Cálculo II   Relación 1

Extra:-

$\nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \{f(x_n)\} \to 1$

$y_n = 2\pi n \quad \{f(y_n)\} \to 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$

$\forall \{a_n\} \to +\infty \quad \{\frac{1}{a_n}\} \to 0 \quad |\operatorname{sen} a_n| \leq 1 \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

Cambios de variable

$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\lim_{x\to a} |f(x)| \to +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

$l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = l$

1.-

a) $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$

$\alpha \in A' \Rightarrow \exists \{a_n\}, a_n \in A, a_n \neq \alpha \ \forall n \in \mathbb{N} / \{a_n\} \to \alpha$. Pongamos $\sigma\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente dada por $\sigma(1) = 1$, $\sigma(n) = \min\{p \in \mathbb{N} : a_{n-1} < a_p\}$ si $a_n < \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) = \min\{p \in \mathbb{N} : a_{n-1} > a_p\}$ si $a_n > \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $a_{\sigma(n)} < a_{\sigma(n+1)}$ ó que $a_{\sigma(n)} < a_{\sigma(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\{a_{\sigma(n)}\} \to \alpha$ al ser una parcial de $\{a_n\}$.

b) $\forall \delta > 0\ ]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A$ es infinito

$\alpha \in A' \Rightarrow \exists \{a_n\}, a_n \in A, a_n \neq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N} / \{a_n\} \to \alpha \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0\ |a_n - \alpha| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ a_n \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$. Como $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in A \Rightarrow \forall n \geq n_0\ a_n \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A \Rightarrow$
$\Rightarrow]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A$ es infinito.

2.- a) $\mathbb{Z}$

Como todo punto de $\mathbb{Z}$ es aislado en la recta real, carece de puntos de acumulación. Sea $\alpha \in \mathbb{Z}$. Se verifica que $]\alpha-1, \alpha+1[\cap A = \{\alpha\}$.

b) $\mathbb{Q}$

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, dado $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ se verifica que $\exists r \in \mathbb{Q}, r \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, luego se puede construir $\{r_n\}, r_n \neq x, r_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N} / \{r_n\} \to x$. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\}$

$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\} = \{x \in]-1,1[- \{0\}\}$. Veamos que $\forall x \in]-1,1[- \{0\}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$ $\{x + \frac{1}{n}\} \to x$, con $x + \frac{1}{n} \neq x\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x + \frac{1}{n} \in]-1,1[- \{0\}$. Sin embargo, tomando $\{-1 + \frac{1}{n+1}\}$ comprobamos que $-1 + \frac{1}{n+1} \in]-1,1[- \{0\}$, $-1 + \frac{1}{n+1} \neq -1\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{-1 + \frac{1}{n+1}\} \to -1$. Con $\{1 - \frac{1}{n-1}\}$ observamos que $1 - \frac{1}{n+1} \in]-1,1[- \{0\}$, $1 - \frac{1}{n+1} \neq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{1 - \frac{1}{n+1}\} \to 1$. Por último, $\{\frac{1}{n+1}\}$ verifica que $\frac{1}{n+1} \in]-1,1[- \{0\}$, $\frac{1}{n+1} \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\frac{1}{n+1}\} \to 0$, luego $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\}' = [-1,1]$

d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\{\frac{1}{n}\} \to 0 \quad \{\frac{1}{2n}\} \to 0 \quad \{\frac{1}{2n+1}\} \to 0 \quad \frac{1}{n} \neq 0$. $\frac{1}{n} \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Al tratarse de una sucesión con límite único, sólo presenta un punto de acumulación: $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}' = \{0\}$.

e) $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m} : n,m\in\mathbb{N}\}$

Fijando un $m\in\mathbb{N}$ (sin pérdida de generalidad) tenemos que $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\}_n \to \frac{1}{m}$ $\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{m}\right)$

Como $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}:n,m\in\mathbb{N}\}$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\neq\frac{1}{m}$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ podemos afirmar que $\frac{1}{m}$ es punto de acumulación $\forall m\in\mathbb{N}$, esto es, $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}:n,m\in\mathbb{N}\}'=\{\frac{1}{m}:m\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

3.- $f:A\to\mathbb{R}$ $\alpha\in A'$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0/$ $x,y\in A$, $0<|x-\alpha|<\delta$ $0<|y-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$\alpha\in A' \Rightarrow \exists\{a_n\}, a_n\in A, a_n\neq\alpha$ $\forall n\in\mathbb{N}$; $\{a_n\}\to\alpha \Rightarrow \forall\delta>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}/$ $\forall n\geq n_0$ $|a_n-\alpha|<\delta$

Por hipótesis, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0/$para $a_n, a_{n_0}\in A$ con $0<|a_{n_0}-\alpha|<\delta, 0<|a_n-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(a_{n_0})-f(a_n)|<\varepsilon$

Reformulado, $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}/$ $\forall n\geq n_0$ es $|f(a_{n_0})-f(a_n)|<\varepsilon$.

