1- Teorema de Rolle. Teorema del valor medio.

* **Teorema de Fermat**: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Supongamos que f tiene un extremo relativo en $a \in A$ y que f es derivable en a. Entonces $f'(a)=0$.

* **Demostración**:

Supongamos que f tiene un máximo relativo en a, entonces: $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

ya que $f(a) \geq f(x)$ y $x>a$ cerca de a. Por otra parte:

$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, ya que se sigue cumpliendo que $f(a) \geq f(x)$ pero $x \leq a$ cerca de a.

Entonces $f'(a)=0$. Análogo para mínimo relativo (tomando $-f$).

* **Teorema de Rolle**: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

* **Demostración**: Sabemos por el Teorema de Weierstrass que $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$ tales que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

- Supongamos que $\alpha \in]a,b[\Rightarrow$ Por T. Fermat $f'(\alpha)=0$.
- Supongamos que $\beta \in]a,b[\Rightarrow$ Por T. Fermat $f'(\beta)=0$.
- Supongamos que $\alpha, \beta \in \{a,b\} \Rightarrow f$ es constante y $f'(x)=0 \quad \forall x \in]a,b[$.

En cualquier caso, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

* **Teorema del valor medio de Lagrange**: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que:

$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

* **Demostración**: Sea $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $g(x) = (f(b)-f(a))x - f(x)(b-a)$. La función es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Además:

$g(a) = (f(b)-f(a)).a - f(a)(b-a) = f(b)a - f(a)b$

$g(b) = -f(a)b + f(b)a$

como $g(a)=g(b)$ el T. de Rolle nos dice que $\exists c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0=f(b)-f(a) - f'(c)(b-a)$, como queríamos.

* **Teorema del valor medio generalizado (Cauchy)**: Sean $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en $]a,b[$, entonces $\exists c \in]a,b[$ tal que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

Demostración: Sea $\lambda: [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $\lambda(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$.

Como $\lambda(a)=\lambda(b)$ el T. de Rolle nos dice que $\exists c \in]a,b[$ tal que $\lambda'(c)=0=$
$=(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c)$, como queríamos.

3- Polinomio de Taylor de una función: Función infinitesimal del resto y el resto de Taylor.

* **Definición**: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in A$. El polinomio de Taylor de orden n de la función f centrada en a es:

$$P_n(f,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso $a=0$ también se suele llamar polinomio de Maclaurin. Cuando no hay dudas, se escribe $P_n(x)$ simplemente.

* Fórmula infinitesimal del resto (Fórmula de Peano del resto): La fórmula infinitesimal del resto generaliza que la recta tangente es la mejor aproximación afín de una función derivable.

Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$ y $f: I \to \mathbb{R}$ una función $n-1$ veces derivable en $a \in I$. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de la función f centrado en a:

1) Se cumple que: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

2) Si $q(x)$ es un polinomio de orden n que cumple que: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0$

entonces $q(x) = P_n(x)$.

* Demostración:

1) Aplicando la primera regla de l'Hôpital $n-1$ veces, llegamos a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \right) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

donde, en el último paso hemos usado que $f^{(n-1)}$ es derivable en a.

2) Sea $p(x) = P_n(x) - q(x)$. Se cumple que p es un polinomio de orden n y

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{P_n(x) - f(x) + f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

con lo que, en particular $p(a) = 0$. Por reducción a lo absurdo, supongamos que p es no nulo y sea k la multiplicidad de dicha raíz. Entonces $p(x) = (x-a)^k r(x)$ donde $1 \leq k \leq n$ y $r(a) \neq 0$, pero

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^{n-k}} \neq 0$$ lo que es una contradicción.

* Fórmula de Taylor (Resto de Lagrange): Sea I un intervalo, n un número natural mayor que uno y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable $n+1$ veces. Entonces, para cualesquiera $a, x_0 \in I$ existe $c \in]a, x_0[$ tal que:

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}$$

*Demostración:

Fijado $x_0 \in I$, sea $k \in \mathbb{R}$ tal que: $f(x_0) = P_n(x_0) + k \cdot (x_0 - a)^{n+1}$

o, lo que es lo mismo, $k = \dfrac{f(x_0) - P_n(x_0)}{(x_0 - a)^{n+1}}$

Consideremos la función $g(x) = f(x) - P_n(x) - k(x-a)^{n+1}$ que es $n+1$ veces derivable.

1) Como $g(a) = g(x_0) = 0$, existe $c_1 \in]a, x_0[$ tal que $g'(c_1) = 0$.

2) Como $g'(a) = g'(c_1) = 0$, existe $c_2 \in]a, x_0[$ tal que $g''(c_2) = 0$.

3) ...

4) Como $g^{(n)}(a) = g^{(n)}(c_n) = 0$, existe $c \in]a, c_n[\subset]a, x_0[$ tal que $g^{(n+1)}(c) = 0$, esto es

$f^{(n+1)}(c) - k \cdot (n+1)! = 0$ con lo que $k = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ como queríamos.

4- Funciones convexas, caracterizaciones.

