Cálculo II Relación 2

(1.-) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$. $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ / $g(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ ¿f deriv. en $a \Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} g(h)$?

Supongamos entonces, por hipótesis, que f es derivable en a. Esto implica que $\exists f'(a) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} g(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)+f(a)-f(a)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h}\right)$$

$=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}f'(a)=f'(a)$, luego al ser f derivable en $a \Rightarrow \exists f'(a) \Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} g(h)$

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Un contraejemplo sería $f(x)=|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Claramente, f no es derivable en 0.

$$\lim_{h\to 0} g(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|a+h|-|a-h|}{2h}\overset{a=0}{\uparrow}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$$, luego sí existe $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} g(h)$

(2.-) $f:A\to\mathbb{R}$ deriv en $a\in A'$ ¿$\exists M,\delta>0$ / $x\in A$, $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|\leq M|x-a|$?

Que f sea derivable en el punto a implica que $\exists \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$. Por la definición de límite, $\forall \varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ / si $x\in A$, $|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right|<\varepsilon \Rightarrow \dfrac{|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|}{|x-a|}<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|<\varepsilon|x-a| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como $|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|\geq |f(x)-f(a)|-|f'(a)(x-a)|$ tenemos que es

$|f(x)-f(a)|-|f'(a)(x-a)|<\varepsilon|x-a| \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon|x-a|+|f'(a)(x-a)|=\varepsilon|x-a|+|f'(a)||x-a| \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(a)|<(\varepsilon+|f'(a)|)|x-a|$. Si ponemos $M=\varepsilon+|f'(a)|$, tenemos un valor positivo, $M\in\mathbb{R}^+$ que cumple lo pedido.

Si ahora en lugar de suponer f derivable en a consideramos f cont en a, por la definición de continuidad, dado $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ / si $x\in A$, $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$, lo cual no dice nada. Claramente la acotación a probar indica, si se da, que f es derivable en a. Si partimos de la continuidad de f en a, sin embargo, no se garantiza que f sea derivable.

(3.-)

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ Al tratarse de una función elemental, f será continua en todo su dominio de definición.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^4(1+x)}{1-x}}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

$x\neq\pm 1$

-1 $+$ 1

f derivable en $]-1,1[$.

b) $f(x)=\frac{1}{2}x|x| \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & si\ x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2 & si\ x\leq 0\end{cases}$ Al tratarse de una función definida a trozos en que ambas secciones son polinómicas y, por tanto, continuas en todo su dominio de definición, f sólo podrá ser no derivable en el punto $x=0$, aquel en que altera su propia descripción.

Estudiemos la continuidad en $x=0$. $f(0)=0$. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2}x^2=0$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x^2=0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, luego f cont. en 0. Provisionalmente diremos que $f'(x)=\begin{cases}x & si\ x>0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$ Ahora veamos si las derivadas laterales en 0 coinciden.

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)$. Como $f'(0)=0$ deducimos finalmente que $f'(x)=\begin{cases}x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$, luego f es derivable en $\mathbb{R}$

c) $f(x)=x^x$ si $x>0$ y $f(0)=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^x & si\ x>0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$ f, función definida a trozos, posee dos secciones continuas en sus respectivos dominios.

Por tanto, los puntos en que puede no ser derivable son aquellos en que cambia de definición. En este caso, es $x=0$. Estudiemos la continuidad en este punto:

$f(0)=1$. $\lim_{x\to 0^+} x^x=0^0$ (Indet.) $\Rightarrow$ Supongamos $\lim_{x\to 0^+} x^x=\alpha \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\log x^x=\log\alpha \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\log x=0^-=\log\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha=1$. Por tanto, $\exists\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$, luego f cont en $[0,+\infty[$. Veamos si existe derivada lateral en 0.