Para $\varepsilon=1$, $|f(a_n)-f(a_{n_0})|+|f(a_{n_0})|<1+|f(a_{n_0})| \Rightarrow |f(a_n)|<1+|f(a_{n_0})|$. Sea $M=\max\{|f(a_1)|,|f(a_2)|,\dots,|f(a_{n_0-1})|, 1+|f(a_{n_0})|\}$ Dicho conjunto es finito, luego M existe y $|f(a_n)|<M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, luego $\{f(a_n)\}$ está acotada $\Rightarrow$ tiene una parcial convergente. Sea $\{f(a_{\sigma(n)})\}\to\alpha \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists n'\in\mathbb{N}/$ $\forall n\geq n'$ $|f(a_{\sigma(n)})-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$. También $\forall\varepsilon>0$ $\exists n''\in\mathbb{N}/$ $\forall n\geq n''$ es $|f(a_{n''})-f(a_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $m=\max\{n',n''\} \Rightarrow \forall n\geq m$ $|f(a_n)-\alpha|\leq|f(a_n)-f(a_{\sigma(n)})|+|f(a_{\sigma(n)})-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, luego $\{f(a_n)\}$ converge. Sea $\{f(a_n)\}\to\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}/$ $\forall n\geq n_0$ es $|f(a_n)-\alpha|<\varepsilon$, luego como $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0/$ si $0<|a_n-\alpha|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(a_n)-\alpha|<\varepsilon \Rightarrow \exists\lim_{x\to\alpha} f(x)=\alpha$ $\quad$ $\{a_n\}\to\alpha$, $\{b_n\}\to\alpha$ $\quad c_n=\begin{cases} c_{2n}=a_n \\ c_{2n+1}=b_n\end{cases}\to\alpha$ $\quad f(c_{2n})\to\alpha$, $f(c_{2n+1})\to M$

4.- $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ $\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=0$

$\Rightarrow)$ $\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty \Rightarrow \forall\{a_n\}\to\alpha, a_n\in\mathbb{R}, a_n\neq\alpha$, $\{|f(a_n)|\}\to+\infty \Rightarrow \{\frac{1}{|f(a_n)|}\}\to\frac{1}{+\infty}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\{a_n\}\to\alpha, a_n\in\mathbb{R}, a_n\neq\alpha$, $\{\frac{1}{|f(a_n)|}\}\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=0$

$\Leftarrow)$ $\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=0 \Rightarrow \forall\{a_n\}\to\alpha, a_n\neq\alpha$, $\{\frac{1}{|f(x)|}\}\to 0 \Rightarrow \{|f(x)|\}\to+\infty\ \dots$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0/$ si $0<|a_n-\alpha|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{|f(x)|}-0\right|=\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)|>+\infty$

- Supongamos que $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0^+$
- Supongamos que $f(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0^-$

5.- $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$

a) $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$ $\quad$ $\forall\{a_n\}, a_n\in A_0^+, a_n\neq 0, \{a_n\}\to 0 \Rightarrow \{f(a_n)\}\to\alpha$

$\Rightarrow)$ $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\alpha \Rightarrow$ Sea $A_0^+=\{x\in A: x>0\}$ $\quad$ $\forall\{a_n\}$, $a_n\in A_0^+$, $a_n\neq 0$, $\{a_n\}\to 0 \Rightarrow \{f(a_n)\}\to\alpha$

Consideremos $\{\frac{1}{n}\}$. $\frac{1}{n}\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n}>0$, $\{\frac{1}{n}\}\to 0$. $\lim_{x\to+\infty}\{\frac{1}{x}\}\to 0^+$, luego $\lim_{x\to+\infty}f(0^+)=\alpha$.

