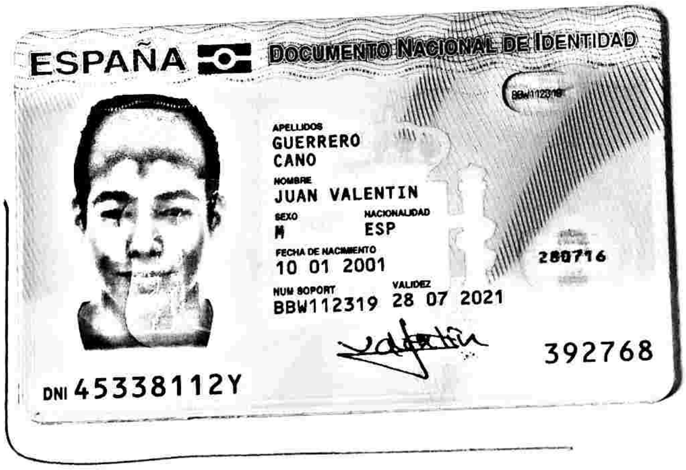
J. Valentín Guerrero Cano.



① $\omega_a(x,y,z) = x^2 + 2axy - (36-12a)y^2 + az^2$

a) $M(g_a, B) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -36+12a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$|A_1| = 1 > 0 \qquad |A_2| = -36+12a - a^2 = -(a-6)^2$

$|A| = a\cdot(-36+12a) - a^3 = -a^3 + 12a - 36a = a(-a^2+12a-36a) = -a\cdot(a-6)^2$

	$\lvert A_1\rvert$	$\lvert A_2\rvert$	$\lvert A\rvert$	g_a	rango	índice
$a<-6$	+	−	+	indef. no degen.	3	2
$a>6$	+	−	−	indef. no dege.	3	1
$0<a<6$	+	−	−	indef. no degenera.	3	1
$-6<a<0$	+	−	+	indef no dege.	3	2

El índice de $g_a = 2$ cuando es indefinida.

pues matrices congruentes tienen mismo signo de determinante y al ser $\det(A)>0$ una matriz ~~en base~~ en una base dada podría ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{índice } 2$$

Si $\det(A)<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ índice 1.

En los casos degenerados:

Si $a=0$.

$|A_1|>0 \quad |A_2|<0 \quad |A|=0$ indef. degenera.
rango 2
índice 1

Si $a=6$

$|A_1|>0 \quad |A_2|=0 \quad |A|=0$ semidef. positiva
rango 2
índice 0.

b) si $a=1$ $\quad M(g_1, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para obtener la base ortogonal:

$$D = P^{-1} \cdot M(g_1, B) \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Base orto $= \{(100)(-110)(001)\}$

Base ortonormal:

$B_0 = \{ (100), \frac{(-1\,1\,0)}{\sqrt{26}}, (001) \}$

c) ¿ $(\mathbb{R}^3, g_1)(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos?

Son isométricos $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^3) \\ \text{índice}(g_1) = 1 \\ \text{índice}(g_{-1}) = 2 \end{cases} \neq$

Luego no hace falta estudiar el rango pues no son isométricos ya que tienen distinto índice.

¿ $(\mathbb{R}^3, g_1)(\mathbb{R}^3, g_{1/2})$ isométricos?

Son isométricos $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^3) \\ \text{índice}(g_1) = 1 = \text{índice}(g_{\frac{1}{2}}) \\ \text{rango}(g_1) = 3 = \text{rango}(g_{\frac{1}{2}}) \end{cases}$

Tenemos una base ortonormal de g_1, calculemos la base ortonormal de $g_{1/2}$ para construir la isometría. $D = P^{-1} \cdot M(g_{1/2}, B) \cdot P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -30 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{121}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{121}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego nuestra B ortonormal:

$$B = \left\{ \frac{(100)}{\sqrt{g(100)(100)}}, \frac{(-\frac{1}{2}, 1, 0)}{\sqrt{g(-\frac{1}{2},1,0)(-\frac{1}{2},1,0)}}, \frac{(001)}{\sqrt{g(001,001)}} \right\}$$