Espacios vectoriales euclídeos.

(V, g) eve. $\quad B$ ortonormal $\quad M_B(g) = I_n$

→ ORIENTACIÓN

B y B' dos bases $\quad B \sim B' \iff \det(P_{BB'}) > 0$ → Relación de equivalencia

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "P"] \arrow[rr, bend right, "Q \cdot P"'] & B' \arrow[r, "Q"] & B'' \end{tikzcd}$$

Hay dos clases de equivalencia: $\det(P_{BB'}) > 0$, $\det(P_{BB'})\ 0$

Se dice orientación positiva de $(V, g) = [B_c]$

Orientación + de $(V,g) = [B_c] = \{B \text{ bases} : \det(P_{BB_c}) > 0\}$

Orientación − de $(V,g) = [B] = \{B \text{ bases} : \det(P_{BB_c}) < 0\}$

→ PROD. VECTORIAL

$\dim V = 3 \quad u, v \in V$ se define el prod. vectorial.

$$\times : \wedge : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u \times v = u \wedge v$$

El nuevo vector verifica:

1) $(u \wedge v) \perp u$ y $(u \wedge v) \perp v$

2) $\| u \wedge v \| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

3) $\det(u, v, u \times v) \geq 0$ (regla del sacacorchos) / botella / mano derecha

Propiedades:

① $u \times v = -(v \times u)$ Antisimétrico

② $u \times v = \vec{0} \iff u$ y v son LD (utilizada para dem vectores ld)

③ $(u + w) \times v = (u \times v) + (w \times v)$
$\quad u \times (w + v) = (u \times w) + (u \times v)$

④ $(au) \times v = a(u \times v)$
$\quad u \times (av) = a(u \times v)$

$\Big\}$ $\times$ es bilineal. (NO ES MÉTRICA)

⑤ B ortonormal $= \{e_1, e_2, e_3\}$
$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$ coordenadas en B

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

⑥ $u \times (v \times w) = g(u,w)v - g(u,v)w$

Clasificación de isometrías

(V,g) eve. $f(V,g) \to (V,g)$

1) f isometría $\Leftrightarrow M(f, B_{orton}) = A$ es ortogonal $\Leftrightarrow A^t \cdot A = I$
2) f isometría $\Leftrightarrow \|v\| = \|f(v)\| \; \forall v \in V$
3) f isometría $\Leftrightarrow f$ aplica bases ortonormales en bases ortonormales.
4) f isometría $\Rightarrow \det(f) = \pm 1$
5) Si λ es valor propio de $f \Rightarrow \lambda = \pm 1$ (Dem IMP)
6) Si U es invariante con $f \Rightarrow U^\perp$ es invariante por f

$\to \det(f) = 1 \Rightarrow f$ es movimiento directo o rotación

$\to \det(f) = -1 \Rightarrow f$ es mov. inverso o reflexión.

~Dem prop 5~

Suponemos λ es valor propio $\Rightarrow f(v) = \lambda v \quad (v \neq 0)$

Por ser isometría $\Rightarrow \|v\| = \|f(v)\|$

$$\|v\| = \|\lambda v\|$$

$$\underset{\neq 0}{\|v\|} = |\lambda| \underset{\neq 0}{\|v\|} \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

sea $v \in V$, vector fijo si $f(v) = v \Rightarrow v$ vector propio asociado a $\lambda = 1$

$V_f = V_1 \to$ subespacio de vectores fijos.

(V,g) eve $\dim V = 2$ y $f: V \to V$ isometría $A = M(f,B)$

$\rightsquigarrow \det(A) = \det(f) = 1 \Rightarrow f$ rotación o giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$

se verifica que la matriz de f en cualquier base ortonormal es:

$\forall B$ ortonormal $M(f,B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

f NO tiene vectores fijos. Se verifica que si $\theta \neq \pi$, f no es diago.

$\theta = \pi \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ simetría central.

$\rightsquigarrow$ $\det(f) = \det(A) = -1 \Rightarrow f$ es una reflexión $=$ simetría respecto de una $\underbrace{\text{recta vectorial}}$

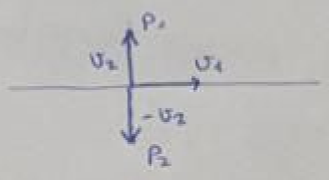
sub propio asociado a 1 $=$ vectores fijos $=$ eje de simetría

$\exists$ B ortonormal : $M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \{v_1, v_2\}$

$f(v_1) = v_1$

$f(v_2) = -v_2$



$v_1 \in$ eje de simetría

$v_2 \perp$ eje de simetría

Ejercicio

$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$ Demostrar que es isometría. Clasificarla.