$\Leftarrow)$ $\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$ $\quad$ ~~$f(x)=f((\frac{1}{x})^{-1})$~~ $\to\alpha \Leftrightarrow$ tal y como $\{\frac{1}{n}\}_{n\to+\infty}\to 0^+ \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}^{-1}=\frac{1}{\{\frac{1}{n}\}_{n\to 0^+}}\to 0^+ \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)=\alpha$.

b) $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$

$\Rightarrow)$ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\alpha$ $\forall\{a_n\}$ $a_n<0$, $a_n\in A$, $a_n\neq 0$, $\{a_n\}\to 0 \Rightarrow f(a_n)\to\alpha$ $\left(\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\alpha\right)$

Pongamos $\{a_n\}=\{-\frac{1}{n}\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}f\left(-\frac{1}{n}\right)=\alpha \Rightarrow \lim_{n\to-\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\alpha \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$

$\Leftarrow)$ $\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f\left(-\frac{1}{x}\right)=\alpha$ $\quad$ $\{-\frac{1}{x}\}\to 0^-$ $\quad -\frac{1}{x}<0$ $\forall x>0$, $-\frac{1}{x}\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, etc.

$\lim_{x\to+\infty}f\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\alpha$

6.- $c = cte$. $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & si\ -1<x<0 \\ c & si\ x=0 \\ 1+x^2 & si\ 0<x<1 \end{cases}$

Estudiemos f. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ si $-1<x<0$. $(x+1=0 \Rightarrow x=-1)$ Como f es composición de funciones continuas en $]-1,0[$ y no se anula en ningún punto de dicho intervalo el denominador, f cont en $]-1,0[$. Al ser $f(x)=1+x^2$ polinómica en $0<x<1 \Rightarrow f$ cont en $]0,1[$.

Ahora veamos si f es cont en $x=0$. Para ello, debe ser $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = c = cte$.

Comprobemos si existe límite en 0. $\exists \lim_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x\to 0^-} f(x) \\ \exists \lim_{x\to 0^+} f(x) \end{cases}$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \alpha$, en cuyo caso $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+x^2 = 1$ Vemos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$; es decir, f tiene límite en $x=0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Por tanto, deducimos que f cont en $x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(0) = \boxed{c=1}$.

Como ya se ha probado, f cont en $]-1,1[-\{0\}$ de partida. Si tomamos $c=1 \Rightarrow f$ cont en 0. Como $1+x^2$ es cont en todo $\mathbb{R}$ al ser polinómica, si queremos hacer a f cont en $]-1,1]$ simplemente debemos ampliar el dominio, quedando definida de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & si\ -1<x<0 \\ 1 & si\ x=0 \\ 1+x^2 & si\ 0<x\leq 1 \end{cases} \quad , f \text{ cont en }]-1,1]$$

Para hacer f continua en -1 deberemos añadir manualmente la definición de $f(-1)$ de forma que $\exists \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$. Sin embargo, $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$, pues

$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} \neq \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1+x}$, luego no es posible hacer que f sea cont en $x=-1$.

7.- $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \end{cases}$ Por ser f composición de funciones continuas y no anularse en denominador para todo $x \in]0,1[\Rightarrow f$ cont en $]0,1[$.

Para estudiar $\lim_{x\to 0} f(x)$ calcularemos primero límites laterales

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{0^-} + \frac{1}{0^+} = -\infty+\infty$ (Indet.) $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2+1}{x(x-1)} =$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ Ateniéndonos al dominio de definición de f, se desprecia la solución, pues $\forall x<0$ f no está definida $(x \notin]0,1[)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\forall \{a_n\} \to 0, a_n \in]0,1[, a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{f(a_n)\} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ Como $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ toda $\{a_n\} \searrow$

Veamos ahora los límites laterales en 1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ De nuevo, esta solución se desprecia.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\forall \{a_n\} \to 1, a_n \in]0,1[, a_n \neq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\{f(a_n)\} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ Como $a_n < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ toda $\{a_n\} \nearrow$

$\{a_n\} \to 0, a_n \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$,
$\{b_n\} \to 0, b_n \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{c_n\} / c_n = \begin{cases} c_{2n} = a_n \\ c_{2n+1} = b_n \end{cases} \Rightarrow \{c_n\} \to 0$

$f(c_{2n}) = \alpha$
$\shortparallel$
$f(c_{2n+1}) = M$

$\{x_n\} \to 1, x_n \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\{y_n\} \to 1, y_n \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{z_n\} / z_n = \begin{cases} z_{2n} = x_n \\ z_{2n+1} = y_n \end{cases} \Rightarrow \{z_n\} \to 1$

$f(z_{2n}) = N$
$\shortparallel$
$f(z_{2n+1}) = P$

Al ser f cont en $]0,1[$ y estar definida en un intervalo, por el teorema del valor intermedio sabemos que $f(]0,1[)$ es un intervalo; esto es, si $x, y \in f(]0,1[) \Rightarrow z / x \leq z \leq y \in f(]0,1[)$.
Dado que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / -\infty < x < +\infty$, $x \in f(]0,1[)$, luego $f(]0,1[) = \mathbb{R}$.

