15 | EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

15.1 FUNCIONES LOCALMENTE INTEGRABLES

Definición 15.1.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1) Si $a \in A$, la función es f integrable en $[a, a]$ y $\int_a^a f = 0$.

2) Sean a, $b \in A$ con $a > b$. Si f es integrable en $[b, a]$, diremos que f es integrable en $[a, b]$ y $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Definición 15.1.2.
1) Sea I un intervalo. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable en* I si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I.

2) Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. La función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall\, x \in I$$
la llamaremos la *integral indefinida de* f *con origen* a.

Ejemplo 15.1.3. Cualquier función continua o cualquier función monótona definida en un intervalo es localmente integrable en dicho intervalo.

Lema 15.1.4. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable.*

1) Sean $a, b \in I$ *y sea* $J = [\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$*. Sea* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leqslant M$ *para todo* $x \in J$*. Entonces*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

2) Sean a, b, $c \in I$*. Entonces*
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 15.1.5. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante: consideremos
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{y } G(x) = \int_b^x f(t)\,dt.$$

Entonces
$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

15.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Teorema 15.2.1. *Sea* I *un intervalo,* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable y sea* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *una integral indefinida. Entonces*

1) F *es continua;*

2) *si* f *es continua en* $c \in I$, F *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$.

Demostración. 1) Sea $c \in I$ y $\{x_n\}$ una sucesión convergente a c con $x_n \in I$ para cualquier n. Sea J un intervalo cerrado y acotado tal que

$$a, c, x_n \in J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como f es integrable en J, existe M tal que $|f(x)| \leqslant M$ para cualquier $x \in J$. Entonces,

$$|F(x_n) - F(c)| = \left| \int_a^{x_n} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \right| = \left| \int_c^{x_n} f(t)\,dt \right| \leqslant M\,|c - x_n|.$$

Tomando límites cuando n tiende a infinito se obtiene que

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |F(x_n) - F(c)| = \lim_{n\to\infty} M\,|c - x_n| = 0,$$

y, por tanto, que F es continua en c.

2) Supongamos que f es continua en $c \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$, $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Entonces,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c) - f(c)(x - c)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt - f(c)(x - c) \right| \\ &= \left| \int_c^x f(t)\,dt - f(c)(x - c) \right| \\ &= \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\,dt \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,|x - c| < \varepsilon\,|x - c|. \end{aligned}$$

□

Corolario 15.2.2. *Sea* J *un intervalo y* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *una función continua. Sean* g, $h\colon I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables definidas en un intervalo* I *con* $g(I)$, $h(I) \subset J$. *Entonces la función* $F\colon I \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

es derivable y $F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$, *para todo* $x \in I$.

Ejemplo 15.2.3. La función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp\left(-t^2\right) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es derivable y su derivada es

$$F'(x) = \exp\left(-\operatorname{sen}^2(x)\right) \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

15.2.1 Primitivas*

Ya sabemos que una condición necesaria para que una función sea la derivada de otra es que verifique la propiedad de Darboux. De aquí se deduce que, por ejemplo, la función parte entera no es la derivada de nadie.

Definición 15.2.4. Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $F\colon I \to \mathbb{R}$ es una *primitiva* de f si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Corolario 15.2.5. *Toda función continua tiene una primitiva.*

El estudio de las funciones que son la derivada de una función se remonta prácticamente a los orígenes del Cálculo. ¿Cómo es el conjunto de dichas funciones? Si

$$\mathcal{P}(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ tiene una primitiva}\}$$

Es sencillo comprobar que $\mathcal{P}(I)$ es un espacio vectorial usando la linealidad de la derivada, pero W. Wilkosz encontró un ejemplo de función con primitiva cuyo cuadrado no tiene.

Algunos autores llaman *funciones de Duhamel o "Duhameliana"* a aquellas que tienen una primitiva. El primer ejemplo, que aquí presentamos, de una función de Duhamel cuyo cuadrado no lo es se debe a Witold Wilkosz [41].

Ejemplo 15.2.6. La función $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\Phi(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene primitiva, pero su cuadrado no.

Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto, en el ejemplo 9.2.6, que es derivable y que

$$f(x) = F'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Evidentemente $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

La función $\varphi(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$ también tiene primitiva por ser continua. Por tanto, $\Phi = \varphi - f$ también tiene primitiva.

Sea $B(x)$ una primitiva de Φ. Entonces $B'(x/2) = {}^1\!/_2 \cos(2/x)$, $B'(0) = 0$.

Obsérvese que, si $x \neq 0$, $\Phi^2(x) = \cos^2(1/x) = {}^1\!/_2\,(1 + \cos(2/x))$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una función A tal que $A' = \Phi^2$. Entonces $A(x) - B(x/2)$ es una función derivable y su derivada

$$A'(x) - B'(x/2) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto, lo que es una contradicción. Por tanto, no existe ninguna función cuya derivada sea Φ^2.

15.3 REGLA DE BARROW

A la vista del teorema fundamental del cálculo podemos plantearnos las siguientes preguntas:

1) Si una función tiene primitiva, ¿es integrable?

2) Si es integrable, ¿tiene que tener primitiva?