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x, y) = (7x - 12y, 4x - 7y)$

$g(u, v) = g(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

$$U^t G V = U^t A^t G A V \Rightarrow G = A^t G A$$

$f(e_1) = (7, 4)$

$f(e_2) = (-12, -7) \quad M(f, Bu) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es isometría.}$$

$\det(f) = \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$ reflexión $=$ simetría respecto de una r. vectorial $= V_1$

Podemos calcular el det ya que los det de endomorfismos semejantes coinciden.

$V_1 = \{ (A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$

$x - 2y = 0 \}$ Eje de simetría

$(\mathbb{R}^2, g_u)$

Calcular respecto la B_u la expresión matricial

a) giro de $\theta = \frac{\pi}{3}$

b) simetría respecto de la recta vectorial $2x + y = 0$
   ||
   reflexión

c) Calcula la expresión matricial en B_u.

a) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ortonormal

La base es ortonormal porque estamos en g_u

b) $\exists\, B_{orton} : M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \{v_1, v_2\}$

$v_1 \in$ eje de simetría $\{2x + y = 0$

$v_1 (1, -2)$

$v_2 \perp$ eje de simetría

Cambiamos la posición y un signo $\to v_2 (2, 1)$

pero esto solo valen en g_u.

sino, $g(\ \ ) = (1, -2) (\equiv) \binom{x}{y} = 0$

Ahora debemos calcular la normal y ortonormalizarlos ya que ya son ortogonales.

$\|v_1\| = \sqrt{5}$

$\|v_2\| = \sqrt{5}$

$B_{orton} = \{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) \}$

c) En la práctica, podemos coger una base que no sea ortonormal. Porque una simetría es diagonalizable y son los vectores propios.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{M(f,B)} & B \\ {\scriptstyle P^{-1}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle M(f,B,B_u) = P} \\ B_u & \xrightarrow{M(f,B_u)} & B_u \end{array}$$

$M(f, B_u) = P \ M(f, B)\ P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = M(f, B, B_u)$

$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

Diagonalizamos:

$$p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 10 \\ 5 & 4-\lambda & 10 \\ -5 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ a_1 = 1 \\ \lambda = 4 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 1$ Calculamos subespacios propios.

$\lambda_2 = 4 \quad a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 5 & 5 & 10 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\left.\begin{matrix} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = -z \\ y = -z \end{matrix}\right\} (1,1,-1)$$

$B_{V_1} = \{(1,1,-1)\}$

Cuidado!! este vector NO es el mismo de la base del enunciado, ya que el de la base del enunciado está expresado en la canónica, mientras que este que acabamos de calcular está expresado en la base B.

$$1(1,1,-1) + 1(0,1,0) - 1(2,1,-1)$$

$$(-1,1,0)_{Bu} = (1,1,-1)_B$$

$$V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2z = 0 \} = \{(2,0,-1), (0,1,0)\}$$

$B_{V_2} = \{(2,0,1)_B, (0,1,0)_B\}$

Aplicamos GS y conseguimos bases ortonormales.

$$\|(1,1,-1)\| = \sqrt{(1,1,-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1$$

B_{V_1} ortonormal $= \{(1,1,-1)_B\}$

1) Ejercicio tema anterior.

$\mathbb{R}^3$, $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$B = \{(1,1,-1), (0,1,0), (2,1,-1)\}$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & a \\ 5 & 4 & 10 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix} = A$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = G$$

Para los valores de a para los cuales f autoadj respecto de g, halla una base ort. formada por vectores propios de f.

