Ejercicios de Cálculo II
Relación 1: Límite funcional

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$.

   a) Prueba que existe una sucesión estrictamente monótona de puntos de A que converge a α.

   b) Comprueba también que para todo $\delta > 0$, el conjunto $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap A$ es infinito.

2. Determina el conjunto de puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:
$$\mathbb{Z},\ \ \mathbb{Q},\ \ \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\},\ \ \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},\ \ \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

3. (*) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A'$. Supongamos que se verifica que: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$ y $0 < |y - \alpha| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Prueba que f tiene límite en el punto α.

4. Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty \iff \lim_{x \to a} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$
   Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

5. Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$

   b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = L \iff \lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$

6. Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante y se considera $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida como sigue:
$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ c & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$
   Estudia la existencia de límite y la continuidad de f en 0. ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en el intervalo $]-1, 1]$ o incluso en el intervalo $[-1, 1]$?

7. Sea $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada por:
$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}$$
Prueba que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
Estudiar la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

9. (*) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no nula tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prueba que si f toma algún valor positivo, entonces f alcanza el máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

10. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:
    a) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x^2-1}}$, y $f(1) = \sqrt{e}$.
    b) $f\colon]-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+e^x)^{1/x}$, y $f(0) = e^2$.
    c) $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1 + x\log(x))^{1/x}$ $\forall x > 0$, y $f(0) = 0$.
    d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

11. Sea $f\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Prueba que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcula dichos límites.

12. Sea $f\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudia la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

13. (*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0 > b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$