8.-

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{1+e^{1/x}} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1+e^{1/x} \neq 0 \quad (e^{1/x} > 0) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, f es continua al ser composición de funciones continuas y no anularse en el denominador. Ahora estudiaremos la continuidad en $x=0$, punto en que f cambia su definición.
Veamos los límites laterales en 0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, en $x=0$ existe discontinuidad inevitable de salto finito
salto $= |1-0| = 1$.

Por tanto, f cont en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/-\infty}} = \frac{1}{1+e^{0^-}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/+\infty}} = \frac{1}{1+e^{0^+}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \exists AH \equiv y = \frac{1}{2}$$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$\frac{e^x}{x} \{x \neq 0$ g cont en $]-\infty, 0[$ por ser composición de funciones continuas y no anularse en el denominador.
x. g cont en $]0,1[$
$\sqrt[5]{x} \{x > 0$ g cont en $]1, +\infty[$

Sabemos que g cont en $\mathbb{R} - \{0,1\}$. Estudiemos continuidad en estos puntos.

- $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x) \Rightarrow$ En $x=0$, g presenta discont. inevitable de salto infinito.

- $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[5]{x} = 1$

Como $\exists \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} g(x) = 1$. Como además, $g(1) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \Rightarrow g$ cont en $x=1$.

Concluimos que g cont en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{1}{-\infty(+\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ $\quad \exists AH \equiv y = 0$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$

(9.-) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont / $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Se pide probar que si $\exists x\in\mathbb{R} / f(x)>0 \Rightarrow f$ alcanza el máx. abs en $\mathbb{R}$

Dado que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, sabemos que $\exists$ una asíntota horizontal en 0, $AH \equiv y=0$. Supongamos que $\exists x\in\mathbb{R} / f(x)>0 \Rightarrow$ consideremos el conjunto $A=\{f(x): x\in\mathbb{R}, f(x)>0\}$ Hemos de probar que A está mayorado. Supongamos que no lo esta; esto es, $\forall M>0\ \exists x\in\mathbb{R} / M<f(x)$. Esta condición implica que $\exists \{f(x)_n\}$ dada por $f(x)_1 = f(y) = K>0$ $(y\in\mathbb{R})$, $f(x)_n = \min\{z\in A: f(x)_{n-1} < z\}$. Es claro que $\{f(x)_n\}\to+\infty$. Como $f(x)_i \neq f(x)_j$ $\forall j\neq i$, $i,j\in\mathbb{N}$, f cont, $\exists \{a_n\}\to\alpha / \{f(a_n)\}\to+\infty$ ($\{a_n\}\to\alpha\in\mathbb{R}$ pues esto no puede darse en los extremos). Esto nos lleva a que $\lim_{x\to\alpha^\pm} f(x)=+\infty$, luego f presenta una discontinuidad de salto !!! pero f era cont, luego efectivamente, A está mayorado.

Pongamos $\max(A) = f(\gamma)>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Como $f(\gamma)>f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ decimos que f presenta un máx. abs. en $x=\gamma$.

(10.-)

a) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x^2-1}}$, $f(1)=\sqrt{e}$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } x>0,\ x\neq 1 \\ \sqrt{e} & \text{si } x=1 \end{cases}$$

$x^{\frac{1}{x^2-1}}$ $\begin{cases} x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\pm1 \quad -1\notin\mathbb{R}^+ \quad f \text{ cont por ser composición de funciones} \\ \text{continuas y no anularse en el denominador del exponente en } \mathbb{R}^+-\{1\}.\end{cases}$

Estudiemos la continuidad en $x=1$, punto en que f cambia de definición.

