TEMA 2: FORMAS BILINEALES Y MÉTRICAS

A) DEFINICIONES Y EJEMPLOS. EXPRESIÓN MATRICIAL. CONGRUENCIA DE MATRICES

RECUERDA

En $\mathbb{R}^3$: Producto escalar $(x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Se puede estudiar como una aplicación:

$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \longmapsto \underline{\downarrow}$

<u>Propiedades</u>: sean $v, w, u \in \mathbb{R}^3$

1) $(\alpha v + \beta w)\cdot u = \alpha v \cdot u + \beta w \cdot u$

2) $v \cdot (\alpha w + \beta u) = \alpha v \cdot w + \beta v \cdot u$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es decir, que la aplicación que hemos definido es LINEAL EN LAS DOS COMPONENTES.

<u>DEFINICIÓN</u>: Sea V un espacio vectorial real. Diremos que una aplicación

$b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una <u>forma bilineal</u> si verifica:

i) $b((\alpha v + \beta w), u) = \alpha\, b(v,u) + \beta\, b(w,u)$

ii) $b(v, \alpha w + \beta u) = \alpha\, b(v,w) + \beta\, b(v,u)$

¡Ojo! Denotaremos $\mathcal{B}(V)$ al conjunto de las formas bilineales sobre V.

Se podría comprobar que si $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(V)$, entonces

$(b_1 + b_2) \in \mathcal{B}(V)$ y $\alpha b_1 \in \mathcal{B}(V)$ (es un espacio vectorial)

PROPIEDADES DE LAS FORMAS BILINEALES:

1) $b(u, 0) = b(0, u) = 0$ $\quad b(u,0) = b(u, 0\cdot u) = 0 \cdot b(u,u) = 0$

2) $b(-u, v) = b(u, -v) = -b(u,v)$

3) $b\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j\, b(u_i, v_j)$

(D) Inducción.

- $k=1$ $m=1$ Es cierto
- Supongamos que es cierto para $k-1$, $m-1$ y veamos que es cierto para k, m

$$b\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j\right) = b\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i u_i + \alpha_k v_k , \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j v_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j u_j + \beta_m v_m\right) + \alpha_k b\left(v_k , \sum_{j}\beta_j u_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j u_j\right) + \beta_m b\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i , v_m\right) + \alpha_k b\left(v_k , \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j u_j\right) +$$

$$+ \alpha_k b(v_k, v_m) = \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_i\beta_j b(u_i, v_j) + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\beta_m b(u_i, v_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_k\beta_j b(v_k, u_j) + \alpha_k\beta_m b(v_k, v_m)$$

MATRIZ ASOCIADA A UNA FORMA BILINEAL:

V ev. real, $B=\{e_1, \dots e_n\}$ base de V y $b \in \mathcal{B}(V)$

Vemos como calcular los $b(u,v)$ sabiendo las coordenadas de $u, v \in V$.

Tenemos que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, b(e_i, e_j)$$

$$= (x_1, \dots x_n)\cdot M(b,B)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

Denotaremos $M(b,B)$ a la matriz cuadrada de orden n cuya entrada (ij) es $b(e_i, e_j)$, es decir:

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & \dots & b(e_1,e_n) \\ \vdots & & \\ b(e_n,e_1) & \dots & b(e_n,e_n)\end{pmatrix}$$

Observamos que fijada una base B podemos definir

$$F: \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$b \longmapsto \mathcal{M}(b, B)$$
$$b_A \leftsquigarrow A$$

que es un isomorfismo, por tanto

$$\dim(\mathcal{B}(V)) = n^2$$

¿CÓMO RELACIONAR MATRICES DE BASES DISTINTAS?

Sea $B' = \{e'_1, \dots e'_n\}$ otra base de V, sean $u, v \in V$

1) $b(u,v) = u_B^{t} \cdot \mathcal{M}(b,B) \cdot v_B = u_{B'}^{t} \cdot \mathcal{M}(b, B') \cdot v_{B'}$

relacionamos cada par de coordenadas:

•) $u_{B'} = \mathcal{M}(I_{dv}, B, B') \cdot u_B = P \cdot u_B$

•) $v_{B'} = \mathcal{M}(I_{dv}, B, B') \, v_B = P \cdot v_B$

sustituimos en 1)

$$b(u,v) = (P u_B)^t \, \mathcal{M}(b, B') \cdot (P v_B) = u_B^t \cdot P^t \cdot \mathcal{M}(b, B') \cdot P(v_B)$$

Y como se verifica para cualquier vector:

$$\boxed{\mathcal{M}(b,B) = P^t \cdot \mathcal{M}(b, B') \cdot P}$$

, donde $P = \mathcal{M}(I_{dv}, B, B')$

<u>DEFINICIÓN</u>: Diremos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son <u>congruentes</u> si $\exists P \in GL(\mathbb{R})$ tal que

$$A = P^t \cdot B \cdot P$$

En particular, las matrices de una forma bilineal en dos bases distintas son congruentes.

PROPIEDADES DE LAS MATRICES CONGRUENTES:

1) Dos matrices congruentes son equivalentes y por lo tanto tienen el mismo rango. Definimos el rango de una forma bilineal como el rango de cualquier $\mathcal{M}(b,B)$.

2) Dos matrices congruentes no tienen por qué tener el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

el determinante no es igual

Sin embargo, sí que se verifica que

$$\det(A) = \det(P^t \cdot B \cdot P) = \det(P^t) \cdot \det(B) \cdot \det(P) = \underbrace{\det(P)^2}_{> 0} \cdot \det(B)$$

$\det(A)$ y $\det(B)$ tienen el mismo signo.

3) Dos matrices congruentes no tienen por qué tener la misma traza ni los mismos valores propios.

EJEMPLOS

(1) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} b((1,0,0),(1,0,0)) = 1 \\ b((1,0,0),(0,1,0)) = 0 \\ b((1,0,0),(0,0,1)) = 0 \\ \vdots \end{array}\right\} M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) en $\mathbb{R}^2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

formas bilineales distintas

$$b((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b'((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2y_1 \;\; 2x_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 - y_1 x_2 + 3x_1 y_2 + 4y_1 y_2$$

⚠ IDENTIFICAR LA FORMA BILINEAL:

$b((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x^2 y_2 + y_1 x_2$ → NO lo es

③ $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(M,N) \longmapsto \text{traza}(M \cdot N^t)$$

a) Demostramos que es bilineal

$b(\alpha M + \beta M', N) = \text{traza}((\alpha M + \beta M') \cdot N^t) = \text{traza}(\alpha M \cdot N^t + \beta M' N^t) =$

$= \alpha \cdot \text{traza}(M \cdot N^t) + \beta\, \text{traza}(M' N^t)$

b) Calculamos $M(b, B_u)$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1$

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → simétrica

④ $V = \mathbb{R}_3[x]$

$$B = \{1, x, x^2, x^3\}$$
$$b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

(E) Calcular $M(b, B)$

⑤ $V = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ → funciones reales continuas en $[a,b]$

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x), g(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

⑥ V e.v sobre $\mathbb{R}$ y $\varphi, \psi \in V^*$

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto \varphi(u)\psi(v)$$

(7) V_1, V_2 e.v sobre $\mathbb{R}$

$b_1 \in \mathcal{B}(V_1)$ $\quad b_2 \in \mathcal{B}(V_2)$

$$(V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, u'), (v, v') \longmapsto b_1(u, v) + b_2(u', v')$$ es otra forma bilineal

(8) Si $\mathcal{U} \leq V$ y $b \in \mathcal{B}(V)$

$b_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal en $\mathcal{U}$

B) FORMAS BILINEALES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

V espacio vectorial real y $b \in \mathcal{B}(V)$

DEFINICIÓN: Diremos que b es simétrica si y sólo si $b(u, v) = b(v, u)$ $\forall u, v \in V$

A las formas bilineales simétricas las llamaremos también MÉTRICAS.

Diremos que b es una forma lineal antisimétrica si $b(u, v) = -b(v, u)$

Sabemos que si B es base de V tenemos un isomorfismo

$$F : \mathcal{B}(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

y se denotará $\rightarrow$ $\mathcal{B}_S(V)$ al conjunto de las formas simétricas.

$\rightarrow$ $\mathcal{B}_A(V)$ " " " " " antisimétricas

¡OJO! $\quad M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

·) $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

·) la intersección es $\{0\}$.

Aplicando lo anterior vemos que $\boxed{\mathcal{B}_S(V) \oplus \mathcal{B}_A(V) = \mathcal{B}(V)}$ ver dim.

C) MÉTRICAS. FORMAS CUADRÁTICAS. PERPENDICULARIDAD. TIPOS DE MÉTRICAS:

V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $g \in \mathcal{B}_S(V)$. Al par (V, g) se le denomina ESPACIO VECTORIAL MÉTRICO.

•) EJEMPLOS:

1) $(\mathbb{R}^3, g_0)$, con g_0 producto escalar usual, $(\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow M(g_0, B_u) = I_N$

2) $(M_n(\mathbb{R}), g)$ tal que $g(M, N) = \text{traza}(M \cdot N^t) \longrightarrow M(g, B_u) = I_n$

3) $(\mathbb{R}^n, g_1)$ con $g_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g_1((x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$$

A g_1 se le denomina métrica de Lorentz-Minkowski:

$$M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

(+) En $\mathbb{R}^4$ se le denomina métrica de Minkowski

3) Métrica especial.