2) Otro ejercicio

$\mathbb{R}^3$ se considera $U = \langle (1,2,3) \rangle = L\{(1,2,3)\}$

y el s.v $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$

Halla si es posible la matriz en Bu de una métrica no degenerada g en $\mathbb{R}^3$: $U^\perp = W$

1) Comprobemos que es autoadjunto.

$$g(f(u), v) = g(u, f(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

$$(A\,U)^t G\,V = U^t\,G\,(A\,V)$$

$$U^t A^t G\,V = U^t G A V \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \iff A^t G = G A$$

$$A^t G = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ a & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2a-18 & 4 & 3a-26 \end{pmatrix}$$

$$G A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & a \\ 5 & 4 & 10 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2a-18 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3a-26 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 18 = 2 \\ 3a - 26 = 3a - 26 \end{array}\right\} \text{Porque debe ser simétrica.}$$

Si quisieramos trabajar en la B_u todo el ejercicio, pasaríamos el end y la métrica a la B_u. para ello,

$$M(f, B_u) = P \, M(f, B) \, P^{-1}$$

$$M(g, B_u) = M_{B_u}(g) = (P^{-1})^t \, M_B(g) \, P^{-1}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M(f.B)"] & B \arrow[d, "P"] \\ B_u \arrow[u, "P^{-1}"] \arrow[r] & B_u \end{tikzcd}$$

$M_{B_u}(g) = Q^t \, M_B(g) \, Q$

Donde Q es la matriz de cambio de base de B_u a B.

$B_{v_4} = \{ \underset{u_1}{(2,0,-1)_B}, \underset{u_2}{(0,1,0)_B} \}$

Aquí podríamos hacer el prod. escalar si estuviesemos en la métrica usual y B_u.

$\downarrow$ GS

$v_2 = a_2 - a_{12} v_1 \quad ; \quad a_{12} = \dfrac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)} = \dfrac{-1}{2}$

$v_2 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(2,0,1) = (-1, 1, \frac{1}{2})$

$\|v_1\| = \sqrt{2}$

$\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

B_{v_4} orton. $= \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,-1), \; \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \}$

$\Rightarrow \overline{B} = \{ (1,1,-1)_B, \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)_B, \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)_B \}$

$\overline{B}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$ formada vectores propios de f.

2) ¿$\exists \, g$ no degenerada : $U^\perp = W$? Debemos sacar base de U.

$B_u = \{(1,2,3)\}$ ⇝ comprobamos que es base.

$B_w = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$

Ahora comprobamos que los 3 forman base.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow U \subseteq W$$

$M(g_u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidef ⊕ degenerada.

$U = L\{e_2, e_3\}$

$M(g_u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ det $= -1 \Rightarrow$ no degenerada.

def ⊕ No, def ⊖ No $\Rightarrow$ indefinida.

¿$\exists$ s.v tal que la métrica sea no deg def ⊖?

supongamos que si.

$\exists v_3 \neq \vec{0} : v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$ $\quad \{v_1, v_2, v_3\}$ $\begin{pmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & +- \end{pmatrix}$

Aplicamos sylvester y vemos que ocurre

Pero como det $(g) = -2$

no es def ⊖ y tampoco es def ⊕

para que el det de negativo, las posibles soluciones son:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ No puede ser ya que no es def ⊖

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ det < 0 Es la única posibilidad.

Genérico

(V, g) e v m $\quad$ dim $= 3$ $\quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$

B base $\quad$ g euclídea $\Leftrightarrow a_{33} > 0$ $\quad$ det $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$ $\quad$ det$(A) > 0$

$A = M_B(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ | g euclídea $\Rightarrow g_{ij} = g_{ji} = g(v_i, v_j)$

reordenamos la base.

$B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$a_{11} > 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

det$(A) > 0$ ✓

Ejercicio

(V,g) eve f, h autoadjuntos : $f \circ h = h \circ f$.

a) Probar que los subespacios propios de f son invariantes por h.

V_λ subespacio propio de f asociado a λ. ¿$h(V_\lambda) = V_\lambda$?

$h(V_\lambda) = V_\lambda \iff h(v) \in V_\lambda \quad \forall v \in V_\lambda$

$$v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v.$$
$$h(f(v)) = h(\lambda v)$$
$$(h \circ f)(v) = \lambda h(v)$$
$$(f \circ h)(v) = \lambda h(v)$$
$$f(h(v)) = \lambda h(v) \Rightarrow h(v) \text{ es un vector propio de } f \text{ asociado a } \lambda.$$

b) Dem que $\exists$ base ordenada ortonormal de B de (V,g) tal que $M(f,B)$ y $M(h,B)$ son matrices diagonales.

$M(f,B)$, $M(h,B)$ > diagonales.

