6 DERIVADA

6.1 DEFINICIÓN

Definición 6.1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es *derivable* en un punto $a \in A \cap A'$, si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En caso de que exista dicho límite, recibe el nombre de *derivada* de f en a y se nota $f'(a)$.

Diremos que la función es derivable en un conjunto cuando lo sea en todos los puntos de dicho conjunto.

La notación $f(x)$ se debe a Euler (1734), aunque el uso de paréntesis para la variable no se generaliza hasta su uso por Cauchy (1821). La notación f' se debe a Joseph Louis Lagrange. No estaba contento con el desarrollo del Cálculo en los términos de Newton o Leibniz y en su libro "*Theories des fonctions analytiques*" en 1797 introduce la notación fx, $f'x$, $f''x$ para referirse a las derivadas de una función primitiva.

Proposición 6.1.2. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es derivable en a.*
2) *Existe un número real L cumpliendo que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a) - L(x - a)| < \varepsilon\,|x - a|$.*

En caso de estas afirmaciones se cumplan, $f'(a) = L$.

6.2 CONDICIÓN NECESARIA Y PRIMEROS EJEMPLOS

Proposición 6.2.1. *Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces f es continua en a.*

Demostración. Usando que el límite de un producto es el producto de límites, se cumple que

$$f(x) - f(a) = (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \to a} 0.$$

Por tanto $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. □

Observación 6.2.2. El recíproco no es cierto: hay funciones continuas que no son derivables como, por ejemplo, la función valor absoluto en el origen.

Ejemplos 6.2.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) f constante
2) $f(x) = x$
3) $f(x) = x^2$
4) $f(x) = e^x$
5) $f(x) = 1/x$
6) $f(x) = |x|$

Ejemplo 6.2.4. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es derivable únicamente en el origen. No es continua en ningún otro punto.

6.3 MEJOR APROXIMACIÓN AFÍN

Proposición 6.3.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sea* $a \in A \cap A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f *es derivable en* a.

2) f *es continua en el punto* a *y existe una función afín* g *tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0.$$

En caso de que se cumplan dichas afirmaciones, la función g *viene dada por*

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es suficiente con tomar $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $g(x) = \alpha + \beta(x - a)$ la función afín verificando que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0.$$

Del límite anterior se deduce que

$$0 = \lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = f(a) - g(a) = f(a) - \alpha.$$

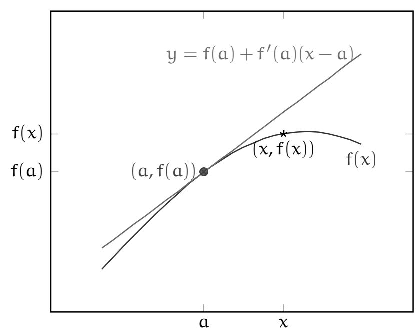
Si volvemos a escribir el mismo límite usando que $\alpha = f(a)$, tenemos que

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \beta(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \beta.$$

En particular, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \beta$ con lo que f es derivable y $\beta = f'(a)$ como queríamos demostrar. □

6.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La recta tangente a una función f en un punto a es la función afín que mejor aproxima a la función f en dicho punto. Su ecuación, según acabamos de ver, es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.



6.5 CARÁCTER LOCAL Y DERIVADAS LATERALES

Los resultados sobre derivadas laterales o el carácter local son consecuencia directa de los correspondientes resultados sobre límites.

6.5.1 Carácter local

Proposición 6.5.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $a \in A \cap A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f *es derivable en* a.

2) *Dado* $r > 0$, *la restricción de* f *a* $]a-r, a+r[\cap A$ *es derivable en* a.

6.5.2 Derivadas laterales

Definición 6.5.2. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A \cap A'$.

1) Supongamos que $a \in A'_+$. Diremos que f es *derivable por la derecha* en a si existe el límite $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) Supongamos que $a \in A'_-$. Diremos que f es derivable por la izquierda en a si existe el límite $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposición 6.5.3. *Una función es derivable en un punto si, y sólo si, existes todas las derivadas que tengan sentido y coinciden.*

Observación 6.5.4. Sabemos por la proposición 6.2.1 que cualquier función derivable es continua. Por el mismo motivo, si una función es derivable por la izquierda, tiene que ser continua por la izquierda. Lo mismo ocurre con las derivadas por la derecha. En particular, si una función tiene derivadas laterales, aunque no coincidan, es continua.

6.6 EJERCICIOS

Ejercicio 6.1. Calcula las rectas tangentes de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que pasan por el punto $(-1, 1)$.

Ejercicio 6.2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^3 - c.$$

Determina los valores de a, b, c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1, 2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

Ejercicio 6.3. Estudia la derivabilidad de la función parte entera.

Ejercicio 6.4. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define la función $g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Prueba que si f es derivable en a, entonces g tiene límite en 0.
¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 6.5. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in A \cap A'$. Prueba que existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ verificando que:

$$x \in A,\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant M|x-a|.$$

¿Es cierta esta afirmación suponiendo solamente que f es continua en el punto a?

Ejercicio 6.6. Sean g y h dos funciones derivables en $\mathbb{R}$. Estudia la derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ h(x), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejercicio 6.7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existen números reales $K \geqslant 0$ y $\alpha > 1$ tales que

$$|f(x)| \leqslant K|x|^{\alpha},$$

para cualquier x en un entorno de cero. Demuestra que la función f es derivable en 0. ¿Qué se puede decir si $\alpha = 1$?

7 REGLAS DE DERIVACIÓN

7.1 ÁLGEBRA DE DERIVADAS

Proposición 7.1.1. *Sean* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $a \in A \cap A'$.