• Formas cuadráticas:

(V, g) espacio vectorial métrico. Podemos definir,

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_g : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega_g(u) &\longmapsto g(u, u) \end{aligned}}$$

PROPIEDADES:

1) $\omega_g(0) = g(0, 0) = 0$

2) $\omega_g(\alpha u) = g(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 g(u, u)$ → NO SON LINEALES

3) $\omega_g(u+v) = g(u+v, u+v) = g(u, u) + \underbrace{g(u, v) + g(v, u)}_{\text{son iguales, } g \text{ es simétrica}} + g(v, v)$

$$= \omega_g(u) + 2g(u+v) + \omega_g(v) \Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2}\left(\omega_g(u+v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)\right)$$

Es decir, que conociendo ω_g podemos recuperar la métrica (g).

(E) Comprobar que $g(u, v) = \frac{1}{4}\left(\omega_g(u+v) - \omega_g(u-v)\right)$

CON MATRICES

$$\omega_g(u) = g(u, u) = u_B^T \cdot M(g, B) \cdot u_B$$

(D) DEFINICIÓN : Llamaremos <u>forma cuadrática</u> a una aplicación $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica la propiedad 2) $(\omega(\alpha u) = \alpha^2 \omega(u))$ y que verifica que $g(u,v) = \frac{1}{2}(\omega(u+v) - \omega(u) - \omega(v))$ sea una métrica (forma bilineal simétrica de V).

(P) Asociada a toda métrica tenemos una forma cuadrática.

Denotaremos $\mathcal{F}(V)$ al conjunto de las formas cuadráticas, es sencillo comprobar que es un espacio vectorial real.

•) EJEMPLOS :

1) $(\mathbb{R}^n, g_0)$

$\omega_{g_0}(x_1, \dots x_n) = g_0((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots x_n)) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

2) $(\mathbb{R}^n, g_1)$

$\omega_{g_1}(x_1, \dots, x_n) = g_1((x_1, \dots x_n), (x_1, \dots, x_n)) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$

3) $(M_n(\mathbb{R}), g)$

$\omega_g(A) = g(A, A) = \text{traza}(A \cdot A^t)$ → se estudiará más adelante

• PERPENDICULARIDAD

Sea (V, g) espacio vectorial métrico.

→ Diremos que dos vectores $u, v \in V$ son <u>perpendiculares</u> si $g(u,v) = 0$.
Escribiremos $u \perp v$.

•) EJEMPLOS :

1) $(\mathbb{R}^n, g_0)$ $B_u = \{e_1, \dots e_n\}$ $e_i \perp e_j$ $\forall i \neq j$

2) $(\mathbb{R}^n, g_1)$ → $(1,0,0,1) \perp (1,0,0,1)$
En este espacio hay vectores perpendiculares a sí mismo (LUMINOSOS).

→ Si U un subespacio vectorial de V y $v \in V$. Diremos que v es perpendicular / ortogonal a U si $g(u,v) = 0$ $\forall u \in U$. $(v \perp U)$

→ Diremos que W y U (s.v. de V) son perpendiculares si $g(u,w) = 0$ $\forall u \in U, w \in W$ $(W \perp U)$

(D) DEFINICIÓN : Si $W_1 \dots W_k$ s.v. de V. Diremos que V es <u>suma ortogonal</u> de $W_1, W_2 \dots W_k$ si :

1) $W_1 \oplus \dots \oplus W_k = V$

2) $W_i \perp W_j$ $\forall i \neq j$ $i,j \in \{1, \dots k\}$

Escribiremos $\boxed{W_1 \textcircled{\perp} \dots \textcircled{\perp} W_k = V}$

PROPOSICIÓN: Si $V = W_1 \oplus W_2$, diremos que W_1 es el SUPLEMENTO ORTOGONAL de W_2 y viceversa.

· TIPOS DE MÉTRICAS

(V, g) espacio vectorial métrico

· Diremos que g es una métrica NO DEGENERADA si dado $u \in V$ tal que $g(u,v)=0$ $\forall v \in V$, se verifica que $u = \vec{0}$

· Diremos que g es una métrica DEGENERADA si $\exists u \in V \setminus \{0\}$ tal que $g(u,v) = 0$ $\forall v \in V$.

· Diremos que g es una métrica SEMIDEFINIDA POSITIVA si $g(u,u) \geq 0$ $\forall u \in V$.

· Diremos que g es una métrica SEMIDEFINIDA NEGATIVA si $g(u,u) \leq 0$ $\forall u \in V$.

· Diremos que g es una métrica DEFINIDA POSITIVA si $g(u,u) > 0$ $\forall u \in V \setminus \{0\}$

· Diremos que g es una métrica DEFINIDA NEGATIVA si $g(u,u) < 0$ $\forall u \in V \setminus \{0\}$

PROPOSICIÓN: Equivalen:

i) g definido positivo

ii) g semidefinido positivo y si $u \in V$ tal que $g(u,u) = 0$, entonces $u=0$

iii) g es semidefinida positiva y no degenerada.

(D) Demostración:

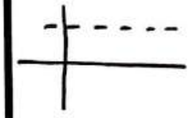
- ii) ⇒ iii) Sea $u \in V$ tal que $g(u,v)=0$ $\forall v \in V$. Luego tenemos que en particular $g(u,u)=0$, y por hipótesis (ii), $u = 0$.
- iii) ⇒ ii) Sea $u \in V$ tal que $g(u,u) = 0$. Sea $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{0 \leq}_{g \text{ semidef } +} g(\lambda u + v, \lambda u + v) = \lambda^2 g(u,u) + \lambda g(v,u) + \lambda g(u,v) + g(v,v)$$

$$= \lambda^2 \cdot \underbrace{g(u,u)}_{=0 \text{ por hipótesis}} + 2\lambda g(u,v) + g(v,v) \Rightarrow$$

y aproximamos la expresión por una recta $y = 2x + 3$ (ejemplo)

$x = \lambda$, y como todo es $\geq 0 \Rightarrow$ y es constante $\lambda = 0$ pendiente



luego $g(u,v) = 0$ ⇒ NO DEGENERADA

$\downarrow$

$u=0$

PROPOSICIÓN : Equivalen

i) g definido negativa
ii) g semidefinido negativo y si $u \in V$ tq $g(u,u)=0 \Rightarrow u=0$
iii) g " " y no degenerado

(D) Demostración : análoga a la proposición anterior.

· Diremos que g es INDEFINIDA si $\exists u_1, u_2 \in V$ tal que $g(u_1,u_1)>0$ y $g(u_2,u_2)<0$

⚠ Una métrica puede ser :
- indefinida y no degenerada
- indefinida y degenerada

PROPOSICIÓN : (V,g) espacio vectorial métrico y $B=\{u_1,\dots u_n\}$ base de V. Entonces g es no degenerada si y sólo si $M(g,B)$ es regular. Equivalentemente, $\det(M(g,B)) \neq 0$.

Lo usábamos para demostrar inyectividad.

(D) Demostración : Sea $u \in V$ tal que $g(u,v)=0 \quad \forall v \in V$, se cumplirá para los vectores de la base.

Equivalentemente, $g(u_i,u)=0 \quad \forall i=1,\dots n$, y

$$u=\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \Rightarrow g(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j)=0 \quad \forall i=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\, g(u_i,u_j)=0$$ → escribimos de forma matricial.

$$M(g,B)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ → SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

$u=0$ (NO DEGENERADA) si y sólo si $M(g,B)$ es regular, es decir, será un sistema compatible determinado.

¡CUIDADO!

Si tenemos (V,g) espacio métrico con g no degenerado y sea U un s.v. de V. En U podemos considerar la métrica $g|_{U\times U} : U\times U \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(u,u) \mapsto g(u,u)$

y $(U, g|_{U\times U})$ no tiene por qué ser no degenerado (ver ejemplo)

·) EJEMPLO : $(\mathbb{R}^3, g)$, $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M(g,B_u)) \neq 0 = 1$, luego sabemos que es NO DEGENERADA.

Consideramos el subespacio $U = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = B'$

(U, g_U) (estudiamos si es degenerada)

$M(g_U, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(M(g_U,B')) = 0 \rightarrow$ ES DEGENERADA

Ojo : Si g es euclídea, $\underset{\text{en el s.v. también}}{\underbrace{g(u,u) > 0}}$ $\forall u \in V \setminus \{0\}$

D) SUBESPACIO ORTOGONAL. RADICAL DE LA MÉTRICA.

(V, g) espacio vectorial métrico. Sea U subespacio vectorial de V.

DEFINICIÓN : Se define el ORTOGONAL a U respecto de g al subconjunto

$$\boxed{U^{\perp} := \{u \in V \mid g(u,v) = 0 \quad \forall v \in U\}}$$

··· vemos que $U^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V:

Sea $v_1, v_2 \in U^{\perp}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) \underset{g \text{ bilineal}}{=} \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u) \underset{v_1, v_2 \in U^{\perp}}{=} 0$$

Por tanto denominaremos a $U^{\perp}$ el SUBESPACIO ORTOGONAL de U respecto de g.

(E) Si U es simplemente un subconjunto de V, entonces $U^{\perp}$ sigue siendo s.v. de V.

·) EJEMPLO :

$(\mathbb{R}^2, g)$ $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $U = L(\{(0,1)\})$ (cualquiera)

Calculamos $U^{\perp}$:

$$U^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g((x,y),(u_1,u_2)) = 0 \quad \forall u_1, u_2 \in U\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g((0,1),(x,y)) = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0,1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} = L(\{(-2,1)\})$$

PROPOSICIÓN : (V,g) espacio vectorial métrico y $\mathcal{U}, W$ subespacios vectoriales de V: Entonces se tiene :

1) $\{0\}^{\perp} = V$

2) Si $\mathcal{U} \subseteq W$, entonces $W^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp}$

3) $(\mathcal{U} + W)^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp}$

Además, para una métrica no degenerada se tiene:

4) $\dim(V) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^{\perp})$

5) $(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{U}$

6) $(\mathcal{U} \cap W)^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} + W^{\perp}$

7) $(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$ es un espacio vectorial no degenerado si y sólo si $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$, es decir $\mathcal{U}^{\perp}$ es un suplementario ortogonal de $\mathcal{U}$.