$g(x)=x^x \Rightarrow \log g(x)=x\log x \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}=\log x+1 \Rightarrow g'(x)=g(x)(\log x+1)=$
$=x^x\log x+x^x \quad \forall x>0$

$\lim_{x\to 0^+} x^x\log x+x^x=\lim_{x\to 0^+} x^x(\log x+1)=1(-\infty)=-\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$. Concluimos entonces que f es derivable en $]0,+\infty[$ y $f'(x)=x^x\log x+x^x$

d) $f(x)=\sqrt{x}^{\sqrt{x}} \quad \forall x>0$ f continua por ser elemental y estar definida en $\mathbb{R}^+$

$f(x)=\sqrt{x}^{\sqrt{x}} \Rightarrow \log f(x)=\sqrt{x}\log\sqrt{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\log\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\cancel{\sqrt{x}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}=\frac{\log\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=f(x)\frac{\log\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=$
$=\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}}(\log\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} \quad \forall x>0 \Rightarrow f$ derivable en $]0,+\infty[$

4.-

a) $f(x)=\sqrt{2x-x^2} \quad \forall x\in[0,1]$ $\{2x-x^2\geq 0 \Rightarrow x(2-x)\geq 0$ $\underset{0}{\bullet}\overset{+}{\text{———}}\underset{1}{\bullet}$ $\Rightarrow f$ continua en $[0,1]$ al ser $2x-x^2\in\mathbb{R}^+ \ \forall x\in[0,1]$

$f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \quad \forall x\in]0,1[$ Estudiemos la derivabilidad en los extremos del intervalo:

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=f'(1)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{2}{0^+}=+\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, luego f derivable en $]0,1]$

b) $f(x) = (x^2-3x+2)\sqrt[3]{|x-2|}\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x^2-3x+2)\sqrt[3]{2-x} & \text{si } x\leq 2 \\ (x^2-3x+2)\sqrt[3]{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ f cont. por ser composición de funciones continuas (un polinomio y un valor absoluto en raíz cúbica) $\forall x\in\mathbb{R}$.

$g_1(x) = (x^2-3x+2)\sqrt[3]{2-x} \Rightarrow g_1'(x) = (2x-3)\sqrt[3]{2-x} + \dfrac{-x^2+3x-2}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} =$

$= \dfrac{3(2x-3)(2-x)-x^2+3x-2}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} = \dfrac{12x-6x^2-18+9x-x^2+3x-2}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} = \dfrac{-7x^2+21x-20}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}$

$g_2(x) = (x^2-3x+2)\sqrt[3]{x-2} \Rightarrow g_2'(x) = (2x-3)\sqrt[3]{x-2} + \dfrac{x^2-3x+2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{3(2x-3)(x-2)+x^2-3x+2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} =$

$= \dfrac{6x^2-12x-9x+18+x^2-3x+2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{7x^2-21x+20}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Por tanto, provisionalmente diremos que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-7x^2+21x-20}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{7x^2-21x+20}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si } x>2 \end{cases}$ Vemos que el punto en que puede ser no derivable es $x=2$.

Hacemos límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-7x^2+21x-20}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = -\dfrac{6}{0^+} = +\infty$. Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ vemos directamente que $\nexists f'(2)$, luego f es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ y su derivada es la descrita anteriormente.

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} & \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ f cont en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas y no anularse en ningún punto del denominador. Estudiemos su derivabilidad:

$g_1(x) = \dfrac{2x}{1-x} \Rightarrow g_1'(x) = \dfrac{2(1-x)+2x}{(1-x)^2} = \dfrac{2-\cancel{2x}+\cancel{2x}}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$g_2(x) = \dfrac{2x}{1+x} \Rightarrow g_2'(x) = \dfrac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} = \dfrac{2+\cancel{2x}-\cancel{2x}}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{(1+x)^2}$

Provisionalmente diremos que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Veamos si f presenta derivadas laterales en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{(1-x)^2} = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{(1+x)^2} = 2$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 2$. Concluimos que f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2} & \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

d) $f(x) = x\sqrt[n]{|x|}\ \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x\sqrt[n]{-x} & \text{si } x\leq 0 \\ x\sqrt[n]{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ f cont en $\mathbb{R}$ por ser producto de funciones continuas. Estudiemos su derivabilidad:

$g_1(x) = x\sqrt[n]{-x} \Rightarrow g_1'(x) = \sqrt[n]{-x} - \dfrac{x}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}} = \dfrac{n(-x)-x}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}} = \dfrac{-(n+1)x}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}}$

