5. Isometrías entre espacios vectoriales métricos

Cuando tenemos definida una estructura matemática sobre un conjunto buscamos a continuación las aplicaciones entre estas estructuras que la preservan. Por ejemplo cuando hablamos de grupos o espacios vectoriales tenemos los isomorfismos entre ellos que conservan la estructura de grupo o espacio vectorial, respectivamente. El objetivo de esta sección es buscar las aplicaciones entre espacios vectoriales métricos que preserven la estructura de espacio vectorial métrico, estas van a ser las isometrías (del griego, iso= misma, metría=medida). La justificación para esta denominación se verá en el Tema 3.

Es claro que para que se conserve la estructura de espacio vectorial métrico lo primero que debemos exigir a nuestras aplicaciones es que conserven la estructura de espacio vectorial, es decir que sean isomorfismos. Más concretamente:

DEFINICIÓN 2.33: Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos. Diremos que $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una **isometría** si verifica:

1) f es un isomorfismo de espacios vectorales.
2) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.

Asimismo, diremos que los espacios vectoriales métricos (V, g) y (V, g') son **isométricos** si existe $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ isometría. Además, denotaremos $\mathrm{Iso}(V, g)$ al conjunto de isometrías del espacio vectorial métrico (V, g) en sí mismo.

Veamos a continuación algunas propiedades de las isometrías.

PROPIEDADES 2.34: i) $Id_V \in \mathrm{Iso}(V, g)$.
ii) *La composición de dos isometrías es una isometría.*
iii) *La inversa de una isometría es una isometría.*
iv) $\mathrm{Iso}(V, g)$ *con la composición de aplicaciones es un grupo cuyo elemento neutro es* Id_V.

Aunque la condición 1) de la definición 2.33 ha quedado justificada antes, con algunas hipótesis se puede obtener de la condición 2).

PROPOSICIÓN 2.35: *Sean* (V, g) *y* (V, g') *espacios vectoriales métricos no degenerados. Si* $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ *es una aplicación sobreyectiva que verifica el apartado 2) de la definición 2.33 entonces* f *es un isomorfismo y por tanto una isometría.*

Demostración: Veamos en primer lugar que f es lineal. Para ello basta con probar que el vector

$$w = f(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha f(u_1) - \beta f(u_2)$$

es el vector nulo $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in V$. Como g' es no degenerada para obtener lo anterior basta comprobar que $g'(w, v') = 0$ $, \forall v' \in V'$. Como f es sobreyectiva podemos escribir

$v' = f(v)$ para algún $v \in V$. Así tenemos

$$\begin{aligned} g'(w, v') &= g'(f(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha f(u_1) - \beta f(u_2), f(v)) \\ &\underset{g' \text{ bilinear}}{=} g'(f(\alpha u_1 + \beta u_2), f(v)) - \alpha g'(f(u_1), f(v)) - \beta g'(f(u_2), f(v)) \\ &\underset{f \text{ verifica 2)}}{=} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - \alpha g(u_1, v) - \beta g(u_2, v) \\ &\underset{g \text{ bilinear}}{=} \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) - \alpha g(u_1, v) - \beta g(u_2, v) = 0 \end{aligned}$$

Obteniendo así lo que queríamos probar $w = 0$.

Faltaría comprobar que f es inyectiva. Para ello consideremos $f(u) = 0$, tendríamos entonces que $\forall v \in V$

$$g(u, v) \underset{f \text{ verifica 2)}}{=} g'(f(u), f(v)) = 0\ .$$

Como g es no degenerada de lo anterior se deduce que $u = 0$. □

Vamos a ver a continuación algunas equivalencias de la propiedad 2) de la definición 2.33.

PROPOSICIÓN 2.36: *Sean* (V, g) *y* (V, g') *espacios vectoriales métricos y* $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ *una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

i) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$, $\forall u, v \in V$.
ii) $\omega_{g'}(f(v)) = \omega_g(v)$, $\forall v \in V$.
iii) *Para* B *y* B' *bases cualesquiera de* V *y* V'*, respectivamente, se tiene*

$$\boxed{M(f, B, B')^t \cdot M(g', B') \cdot M(f, B, B') = M(g, B)} \tag{6}$$

iv) *Existen* B *y* B' *bases de* V *y* V'*, respectivamente, tal que verifican* (6).