En particular, si la métrica es euclídea (definida positiva), lo anterior siempre se verifica.

(D) Demostración : tocha pero easy:

1) Trivial

2) Supongamos que $\mathcal{U} \subseteq W$ y veamos $W^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp}$

Sea $v \in W^{\perp}$, esto es $g(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$,

y como $\mathcal{U} \subseteq W$, lo anterior se cumple para $w \in \mathcal{U}$

3) $\boxed{\subseteq}$ $\left.\begin{matrix} \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} + W \\ W \subseteq \mathcal{U} + W \end{matrix}\right\} \overset{2)}{\Rightarrow} \begin{matrix} (\mathcal{U}+W)^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp} \\ (\mathcal{U}+W)^{\perp} \subseteq W^{\perp} \end{matrix}$, es decir que está en la intersección

$$(\mathcal{U}+W)^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp}$$

$\boxed{\supseteq}$ Veamos ahora que $\mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq (\mathcal{U}+W)^{\perp}$. Sea $v \in \mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp}$

Tenemos que comprobar que es perpendicular a todos los vectores de +.

$$g(\underbrace{u + w}_{u \in \mathcal{U},\, w \in W \;\; \mathcal{U}+W}, v) = g(u, v) + g(w, v) = 0 + 0 = 0$$

TEOREMA: Todo espacio métrico tiene bases ortonormales. $\boxed{T.1}$

(D) Demostración (método para calcular base ortonormal)

Sea (V, g) e.v. métrico, $\dim(V) = n$

→ Para la métrica $g = 0$ cualquier base es ortonormal.
→ Suponemos que $g \neq 0$ y hacemos inducción sobre n:

- Para $n = 1$ → TRIVIAL $\dim(V) = 1$ → $B = \{v\}$ si $v \neq 0$

$\exists v \in V$ tq $\omega_g(v) \neq 0$, pueden darse dos casos:

1) $\omega_g(v) > 0 \Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{\omega_g(v)}} \cdot v$
2) $\omega_g(v) < 0 \Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(v)}} \cdot v$

} Base ortonormal de (V, g)

$\boxed{\text{• Para } n = 2}$ (O) SIRVE PARA CLASIFICAR MÉTRICAS

(1) * Definida positiva → METODO DE GRAN-SMITH

$B = \{v_1, v_2\}$ base de V

- Construimos un vector v' tal que $v' \perp v_1$

$$v' = v_2 + \lambda v_1 \quad tq \quad g(v_2 + \lambda v_1, v_1) = 0$$

$$g(v_2, v_1) + \lambda\, g(v_1, v_1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-g(v_2, v_1)}{\omega_g(v_1)}$$

- $B' = \{v_1, v'\} = \left\{ v_1,\ v_2 - \frac{g(v_2, v_1)}{\omega_g(v_1)} \cdot v_1 \right\}$ base en la que son perpendiculares

Comprobamos que v_1 y v' son indep (TRIVIAL)
↓
B' es una base ortogonal

- Normalizamos B'

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega_g(v_1)}} v_1,\ \frac{1}{\sqrt{\omega_g(v')}} v' \right\}$$

(2) * Definida negativa → MISMO MÉTODO

$B' = \{v_1, v'\}$ → al normalizar:

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(v_1)}} v_1,\ \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(v')}} v' \right\}$$ base ortonormal

$\left\{ \exists v \text{ tq } \omega_g(v)=0 \Rightarrow Rad(g) \neq \{0\} \right\}$

③ (V,g) semidefinido positivo

→ Puedo garantizar que $\exists v \neq 0$ tq $\omega_g(v)=0$ ($v \in Rad(g)$)

→ se que $\exists w \in V$ tq $\omega_g(w) > 0$

$B = \{v, w\}$ base ortogonal

$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega_g(w)}} \cdot w, v \right\}$ base ortonormal $\rightarrow M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ (V,g) semidefinida negativa → IGUAL

$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(w)}} \cdot w, v \right\} \rightarrow M(g,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑤ (V,g) indefinida ⟶

$\exists u_1 \in V$ tq $\omega_g(u_1) > 0$
$\exists u_2 \in V$ tq $\omega_g(u_2) < 0$ } u_1 y u_2 l.i

$*$ si $u_1 = \lambda u_2$ $\underbrace{\omega_g(u_1) = \lambda^2 \omega_g(u_2)}_{\text{mismo signo} \rightarrow NO}$

Sin pérdida de generalidad construimos

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_g(u_1)}} \cdot u_1 \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(u_2)}} \cdot u_2$

$\rightarrow B = \{v_1, v_2\}$ base de V $\underbrace{\omega_g(v_1) = 1 \quad \omega_g(v_2) = -1}_{\text{ORTOGONAL}}$

Aplicamos lo del ①:

$$\omega_1 = 1$$
$$\omega_2 = v_2 - \frac{g(v_2,v_1)}{\omega_g(v_1)} \cdot v_1 = v_2 - g(v_2,v_1) \cdot v_1$$

y tenemos que

$$\omega_g(w_1) = 1$$
$$\omega_g(w_2) = g(v_2 - g(v_2,v_1)v_1, v_2 - g(v_2,v_1)v_1) =$$
$$= g(v_2,v_2) - g(v_2,v_1) \cdot g(v_2,v_1) =$$
$$= -1 - g(v_2,v_1)^2 \leq -1 < 0 \rightarrow \text{distinto signo } \omega_g(w_1)$$

Por tanto w_1 y w_2 son l.i y $\perp$: Normalizamos

$z_1 = w_1$
$z_2 = \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(w_2)}} w_2$ } $B' = \{z_1, z_2\}$ Base ortonormal

4) $\dim(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim(V) - \dim(\mathcal{U})$ lo sabíamos ya.

Consideramos $B = \{u_1, \dots u_k\}$ base de $\mathcal{U}$ y ampliamos a

$B' = \{u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n\}$ base de V.

$$\mathcal{U}^{\perp} = \{v \in V \mid g(u,v) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}\} = \{v \in V : g(u_i, v) = 0 \quad \forall i = 1, \dots k\} =$$

se verifica para los de B

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \mid g(u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j, \ i = 1, \dots k \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \, g(u_i, u_j) = 0, \ i = 1, \dots k \right\}$$ → sistema de ecuaciones

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \mid \underbrace{\begin{pmatrix} g(u_1,u_1) & \cdots & g(u_1,u_n) \\ \vdots & & \\ g(u_k,u_1) & \cdots & g(u_k,u_n) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

M son las k primeras filas de $M(g, B')$

Sabemos que M tiene rango k por ser $M(g, B')$ regular.

Luego $\dim(\mathcal{U}^{\perp}) = n - k$

5) Claramente $\underbrace{\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}}_{\{v \in V \mid g(v,v') = 0, \ \forall v' \in \mathcal{U}^{\perp}\}}$, vemos que las dimensiones son =.

$$\dim(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = \dim(V) - \dim(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim(V) - \dim(V) + \dim \mathcal{U} =$$
$$= \dim \mathcal{U}$$

6) $(\mathcal{U} \cap W)^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} + W^{\perp}$

sea $\left.\begin{array}{l} v \in \mathcal{U}^{\perp} + W^{\perp} \\ v' \in (\mathcal{U} \cap W) \end{array}\right\}$ vemos que $g(v, v') = 0$

$$g(v, v') = g(v_1 + v_2, v') = g(v_1, v') + g(v_2, v')$$

$$\dim(\mathcal{U}^{\perp} + W^{\perp}) = \dim(\mathcal{U}^{\perp}) + \dim(W^{\perp}) - \dim(\mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp})$$ 3)

$$= \dim(V) - \dim(\mathcal{U}) + \dim(V) - \dim(W) - \dim((\mathcal{U} + W)^{\perp})$$

$$= 2\dim(V) - \dim(\mathcal{U}) - \dim(W) - \dim(V) + \dim(\mathcal{U} + W)$$

$$= \dim(V) - \underbrace{(\dim(\mathcal{U}) + \dim(W) - \dim(\mathcal{U} + W))}_{\dim(\mathcal{U} \cap W)}$$

$$= \dim(\mathcal{U} + W)^{\perp}$$

7) g_u es no degenerado $\iff \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$.
(los vectores perpendiculares a los de $\mathcal{U}$ sólo pueden ser 0)

es equivalente a $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp) = 0$

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^\perp) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp)$$
$$= \dim \mathcal{U} + \dim V - \dim \mathcal{U} = \dim(V)$$

por lo tanto $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$ y como $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$,

$$\boxed{V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp}$$

OBSERVACIONES:

Si g es no degenerado, hemos probado que

1) $(\mathcal{U}, g_u)$ es no degenerado $\iff V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp \implies (\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$
$(\mathcal{U}^\perp, g_{u^\perp})$ es no degenerado $\iff V = \mathcal{U}^\perp \oplus (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ → son equivalentes.
Por lo tanto si g_u es no degenerado, $g_{u^\perp}$ también

2) Si g es no degenerado y g_u es no degenerado, el suplemento ortogonal es único $(= \mathcal{U}^\perp)$

(D) Supongamos que $V = \mathcal{U} \textcircled{\perp} W$ con $W \neq \mathcal{U}^\perp$
$V = \mathcal{U} \textcircled{\perp} \mathcal{U}^\perp$

$\Rightarrow W \subseteq \mathcal{U}^\perp$ (por def)
$\Leftarrow$ vamos dim $\Rightarrow$ $\dim W = \dim V - \dim \mathcal{U}$, $\dim \mathcal{U}^\perp = \dim V - \dim \mathcal{U}$ $\boxed{W = \mathcal{U}^\perp}$

3) Veamos que las condiciones de "NO DEGENERADA" no se cumplen:
- si g es degenerada, 4) no tiene por qué verificarse.