$\Updownarrow$

f y h tienen los mismos vectores propios.

$$g((f \circ h)(v), u) = g(f(h(v)), u) = g(h(v), f(u)) = g(v, h(f(u)))$$
$$= g(v, (h \circ f)(u)) = g(v, (f \circ h)(u))$$

Ejercicio

$$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $B_u \{e_1, e_2, e_3\}$

$U = L\{e_1, e_2\}$

$g_u(x,y) = g(x,y)$

* Si fuesen independientes, $B_{\mathbb{R}^3} = \{u, w_1, w_2\}$ definimos la métrica.

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ es no degenerada}$$

teniendo en cuenta que $g_{12} = g_{21} = g(u, w_1) = 0$

$g_{13} = g_{31} = g(u, w_2) = 0$

Ahora cambiamos de base a la usual.

Pero esto NO ocurre porque el det es 0 y no son base de $\mathbb{R}^3$.

$U \subseteq W$

Como $U^\perp = W$

$B_U = \{(1, 2, 3)\}$ (u)

$g(u, w_1) = 0$

$g(u, w_2) = 0$

$B_W = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$ (w_1, w_2)

$(1,2,3) = \underset{1}{a}(1, 0, -1) + \underset{2}{b}(0, 1, 2)$

$u = w_1 + 2w_2$

$$\left.\begin{array}{l} g(w_1 + 2w_2, w_1) = 0 \\ g(w_1 + 2w_2, w_2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g(w_1, w_1) + 2g(w_2, w_1) = 0 \\ g(w_1, w_2) + 2g(w_2, w_2) = 0 \end{array}$$

$B = \{\underbrace{w_1, w_2}_{W}, w_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} + 2g_{21} = 0 \\ g_{21} + 2g_{22} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g_{11} = -2g_{21} \\ g_{22} = -\frac{1}{2}g_{21} \end{array}$$

$g_{21} = 2$; $g_{11} = -4$ $g_{22} = -1$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El det es $\neq 0$, por lo que es no degenerada.

w_3 puede ser el $(0,0,1)$ ya que es l.i. con w_1, w_2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow w_3 = (0,0,1)$$

$M_{B_U}(g) = P^t M_B(g) P$ $\qquad D_{B_U, a B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Calculamos la matriz de la métrica en esa base.

$M_{B'}(g) = P^t M_B(g) P =$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = (0,0,1)_B$

$v_2 = (0,1,0)_B$

$v_1 = (1,0,0)_B$

$P_{B' a B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

Como la métrica es euclídea, $a_{33} > 0$ $\begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ $\det A > 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ es euclídea. es el mismo razonamiento.

Endomorfismo adjunto (ejercicio)

(V, g) $End(V)$

$G: End(V) \times End(V) \to \mathbb{R}$

$G(f, h) = traz(f \circ \hat{h})$ donde $\hat{h}$ es el end. adjunto de h.

Prueba que g es una métrica euclídea.

Sea $h: V \to V$

$\hat{h}: V \to V$ $\forall x, y \in V$ $g(h(x), y) = g(x, \hat{h}(y))$

$A = M(h, B)$

$G = M(g)$

$\hat{A} = M(\hat{h}, B)$

$A^t G = G \hat{A}$

$\hat{A} = G^{-1} A^t G$

El end. adjunto solo tiene sentido si la métrica es no degenerada

1) $G(af + bj, h) \overset{?}{=} a G(f, h) + b G(j, h)$ $a \in b \in \mathbb{R}$, $f, h, j \in End(V)$

$G(af + bj, h) = traz((af + bj) \circ \hat{h}) = traz(a(f \circ \hat{h}) + b(j \circ \hat{h})) =$

$= a\, traz(f \circ \hat{h}) + b\, traz(j \circ h) = a\, G(f, h) + b\, G(j, h)$

Recordemos prop de la traza.
traz$(f+h) =$ traz f + traz h
traz$(af) = a$ traz f
traz$(f \circ h) =$ traz$(h \circ f)$

2) $G(f, ah+bj) \overset{?}{=} a\,G(f,h) + b\,G(f,j)$

$G(f, ah+bj) = \text{traz}(f \circ (a\hat{h} + b\hat{j})) = \text{traz}(a(f\circ\hat{h}) + b(f\circ\hat{j}))$

$= a\,\text{traz}(f\circ\hat{h}) + b\,\text{traz}(f\circ\hat{j}) = a\,G(f,h) + b\,G(f,j)$

Acabamos de probar que es bilineal.
Veamos que es simétrica.

