Cálculo II Relación Extra Derivadas

1.- $A \subset \mathbb{R}$ $\quad A^\circ = \emptyset \iff \mathbb{R} \setminus A$ denso en $\mathbb{R}$

Que $\mathbb{R}\setminus A$ sea denso en $\mathbb{R}$ implica que dados $x, y \in \mathbb{R}$ $\exists z \in \mathbb{R}\setminus A \,/\, x<z<y$. El caso en que $A=\emptyset$ es trivial, también si A es un conjunto arbitrario. Supongamos A un intervalo, $A=[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}\setminus A$ es denso en $\mathbb{R} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}\setminus A /$ $a<z<b \Rightarrow z \notin A$!!! . A no puede ser un intervalo, luego $A^\circ = \emptyset$

2.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f \neq cte.$ con máx. rel en todo punto de $\mathbb{R}$

x es extremo relativo $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ cont y deriv. en $\mathbb{R}$.

3.- $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad$ ¿$f(A)$?

a) $A=[0,2]$, $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1 \quad \forall x \in A$

Estudiemos la monotonía de f en $[0,2]$. f cont y deriv. en $[0,2]$ por ser polinómica.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 \quad \forall x \in [0,2]$ $\quad f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow$

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2	0	

$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0$

$f'>0 \quad f'<0$
$0 \;\; f\nearrow \;\; 1 \;\; f\searrow \;\; 2$

f presenta un máx. rel en $x=1$, $f(1)=14$. $P(1,14)$

Dado que $f(x) \leq f(1)$ $\forall x \in [0,2]$, que $f\nearrow$ en $(0,1)$ y $f\searrow$ en $(1,2)$ y $f(0)=1$, $f(2)=9 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(A) = [1,14]$

b) $A=[-2,2]$, $f(x) = 1-\sqrt{2|x|-x^2} \quad \forall x \in A \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{-2x-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1-\sqrt{2x-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

$2|x| - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x|(2-|x|) \geq 0 \Rightarrow 2-|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow x \in [-2,2]$

f cont en $[-2,2]$ y derivable en $[-2,2]-\{0\}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2}{2\sqrt{-2x-x^2}} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{2x-2}{2\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x-x^2}} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

Igualamos la derivada a 0 para estudiar el crecimiento de f. $\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x-x^2}} = 0 \Rightarrow x=-1 \in [-2,0)$, $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Rightarrow x=1 \in (0,2]$. $\Rightarrow$

$f'<0 \quad f'>0 \quad f'<0 \quad f'>0$
$-2 \;\; f\searrow \;\; -1 \;\; f\nearrow \;\; 0 \;\; f\searrow \;\; 1 \;\; f\nearrow \;\; 2$

Deducimos que f presenta un máx. rel en $x=0$, $f(0)=1$ $(P(0,1))$ y dos mín. rel: uno en $x=-1$, $f(-1)=0$ $(Q(-1,0))$ y otro en $x=1$, $f(1)=0$ $(R(1,0))$

Dado que $f(-2)=f(2)=1$, finalmente concluimos que $f(A)=[0,1]$

4.- $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 < 3b$. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}$

Estudiemos la monotonía de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con f claramente cont. y deriv. en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot 3b}}{6} = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 - 3b)}}{6} =$

$= \dfrac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3b}}{6} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$. Como $a^2 < 3b$, $\nexists x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = 0$, luego f no presenta puntos críticos.

Ello quiere decir que f es creciente o decreciente en todo $\mathbb{R}$. Dado que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, deducimos que f es creciente y al tomar valores negativos y positivos, por el teorema de Bolzano, sabemos que f se anula en un único punto x.

5.- Número de soluciones reales de $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$. f claramente cont y deriv. en $\mathbb{R}$.

Estudiemos su monotonía: $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^4 + 15x^2 - 30 = 0 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sea $y = x^2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 & x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -2 & \nexists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = -2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} & f'>0 & & f'<0 & & f'>0 & \\ -\infty & f\nearrow & -1 & f\searrow & 1 & f\nearrow & +\infty \end{array}$$

Sabemos que f presenta un máx. rel en $(-1, f(-1)) = (-1, 22 - \alpha)$ y un mín. rel en $(1, f(1)) = (1, -22 - \alpha)$.

Además conocemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto,

- Si $|\alpha| \leq 22$, deducimos, por el teorema de Bolzano, que existen tres raíces
- Si $|\alpha| > 22$, será una raíz.

6.- ¿$\exists_1 f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, 2(f(x))^3 - 3(f(x))^2 + 6f(x) = x \;\forall x \in \mathbb{R}$? ¿$f$ deriv.? ¿$f'(0)$?

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x$. Su derivada es $g'(x) = 6x^2 - 6x + 6$. Estudiemos el signo de g'. Para ello, igualemos a 0 y tomemos intervalos: $g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$. $\nexists x \in \mathbb{R} \,/\, g'(x) = 0$

$$\begin{array}{ccc} & g'>0 & \\ -\infty & g\nearrow & +\infty \end{array}$$

Vemos que $g' > 0$ en todo $\mathbb{R}$, lo que indica que g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Todo ello, sumado al hecho de que g está definida en un intervalo, es derivable en $\mathbb{R}$ y $g'(a) \neq 0 \;\forall a \in \mathbb{R}$ nos permite aplicar el teorema de la función inversa, que indica que $\exists_1 f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f = g^{-1}$, verificando que f es derivable y $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0) = f'(g(0)) = \dfrac{1}{g'(f(g(0)))} = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{6}$

7.- $f \in D[0,1]$, $f(0)=0$, f' creciente. ¿$g:]0,1] \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{f(x)}{x}$ $\forall x \in]0,1]$, $g \uparrow$?