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x^{\frac{1}{x^2-1}} = 1^{1/0^-} = 1^{-\infty}$ (Indet.) $\quad x^{\frac{1}{x^2-1}} \underset{x\to1}{\to} e^\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1}(x-1) \underset{x\to1}{\to} \alpha \quad \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{x+1} \underset{x\to1}{\to} \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to1^-} x^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} x^{\frac{1}{x^2-1}} = 1^{1/0^+} = 1^{+\infty}$ (Indet.) $\quad x^{\frac{1}{x^2-1}} \underset{x\to1}{\to} e^\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1}(x-1) \underset{x\to1}{\to} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to1^+} x^{\frac{1}{x^2-1}} = \sqrt{e}$

Como $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \sqrt{e} \Rightarrow \exists \lim_{x\to1} f(x) = \sqrt{e}$. Además, que $\exists \lim_{x\to1} f(x) = f(1) = \sqrt{e}$ implica que f cont en $1 \Rightarrow f$ cont en $\mathbb{R}^+$.

b) $f:]-\frac{1}{2}, +\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+e^x)^{1/x}$, $f(0)=e^2$

$$f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{1/x} & \text{si } x>-\frac{1}{2},\ x\neq 0 \\ e^2 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$(x+e^x)^{1/x}$ $\begin{cases} x\neq 0 \quad f \text{ cont en }]-\frac{1}{2},+\infty[-\{0\} \text{ por ser composición de funciones} \\ \text{continuas y no anularse en ningún punto en el den. del exponente}\end{cases}$

Estudiemos la continuidad en $x=0$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (x+e^x)^{1/x} = 1^{+\infty}$ (Indet.) $\quad (x+e^x)^{1/x} \underset{x\to0}{\to} e^\alpha \Leftrightarrow \frac{x+e^x-1}{x} \underset{x\to0}{\to} \alpha \quad \lim_{x\to0} \frac{x+e^x-1}{x} = \lim_{x\to0} 1+e^x = 2 = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to0^-} (x+e^x)^{1/x} = e^2$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to0} f(x) = e^2$. Como $\exists \lim_{x\to0} f(x) = f(0) = e^2 \Rightarrow$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x+e^x)^{1/x} = e^2$

$\Rightarrow f$ cont en $x=0$; f cont en $]-\frac{1}{2},+\infty[$

c) $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1+x\log x)^{1/x}$ $\forall x>0$, $f(0)=0$

$$f(x) = \begin{cases} (1+x\log x)^{1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$(1+x\log x)^{1/x}$ $\begin{cases} x>0 \quad f \text{ cont en }]0,+\infty[\text{ por ser composición de funciones} \\ x\neq 0 \quad \text{continuas}\end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x=0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (1+x\log x)^{1/x} = e^\alpha \Leftrightarrow \frac{1+x\log x-1}{x} \underset{x\to0}{\to} \alpha \quad \frac{\cancel{1}+x\log x-\cancel{1}}{x} = \frac{\cancel{x}\log x}{\cancel{x}} = \log x \underset{x\to0}{\to} -\infty = \alpha$

$\lim_{x\to0^+} (1+x\log x)^{1/x} = e^{-\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$ Como $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to0} f(x) = 0$. Además, $\exists \lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cont en 0, luego f cont en $[0,+\infty[$.

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \neq 0$, $f(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $\{x \neq 0$ f cont en $\mathbb{R} - \{0\}$ al ser composición de funciones continuas

Estudiemos la continuidad de f en 0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, luego f cont en $0 \Rightarrow f$ cont en $\mathbb{R}$.

11.- $f:]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\frac{1}{tg x}\right)^{\operatorname{sen} x}$.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{tg x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x)^{\operatorname{sen} x}}{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}} = \frac{1^0}{0^0} \text{ (Indet.)}$$

$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$ $\quad \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$

$\exists \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1^0}{1} = 1$

b) $\exists \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{tg x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x)^{\operatorname{sen} x}}{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}} = \frac{0^1}{1^1} = 0$

12.- $f:]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot g x}$

$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot g x} = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$ $\quad \{\operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi k_{k \in \mathbb{Z}} \notin]0, \frac{\pi}{2}[$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, luego f cont en $]0, \frac{\pi}{2}[$ al ser composición de funciones continuas y no anularse el denominador del exponente.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = 1^{1/0} = 1^{+\infty} \text{ (Indet.)} \quad (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}(1 + \operatorname{sen} x - 1) \to \alpha \quad \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}(\cancel{1} + \operatorname{sen} x - \cancel{1}) = \frac{\cos x \cdot \cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = e^1 = e$$

$$\exists \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = 2^{0/1} = 2^0 = 1$$

13.- $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a > 0 > b$

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{0^-}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) - \operatorname{arctg}(+\infty) =$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{0^+}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x f(x)$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} x f(x) = 0(-\pi) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} x f(x) = 0\pi = 0 \end{aligned}\right\} \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$