3) G simétrica $\quad G(f,h) \overset{?}{=} G(h,f) \iff \text{traz}(f\circ\hat{h}) \overset{?}{=} \text{traz}(\hat{h}\circ f)$

traz$(f) =$ traz$(M(f,B))$

$A = M(f,B)$
$C = M(h,B)$
$G = M_B(g)$

$\text{traz}(f\circ\hat{h}) = \text{traz}(\underset{f}{A}\ \underbrace{(G^{-1}C^tG)}_{\hat{h}})$

$= \text{traz}((A\,G^{-1}C^tG)^t) = \text{traz}(\underset{G}{\overset{\shortparallel}{G^t}}\,C\,\underset{G^{-1}}{\overset{\shortparallel}{(G^{-1})^t}}A^t)$

$= \text{traz}(G\,C\,G^{-1}A^t) =$

$= \text{traz}(C\,\underbrace{G^{-1}A^t\,G}_{\hat{A}}) = \text{traz}(h\circ\hat{f})$

4) G es euclídea, esto es, $G(f,f) \geq 0$

$G(f,f) \overset{?}{\geq} 0$

$G(f,f) = \text{traz}(f\circ\hat{f}) = \text{traz}(A\cdot \underset{I}{G^{-1}}A^t\underset{I}{G}) = \text{traz}(A\,A^t) > 0$

Suponemos que B es ortonormal

IMP!! DIAGONALIZAR UNA MÉTRICA ES HACER SYLVESTER!!

Clasificación de las isometrías en $\mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometría (cualquier esp. vectorial de dim=3)

$A = M(f, B)$

$\rightsquigarrow \det(f) = 1$ (f no es diagonalizable)

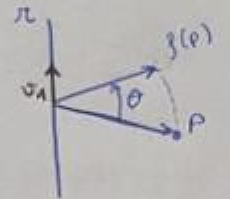
$\Downarrow$

f es una rotación de ángulo θ respecto de una recta vectorial

A la recta vectorial se le llama <u>eje de giro</u>

$\exists\, \bar{B}$ ortonormal : $M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2\, v_3\}$



$f(v_1) = v_1$ $\quad$ $v_1 \in$ eje de giro que es V_1 (sub. propio asociado a 1)

$$\left.\begin{aligned} f(v_2) &= \cos\theta\, v_2 + \operatorname{sen}\theta\, v_3 \\ f(v_3) &= -\operatorname{sen}\theta\, v_2 + \cos\theta\, v_3 \end{aligned}\right\}$$ Estos vectores están en el plano perpendicular al eje de giro

$v_2, v_3 \in (\text{eje de giro})^{\perp} =$ plano vectorial.

En la práctica, $v_2 \perp v_1$ y $v_3 = v_1 \times v_2$ $\left\{\begin{aligned} g(v_1, v_3) &= 0 \\ g(v_2, v_3) &= 0 \end{aligned}\right.$

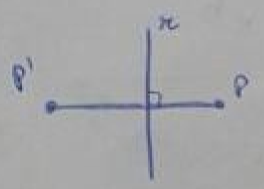
esto solo si es gu.

luego los ortonormalizamos.

HAY **DOS** EXCEPCIONES:

$\theta = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\theta = \pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M(f, \bar{B})$ $\leftarrow$ esto es un giro de 180° o rotación de ángulo π respecto de r pero además es una simetría o reflexión respecto de la recta r.



Hay profesores que usan $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

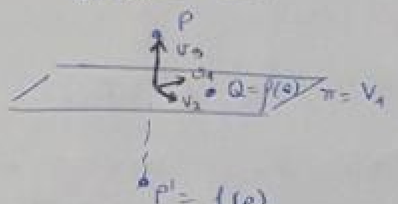
$\rightsquigarrow \det(f) = -1$

1) Hay vectores fijos $\Rightarrow \dim V_1 = 2 \Rightarrow V_1$ (plano de vectores fijos) plano vectorial

($M(f, B_{orton})$ es simétrica)

Diremos que f es una reflexión o simetría respecto de un plano vectorial $= V_1 =$ vectores fijos.

$\exists\, \bar{B} : M(f,\bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Aquí no tiene que ser ortonormal.