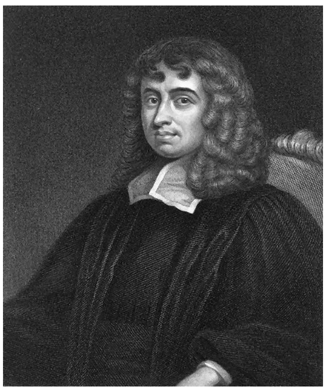

Figura 35: Isaac Barrow (1630–1677)

3) Si es integrable y tiene primitiva, ¿la primitiva tiene que ser la integral indefinida?

Las primeras dos afirmaciones tienen respuesta negativa.

Ejemplo 15.3.1. La función $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable y su derivada es

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función F' no es integrable porque no está acotada:

$$F'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 15.3.2. La función parte entera es integrable en cualquier intervalo por ser monótona. También sabemos que no verifica la propiedad del valor intermedio y, por tanto, no es la derivada de ninguna función.

La respuesta a la tercera pregunta es afirmativa. Este resultado se conoce como regla de Barrow.

La regla de Barrow también es conocida como fórmula de Newton-Leibniz

Teorema 15.3.3 (Regla de Barrow)**.** *Sea* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Supongamos que* F' *es integrable, entonces*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Aplicando el teorema del valor medio, existen $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1})$ para cualquier i. Entonces

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \Sigma(F', P, c_i)$$

Si tomamos como P_n la partición que consiste en dividir el intervalo $[a,b]$ en n trozos iguales y tomamos límites cuando n tiende a infinito se obtiene que

$$F(b) - F(a) = \Sigma(F', P_n, c_i) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b F'(x)\,dx,$$

como queríamos demostrar. □

15.3.1 Integración por partes

Usaremos la notación $F\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Proposición 15.3.4. *Sean* $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables con derivada integrable. Entonces, si* $F' = f$ *y* $G' = g$,

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Ejemplo 15.3.5. Calcula $\int_0^{\pi/2} e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\,dx$.

15.3.2 Cambio de variable

Proposición 15.3.6 (Sustitución). *Sea* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable en* $[a,b]$ *cuya derivada,* g'*, es integrable. Sea* I *un intervalo tal que* $g([a,b]) \subseteq I$ *y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* $(f \circ g)g'$ *es integrable en* $[a,b]$ *y*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)),$$

donde F *es una primitiva de* f *en I.*

Demostración. La función $F \circ g$ es derivable y su derivada, usando la regla de la cadena, es

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

La regla de Barrow nos dice que podemos calcular el valor de la integral usando una primitiva:

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)). \qquad \square$$

Ejemplo 15.3.7. Calcula $\int_1^2 \frac{dx}{x\log(x)}$.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\log(x)} = \begin{bmatrix} y = \log(x) \\ dy = dx/x \end{bmatrix} = \int_{\log(2)}^{\log(3)} \frac{dy}{y} = \log(\log(3)) - \log(\log(2)).$$

15.4 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL

El primer teorema del valor medio para la integral se debe a Cauchy (1821)

Teorema 15.4.1 (Primer teorema del valor medio para la integral). *Sean* f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables. Supongamos que* $g(x) \geqslant 0$ *para cualquier* x. *Entonces existe* $\mu \in [\inf f([a,b]), \sup f([a,b])]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{15.1}$$

Si f *es continua existe un punto* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{15.2}$$

Demostración. Como la función g es continua, $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ si, y sólo si, $g(x) = 0$ para cualquier x. En ese caso, la identidad que queremos probar es trivial.

Supongamos que $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Sean $M = \sup f$ y $m = \min f$, entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dividiendo por $\int_a^b g(x)\,dx$,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Basta tomar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Si f es continua, $f([a,b]) = [m, M]$ y, existe $c \in [a,b]$ tal que $\mu = f(c)$. □

Corolario 15.4.2. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{15.3}$$

Por analogía con la media aritmética, se suele decir que $f(c)$ es el *valor medio* de la función f.

Observación 15.4.3.

Teorema 15.4.4 (Segundo teorema del valor medio para la integral)**.** *Sean* f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables. Supongamos que* g *es monótona. Entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Corolario 15.4.5 (Versión de Bonnet del segundo teorema del valor medio para la integral)**.** *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones integrables.*

1) Si g *es decreciente y* $g(x) \geqslant 0$*, para cualquier* x*, existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

2) Si g *es creciente y* $g(x) \geqslant 0$*, para cualquier* x*, existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

15.4.1 Resto integral de Taylor

Teorema 15.4.6. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^{n+1}*. Sea* P_n *el polinomio de Taylor de* f *centrado en* $a \in I$*. Entonces dado* $x \in I$*,*

Fórmula integral del resto de Taylor

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

15.5 EJERCICIOS

Ejercicio 15.1. Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y $f \in C([-r,r])$. Prueba que

1) Si f es par, entonces $\int_{-r}^r f(x)\,dx = 2\int_0^r f(x)\,dx$.

2) Si f es impar, entonces $\int_{-r}^r f(x)\,dx = 0$.

Ejercicio 15.2. Sea I un intervalo no trivial y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba las siguientes igualdades:

1) $\displaystyle\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \ \forall a, b \in I, \forall h \in \mathbb{R}.$