$g_2(x) = x\sqrt[n]{x} \Rightarrow g_2'(x) = \sqrt[n]{x} + \dfrac{x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \dfrac{nx+x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \dfrac{(n+1)x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Provisionalmente diremos que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(n+1)x}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{(n+1)x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Veamos si f es derivable en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(n+1)x}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(n+1)}{\dfrac{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}}{-x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{n+1}{n\sqrt[n]{\frac{1}{-x}}} = \dfrac{n+1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(n+1)x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{n+1}{n\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = \dfrac{n+1}{+\infty} = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n\sqrt[n]{1/(-x)}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{n+1}{n\sqrt[n]{1/x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$

5.- ¿$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<0\\ 3x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ es cont pero no deriv. en $x=0$?

Se pide estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$. Claramente por ser definida con trozos de dos funciones polinómicas, f será cont en $\mathbb{R}-\{0\}$. Estudiemos la continuidad en 0. f será continua en $x=0$ si el límite cuando $x\to 0$ de f existe y coincide con $f(0)$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x^2=0$, $f(0)=3\cdot 0^2=0$. Dado que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, luego concluimos que f cont en $x=0$.

Provisionalmente diremos que $f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<0\\ 6x & \text{si } x>0\end{cases}$ Estudiemos la derivabilidad en $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2=2$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 6x=0$. Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, f no es derivable en $x=0$, y f' es la descrita anteriormente.

6.- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{si } x<0\\ \frac{2x}{x^2+1} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1+\frac{\log x}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$

$f(x)=e^{-1/x^2}$ $\forall x<0$. Como $x\neq 0$, f cont en $]-\infty,0[$ por ser e^{-1/x^2} elemental.
$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in[0,1]$. Como no se anula el denominador $\forall x\in[0,1]$, f cont en $]0,1[$
$f(x)=1+\frac{\log x}{x}$ $\forall x>1$. Como $x>0$, f cont en $]1,+\infty[$ por ser $1+\frac{\log x}{x}$ elemental.

Por tanto, sabemos que f cont en $\mathbb{R}-\{0,1\}$, pues podría presentar discontinuidad en cualquiera de estos puntos, en que cambia de definición. Estudiemos la continuidad en $x=0$ y $x=1$.

- En $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{-1/x^2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x^2+1}=0$
$f(0)=\frac{2\cdot 0}{0^2+1}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, luego f cont en $x=0$

- En $x=1$:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x^2+1}=1$
$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1+\frac{\log x}{x}=1$
$f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$, luego f cont en $x=1$

Concluimos que f cont en $\mathbb{R}$

$g_1(x)=e^{-1/x^2}\Rightarrow g_1'(x)=e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}=\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$

$g_2(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow g_2'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$g_3(x)=1+\frac{\log x}{x}\Rightarrow g_3'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

Provisionalmente diremos que $f'(x)=\begin{cases}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} & \text{si } x<0\\ \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} & \text{si } 0<x<1\\ \frac{1-\log x}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$ Estudiemos la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$

- En $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}\,{*}=0$
$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{1}=2$

Dado que $\lim_{x\to 0^-} f'(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f'(x)\Rightarrow \nexists f'(0)$, luego f no es derivable en $x=0$

- En $x=1$:

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{0}{4}=0$
$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\log x}{x^2}=1$

Dado que $\lim_{x\to 1^-} f'(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f'(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f'(x)\Rightarrow \nexists f'(1)$, luego f no es derivable en $x=1$

Concluimos que f derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$*$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x^3 e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{+\infty}=0$

7.-

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. f cont en $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$, definida $\forall x\in\mathbb{R}$ dado que $x^2+1\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=x^4e^x\log x$ $\forall x\in\mathbb{R}$. f definida y continua $\forall x>0$