(D) CONTRAEJEMPLO $\neg g$ degenerado $\iff M(g, B_u)$ regular

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{U} = L(\{(1,0,0), (1,1,1)\})$$

$$\mathcal{U}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} g((1,0,0),(x,y,z)) = 0 \\ g((1,1,1),(x,y,z)) = 0 \end{array} \right\} =$$

$=$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \} = L(\{(1,1,0), (0,0,1)\})$$

$\dim \mathcal{U}^\perp = 2 = \dim \mathcal{U}$ → no verifica 4)

4) Si g es degenerada, 5) no tiene por qué verificarse

(D) $W = L(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$

$$W^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} g((1,0,0), (x,y,z)) = 0 \\ g((0,1,0), (x,y,z)) = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (1,0,0) \cdot M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (0,1,0) \cdot M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} = \quad \left(M \text{ la de antes} \right)$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{array} \right\} = L\{(1,1,1)\}$$

$$(W^\perp)^\perp = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g((1,1,1)(x,y,z)) = 0 \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 = 0 \}$$

↳ no hay ecuación → las coordenadas no verifican nada → Todo $\mathbb{R}^3$.

5) Si g es no degenerada, pero g_u es degenerada, entonces 7) no tiene por qué verificarse

(D) $(\mathbb{R}^3, g)$ $\quad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} = L(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$, y $M(g_u, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ → $\det = 0$ → DEGENERADA

$$\mathcal{U}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (1,0,0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (0,1,0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,1,0)\}) \subseteq \mathcal{U}$$

↓ no es el suplemento

Lo que hace que g_u sea degenerada son los vectores que nos "fastidian" en la 3).

DEFINICIÓN: Sea (V,g) espacio vectorial métrico. Llamaremos RADICAL de g y lo denotaremos por $Rad(g)$ a $V^{\perp}$:

$$\boxed{Rad(g) = \{v \in V : g(u,v) = 0 \quad \forall u \in V\}}$$

PROPOSICIÓN: Si (V,g) es un espacio vectorial métrico, entonces

- g es no degenerada $\iff Rad(g) = \{0\}$
- g es degenerada $\iff Rad(g) \neq \{0\}$

¿CÓMO CALCULAMOS EL RADICAL?

Es exactamente igual a calcular el ortogonal de un subespacio, pero con todos los vectores del espacio.

1. Habíamos visto que si U s.v. de V y $B = \{\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{Base de } U}, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_n}_{\text{Ampliación}}\}$ base de V:

$$U^{\perp} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \mid \underbrace{\left(\quad \right)}_{\substack{k \text{ primeras filas} \\ \text{de } M(g,B)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = 0\}$$

2. y ahora

$$Rad(g) = V^{\perp} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \mid \underbrace{\left(\quad \right)}_{M(g,B) \text{ completa}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dim(Rad(g)) = n - \text{rango}(g)}$$

•) EJEMPLO:

$(\mathbb{R}^3, g)$ $\qquad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$$Rad(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\}$$

$$= L(\{(1,1,1)\})$$

Un vector que está en el radical es perpendicular a sí mismo (LUMINOSO).

Ahora tenemos (V, g) e.v. métrico, sabemos que $V = Rad(g) \oplus W$
observemos que $V = Rad(g) \oplus W$ (es $\perp$ a los de W, y $W \subseteq U$)

1) $g_{Rad(g)} = 0$ → métrica idénticamente nula

2) $g|_W$ = no degenerada

(D) Sea $w \in W$ tq $g(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W$. demostramos que $w = 0$.

Sea $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in Rad(g)$; $v_2 \in W$

$$g(w, v) = g(w, v_1 + v_2) = \cancel{g(w, v_1)}^{0} + \cancel{g(w, v_2)}^{0}$$

Luego $w \in Rad(g) \cap W = \{0\}$ → $\boxed{\text{PARA EJERCICIOS}}$

3) $\dim(W) = \dim(V) - \dim(Rad(g)) = \dim(V) - \dim(V) + rg(g) = rg(g)$

E) CONO DE LUZ:

Sea (V, g) espacio vectorial métrico.

DEFINICIÓN: Diremos que $v \in V$ es un vector luminoso si $g(v, v) = 0$

DEFINICIÓN: Llamaremos CONO DE LUZ al conjunto de todos los vectores luminosos, y lo denotaremos como C_g. C_g será el cono de luz de la métrica g y del espacio vectorial métrico (V, g).

Veremos que en general el cono de luz es un subconjunto, no un subespacio, sólo será s.v. si coincide con $Rad(g)$.

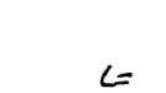
PROPOSICIÓN: (V, g) e.v. métrico, con g semidefinida positiva / negativa, entonces $C_g = Rad(g)$

(D) ⇒ $Rad(g) \subseteq C_g$, si es perpendicular a todos, en particular, lo será a sí mismo.

⇐ sea $v \in C_g$, $g(v, v) = 0$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in V$

$$0 \leq g(\lambda v + u, \lambda v + u) = \lambda^2 \underbrace{\cancel{g(v, v)}^{0}}_{v \in C_g} + 2\lambda\, (g(v, u)) + g(u, u)$$

$= 2\lambda g(v, u) + g(u, u)$ → Recta en el plano, $y \geq 0 \ \forall x$



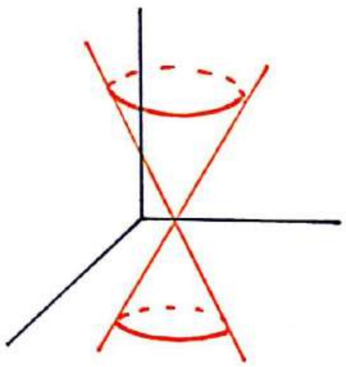
, luego $2\lambda g(v, u) = 0$ y como $\lambda \neq 0 \Rightarrow g(v, u) = 0$
luego $C_g \subseteq Rad(g)$

EJEMPLO: Métrica de Lorenz.

- $(\mathbb{R}^4, g_1) \rightarrow M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ • $(\mathbb{R}^3, g_1) \rightarrow M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

y $C_{g_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=c \}$

Interpretación gráfica:



(Nos imaginamos z constante y vemos su intersección con planos)

*espaciales → fuera del cono
*Temporales → dentro del cono

DEFINICIÓN: Si $v \in V$ tal que $g(v,v) > 0$ se dice que es un vector ESPACIAL
Si $v \in V$ tal que $g(v,v) < 0$ se dice que es un vector TEMPORAL.

F) ISOMORFISMOS MUSICALES

Sea (V, g) espacio vectorial métrico. Definimos

$$\phi: V \longrightarrow V^*$$
$$v \longmapsto \varphi_v : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

¡Ojo! si g no degenerada, V y V^* son isomorfos

donde $\varphi_v : V \longrightarrow \mathbb{R}$
$u \longrightarrow g(u,v) \quad \rightarrow \quad \varphi_v(u) = g(u,v)$

- Comprobamos la linealidad de $\varphi_v \in V^*$:

$$\varphi_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) = \alpha \varphi_v(u_1) + \beta \varphi_v(u_2)$$

- Comprobamos la linealidad de ϕ

$$\phi(\alpha v_1 + \beta v_2)(u) = \phi_{\alpha v_1 + \beta v_2}(u) = g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2) = \alpha \varphi_{v_1}(u) +$$
$$\beta \varphi_{v_2}(u) = \alpha \phi(v_1) + \beta \phi(v_2)$$

PROPOSICIÓN : ϕ es isomorfismo $\Leftrightarrow$ g es no degenerada

(D) ϕ isomorfismo $\Rightarrow$ ϕ inyectiva $\Rightarrow$ $\ker(\phi) = \{0\}$

$\ker(\phi) = \{ v \in V : \varphi_v = 0 \} = \{ v \in V \mid \varphi_v(u) = 0 \ \forall u \in V \} =$

$= \{ v \in V : g(u,v) = 0 \ \forall u \in V \} = Rad(g)$

y ϕ isomorfismo $\Leftrightarrow \ker(\phi) = Rad(g) = \{0\} \Leftrightarrow$ g no degenerada

• $M(\phi, B, B^*) = M(g, B)$

(D) sea $B = \{v_1, \dots v_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$M(g,B)_{(i,j)} = g(v_i, v_j)$

$M(\phi, B, B^*)_{(i,j)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_i \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ → coordenada i de $\varphi(v_j)$

↳ $\varphi(v_j) = \alpha_1\varphi^1 + \dots + \alpha_i\varphi^i + \dots + \alpha_N\varphi^N$

y $\phi(v_j)(v_i) = \alpha_i = g(v_i, v_j)$

• $\phi^{-1}(\varphi)$ es el único vector de V que verifica que, por definición

$g(v, \phi^{-1}(\varphi)) = \varphi(v) \ \forall v \in V$

(D)

$\phi \circ \phi^{-1}(\varphi)(v) \Rightarrow$

$\varphi(v) = \phi(\underbrace{\phi^{-1}(\varphi)}_{\text{vector}})(v) = g(v, \phi^{-1}(\varphi))$

Demostramos la unicidad.

