B = \{(\frac{1}{\sqrt{|a-1|}}, -1$

$$B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{|a-1|}}, \frac{-1}{\sqrt{|a-1|}}, 0\right), \left(\frac{a+1}{\sqrt{|-a^2+a|}}, \frac{-a}{\sqrt{|-a^2+a|}}, \frac{1}{\sqrt{|-a^2+a|}}\right), (0,1,0)\right\}$$

$\boxed{a=0}$

Indefinida, degenerada

$B=\{(1,-1,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{0<a<1}$ Indefinida, no degenerada. = Lorent

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{|a-1|}}(1,-1,0), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{-a^2+a}}(a+1,-a,1)\right\}$$

$\underline{a=1}$ Semidef. positiva.

$B = \{(0,1,0), (1,-1,0), (2,-1,1)\}$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{a>1}$ Indefinida, no degenerada = Lorentz

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|1-a^2+1|}}(a+1,-a,1), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{a-1}}(1,-1,0) \right\}$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otro ejercicio.

$(M_2(\mathbb{R}), g)$ $g(A,C) = \text{traz}(AC)$

Hallar base de $U^\perp$, sea $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{traz}(A) = 0\}$

clasifica $g|_U$.

$A \in U^\perp \iff g(A,u) = 0 \quad \forall u \in U.$

Buscamos 1º una base de U

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U \Rightarrow a + d = 0 \} \equiv U$ $\dim U = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Comprobamos que son li

$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 = \text{traz}\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = a - d$

$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 = \text{traz}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c$

$$g\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=0=\text{traz}\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}=b$$

$$U^\perp\equiv\begin{cases}a-d=0\\c=0\\b=0\end{cases}\qquad \dim U^\perp=1\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_{U^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}}$$

$g|_U \qquad U=\{a+d=0\}$

$$v_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad g(v_1,v_1)=\text{traz}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2\neq 0$$

$$v_2\perp v_1 \Leftrightarrow g(v_1,v_2)=0=a-d\ ;\quad a=0\quad d=0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\qquad\qquad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} v_2$$

$$\begin{matrix}v_3\perp v_1\\ v_3\perp v_2\end{matrix}\Leftrightarrow g(v_1,v_3)=0\ \ y\ \ g(v_2,v_3)=0$$

$$g(v_1,v_3)=0=a-d$$

$$g(v_2,v_3)=0=\text{traz}\begin{pmatrix}c&d\\-a&-b\end{pmatrix}=c-b=0\qquad v_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\left\{v_1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ v_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ v_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$ base ortogonal de $(U,g|_U)$

← Comprobamos.

$$g(v_1,v_1)=2$$

$$g(v_2,v_2)=\text{traz}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-2$$

$$g(v_3,v_3)=\text{traz}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2$$

Indefinida, no degenerada

37 relación de mates.

$(\mathbb{R}^2, g)$

$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar que g euclídea. base ortonormal $(\mathbb{R}^2, g)$

b) Sea $f \in End(V)$ dado

$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

demostrar que f es autoadjunto respecto de g y encontrar una base ortonormal. de $(\mathbb{R}^2, g)$ formada por vectores propios de f.

c) ¿Es f una isometría en $\mathbb{R}^2, g$?

a) g métrica ¿euclídea? cajas / → valores propios >0 / definición

~valores propios~

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$$

~Def~

$g(x, x) \geq 0$ y $g(x,x) = 0 \iff x = 0$

$$g(x,x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \geq 0$$

Si $g(x,x) = 0$ $\quad x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1^2 = 0 \\ (x_1-x_2)^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$

$(x_1, x_2) = x = 0$

b) $v_1 (0,1)$

$v_2 (x,y)$: $v_1 \perp v_2 \iff g(v_1, v_2) = 0$

$$g(v_1, v_2) = (0,1)\left(= \right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x + y = 0 \equiv (1,1)$$

$B = \{v_1(0,1), v_2(1,1)\}$ = base ortogonal $(\mathbb{R}^2, g)$
↳ euclídea.

