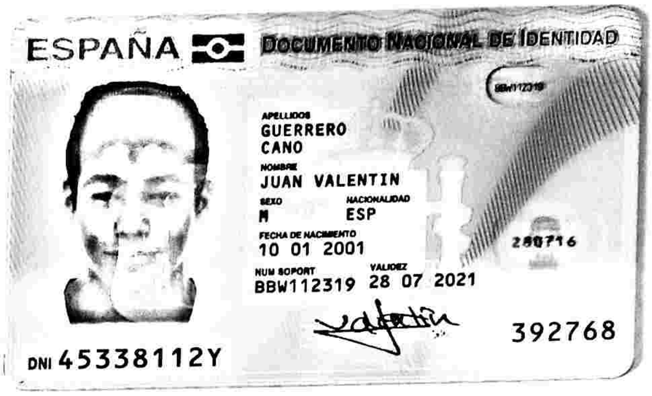
J. Valentín Guerrero Cano.



② a) Sea $N \geq 1$ $\quad x_0 = 1 < x_1 < \ldots < x_n = \dfrac{\pi + 6}{6}$

$f : [x_0, x_N] \to \mathbb{R} \qquad x \in [x_0, x_n]$

$$f(x) = (-1)^5 \operatorname{sen}(6x) = -\operatorname{sen}(6x)$$

$p \in P_N \; : \quad j = 0, 1 \ldots N \; : p(x_j) = f(x_j)$

Probar: $\quad \|f - p\|_\infty \leq \dfrac{\pi^{N+1}}{(N+1)!}$

Sabemos que $x_0 \ldots x_N$ son números reales distintos y que $\min = x_0$ y $\max = x_N$

$f \in C^{N+1}([a,b])$ sabemos por tanto que:

$$\|E_n f\|_\infty \leq \frac{\|f^{n+1)}\|_\infty}{(N+1)!} (b-a)^{N+1} \quad \text{Luego}$$

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\pi + 6}{6} - 1\right)^{n+1} = \frac{\cancel{6^{n+1}}}{(n+1)!} \frac{(\pi)^{n+1}}{\cancel{6^{n+1}}} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

J. Valentín Guerrero Cano.

Cabe recalcar que el signo de $f(x)$ no importa pues al hacer la norma ∞ de $f^{n+1)}$ tomamos valor absoluto. 2/4

J. Valentin Guerrero Cano

(2)

b) $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad x = (x_1\ x_2\ x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot A \cdot x - x_1 - 7x_2 - 5x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 26 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Es simétrica, comprobemos que es def pos.

$$|A_1| = 1 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 26 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

luego es def pos. y admite una factorización Tipo cholesky

La calculamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 26 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{11}^2 = 1 \qquad l_{11} = 1$

$l_{11} \cdot l_{21} = 5 \qquad l_{21} = 5$

$l_{11} \cdot l_{31} = 0 \qquad l_{31} = 0$

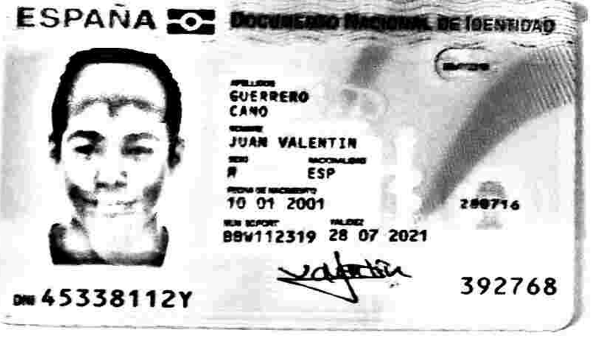
$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 26 \qquad l_{22} = \sqrt{26 - 25} = 1$

$l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} = 2 \qquad l_{32} = \dfrac{2 - l_{21} \cdot l_{31}}{l_{22}} = \dfrac{2}{1} = 2$

$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5 \qquad l_{33} = \sqrt{5 - 4 + 0} = 1$

Luego $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

J. Valentín Guerrero Cano.



b) Al ser A def. pos. y simétrica, podemos aplicar el principio del mínimo que garantiza que f alcanza un mínimo y lo hace en un único vector que es la solución del sistema $Ax=b$ siendo $b=(1\ 7\ 5)$ que es única al ser A regular

c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$y = L^t \cdot x \qquad L y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$y = (x_1 + 5x_2,\ x_2 + 2x_3,\ x_3)^t$

$$L y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ 5x_1 + 25x_2 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ 5x_1 + 26x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son: $x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$

Luego la función h alcanza su mín en el vector $(1\ 0\ 1)$