Supongamos que $\exists u \in V$ tal que

$g(v,u) = \varphi(v) \ \forall v \in V$

De aquí $g(v,u) = g(v, \phi^{-1}(\varphi))$

$g(v,u) - g(v, \phi^{-1}(\varphi)) = 0$

$g(v, \underbrace{u - \phi^{-1}(\varphi)}) = 0$

es perpendicular a todos los de U, pero la métrica es no degenerada

$u - \phi^{-1}(\varphi) = 0 \Rightarrow u = \phi^{-1}(\varphi)$

Sean $\varphi, \psi \in V^*$. $\varphi(\Phi^{-1}(\psi)) = \psi(\Phi^{-1}(\varphi))$

y además se verifica:

$$\varphi(\Phi^{-1}(\psi)) = g(\Phi^{-1}(\psi), \Phi^{-1}(\varphi))$$
$$\psi(\Phi^{-1}(\varphi)) = g(\Phi^{-1}(\varphi), \Phi^{-1}(\psi))$$

D Se dice que Φ y Φ^{-1} son isomorfismos musicales.

El isomorfismo $\overline{\Phi}$, se llama:

$* \ \Phi(u)(v) = \overline{\Phi}(v)(u)$

$$\Phi: \flat : V \longrightarrow V^* \qquad \rightarrow \text{bemol}$$
$$v \longrightarrow v^\flat$$

$$\Phi^{-1}: \# : V^* \longrightarrow V \qquad \rightarrow \text{sostenido}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi^\#$$

Cuando se escriben en bases, se pueden ver estos isomorfismos como "bajar" o "subir" los subíndices.

2.3: BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES. LEY DE INERCIA DE SYLVESTER. CRITERIO DE SYLVESTER

A) BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES.

Sea (V,g), $\dim(V)=n$

(D) Sea $B=\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ un subconjunto finito de vectores de V. Se dice que B es un subconjunto ORTOGONAL de V si

$$\forall i,j \in \{1,\dots,k\},\ i\neq j \quad v_i \perp v_j \Rightarrow g(v_i,v_j)=0$$

(D) Se dice que B es un subconjunto ORTONORMAL si B es ortogonal y $\omega_g(v_i)=\{-1,0,1\}$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$.

DEFINICIÓN: B es una base ortogonal de V si B es base de V y B es subconjunto ortogonal de V, es decir

$$M(g,B)=\text{matriz diagonal}.$$

DEFINICIÓN: B es una base ortonormal de V si B es una base de V y B es un subconjunto ortonormal de V, es decir

$$M(g,B)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0_r \end{array}\right) \quad \text{donde } p+q+r=n$$

! HAY QUE ORDENAR LA BASE

OBSERVACIONES

① A partir de un subconjunto ortogonal se puede obtener un subconjunto ortonormal normalizando los vectores.

¿QUÉ ES NORMALIZAR? $\omega_g(v)\neq 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{\omega_g(v)}}\cdot v & \text{si } \omega_g(v)>0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(v)}}\cdot v & \text{si } \omega_g(v)<0 \end{array}\right\} \quad \omega_g(v')=\{1,1'\}$$

② Sea $B=\{u_1,u_2,\dots u_p, v_1,v_2,\dots v_q, w_1,w_2,\dots,w_r\}$ base ortonormal de (V,g)

$$M(g,B)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0_r \end{array}\right) \quad n=p+q+r$$

2.1. $\mathrm{Rad}(g)=L(\{w_1,w_2,\dots w_r\})=U$

(D) Como B ortonormal, perpendiculares a todos (ellos mismos)
Comprobamos que es base; todos están a partir de una de U:

$\dim(\mathrm{Rad}(g))=r$
$\dim L(\{w_1,\dots w_r\})=r$ } INCLUSIÓN

2.2) $u = (a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots\ b_q, c_1, c_2, \ldots\ c_r)_B$
$v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)_B$

Entonces $g(u,v) = \sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i - \sum_{j=1}^{q} b_j \beta_j$ y la forma cuadrática asociada:

$$\omega_g(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2$$

2.3) Suponemos ahora que $r=0 \Rightarrow Rad(g) = \{0\}$

(E) Sea $w \in V$, calcula las coordenadas de w respecto de B.

$$w = \sum_{i=1}^{p} d_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j$$

multiplicamos por la métrica:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = g(w, u_1) \\ d_2 = g(w, u_2) \\ \vdots \\ d_i = g(w, u_i) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} d_i = g(w, u_i) & \text{si } i \leq p \\ \mu_j = g(w, v_j) & \text{si } j \leq q \end{array}$$

Los vectores de la base son perpendiculares entre ellos.

(3) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ subconjunto ortogonal de (V, g)

$\omega_g(v_i) \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \Rightarrow B$ es linealmente independiente

· Demostración

$$\sum_{i=1}^{k} d_i v_i = 0 \quad \rightarrow \text{combinación lineal } = 0$$

El producto de ese vector con cada uno:

$$g\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} d_i v_i}_{=0}, v_j\Big) = 0 \quad j \in \{1, \ldots, k\}$$

, entonces $\sum_{i=1}^{k} d_i\, g(v_i, v_j) = 0 \quad j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i\, g(v_i, v_j) = d_j\, g(v_j, v_j)$$

hipótesis $\omega_g(v_j) \neq 0 \Rightarrow d_j = 0 \rightarrow$ LINEALMENTE INDEP.

$$M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S$$

Cuenta para el examen (aleatoria)

Sea $P^t \cdot S \cdot P$: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ si se cambian los signos de la diagonal, al final salen 1.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿QUÉ SIGNIFICAN LOS 0? Los vectores son luminosos, existe base de luminosos.

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \\ t_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \end{aligned}\right\} \quad C_g = L(\{t_1, t_2\})$$

CLASIFICAR MÉTRICAS SEGÚN LO VISTO EN LA DEMOSTRACIÓN

Sea (V, g) $\dim(V) = 2$

$M(g, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, según si es congruente a

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → EUCLÍDEA ② $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ DEF $\ominus$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → SEMIDEFINIDA $\oplus$ ④ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ SEMIDEF $\ominus$

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ INDEFINIDA

= rango y signo del determinante

ANALIZAMOS LA DIAGONAL:

- det = 0 → congruente a ③ o ④
- det < 0 → " a ⑤
- det > 0 → " a ① o ②

Seguimos con la demostración por inducción

Supongamos que es cierto para $\dim(V) \leq n$ y demostraremos que es cierto para $\dim(V) = n+1$

- (V, g) $\dim(V) = n+1$

Distinguimos dos casos :

1) (V,g) degenerado $\Rightarrow$ Rad (g) tiene dim ≥ 1

$\rightarrow$ Sea $\mathcal{U}$ complementario de Rad(g) $\Rightarrow$ $V = \mathcal{U} \oplus \text{Rad}(g)$

$g|_{\mathcal{U}}$ es no degenerada

$(\mathcal{U}, g|_{\mathcal{U}})$, $\dim(\mathcal{U}) = \dim(V) - \dim(\text{Rad}(g)) \leq \dim(V) - 1 = n$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN $\rightarrow \exists B$ base ortonormal de $(\mathcal{U}, g|_{\mathcal{U}})$

Sea B' base de Rad(g)

$B' \cup B$ $\rightarrow$ Base ortonormal de V $\rightarrow$ perpendiculares (é Rad(g))

2) (V,g) no degenerado

$g \neq 0$ $\exists v \in V$ tq $\omega_g(v) \neq 0$

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\omega_g(v)}} v & \text{si } \omega_g(v) > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\omega_g(v)}} v & \text{si } \omega_g(v) < 0 \end{cases} \quad \mathcal{U} = L(\{\omega\})$$

y tenemos (! SOLO si $g|_{\mathcal{U}}$ NO DEGENERADA) que

$V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$

$\boxed{\text{La matriz de } g \text{ en } \omega \text{ es } \{1, -1\}}$

$\dim(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim(V) - \dim(\mathcal{U}) = n$

Por tanto

$(\mathcal{U}^{\perp}, g|_{\mathcal{U}^{\perp}})$ $\dim(\mathcal{U}^{\perp}) \leq n$ $\rightarrow$ HIP. DE INDUCCIÓN

$\exists B$ base ortonormal de $(\mathcal{U}^{\perp}, g|_{\mathcal{U}^{\perp}})$

$B' = B \cup \{\omega\}$ base de V $\rightarrow$ ORTONORMAL

(P) Sea (V,g) plano métrico, B base de V, $A = M(g,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

- g es euclídea $\Leftrightarrow \det(A) > 0$ y $a_{11} > 0$ ($\Leftrightarrow$ traza > 0)
- g es definida negativa $\Leftrightarrow \det(A) > 0$ y $a_{11} < 0$
- g es semidefinida ~~negativa~~ $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ y $\begin{cases} a_{11} > 0 \text{ ó} \\ a_{22} > 0 \end{cases}$
- g es semidefinida negativa $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ y $\begin{cases} a_{11} < 0 \text{ ó} \\ a_{22} < 0 \end{cases}$
- g es indefinida $\Leftrightarrow \det(A) < 0$

RESUMEN DEM

¿CÓMO OBTENER BASES ORTONORMALES?

① y ②
- → Cogemos u, v independientes → $B = \{v, u\}$
- → Obtenemos v' tq $u \perp v'$ → $B' = \{u, v'\}$ ortogonal
- → Normalizamos

③ y ④
- → $v \in Rad(g)$ y otro w tq $\omega_g(w) \neq 0$
- → $B = \{w, v\}$ ortogonal
- → Normalizamos

⑤
- → $u, v \in V$ tq $\omega_g(u) > 0$ y $\omega_g(v) < 0$
- → Obtenemos u' tq $u' \perp v$
- → Normalizamos

FORMAS DE CALCULAR BASES ORTONORMALES

1). DIAGONALIZACIÓN

Si $f \in End(V)$ es diagonalizable $\Rightarrow \exists B$ base de vectores propios

↓

MATRICES

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix}$$

$\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq $\det(P) \neq 0$
y si A simétrica, $\boxed{P^{-1} = P^t}$

Es decir, las matrices simétricas se pueden diagonalizar por semejanza y congruencia.