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Observemos que $\forall v \in V$ tenemos

$$\omega_{g'}(f(v)) = g'(f(v), f(v)) \underset{\text{i)}}{=} g(v, v) = \omega_g(v)$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Recíprocamente, $\forall u, v \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} g'(f(u), f(v)) &= \frac{1}{2}(\omega_{g'}(f(u) + f(v)) - \omega_{g'}(f(u)) - \omega_{g'}(f(v))) \\ &\underset{f \text{ lineal}}{=} \frac{1}{2}(\omega_{g'}(f(u + v)) - \omega_{g'}(f(u)) - \omega_{g'}(f(v))) \\ &\underset{\text{ii)}}{=} \frac{1}{2}(\omega_g(u + v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)) = g(u, v) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Sean $u, v \in V$ y $u_B = (x_1, \ldots, x_n)$, $v_B = (y_1, \ldots, y_n)$, $f(u)_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)$ y $f(v)_{B'} = (y'_1, \ldots, y'_n)$. Recordemos que tenemos:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M(f, B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = M(f, B, B') \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Además:

$$\begin{aligned} (7) \qquad g(u,v) &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot M(g, B) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \\ g'(f(u), f(v)) &= \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \cdot M(g', B') \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \\ (8) \qquad &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot M(f, B, B')^t \cdot M(g', B') \cdot M(f, B, B') \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De i) sabemos que las expresiones en (7) y (8) son iguales $\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y por tanto obtenemos la igualdad de matrices (6).

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}}$ Trivial.

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Observemos que si se da iv) para algún par de bases B y B' entonces de las ecuaciones (7) y (8) tenemos $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$. □

COROLARIO 2.37: *Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos y $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ una isometría. Entonces se tiene que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V entonces $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V', g'), es decir f lleva bases ortonormales en bases ortonormales.*

Demostración: Basta observar que para las bases B y B' se tiene $M(f, B, B') = I_n$ y por tanto sustituyendo en la igualdad (6) que se verifica por el apartado iv) de la proposición 2.36 se obtiene

$$(9) \qquad M(g, B) = M(g', B')$$

de dónde se deduce que B es ortonormal para (V, g) si y solo si B' es ortonormal para (V', g'). □

COROLARIO 2.38: *Sean (V, g) y (V, g') espacios vectoriales métricos. Entonces equivalen:*

i) *(V, g) y (V', g') son isométricos.*

ii) $\dim(V) = \dim(V')$, $\operatorname{rang}(V) = \operatorname{rang}(V')$ *e* índice(V) =índice(V').

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Sea $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ una isometría. Por el corolario 2.37 tendríamos que si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) y $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$

entonces se verifica la ecuación (9) de donde se obtiene inmediatamente ii).

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Sean $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ bases ortonormales de (V, g) y (V', g'), respectivamente. Como se verifica ii) tenemos que se da la igualdad (9). Basta considerar entonces el isomorfismo $f : V \longrightarrow V'$ dado por $f(u_i) = u'_i$, para $i = 1, \dots, n$. Observemos que con esta elección de f se verifica el apartado iv) de la proposición 2.36 ya que para las bases B y B' se tiene la igualdad (6). Obtenemos así que $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría. □

Observación 2.39: Observemos que la demostración de este corolario nos da una manera de construir una isometría entre dos espacios vectoriales métricos que son isométricos. Basta con considerar B y B' bases ortonormales de los espacios vectoriales métricos isométricos (V, g) y (V', g') y definir $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación dada por $f(u_i) = u'_i$.

En el caso en el que las métricas son euclídeas podemos decir más de las isometrías. En primer lugar podemos probar que se verifica el recíproco del corolario 2.37.

Corolario 2.40: *Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales euclídeos y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

i) *$f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ es una isometría.*
ii) *Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g) entonces $B' = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es una base ortonormal de (V, g').*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Se tiene por el corolario 2.37.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Recíprocamente, sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de (V, g) y $B' = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ que por el apartado ii) sabemos que es una base ortonormal de (V', g'). Observemos que $M(g, B) = M(g', B') = M(f, B, B') = I_n$ y por tanto se verifica la ecuación (6). De la proposición 2.36 obtenemos entonces que f es una isometría. □

A continuación vamos a considerar un subgrupo especial del grupo de las matrices regulares.

Definición 2.41: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una **matriz ortogonal** si

$$A \cdot A^t = I_n .$$

Notemos que toda matriz ortogonal es regular. Denotaremos

$$O(n) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$$

Es sencillo comprobar que $O(n)$ es un grupo con el producto de matrices.