Definición: Sea I un intervalo y sean $a, b \in I$ con $a < b$. Si $x \in [a,b]$, x se puede escribir como combinación convexa de a y b, esto es,

$x = (1-t)a + tb$ para algún $t \in [0,1]$. Podemos calcular el valor de t:

$$x = (1-t)a + tb \iff t = \frac{x-a}{b-a}$$

con lo que $$x = \frac{b-x}{b-a}\,a + \frac{x-a}{b-a}\,b$$

Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$:

1) La función f es convexa si para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y cualquier $t \in [0,1]$ se cumple que:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b)$$

2) La función f es estrictamente convexa si para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y cualquier $t \in]0,1[$ se cumple que:

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + t f(b)$$

3) La función f es cóncava (resp. estrictamente cóncava) si $-f$ es convexa (resp. estrictamente convexa).

Geométricamente, la convexidad se traduce en que el segmento que une las imágenes de dos puntos arbitrarios está por encima de la gráfica de la función.

En la definición de convexa no es necesario suponer que $a < b$. Si $b > a$ los papeles de t y $1-t$ se intercambian, pero la definición no cambia. Luego

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b) \quad \forall a, b \in I \ \forall t \in [0,1].$$

Caracterizaciones de la convexidad:

Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1) f es convexa.
2) f' es creciente.
3) Se cumple que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ para todo $a, x \in I$.

teorema,

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Tenemos que probar que $f'(a) \leq f'(b)$. Elegimos $x \in]a,b[$. Entonces

$$f'(a) \leq f_a(x) = f_x(a) \leq f_x(b) = f_b(x) \leq f'(b)$$

2) $\Rightarrow$ 3) Distinguimos dos casos $x < a$ y $a < x$. En ambos casos, el teorema del valor medio nos dice que existe c entre a y x tal que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

Y usando que f' es creciente se obtiene la desigualdad buscada.

3) $\Rightarrow$ 1) Sean $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ y sea $a = (1-t)x + ty$. Tenemos que demostrar que:

$f(a) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

$(1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t)(f(a) + f'(a)(x-a)) + t(f(a) + f'(a)(y-a)) =$

$= f(a)(1-t+t) + f'(a)((1-t)(x-a) + t(y-a)) = f(a)$

Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función convexa dos veces derivable. Entonces f es convexa sí, y solo si, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. (~~proposición~~ corolario)

Demostración: Es consecuencia directa del teorema anterior.

☑ Definición: Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $a \in \mathring{I}$ es un punto de inflexión de la función f si existe $r > 0$ tal que:

1) f es convexa en $]a-r, a]$ y cóncava en $[a, a+r[$ o

2) f es cóncava en $]a-r, a]$ y convexa en $[a, a+r[$.

Proposición: Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(I)$. Si $a \in I$ es un punto de inflexión de f, entonces $f''(a) = 0$.

Demostración: Por el corolario anterior, la segunda derivada tiene que ser mayor o igual que cero a un lado de a y menor o igual que cero al otro lado. Por continuidad se deduce que $f''(a) = 0$.

☑ Lema de las tres secantes (L. Galvani). Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Demostración:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \iff f(x_2) - f(x_1) \leq (x_2 - x_1)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \iff$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) + (x_2 - x_1)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_1)(x_3 - x_1) + (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))}{x_3 - x_1} =$$

$$= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3)$$

y esta última desigualdad es cierta aplicando la definición de convexidad a la terna x_1, x_2, x_3.

La segunda desigualdad se prueba de forma análoga

5. Funciones uniformemente continuas. Teorema de Heine.

* **Definición**: La función $f: A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que si $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f unif. continua en A $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{l} x, y \in A \\ |x-y| < \delta \end{array} \right| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Si f es uniformente continua en A y $B \subset A$, entonces f es uniformemente continua en B.

Propiedades básicas:

* **Proposición**: Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ dos funciones unif. continuas:

1) $f + g$ es uniformemente continua
2) supongamos que f y g son funciones acotadas, entonces el producto fg es una función uniformemente continua.

* **Demostración**:

1) Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que si $x, y \in A$, entonces:

$\left. \begin{array}{l} |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right|$ Basta tomar $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ para obtener lo pedido.

2) Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$. Como f y g son uniformemente continuas, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces.

$|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Entonces si $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq M|g(x) - g(y)| + M|f(x) - f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

* **Proposición**: Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función unif. continua en A. Supongamos que $f(A) \subset B$ y sea $g: B \to \mathbb{R}$ una función unif. continua en B. Entonces $g \circ f$ es unif. continua en A.

* **Demostración**: Dado $\varepsilon > 0$, por ser g unif. continua, existe $\delta_1 > 0$ para el que se cumple la definición. Por ser f unif. continua, dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 = \delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ y $|x - t| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \delta$ y, por tanto, $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.

* Teorema de Heine: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua

* Demostración: Por reducción a lo absurdo: si f no es uniformemente continua existe ε_0 y existen sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en $[a,b]$ tales que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Como $a \leq x_n \leq b$, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente y su límite, x_0, también pertenece a dicho intervalo. Por tanto $y_{\sigma(n)} \to x_0$ también, y en consecuencia, $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \to 0$ lo que es una contradicción.