$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \end{array}\right\}$ vectores del plano.

$f(v_3) = -v_3$

$v_1, v_2 \in V_1 =$ plano de simetría.

$v_3 \perp$ plano de simetría. $= V_1$ $\begin{pmatrix} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{pmatrix}$

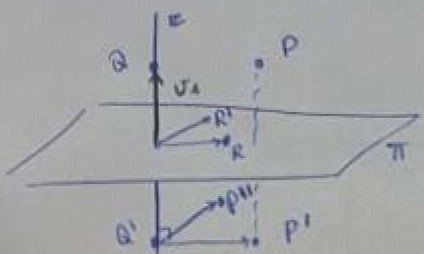
2) No hay vectores fijos (f No es diagonalizable)

$\Downarrow$

f es la composición de una rotación y una reflexión, de manera que el eje de giro y el plano de simetría son ortogonales.

$\exists\, \bar{B}$ ortonormal: $M(f,\bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$



$f(v_1) = -v_1 \Rightarrow v_1 \in$ eje de giro $= V_{-1}$

$v_2, v_3 \in$ plano de simetría $= (V_{-1})^\perp$

$v_2 \perp v_1$

$v_3 = \underbrace{v_1 \times v_2}_{g_u}$ o $\begin{pmatrix} g(v_1, v_3) = 0 \\ g(v_2, v_3) = 0 \end{pmatrix}$

Finalmente los hacemos unitarios.

Dos EXCEPCIONES

$\theta = 0 \Rightarrow M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ simetría respecto de un plano.
reflexión.
$\dim V_1 = 2$

$\theta = \pi \Rightarrow M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^3, g_u)$

$f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z,\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z,\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)$

Comprobar que es una isometría en $\mathbb{R}^3$
clasificarla.
Calcula sus elementos distinguidos.

f isometría $\Leftrightarrow g_u(u,v) = g(f(u), f(v)) \ \forall u, v \in \mathbb{R}^3$

$A = M(f, B_u)$ $\qquad u^t I_3 v = (uA)^t I_3 (Av)$

$G = M(g_u, B_c) = I_3$ $\qquad I_3 = A^t \cdot A$

$f(e_1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$f(e_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $\qquad M(f, B_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(e_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$

$\det(f) = \frac{1}{27}(15+12) = 1 \Rightarrow$ rotación $\qquad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

sabemos calcular el eje (una recta) y el ángulo.

eje $= V_1$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4/3 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2/3 & -4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

$B_{V_1} = \{(1,1,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \equiv V_1 \text{ eje de giro}$$

$x = 2x - y$

$x = y$

2 forma de calcular el ángulo.

~corta~ como es un giro, sabemos:

congruentes - métricas

semejantes - endomorf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M(f, \bar{B})$$

que es semejante a la matriz de f.

por lo que tienen igual traza

$$-1 = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \underline{\theta = \pi}$$

es la excepción rara, podemos decir que es la simetría respecto de la recta $V_1 = L\{(1,1,1)\}$

IMP!! de la forma "corta" debemos tener en cuenta el sentido de giro, ya que $\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$!!

~larga~ escogemos un vector que no sea del eje de giro

$v \in \mathbb{R}^3$ $v \notin$ eje de giro.

$v = (1,0,0) \Rightarrow f(v) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \qquad \langle v, f(v) \rangle = -\frac{1}{3}$

En este caso da igual porque es π.

$g(v \quad \cos\theta = \frac{\langle g(v, f(v) \rangle}{\| \| \; \| \|} \rightarrow$ miramos el signo de esto para saber el signo del ángulo.

Ejercicio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M(f, B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Comprobamos que es una isometría.