A) Cogemos los vectores propios y ordenamos según $\begin{pmatrix} \oplus & | & \ominus & | & 0 \end{pmatrix}$

B) Transformamos la matriz para que aparezcan $1, -1, 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{-d_i}} \end{pmatrix} \cdot P^t \cdot A \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{-d_i}} \end{pmatrix}}_{\text{Entonces la matriz es la base ortonormal}} = \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & -I & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$

OBSERVACIÓN: A veces es necesario cuantificar los $1, -1$ y 0 que aparecen en $\mathcal{M}(g, B)$ (B ortonormal), la cantidad de $1, -1$ y 0 está directamente relacionado con los valores propios

la cantidad de: $\oplus$ = a_λ si $\lambda > 0$
$\ominus$ = a_λ si $\lambda < 0$
0 = multiplicidad del 0
} raíces de $p_A(\lambda)$.

Se relacionan mediante el MÉTODO DE LOS SIGNO DE DESCARTES:

Sea $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ $\deg(p(x)) = n \geq 1$

$p(x) = a_n (x-\lambda)^{m_1} \dots (x-\lambda_k)^{m_k}$ donde $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$, $m_1 \dots m_k \in \mathbb{N}$ y $m_1 + \dots + m_k = n$

Suponemos ahora:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$r_+(p(x))$ = número de raíces positivas de $p(x)$ contada en su multiplicidad.

$V(p(x))$ = variaciones de signo entre coeficientes consec.

Entonces

$r_+(p(x)) = V(p(x))$ = nº de 1

$r_-(p(x))$ = multiplicidad$_0$ $- r_+(p(x))$

EJEMPLO

Dada $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ calcula una base ortonormal

tenemos una matriz de la forma del ejercicio 21 c):
$a = -2$ $b = 5$, por tanto

$P^t(A) \cdot P = \begin{pmatrix} -7 & & & & 0 \\ & -7 & & & \\ & & -7 & & \\ & & & -7 & \\ 0 & & & & 18 \end{pmatrix}$ y aprovechamos 21 c)

por tanto

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -3/\sqrt{3} & 1/2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 4/2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ P^t = traspuesta

y normalizamos

$$P'_{norm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{28}\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{7}\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{28}\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{28}\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{28}\sqrt{5}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{7}\,2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}\,2\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{28}\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{-4}{\sqrt{7}\,2\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P'^t M(g, B_u) \cdot P' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

---

2. Gauss

Hay que encontrar $P' \in Gl_n(\mathbb{R})$ tal que $P'^t \cdot M(g, B_u) \cdot P' = \begin{pmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

transformamos A por Gauss

⚠ Las transformaciones por filas se tienen que aplicar también a columnas:

$$A \to \begin{array}{l|l} F_2 \to F_2 + 5/2 F_1 & C_2 \to C_2 + 5/2\, C_1 \\ F_3 \to F_3 + 5/2 F_1 & C_3 \to C_3 + 5/2\, C_1 \\ F_4 \to F_4 + 5/2 F_1 & C_4 \to C_4 + 5/2\, C_1 \\ F_5 \to F_5 + 5/2 F_1 & C_5 \to C_4 + 5/2\, C_1 \end{array} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 21/2 & 35/2 & 35/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 21/2 & 35/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 35/2 & 21/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 35/2 & 35/2 & 21/2 \end{pmatrix} \Bigg\| \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21/2 & 35/2 & 35/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 21/2 & 35/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 35/2 & 21/2 & 35/2 \\ 0 & 35/2 & 35/2 & 35/2 & 17/2 \end{pmatrix}$$

→ le hacemos los mismos cambios a I_N

↓

En este caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$ → las columnas del final forman la base ORTONORMAL

→ **PROPOSICIÓN:**

Sea (V, g) tq $\dim(V) = n$ $g \neq 0$, B base ortonormal tal que

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad p+q+r = n \quad \begin{cases} p, q, r \geq 0 \\ p, q, r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$B = \{u_1, u_2, \ldots u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q, w_1, w_2, \ldots w_n\}$

$v = (x_1 x_2, \ldots x_p, y_1, y_2, \ldots y_q, z_1, z_2, \ldots z_r)_B$, y tenemos que

$\omega_g(v) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_q^2$

Entonces podemos clasificar la métrica:

- g es euclídea $\Leftrightarrow p = n$, $q = r = 0$
- g es def. negativa $\Leftrightarrow q = n$, $p = r = 0$
- g es semidef. positiva $\Leftrightarrow q = 0$ $r > 0$
- g es semidef negativa $\Leftrightarrow p = 0$ $r > 0$
- g indefinida $\Leftrightarrow p > 0$ y $q > 0$
- g degenerada $\Leftrightarrow r > 0$
- g no degenerada $\Leftrightarrow r = 0$

Si tenemos una métrica (V, g) clasificada y $(U, g|_U)$, entonces si g es:

- euclídea $\rightarrow$ $g|_U$ es euclídea
- definida negativa $\rightarrow$ $g|_U$ es definida negativa
- semidefinida positiva/negativa $\rightarrow$ dependiendo de como sea U con respecto al Radical
  - $U \cap Rad = \{0\}$ $g|_U \rightarrow$ definida/pos-neg
  - $U \cap Rad \neq 0$ $g|_U$ semidefinida +/-
  - $U \subseteq Rad$ $g = 0$
- indefinida $\rightarrow$ $g|_U$ puede ser de cualquier tipo

---

TEOREMA:

Sea (V, g) e.v. métrico y B y B' bases ortonormales de V. Se verifica que

$$\boxed{M(g, B) = M(g, B')} \qquad \boxed{T.2}$$

(D) $M(g, B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$ y $M(g, B') = \begin{pmatrix} I_{p'} & & \\ & -I_{q'} & \\ & & 0_{r'} \end{pmatrix}$

donde $p+q+r = n = p'+q'+r'$ $\quad (p, p', q, q', r, r' \in \mathbb{Z} \geq 0)$

Basta con ver que $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$

$\rightarrow$ Vemos $r = r' =$ nulidad (g) $\rightarrow$ no depende de la base, sino de la métrica.

Distinguimos varios casos:

a) • $g = 0$ $\rightarrow$ $r = n = r'$

b) • g euclídea $\quad q = 0 = q'$ $\Rightarrow$ $p = p'$ $\rightarrow$ diagonal todo 1

c) • g def negativa $\rightarrow$ $p = p' = 0$ $\Rightarrow$ $q = q'$ $\rightarrow$ diagonal todo -1

d) • g semidef pos $\rightarrow$
$q = q' = 0$ $\rightarrow$ $p = p'$ $\rightarrow$ rango de métrica

*VER RESULTADO AL FINAL

e) g semidefinida negativa

$p = p' = 0 \qquad q = q'$

Análogo al caso g cambiando

$B = \{v_1, \dots v_q, w_1, \dots w_r\} \qquad U = L(\{u_1, \dots u_q\})$

$M(g|_U, U) = -I_q \qquad g|_U$ definida negativa

f) g indefinida

$p, p', q, q' > 0, \quad p+q = p'+q'$

RESULTADO ÚTIL

(d) g semidefinida positiva $\rightarrow B = \{u_1, u_2, \dots, u_p, w_1, w_2, \dots, w_r\}$

$U = L(\{u_1, \dots, u_p\})$

Entonces $M(g|_U, U) = I_p \Rightarrow g|_U$ euclídea

y tenemos que

$$\boxed{p = \max\left\{ \dim(U) \,\middle|\, \begin{array}{l} U \text{ sv de } V \\ g|_U \text{ euclídea} \end{array} \right\}}$$

(D) Como hemos visto que $g|_U$ euclídea, entonces $p \leq \max\{\dots\}$

Supongamos ahora $\max\{\dots\} > p$. Entonces $\exists W$ sv de V tal que $g|_W$ es euclídea $\dim(W) = \max\{\dots\} > p$

Razonamos por reducción al absurdo:

Sea $W + Rad(g)$

$\dim(W + Rad(g)) = \dim(W) + \underbrace{\dim(Rad(g))}_{\text{nulidad}}$ → suma directa

$g|_{W+Rad(g)}$ es semidefinida positiva (vector no nulo del radical y por bilinealidad $\omega_g(w+p) = \omega_g(w) \geq 0$

p → perpendicular a todo

y $\dim(U \cap (W + Rad(g))) = \dim(U) + \dim(W + Rad(g)) -$

$- \dim(U + (W + Rad(g))) \geq \dim(U) + \dim(W + Rad(g)) - N =$

$= \dim(U) + \dim(W) + \text{Nulidad}(g) - N >$

$> \dim(U) + p + \text{nulidad}(g) - N = \dim(U) + p + r - N = \dim(U)$

ABSURDO $\rightarrow \dim(U \cap (W + Rad(g))) > \dim(U)$

(e) g semidefinida negativa $\rightarrow B = \{v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r\}$

$U = L(\{v_1, \dots, v_q\})$

$M(g|_U, U) = -I_p \Rightarrow g|_U$ definida negativa

$$\boxed{q = \max\left\{ \dim(U) \,\middle|\, \begin{array}{l} U \text{ sv de } V \\ g|_U \text{ def } \ominus \end{array} \right\}}$$

(f) g indefinida

$p = \max\left\{ \dim(U) \,\middle|\, \begin{array}{l} U \text{ sv de } V \\ g|_U \text{ euclídea} \end{array} \right\}$ $\quad q = \max\left\{ \dim(U) \,\middle|\, \begin{array}{l} U \text{ sv de } V \\ g|_U \text{ def } \ominus \end{array} \right\}$

(D) $U = L(\{u_1, u_2, \dots u_p\}$

$M(g|_U, U) = I_p$

· REDUCCIÓN AL ABSURDO

·) $p <$ max $\to \exists w$ sub de V, $g|_W$ euclídea $\dim(W) > p$

$Z = L(\{v_1, v_2, \dots v_q, w_1, \dots w_r\})$

$\dim(Z) = q + r \Rightarrow g|_Z \begin{cases} \to \text{def } \ominus & \text{si } r = 0 \\ \to \text{semidf } \ominus & \text{si } r > 0 \end{cases}$

$\dim(W \cap Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W + Z) > p + q + r - N = 0$

$\exists\, t \in W \cap Z \quad t \neq 0$ Analizamos t

$\omega_g(t) > 0 \quad (t \in W \quad t \neq 0)$

$\omega_g(t) \leq 0 \quad (t \in Z)$

·) La demostración para q es análoga pero Z está generado por V.