$f'(x)=(4x^3e^x+x^4e^x)\log x+x^4e^x\cdot\frac{1}{x}=x^3e^x(4+x)\log x+x^3e^x=x^3e^x((4+x)\log x+1)$, definida $\forall x>0$

c) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad x+\sqrt{1+x^2}>0$ $\left\{\begin{array}{l} x+\sqrt{1+x^2}=0\Rightarrow x=-\sqrt{1+x^2}\Rightarrow \cancel{x^2}=1+\cancel{x^2}\Rightarrow 1=1 \rightarrow \\ \Rightarrow \underset{-\infty}{\longleftarrow}\overset{+}{\underset{0}{|}}\underset{+\infty}{\longrightarrow} \Rightarrow x+\sqrt{1+x^2}>0 \ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$

f definida $\forall x\in\mathbb{R}$,

$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2\sqrt{1+x^2}+2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x+2\sqrt{1+x^2}}{2x\sqrt{1+x^2}+2(1+x^2)}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2+1+x\sqrt{1+x^2}}$ $\left\{\begin{array}{l}1+x^2\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}\\ 0^2+1+0\sqrt{1+0^2}\neq 0\\ \quad\Downarrow\\ f' \text{ definida } \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$

d) $f(x)=e^{1/x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\quad f$ cont. en $\mathbb{R}^*$ al ser elemental

$f'(x)=-\frac{e^{1/x^2}}{x^3}$, definida $\forall x\in\mathbb{R}^*$

8.-

> Ecuación de la recta tangente a f en el punto $x=a$:
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

a) $y=\frac{x}{x^2+1}$ en el origen $(a=0)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x=0,\ y=\frac{0}{1}=0\\ y'=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\\ \text{Si } x=0,\ y'=1\end{array}\right\}$ $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-0=1\cdot x\Rightarrow\boxed{y=x}$

b) $y=x^2+1$ en $(3,10)$ $\quad(10=3^2+1\Rightarrow(3,10)\in y)$ $\quad(a=3)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x=3,\ y=10\\ y'=2x\\ \text{Si } x=3,\ y'=6\end{array}\right\}$ $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Rightarrow y-10=6(x-3)\Rightarrow\boxed{y=6x-8}$

c) $y=|x|$ en $(1,1)$ $\quad(|1|=1\Rightarrow(1,1)\in y)$ $\quad(a=1)$

$\left.\begin{array}{ll} y=\begin{cases}-x & \text{si } x\leq 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases} & \text{Si } x=1\Rightarrow y=1\\ y'=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases} & \text{Si } x=1\Rightarrow f'(1)=1\end{array}\right\}$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=1(x-1)\Rightarrow\boxed{y=x}$

9.- $a,b,c\in\mathbb{R}$, $f,g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^3-c$. $(1,2)\in f,g$ y $r_f=r_g$ en dicho punto

$(1,2)\in g\Rightarrow g(1)=2\Rightarrow 1^3-c=2\Rightarrow 1-c=2\Rightarrow\boxed{c=-1}\Rightarrow g(x)=x^3+1$

$(1,2)\in f\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow 1^2+a\cdot 1+b=2\Rightarrow \underline{a+b=1}$

Dado que la recta tangente en el punto $(1,2)$ es $\left\langle\begin{array}{l}y-g(1)=g'(1)(x-1)\\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\end{array}\right.$, como por hipótesis $(1,2)\in g,f$, lo que resta es que la derivada en $x=1$ sea igual para ambas funciones; esto es, $g'(1)=f'(1)$.

$f(x)=x^2+ax+b\Rightarrow f'(x)=2x+a$ $\qquad f'(1)=g'(1)\Rightarrow 2\cdot 1+a=3\cdot 1^2\Rightarrow 2+a=3\Rightarrow\boxed{a=1}$

$g(x)=x^3+1\Rightarrow g'(x)=3x^2$

$a+b=1\Rightarrow\cancel{1}+b=\cancel{1}\Rightarrow\boxed{b=0}$

10.- Tangentes a $f(x)=\frac{1}{x}$ que pasan por $(-1,1)$.

La ecuación de una recta tangente arbitraria en f es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ dada una abscisa $x=a$

Como $(-1,1)\in r_{tg}\equiv y-f(a)=f'(a)(x-a)\Rightarrow 1-f(a)=f'(a)(-1-a)$

$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f(a)=\frac{1}{a}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(a)=-\frac{1}{a^2}$, $\Rightarrow 1-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(-1-a)\Rightarrow\frac{a-1}{\cancel{a}}=\frac{a+1}{a^{\cancel{2}}}\Rightarrow a^2-a=a+1\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-2a-1=0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$ Estos son los dos puntos por los que pasan sendas rectas tangentes $\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} r_{tg_1}\equiv y-\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}(x-1+\sqrt{2})\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{3-2\sqrt{2}}x-2-2\sqrt{2}}\\ r_{tg_2}\equiv y-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}(x-1-\sqrt{2})\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}x-2+2\sqrt{2}}\end{cases}$