Dividimos por la norma.

$$\|v_1\| = \sqrt{g(v_1, v_1)} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(1,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

Por lo que $B = \{ v_1 (0,1)\ v_2(1,1) \}$ es una base ortonormal $(\mathbb{R}^2, g)$

f autoadjunto $:= g(f(u), v) = g(u, f(v))\ \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

$G = M_B(g)$

$A = M(f, B)$

$$(AU)^t G V = U^t\ G\ (A(V))$$

$$U^t A^t G V = U^t\ G\ A\ V \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$A^t G = G A$$

$$A^t G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ Es autoadjunto.

$$G A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$\lambda = 0$

$$V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$x - y = 0 \} \ (1,1)$$

$$V_0 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$x = 0 \} = (0,1)$$

$B_{V_1} = \{(1,1)\}$ $B_{V_2} = \{(0,1)\}$

$\|(1,1)\| = 1$ $\downarrow$ G-S $\|(0,1)\| = 1$

Como antes hemos hecho la norma, y daba 1, estas bases son ya ortonormales.

$B' = \{(1,1),(0,1)\}$ base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$ formada por vectores propios de f.

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

c) f isometría $:= g(u,v) = g(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

$$\Updownarrow$$

$$G = A^t G A$$

No es isometría porque f no es biyectiva

Los valores propios de una isometría son ± 1

otro ejercicio.

(V,g) ev euclídeo

$f: V \to V \in End(V)$

$\hat{f}: V \to V$; $g(f(u), v) = g(u, \hat{f}(v)) \quad \forall u, v \in V$

demuestra que $f \circ \hat{f}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V,g)

$$¿\, g((f \circ \hat{f})(u), v) = g(u, (f \circ \hat{f})(v))? \quad \forall u, v \in V$$

$g((f \circ \hat{f})(u), v) = g(f(\hat{f}(u)), v)$, por def.

$= g(\hat{f}(u), \hat{f}(v))$, simétrica, ¿métrica

$= g(\hat{f}(v), \hat{f}(u))$, por def hacia atrás

$$= g(f(\hat{f}(v)), u) \quad , \text{ simétrica}$$

$$= g(u, f(\hat{f}(v))) = g(u, (f \circ \hat{f})(v))$$

Otro ejercicio

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es euclídea por def.

def $:=$ $g(u,u) \geq 0$ y $g(u,u) = 0 \iff u = 0$

$$g(u,u) = (x,y,z)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy - 2zx + 4yz$$

~TRUCO~ Sí es euclídea.

v_1 $(0,0,1)$

v_2 $(0,0,1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + 2y + 4z \equiv (2,1,0)$

$(2,1,0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x + 5y = 0 \equiv (1, -1, \frac{3}{4})$

~FIN TRUCO~

$$= 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy - 2zx + 4yz$$

$$= (x - y + \tfrac{3}{4}z)^2 + (2x + y)^2 + z^2 \geq 0$$

Otro ejercicio

$(\mathbb{R}^3, g)$

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Clasifica en función de parámetros a y b. la métrica

b) Encontrar una base del Sylvester para g (ortonormal) en el caso $a = -2$ $b = 3$

En este caso que hay dos parámetros y solo hay que clasificar, lo hacemos por valores propios.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - b^2\right] = 0$$

$a - \lambda = 0 \Rightarrow \underline{a = \lambda}$

$(1-\lambda)^2 - b^2 = 0 \; ; \; 1 - \lambda = \pm b \begin{cases} \underline{\lambda = 1 + b} \\ \lambda = \underline{1 - b} \end{cases}$

$\boxed{a > 0}$

$1 + b = 0 \quad b = -1$

$1 - b = 0 \quad b = 1$

$b < -1 \Rightarrow (+ \; - \; +)$ indef. no degenerada

$b = -1 \Rightarrow (+ \; 0 \; +)$ degenerada semidef $\oplus$

$-1 < b < 1 \Rightarrow (+ \; + \; +)$ no deg. euclídea.

$b = 1 \Rightarrow (+ \; + \; 0)$ degenerada semidef $\oplus$

$b > 1 \Rightarrow (+ \; + \; -)$ no deg. indef.