$A^t \cdot A = I$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \ \underline{\underline{\text{yes}}}$$

$$\det(f) = \frac{1}{27}(-15 - 12) = -1$$

$$\dim V_1 = 3 - rg(A - I) = 3 - \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & \frac{2}{3} \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

reflexión (simetría) respecto de un plano vectorial $= V_1$

$$V_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$-x - y + z = 0 \} = V_1$ $\quad (1, 0, 1)$

$(1, -1, 0)$

$B_{V_1} = \{ (1, -1, 0), (1, 0, 1) \}$

Ejercicio

$f(x, y, z) = (y, -z, x)$

para ver que es isometría

f isometría $\Leftrightarrow$ $M(f, B_{\text{ortonormal}})$ es ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^t A = I$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(e_1)=(0,1,0)$
$f(e_2)=(1,0,0)$
$f(e_3)=(0,-1,0)$

$$\det(f)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

Veamos si es diago:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-1=0 \; ; \; \lambda=-1 \quad \text{(No diago)}$$

Podemos ver que $\dim V_1 = \text{rang}(A-I)=0 \to$ No hay vectores fijos

$\Rightarrow f$ composición giro y simetría $\Rightarrow \underbrace{\text{eje de giro}}_{V_{-1}} \perp \underbrace{\text{plano de simetría}}_{(V_{-1})^\perp}$

- ángulo $\Rightarrow$ comparando las trazas porque las matrices son semejantes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Trazas semejantes: $0=-1+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$

- Eje de giro : V_{-1}

$$V_{-1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{B_{V_{-1}}=\{(-1,1,1)\}}$ eje de giro

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \equiv V_1$$

- Plano de simetría : $V_{-1}^\perp$ $(x,y,z)\perp(-1,1,1)$

$g_u((x,y,z),(-1,1,1))=0 \Rightarrow \{-x+y+z=0\}\equiv V_{-1}^\perp$

$\boxed{B_{V_{-1}^\perp}=\{(1,1,0),(0,1,-1)\}}$ plano vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \theta=\frac{\pi}{3} \\ B_{V_{-1}}=\{(-1,1,1)\} \\ B_{V_{-1}^\perp}=\{(1,1,0),(0,1,-1)\} \end{array}\right\} \text{Sol.}$$

Ejercicio.

En $\mathbb{R}^3$ calcula la matriz asociada al giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ respecto de la recta vectorial $R = \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$R = \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

Como es rotación $\Rightarrow \exists\ B$ orton:

$$M(f, \bar{B}_{orton}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

debemos obtener $\bar{B}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$f(v_1) = v_1$, v_1 Eje de giro o rotación $\Rightarrow v_1(1,1,0)$ (vector fijo)

$v_2, v_3 \in (\text{eje de rotación})^\perp$

$v_2 = (1,-1,0)$

$$v_3 = \underbrace{v_1 \times v_2}_{(\mathbb{R}^3, g_u)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-2)$$

$\bar{B} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{2}(1,-1,0), (0,0,-1) \}$ ↙ Dividiendo por la norma

Ahora hacemos el cambio de base a la canónica.

B_u es ortonormal por ser g_u.

$$\begin{array}{ccc} & f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & \\ & \bar{B} \xrightarrow{M(f,\bar{B})} \bar{B} & \\ P^t = P^{-1} & & P \\ & B_u \longrightarrow B_u & \\ & ¿M(f,B_u)? & \end{array}$$

esto porque son bases ortonormales.

$$M(f,B_u) = P \cdot M(f,\bar{B}) \cdot \underset{P^{-1}}{P^t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ejercicio.

$\varphi(x,y,z) = 5x^2 - 16xy - 4xz + 13y^2 + 6yz + 2z^2$

Comprueba g es métrica euclídea y calcula respecto a B_u la matriz respecto de la reflexión ortogonal respecto del plano vectorial $U = \{x + 2y + 2z = 0\}$

$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -2 \\ -8 & 13 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 > 0 \\ \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} > 0 \\ |\text{Todo}| > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ euclídea.

Para la simetría.

$\exists \bar{B} : M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$\left.\begin{matrix} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \end{matrix}\right\}$ $v_1, v_2 \in$ plano simetría $\sim$ $\begin{matrix} v_1 = (2,-1,0) \\ v_2 = (2,0,-1) \end{matrix}$ l.i.

$f(v_3) = -v_3$ $\qquad \begin{matrix} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{matrix} \Rightarrow v_3 \perp$ plano simetría.

$v_3 \neq v_1 \times v_2$ porque B_u no es ortonormal ya que no estamos en g_u

$g(v_1, v_3) = 0 \Leftrightarrow (2,-1,0)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 18x - 29y - 7z = 0$

$g(v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow (2,0,-1)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12x - 19y - 6z = 0$

De ambas soluciones $\rightarrow v_1 = (24, 41, 6)$

$\bar{B} = \{(2,-1,0), (2,0,-1), (24,41,6)\}$