11.-

La función parte entera es aquella $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = E(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$; esto es, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \,/\, z_2 - z_1 = 1$ es $E(x) = z_1\ \forall x \in [z_1, z_2[$. Deducimos entonces que f es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, luego f no es derivable $\forall x \in \mathbb{Z}$. No obstante, si $z_1 < x < z_2 \Rightarrow f(x) = E(x) = z_1$, por lo que $f'(x) = 0$. Así, tenemos que f es derivable $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y $f'(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Téngase en cuenta que:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to z_2^-} E(x) = z_1 \\ \lim\limits_{x \to z_2^+} E(x) = z_2 \end{array}\right\}$ Dado que $z_2 - z_1 = 1 \Rightarrow z_1 \neq z_2$, luego $\lim\limits_{x \to z_2^-} E(x) \neq \lim\limits_{x \to z_2^+} E(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to z_2} E(x)$. La arbitrariedad de z_1 y z_2 garantiza que f no continua $\forall x \in \mathbb{Z}$.

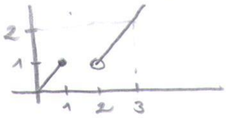
12.- g, h derivables en $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = h(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

La derivabilidad de f dependerá de las expresiones de g y h, puesto que si $g = h \Rightarrow$ $\Rightarrow$ claramente f sería derivable en $\mathbb{R}$, pero si por el contrario $g(x) \neq h(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ tenemos, por la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, que f será discontinua $\forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto, podemos generalizar esta idea afirmando que si $\exists a, b \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = h(x)\ \forall x \in]a,b[\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ será derivable $\forall x \in]a,b[$. Tomamos el abierto dado que, a pesar de que $g(a) = h(a)$, no podemos asegurar que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = g(a) = h(a)$, o que siendo $g(b) = h(b) \Rightarrow \lim\limits_{x \to b^+} f(x) = g(b) = h(b)$.

13.- $f: A \to \mathbb{R}$ deriv. en $x = a \in A'$ con $f'(a) \neq 0 \,/\, f^{-1}$ no sea derivable en $f(a)$.

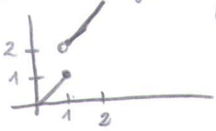
Dado que buscamos una función inyectiva y derivable en $x = a$, concluimos que f debe ser continua en a y que f será estrictamente creciente o decreciente en un entorno de a

Sea $f: [0,1] \cup]2, +\infty[\to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



Al ser f estrictamente creciente es inyectiva. Por ello, definida en su dominio, es biyectiva y $\exists f^{-1}$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Es claro que, para $a = 1$, $f'(x) = 1\ \forall x \in [0,1] \cup]2, +\infty[$

Sin embargo, f^{-1} está definida en $\mathbb{R}_0^+$ y es discontinua en $x = 1$, luego no derivable en $a = 1$.

14.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists K \geq 0$ y $\alpha > 1 \,/\, |f(x)| \leq K|x|^\alpha\ \forall x$ en un entorno de 0. ¿f derivable en $x = 0$? ¿Qué ocurre si $\alpha = 1$?

f será derivable en $x = 0$ si $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = |f'(0)| \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|} = |f'(0)|$

$\underset{x \to 0}{|f(x)| \leq K|x|^\alpha} \Rightarrow 0 \leq |f(0)| \leq K \cdot 0^\alpha = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$0 < \dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq \dfrac{K|x|^\alpha}{|x|} = K|x|^{\overset{\alpha - 1 > 0}{\alpha - 1}}$ en un entorno de $0 \Rightarrow$ si $x \to 0$, $0 < \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq K \cdot 0^{\alpha - 1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < |f'(0)| \leq 0 \Rightarrow |f'(0)| = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0}$. En caso de que $\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq \dfrac{K\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}} = K \Rightarrow 0 < \dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq K$, lo cual no nos aporta información acerca de la derivabilidad de f en $x = 0$, pues no permite acotar.