$\boxed{a = 0}$

El primer + de cada matriz es 0.

$\boxed{a < 0}$

el primer + de cada matriz es -1

Otro ejercicio

(V, g) e.v.métrico. U sub. vect.

Probar que $(U, g|_U)$ es no deg $\Leftrightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow)$ Sup. no degenerado.

Sea $v \in U \cap U^\perp \begin{cases} v \in U \\ v \in U^\perp \end{cases} \Rightarrow g(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$

ya que $(U, g|_U)$ no deg.

$\Leftarrow$ | $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ Sup. que $(U, g|_U)$ es degenerado

Sup. que $\exists\, w \in U :$ $\forall u \in U$ $g(u,w)=0 \Rightarrow w \in U^{\perp}$

si $w \in U^{\perp}$ y $w \in U \Rightarrow w \in U \cap U^{\perp}$

$w = \vec{0}$ que es el único que verifica esto.

por lo que, al ser 0, $(U, g|_U)$ es no degenerado.

Demostración.

(V,g) evm no degenerado dim V = dim U + dim $U^{\perp}$

$\Updownarrow$

$V = U \oplus U^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ U + U^{\perp} = V \\ 2.\ U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\} \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ Sea $v \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{matrix} v \in U \\ v \in U^{\perp} \end{matrix}\right\} g(v,v)=0$ y como g es no degenerada

$v = 0 \rightarrow U \cap U^{\perp} = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ $\left.\begin{matrix} u \in U \\ w \in U^{\perp} \end{matrix}\right. \Rightarrow \{u, w\}$ L.I.

$u = \lambda w$ (l.d)

$g(u,w) = 0$

$g(\lambda w, w) = \lambda g(w,w) = 0 \Rightarrow w = \vec{0} \Rightarrow \{u,w\}$ L.I.

$\Downarrow$ g no degenerada

$\rightsquigarrow$ $B_U = \{u_1, u_2, u_3 \ldots u_r\}$ base de U.

$v \in U^{\perp}$ $g(u_i, v) = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots r\}$ r ec. independientes

rang$(g) = n$.

$\underbrace{\text{nº ec. ind}}_{r}$ = dim V − dim $U^{\perp}$

$\overset{\parallel}{\text{dim } U}$ = dim V − dim $U^{\perp}$

$\Downarrow$

dim U + dim $U^{\perp}$ = dim V.

Encuentra una matriz $P \in O_3(\mathbb{R})$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Encuentra una matriz P : $P^t A P$ es diagonal.

es simétrica, sino $\nexists$ P.

Supongamos que estamos en $(\mathbb{R}^3, g_u)$

$End(\mathbb{R}^3) \simeq M_3(\mathbb{R})$

Suponemos $\underset{\text{ortonormal}}{A = M(f, B_u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ es autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_u)$

$$\Downarrow$$

$$g(f(u), v) = g(u, f(v))$$

$$\Downarrow$$

$$A^t G = GA.$$

Si la matriz es ortonormal, $\Rightarrow A^t \underset{I}{G} = \underset{I}{G} A \Rightarrow A^t = A$, esto es, simétrica.

Si el endomorfismo es autoadjunto sabemos que se puede diagonalizar y será una base ortonormal formada por vectores propios.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0 \begin{cases} \lambda^2 = 0 \\ \lambda = 6 \end{cases}$

$\lambda = 0 \quad a_0 = 2 = \dim V_0$

$\lambda = 6 \quad a_6 = 1 = \dim V_6$

$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$x + 2y + z = 0 \}$ $\quad (-2, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$

$B_{V_0} = \{(-2,1,0), (1,0,-1)\}$

$V_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$$\left.\begin{matrix} -5x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z = 5x - 2y \\ 12x - 6y = 0 ; \ y = 2x \end{matrix}\right\} (1,2,1)$$

Aplicamos GS a cada base para hacer las bases ortonormales

B_{V_0} | $B_{V_0} = \{\underset{u_1}{(-2,1,0)}, \underset{u_2}{(1,0,-1)}\}$

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - a_{12} v_1 = (1,0,-1) + \frac{2}{5}(-2,1,0) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$