Definición 2.42: A $O(n)$ se le denomina **el grupo ortogonal de orden** n.

Supongamos que tenemos (V, g) un espacio vectorial euclídeo, B una base ortonormal de (V, g) y $f \in \text{Iso}(V, g)$. Entonces de la igualdad (6) tenemos

$$M(f, B)^t \cdot M(g, B) \cdot M(f, B) = M(g, B)$$

Pero como la métrica es euclídea y B es una base ortonormal tenemos $M(g,B) = I_n$ y por tanto la igualdad anterior se escribe como

$$M(f,B)^t \cdot M(f,B) = I_n$$

Es decir, si $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$ y B es ortonormal entonces $M(f,B)$ es ortogonal. Esto nos permite definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Iso}(V,g) & \longrightarrow & O(n) \\ & f & \mapsto & M(f,B) \end{array}$$

Es sencillo comprobar que F es un isomorfismo de grupos.

En el Tema 3 estudiaremos más en profundidad las isometrías de un espacio vectorial euclídeo y clasificaremos estas isometrías para los casos de dimensiones dos y tres.

Supongamos ahora que tenemos V y V' espacios vectoriales reales y $f: V \longrightarrow V'$ un isomorfismo. Entonces si g es una métrica en V existe una única métrica g' en V' tal que $f:(V,g) \longrightarrow (V',g')$ es una isometría. Efectivamente, basta con definir

$$g'(u',v') = g(f^{-1}(u'), f^{-1}(v')) \ , \forall u',v' \in V'$$

Claramente f es una isometría y g' es única.

Ejercicio 2.43: Prueba que si g es no degenerada entonces g' es no degenerada y que si g es euclídea entonces g' es euclídea.

Recíprocamente, si g' métrica en V' existe una única métrica g en V tal que $f:(V,g) \longrightarrow (V',g')$ es una isometría. En este caso basta con definir

$$g(u,v) = g'(f(u), f(v)) \ , \forall u,v \in V$$

Recordemos que si (V,g) era un espacio vectorial métrico no degenerado teníamos el isomorfismo $\Phi: V \longrightarrow V^*$ definido en la sección 3.3. De lo anterior podemos considerar la métrica g^* en V^* que hace que $\Phi:(V,g) \longrightarrow (V^*,g^*)$ sea una isometría. Consideremos ahora B base de V y B^* su base dual. De la igualdad (6) tendríamos

$$M(\Phi,B,B^*)^t \cdot M(g^*,B^*) \cdot M(\Phi,B,B^*) = M(g,B) \ ,$$

Recordando que $M(\Phi,B,B^*) = M(g,B)$ (apartado iii) de las propiedades 2.17) tendríamos

$$M(g,B)^t \cdot M(g^*,B^*) \cdot M(g,B) = M(g,B) \ ,$$

Pero como la métrica g es no degenerada $M(g,B)$ es una matriz regular y podemos multiplicar la igualdad anterior por $M(g,B)^{-1}$ obteniendo:

$$M(g,B)^t \cdot M(g^*,B^*) = I_n \ ,$$

Pero como $M(g,B)$ es simétrica se verifica $M(g,B)^t = M(g,B)$ y obtenemos de esa manera

$$M(g^*,B^*) = M(g,B)^{-1}$$

Acabaremos el tema 2 con una aclaración sobre la denominación que reciben habitualmente los isomorfismos Φ y Φ^{-1} definidos en la sección 3.3 para un espacio vectorial métrico no degenerado (V,g). El isomorfismo Φ también se denota como

$$\Phi(v) = v^\flat \ , \forall v \in V$$

y su inversa Φ^{-1} como

$$\Phi^{-1}(\varphi) = \varphi^\sharp \ , \forall \varphi \in V^*$$

y se les denomina isomorfismo bemol y sostenido, respectivamente. Esta denominación viene de que estos isomorfismos suben y bajan los índices al igual que el sostenido y el bemol suben y bajan un semitono la nota musical a la que acompañan. Por ejemplo, supongamos que (V, g) es un espacio vectorial euclídeo, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g), $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ es su base dual y $v \in V$ se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i u_i$$

Entonces

$$v^\flat = \Phi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi^j$$

Por tanto si lo aplicamos al vector u_i tenemos

$$x_i = \Phi(v)(u_i) = g(u_i, v) = x^i$$