1) *La suma* $f+g$ *es derivable en* a *y* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2) *El producto* fg *es derivable en* a *y*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3) *Si* $g(a) \neq 0$*, la función* $1/g$ *es derivable en* a *y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

4) *El cociente* f/g *es derivable en* a *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostración. 1) Usando la definición de derivada, calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

Por tanto $f+g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2) Calculamos la derivada del producto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(1/f)(x) - (1/f)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(a)f(x)}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{f(a)f(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{x-a} \\ &= -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.\end{aligned}$$

4) Basta usar los dos apartados anteriores. □

7.2 REGLA DE LA CADENA

Proposición 7.2.1. *Sean* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *dos funciones verificando que:*

1) f *es derivable en* $a \in A \cap A'$;
2) $f(A) \subset B$ *y* $b = f(a) \in B \cap B'$;
3) g *es derivable en* $f(a)$.

Entonces $g \circ f$ *es derivable en* a *y* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Demostración. Consideremos la función $g_b\colon B \to \mathbb{R}$ definida como

$$g_b(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}, & \text{si } y \neq b, \\ g'(b), & \text{si } y = b. \end{cases}$$

Como g es derivable en b, entonces g_b es continua en b. Además se cumple que $g_b(y)(y - b) = g(y) - g(b)$ para cualquier $y \in B$. Vamos a calcular la derivada de $g \circ f$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{g_b(f(x))\,(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} g_b(f(x)) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

□

7.3 FUNCIÓN INVERSA

Teorema 7.3.1 (de derivación de la función inversa)**.** *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva y sea* $B = f(A)$. *Supongamos que* f *es derivable en* $a \in A \cap A'$. *Entonces* $b = f(a) \in B'$ *y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $f'(a) \neq 0$ *y* f^{-1} *es continua en* b.
2) f^{-1} *es derivable en* b.

Además, en caso de ser ciertas dichas afirmaciones, se cumple que

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que $b \in B'$. Como $a \in A'$, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $a_n \neq a$ para todo n. Como la función f es inyectiva, se cumple que $f(a_n) \neq f(a)$ y, usando la continuidad, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = b$. Por tanto, b es un punto de acumulación de B.

1)⇒2) Sean $b_n \in B$, $b_n \neq b$ tales que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ y sea $a_n = f^{-1}(b_n)$. Como f^{-1} es continua en b, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(b_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Usemos ahora que f es derivable en a:

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}.$$

Como $f'(a) \neq 0$,

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}$$

y, por tanto, f^{-1} es derivable en b y $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1/f'(a)$.

2)⇒1) Como f^{-1} es derivable en b, en particular f^{-1} es continua en b. Por la regla de la cadena, como $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a) = 1,$$

y, por tanto, ambas derivadas son no nulas. □

Corolario 7.3.2. *Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Sea $B = f(A)$. Supongamos que f es derivable en $b = f(a)$. Entonces $b \in B'$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $f'(a) \neq 0$.

2) f^{-1} es derivable en b.

Volveremos a este resultado en temas siguientes, después del teorema del valor medio.

7.4 EJERCICIOS

Ejercicio 7.1. Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones.

1) Comprueba que

$$\begin{aligned} \text{máx}(f,g) &= \frac{1}{2}\big((f+g) + |f-g|\big), \\ \text{mín}(f,g) &= \frac{1}{2}\big((f+g) - |f-g|\big). \end{aligned}$$

2) Si f y g son continuas en $a \in A$, entonces $\text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f,g)$ son continuas en a.

3) ¿Es cierto el resultado análogo para funciones derivables?

Ejercicio 7.2. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Sean f y g dos funciones derivables.

- Si $f \geqslant g$ entones $f' \geqslant g'$.
- Si $f' \geqslant g'$ entonces $f \geqslant g$.

Ejercicio 7.3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in A$. Calcula

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}.$$

Ejercicio 7.4. Estudia la derivabilidad, y calcula la derivada donde sea posible, de las funciones siguientes :

1) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\forall x \in [-1,1[$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x\,|x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = x^x$, si $x > 0$;

4) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}},\ \forall x > 0$.

Ejercicio 7.5. Estudia la derivabilidad, y calcula la derivada donde sea posible, de las funciones siguientes :

1) $f(x) = \sqrt{2x - x^2},\ \forall x \in [0, 1]$;

2) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{|x - 2|},\ \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \frac{2x}{1+|x|},\ \forall x \in \mathbb{R}$;

4) $f(x) = x\,\sqrt[n]{|x|},\ \forall x \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7.6. Comprueba que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Ejercicio 7.7. Se considera $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + \dfrac{\log(x)}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

Ejercicio 7.8. Calcula la derivada de:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $f(x) = x^4\,e^x\,\log(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

4) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}},\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Ejercicio 7.9. Calcula la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos dados:

1) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen;

2) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$;

3) $y = |x|$ en $(1, 1)$.

Ejercicio 7.10. Da un ejemplo de una función inyectiva $f\colon A \to \mathbb{R}$, derivable en un punto $a \in A \cap A'$ con $f'(a) \neq 0$, y tal que f^{-1} no sea derivable en el punto $f(a)$.

Ejercicio 7.11. Prueba que, para cada $x \geqslant 0$, la ecuación $y + y^3 + y^4 = x$ tiene una única solución $y \geqslant 0$. Demuestra que la función así obtenida es derivable y calcula $f'(0)$ y $f'(3)$.

Ejercicio 7.12. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$, para todo x, $y \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es constante.