$\simeq (1,2,5)$

$$a_{12} = \frac{g(v_1,u_2)}{g(v_1,v_1)} = \frac{-2+0+0}{4+1+0} = \frac{-2}{5}$$

B_{V_0} ortogonal $= \{(-2,1,0),(1,2,-5)\}$

$\|v_1\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

$\|v_2\| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

B_{V_0} ortonormal $= \{(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0),(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}})\}$

B_{V_6} | Como solo hay 1 vector, dividimos por su norma

B_{V_6} ortonormal $= \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$

→ Base ortonormal en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ formada por vectores propios de A:

$B = \{(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0),(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}),(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$

$D = P^{-1} A P$

$\parallel$

$M(f,B) = P^{-1} M(f,B_u) P$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \; B \text{ a } B_u$$

Se verifica además que $P^{-1} = P^t$ por ser cambio de base entre dos bases ortonormales en $(\mathbb{R}^3, g_u)$.

$P^t A P = D$.

(V, g) evm euclideo.

$f \in \text{end}(V)$ autoadjunto : $g(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in V$

Prueba que $\exists\, h$, end. autoadjunto: $h \circ h = f$; $h^2 = f$.

¿h único?

Aplicamos el teorema fundamental de endomorfismos autoadjuntos.

Por ser end. autoadjunto $\exists\, B$ ortonormal en (V, g) formada por vectores propios de f.

$$B = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$

Por ser vectores propios, $\quad f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1 \dots n$.

$$g(f(v_i), v_i) \geq 0 \Rightarrow g(\lambda v_i, v_i) \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \underbrace{g(v_i, v_i)}_{\geq 0} \geq 0$$

ya que el ev es métrico euclídeo

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0$; todos los valores propios del endomorf. ≥ 0

$h: V \to V$

$h(v_i) = \sqrt{\lambda_i} \cdot v_i$ $\qquad (h \circ h)(v_i) = h(h(v_i)) = h(\sqrt{\lambda_i}\, v_i)$

bien def. $\qquad$ porque $\lambda_i \geq 0$

$$= \sqrt{\lambda_i}\, h(v_i) = \sqrt{\lambda_i}(\sqrt{\lambda_i}\, v_i)$$

$$= \lambda_i v_i = f(v_i) \quad \forall v_i \in B$$

h no va a ser único ya que para cada vector podemos tomar o el signo del positivo o el negativo de la raíz.

$$f \to \begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M(f, B)$$

$$h \to \begin{pmatrix} 2 & \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 2 & \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que es autoadjunto :

$$g(h(x), y) \stackrel{?}{=} g((x), h(y))$$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \quad$ por ser l.i.

$$g(h(x), y) = g(h(\sum x_i v_i), y) = g(\sum x_i h(v_i), y)$$

$$= \sum x_i\, g(\sqrt{\lambda_i}\, v_i, y) = \sum x_i \sqrt{\lambda_i}\, g(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \sqrt{\lambda_i}\, g(v_i, v_j) = \sum x_i y_j\, g(v_i, \sqrt{\lambda_j}\, v_j)$$

$= g(\sum x_i v_i, \sum y_i h(v_i)) = \underline{g(x, h(y))}$

Ejercicio examen

$V(\mathbb{R})$ e.v. real.

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base.

métrica g, $f \in End(V)$ cuyas matrices en la base B son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = M_B(g)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} = M(f, B)$$

a) Demostrar que g es y que f es autoadjunto para g.

b) g' forma bilineal def por:

$g'(u,v) = g(u, f(v))$ $\forall u, v \in V$.

Dem que es métrica en V y calcular su signatura.

b) para que sea métrica $\begin{cases} \text{bilineal} \\ \text{simétrica.} \end{cases}$

g' es simétrica $\Rightarrow g'(u,v) = g'(v,u)$ $\forall u, v \in V$.

$g'(u,v) = g(u, f(v)) \underset{g \text{ métrica.}}{=} g(f(v), u) \underset{f \text{ autoadj.}}{=} g(v, f(u))$

hemos demostrado que g' es una métrica de V.