

**Ejercicios de Cálculo II**  
**Relación 4: Derivadas (III)**

1) Expresa el polinomio  $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$  en potencias de  $(x - 2)$ .

2) (\*) Sea  $f$  una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función  $g(x) = xf(x)$ .

3) Estudia el comportamiento de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  en el punto  $\alpha$  en cada uno de los siguientes casos:

a)  $A = ]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{\tan(x) \arctan(x) - x^2}{x^6}$ ,  $\alpha = 0$

b)  $A = \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^5}$ ,  $\alpha = 0$

4) Prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left( 2x\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt{1+x^2} - 2 - 2x - x^2 \right) = \frac{5}{12}.$$

5) Estudia el comportamiento en  $-\infty$ , 0 y  $+\infty$  de la función  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^6} \left( e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right).$$

6) Encuentra los extremos relativos de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en cada uno de los siguientes casos:

a)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$ ,

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ ,

c)  $f(x) = x^2|x|e^{-|x|}$

- 7) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable con  $f'(0) = 0$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g(x) = x^2 f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Prueba que si  $f(0) \neq 0$ , entonces  $g$  tiene un extremo relativo en 0.
- 8) Sea  $I$  un intervalo y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable tal que  $f''(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ . Prueba que si existe  $a \in I$  tal  $f(a) = f'(a) = 0$ , entonces  $f(x) = 0$  para todo  $x \in I$ .
- 9) Prueba que  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  para todo  $x \in [0, \pi]$ .
- 10) Calcula un valor aproximado del número real  $\alpha$  con un error menor de  $10^{-2}$  en cada uno de los casos siguientes:
- a)  $\alpha = \sqrt{e}$ ,
  - b)  $\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$ ,
  - c) (\*)  $\alpha = \sqrt[3]{7}$ ,
  - d)  $\alpha = \sqrt{102}$ .