B) CLASIFICACIÓN DE MÉTRICAS.

Sea (V, g) e.v. métrico, $\dim(V) = n$

- $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V y $M(g, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$

Analizamos los MENORES ANGULARES ($\square$)

$U_1 = L(\{v_1\}) \subseteq U_2 = L(\{v_1, v_2\}) \subseteq U_3 = L(\{v_1, v_2, v_3\}) \dots \subseteq U_N = L(\{v_1, \dots v_N\}) = V$

y tenemos ahora:

$M(g|_{U_1}, U_1) = a_{11}$; $M(g|_{U_2}, U_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ...

Por tanto, llamaremos menores angulares a los determinantes de cada $M(g|_{U_i}, U_i) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$,

así

$\alpha_1(g, B) = \det a_{11}$, $\alpha_2(g, B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

¿QUÉ NOS DICEN LOS MENORES SOBRE LA MÉTRICA?

→ Si todos los $\alpha_i(g, B)$ son $\oplus \Rightarrow P^t M(g, B) \cdot P = I_n \to$ euclídea

→ Todos los $\alpha_i(g, B) = (-1)^{i+j} \Leftarrow P^t (M(g, B)) \cdot P = -I_n \to$ def $\ominus$

g euclídea $\Rightarrow \alpha_k(g, B) > 0$ y g d.$\ominus \Rightarrow \alpha_k(g, B) \cdot (-1)^k > 0$

C) TEOREMA DE SYLVESTER

COROLARIO: Sea $A \in S_2(\mathbb{R})$, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ $, p, q \geq 0$ tales que $p+q = n$ que sólo dependen de A y existen $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tales que

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_{n-(p+q)} \end{pmatrix}$$

Además, q = índice de g_A
$p+q$ = rango (g_A)

COROLARIO: Sean $A, B \in S_1(\mathbb{R})$. Son equivalentes

1) A y B congruentes
2) rango (A) = rango (B)
índice (A) = índice (B)

(CARACTERIZACIÓN DE CONGRUENCIA)

D $2 \Rightarrow 1)$ índice $(g) = q$ rango $= p+q$

$$P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0_r \end{array}\right) \quad P \in Gl_n(\mathbb{R})$$

$$\text{II}$$

$$Q^t \cdot B \cdot Q = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0_{n-(p+q)} \end{array}\right) \quad Q \in Gl_n(\mathbb{R})$$

$\Bigg\}$ B y A son congruentes

$1 \Rightarrow 2$ A y B son congruentes $\Rightarrow P^t \cdot A \cdot B = B$, $P \in Gl_n(\mathbb{R})$

$A \rightsquigarrow g_A$ (asociamos g_A a A)

$M(g_A, B_u) = A \rightarrow M(g_A, B') = B$

y como el índice y el rango no dependen de la base, coinciden

TEOREMA: LEY DE INERCIA DE SYLVESTER: En todo espacio vectorial métrico existen bases tales que la matriz de la métrica en dichas bases es diagonal, y en la diagonal aparecen solo $1, -1, 0$. Además, el número de $1, -1$, y 0 no depende de la base, sino que sólo depende de la métrica.

D Teorema 1 + Teorema 2

DEFINICIÓN: Llamaremos ÍNDICE DE LA MÉTRICA a la cantidad de -1 de $M(g,B)$,

si $M(g,B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$, $\text{índice}(g) = q$, $(q \in \mathbb{Z},\ 0 \leq q \leq \text{rango}(g) \leq n)$

COROLARIO: Sea (V,g) espacio métrico de $\dim(V) = n$, $g \neq 0$, se verifican:

(1) g es definida positiva $\Leftrightarrow$ $\text{rango}(g) = n$; $\text{índice}(g) = 0$

(2) g es definida negativa $\Leftrightarrow$ $\text{rango}(g) = \text{índice}(g) = n$

(3) g es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $\text{rango}(g) < n$, $\text{índice}(g) = 0$

(4) g es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $\text{rango}(g) = \text{índice}(g) < n$

(5) g es indefinida $\Leftrightarrow$ $0 < \text{índice}(g) < \text{rango}(g)$

COROLARIO: Sea V e.v real, $\dim(V) = n$ y ω una forma cuadrática sobre V. Existen $p, q \in \mathbb{Z}$; $p, q \geq 0$; $p+q = n$, que sólo dependen de ω y una base B de V tales que si $v \in V$:

1) $\omega(v) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_q^2$

con $v = (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q, z_1, z_2, \dots, z_r)_B$

2) Además $q = \text{índice}(\omega)$ y $p+q = \text{rango}(\omega)$

Todo lo que hemos hecho con formas bilineales se puede aplicar a cuadráticas.

TEOREMA: Criterio de Sylvester

Sea (V, g) un espacio métrico de $\dim(V) = n > d$. Se verifican:

a) Son equivalentes

i) g es euclídea

ii) $\forall B$ base de V, $\alpha_k(g, B) > 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$

iii) $\exists B$ base de V : $\alpha_k(g, B) > 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$

b) Son equivalentes

i) g es definida negativa

ii) $\forall B$ base de V, $(-1)^k \alpha_k(g, B) > 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$

iii) $\exists B$ base de V, $(-1)^k \alpha_k(g, B) > 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$

Demostración:

$$M(-g \mid L(\{v_1, \dots v_k\}), \dots \{v_1, \dots v_k\}) = \begin{pmatrix} -g(v_1, v_1) & -g(v_1, v_2) & -g(v_1, v_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$-M(g|_{L(\{v_1, \dots v_k\})}, \{v_1, \dots v_k\})$$

Seguidamente utilizamos (a)

iii) $\Rightarrow$ i) Lo realizamos por inducción sobre n:

① $n = 1$ (V, g) $\dim(V) = 1$

$B = \{v\}$ $\alpha_1(g, B) > 0$

$$\alpha_1(g,B) = \det(M(g, \{v\})) = \det(\omega_g(\vec{v})) = \omega_g(v) > 0$$

y $\forall w \in V$, $w = \lambda v$

$$\omega_g(w) = \lambda^2 \omega_g(v) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \Rightarrow g \text{ euclídea} \\ = 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

② Supongamos que es cierto para cualquier espacio vectorial de $\dim \leq n$:

$(n \geq 1) \overset{?}{\Rightarrow}$ iii) $\Rightarrow$ i) es cierto para cualquier espacio vectorial de dimensión $n+1$.

Sea (V, g), $\dim(V) = n+1$

$\exists B = \{v_1, v_2, \dots v_{n+1}\}$ base de V tal que

$$\alpha_k(g, B) > 0 \ \forall k \{1, \dots, n+1\}$$

$U = L(\{v_1, v_2, \dots v_n\})$ $\dim(U) = n$

$(U, g|_U) \to B' = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ base de U $\overset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$ $g|_U$ es euclídea

$$\alpha_k (g|_U, B') = \alpha_k (g, B) > 0$$

(1) $1 \leq k \leq n$

$\exists B'' = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$ base de U y $M(g|_U, B'') = I_n$

$\alpha_{n+1}(g, B) > 0 \Rightarrow g$ es no degenerada

Esto implica que

$$V = U \oplus U^{\perp} \Rightarrow \dim(U^{\perp}) = n+1-n = 1$$

$$U^{\perp} = L(\{z\})$$

Entonces $g|_{U^{\perp}}$ es no degenerada, luego g puede ser definido positiva o negativo.

Normalizando, $\omega_g(z) = \pm 1$

$B''' = \{w_1, w_2, \dots w_n, z\}$ Base de V

$$M(g, B''') = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \\ \hline & \pm 1 \end{array}\right) \approx M(g, B'') = I_{n+1}$$

$\Downarrow$

$(*)$

y $\det(M(g, B'')) > 0$ porque $\alpha_{n+1}(g, B) > 0$ por congruencia. Entonces no queda duda de que $\omega_g(z) = 1$, por tanto g es euclídea

¡EXAMEN: ¿CUÁL SERÍA EL CRITERIO DE SYLVESTER PARA UNA MÉTRICA SEMIDEFINIDA POSITIVA?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumpliría que $\alpha_k(g, B) \geq 0$ pero no es semidefinida positiva

- Si cualquier menor es $\geq 0 \Rightarrow$ ¿g es semidefinida positiva?

No pide la demostración, ¿esto es suficiente por que g sea semidef $\oplus$?, hay que exigir algo más.

2.4. ISOMETRÍAS ENTRE ESPACIOS VECTORIALES MÉTRICOS

DEFINICIÓN: Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos y sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación. Se dice que f es una isometría si f verifica

i) f es un isomorfismo

ii) $g'(f(u), f(v)) = g(u, v) \quad \forall\, u, v \in V$

Se dice que (V, g) y (V', g') son isométricos si existe $f: (V, g) \longrightarrow (V', g')$ isometría. Además, todo espacio métrico es isométrico a sí mismo.

Denotaremos por

$$\mathrm{Iso}\,(V, g) = \{ f: (V, g) \longrightarrow (V', g') \; : \; f \text{ es una isometría} \}$$

(P) Se verifica $g'(f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v), f(w)) = 0$ para cualquier f que verifique ii), $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(D) Sean (V, g) y (V', g') y $f: V \longrightarrow V'$ que verifica ii)
Sean $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$g'(f(\lambda u + \mu v) - f(u)\cdot\lambda - \mu\cdot f(v), f(w)) = g'(f(\lambda u + \mu v), f(w)) -$$
$$- \lambda g'(f(u), f(w)) - \mu g'(f(v), f(w)) = g(\lambda u + \mu v, w) -$$
$$- \lambda g(u, w) - \mu g(v, w) = g(\lambda u + \mu v - \lambda u - \mu v, w) = g(0, w) = 0$$

COROLARIO: También se verifica

$$\omega_g(f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)) = 0$$

(P) Sean (V, g) y (V', g') dos espacios métricos y sea $f: V \longrightarrow V'$ que verifica ii)
Se verifican entonces:

i) si (V, g) y (V', g') son no degenerados y f es sobreyectiva $\Rightarrow f$ es isometría

ii) si (V, g) y (V', g') son euclídeos de la misma dimensión $\Rightarrow f$ es isometría

DEMOSTRACIÓN: en ambos caso hay que demostrar que es un isomorfismo

i) f es lineal ?

$$g'\left(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu(f(v)),\, z\right)=0 \qquad \forall u,v\in V,\ z\in V' \quad \mu,\lambda\in\mathbb{R}$$

(V',g') es no degenerado

Se lo aplicamos a cualquier vector del codominio → SOBREYECTIVA
$\exists$ algún y tal que $f(y)=z$

Luego f es lineal

f inyectiva ?

$f(u)=0 \Rightarrow g'(f(u),f(v))=g(u,v)=0 \quad \forall v\in V$ → como g es no degenerada, $u=0$

ii) Si tienen la misma dimensión, basta con probar que es inyectivo para que también se configure la sobreyectividad.

$f(u)=0 \to \omega_{g'}(f(u))=g'(f(u),f(u))=g(u,u)=\omega_g(u) \Rightarrow 0$

y como g es euclídeo (resp. def $\ominus$), es inyectiva $\boxed{u=0}$

* AÑADIR DEMOSTRACIÓN LINEALIDAD

B) MATRICES DE ISOMETRÍAS

Tenemos (V,g) y (V',g') tal que $\dim V=n$ y $\dim V'=m$ y $f: V\to V'$ app lineal que verifica ii)

Sean $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ y $B'=\{v_1,\dots v_m\}$ bases de V y V' resp.

¿CÓMO OBTENEMOS $M(f,B,B')$?

Sean $u,v\in V$ $\quad u=(x_1,\dots x_n)_B \quad v=(y_1,\dots y_m)_B$

$$f(u)=M(f,B,B')\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_B \qquad f(v)=M(f,B,B')\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}_{B'}$$

entonces para sacar $g(u,v)$:

$$g(u,v)=(x_1\dots x_n)\cdot M(g,B)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

II

$$g'(f(u),f(v))=\underbrace{(x_1,\dots x_n)\cdot M(f,B,B')^t}_{[f(x)]^t \text{ (tiene que ser fila)}}\cdot M(g',B')\cdot M(f,B,B')\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

Entonces $M(g,B) = M(f,B,B')^t \cdot M(g',B') \cdot M(f,B,B')$

PROPOSICIÓN: Sean (V,g) y (V',g') espacios vectoriales métricos y $f: V \longrightarrow V'$ un isomorfismo. Son equivalentes

a) f es isometría

b) $\omega_{g'}(f(u)) = \omega_g(u) \quad \forall u \in V$

c) $\forall$ B base de V y B' base de V'

$$M(g,B) = M(f,B,B')^t \cdot M(g',B') \cdot M(f,B,B')$$

d) $\exists$ B base de V y B' base de V' tal que

$$M(g,B) = M(f,B,B')^t \cdot M(g',B') \cdot M(f,B,B')$$

DEMOSTRACIÓN

a) $\Rightarrow$ b) Partimos de un isomorfismo

$$\omega_{g'}(f(u)) = g'(f(u), f(u)) = g(u,u) = \omega_g(u) \quad \forall u \in V$$

b) $\Rightarrow$ a)

$$\omega_g(f(u), f(v)) \overset{?}{=} g(u,v) \quad \forall u,v \in V$$

Sacamos la métrica desde la forma cuadrática

ii) $\frac{1}{2}\left(\omega_g(f(u)+f(v)) - \omega_{g'}(f(u)) - \omega_g(f(v))\right) =$

$= \frac{1}{2} \omega_g(u+v) - \omega_g(u) - \omega_g(v) = g(u,v)$

a) $\Rightarrow$ c) HECHO ANTES

c) $\Rightarrow$ d) HECHO ANTES

d) $\Rightarrow$ e) HECHO

d) $\Rightarrow$ a) Cuando queramos construir isometrías cogemos una app entre bases ortonormales.

! **EXAMEN** $\rightarrow$ Supongamos f entre espacios vectoriales tal que verifica ii), ¿f es lineal? $\boxed{\text{FALSO}}$

Si es lineal es isomorfismo

$$\omega_g(f(u)) = \omega_g(u)$$

$\downarrow$

Si f lineal / isometría $\rightarrow$ es inyectiva $\rightarrow$ isomorfismo

La forma cuadr. del contraejemplo es $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

¿CUÁNDO ALGO ES ISOMETRÍA?

OjO COROLARIO: Sean (V, g) y (V', g') espacios métricos tales que $\dim(V) = \dim(V')$ y $\begin{cases} \text{rango}(g) = \text{rango}(g') \\ \text{índice}(g) = \text{índice}(g') \end{cases}$, sea $f: V \longrightarrow V'$ aplicación lineal.

Son equivalentes:

i) f es isometría

ii) $\forall B$ base ortonormal de (V, g), $f(B)$ es una base ortonormal de (V', g')

iii) $\exists B$ base ortonormal de (V, g), $f(B)$ es una base ortonormal de (V', g')

(D) DEMOSTRACIÓN:

i) => ii) $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base ortonormal de (V, g)

$f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ base de V', pues f es isomorfismo

$\downarrow$ [PROP ANTERIOR (i) => (iii) $B' = f(B)$]

$M(g, B) = M(f, B, f(B))^t \cdot M(g', f(B)) \cdot M(f, B, B')$

Primera columna → $f(v_1)$ coordenadas con respecto $(1, 0, \dots)$ por tanto

$M(f, B, B') = I_N$

y $M(g, B) = M(g', f(B))$

$\downarrow$ $\uparrow$

B ortogonal $f(B)$ ortogonal

diagonal $\Leftrightarrow$]

ii) => iii) TRIVIAL

(iii) => i) (PROP ANTERIOR (iv) => i))

$\left.\begin{array}{l} B \text{ base ortonormal} \\ f(B) \text{ " " } \end{array}\right\}$ f isomorfismo → hay una base concreta que va a otra

$M(f, B, B') = I_N$

Como las dos bases son ortonormales y (=) → índice, rango, dim,

se da la igualdad.

COROLARIO: Sean (V, g) y (V', g'). Equivalen:

i) (V,g) y (V',g') son isométricos

ii) $\dim(V) = \dim(V')$, rango (g) = rango (g') e índice (g) = índice (g')

D i) ⟹ ii) $\exists f:(V,g) \longrightarrow (V',g')$ isometría

Sea B base ortonormal de (V,g),

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O_r \end{pmatrix}$$ y $f(B)$ base de V (f es isomorfismo)

$$\underbrace{M(f,B,f(B))^t}_{I_n} \cdot M(g', f(B)) \cdot \underbrace{M(f,B,f(B))}_{I_n} = M(g,B)$$

mismas dimensiones, rango e índice

ii) ⟹ i) (V,g), B base ortonormal de (V,g)

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O_r \end{pmatrix}$$

(V',g'), B' base ortonormal de (V',g'); $M(g',B') = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O_r \end{pmatrix}$

$\exists f: V \longrightarrow V'$ tal que $f(B) = B'$ → COROLARIO ANTERIOR

Por ser B ortonormal y $f(B)$ también ⟹ ISOMETRÍA

EJEMPLO: EJERCICIO 28

28 $(\mathbb{R}^3, g_a)$ $\quad \omega_g(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$

a) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos?

Tenemos primero
$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1) \end{pmatrix}$$

$$M(g_1,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} = 1$$

$$M(g_{-1},B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} = 2$$

NO SON ISOMÉTRICOS

¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{1/2})$ isométricos?

- $M(g_0, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ rango 3 $\rightarrow$ vemos por el criterio de Sylvester

qué tipo de métrica es: $\alpha_1(A) = 0$, $\alpha_2(A) = -1$ } No es ni euclídea ni del $\ominus$, por tanto vemos si es no degen.

$\det(A) = 1 \neq 0 \rightarrow$ indefinida $\rightarrow$ es congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $B = M(g_{1/2}, B_u) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow$ vuelve a ser indefinida

las dos matrices son indefinidas y no degeneradas de índice 2

$\Rightarrow$ SON ISOMÉTRICOS

CONSTRUIMOS LA ISOMETRÍA:

$g_0(e_1+e_2, e_1-e_2) = 0$

$\omega_{g_0}(e_1+e_2) = 2$ $\qquad B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1) \right\}$

$\omega_{g_0}(e_1-e_2) = -2$ $\qquad B$ base ortonormal

Calculamos el ortogonal a $(1,0,0)$:

$$(1 \ \ 0 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \left\{ \begin{array}{l} 1/2\, x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \quad \boxed{(2,-1,0)}$$

$\boxed{z = 0} \rightarrow$ Para que esté en el plano generado por e_1 y e_2.

y ahora

$$(2 \ \ -1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3/2$$