$f \in D[0,1]$ indica que f es derivable en el intervalo $[0,1]$. Se nos dice, además, que f' es creciente, luego f' puede ser tanto positiva como negativa, o bien 0.

Conocemos que $f(0)=0$, luego g no está definida en $x=0$. Veamos que su derivada en $]0,1]$ debe ser positiva si:

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \Rightarrow x f'(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f' \geq g$$

Veamos lo que ocurre en $f'(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} g(x) = f'(0).$$

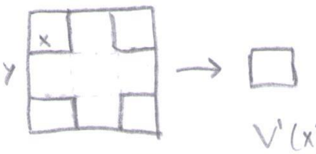
- Si suponemos g decreciente, veamos que, como $\lim_{x\to 0^+} g(x) = f'(0) \Rightarrow f' \geq g$ al ser f' creciente, luego g será creciente !!!
- Si suponemos g cte., directamente llegamos a lo mismo
- Solo resta que g sea <u>creciente</u>

Por TMV, dados $x=0$, $y \in]0,1]$, $\exists c \in [0,y] \,/$ $f(y)-f(x) = f'(c)(y-x) \Rightarrow f(y)-f(0) = f'(c)(y-0)$ $\Rightarrow f(y) = f'(c)\, y \Rightarrow f'(c) = \frac{f(y)}{y} = g(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(c) = g(y)$. Como $c \leq y \Rightarrow f'(c) \leq f'(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow g(y) \leq f'(y)$ $\forall y \in [0,1]$

8.- $f \in D[0,1]$ $f(0)=0$, $|f'(x)| \leq |f(x)|$ $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x)=0$ $\forall x \in [0,1]$

Dado que $f \in D[0,1]$, conocemos que f es deriv. en $[0,1]$. Además $f(0)=0$, luego $0 < |f'(0)| \leq |f(0)| = 0 \Rightarrow |f'(0)| = 0 \Rightarrow f'(0)=0$. Dados $x, y \in [0,1]$, $x<y$, se verifica, por el TMV, que $\exists c \in [x,y] \,/\, f(y)-f(x) = f'(c)(y-x)$. Si consideramos $x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(y) - f(0) = f'(c)(y-0) \Rightarrow f(y) = f'(c) \cdot y \Rightarrow |f(y)| = |f'(c)y| \Rightarrow |f(y)| = y|f'(c)| \leq y|f(c)| \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(y)| \leq y|f(c)| \underset{y\in[0,1]}{\Rightarrow} |f(y)| \leq |f(c)|$, lo cual se verifica $\forall y \in]0,1]$. Dado que f es derivable en $[0,1]$, concretamente es continua, luego por el Teorema de Wierstrass su imagen tiene máximo y mínimo. Sea $y = \max \{|f(x)| : x \in [0,1]\} \Rightarrow |f(y)| \leq |f(c)|$, con $c \in]x,y[$, luego deducimos que solo cabe que $|f(y)| = |f(c)|$, pero si $f(0) \neq f(y) \Rightarrow f \uparrow\uparrow$ o $f \downarrow\downarrow$ en c !!! $\Rightarrow f(0) = f(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(y) = 0$ $\forall y \in]0,1]$

9.-



$V(x,y) = xy^2 \Rightarrow V(x) = x(l-2x)^2 = x(l^2+4x^2-4lx) = 4x^3 - 4lx^2 + l^2 x$ Hallemos los extremos relativos de esta función.

$2x+y = l \Rightarrow y = l-2x$

$V'(x) = 12x^2 - 8lx + l^2 \Rightarrow V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 8lx + l^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 - 4 \cdot 12 l^2}}{24} =$

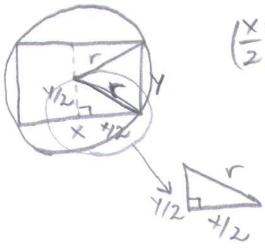
$= \frac{8l \pm 4l}{24} = \begin{cases} \frac{12l}{24} = \frac{l}{2} \\ \frac{4l}{24} = \frac{l}{6} \end{cases}$

$V'>0$ | $V'<0$ | $V'>0$

$0 \; V\nearrow \; \frac{l}{6} \; V\searrow \; \frac{l}{2} \; V\nearrow \; +\infty$

Vemos que V presenta un mín. rel en $\frac{l}{2}$ y un máx. rel en $\frac{l}{6}$. Por tanto, el mayor volumen de la caja vendrá de tomar como lado x de los cuadrados a recortar, $l/6$, donde l es la longitud total del cartón.

10.-



$A(x,y)=xy \Rightarrow A(x)=x\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{4x^2r^2-x^4}$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=4r^2 \Rightarrow y=\sqrt{4r^2-x^2}$

$A'(x)=\dfrac{8r^2x-4x^3}{2\sqrt{4x^2r^2-x^4}}$ $\quad A'(x)=0 \Rightarrow 8r^2x-4x^3=0 \Rightarrow x(8r^2-4x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8r^2=4x^2 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow 2r^2=x^2 \Rightarrow x=r\sqrt{2}$

$A'>0$	$A'<0$
0 $\quad A\nearrow$	$r\sqrt{2}$ $\quad A\searrow$ $\quad +\infty$

Vemos que A presenta un máx. rel en $r\sqrt{2}$. Esto quiere decir que el cuadrado de área máxima es aquel que tiene de lados: $x=r\sqrt{2}$, $y=\sqrt{4r^2-2r^2}=\sqrt{2r^2}=r\sqrt{2}$, donde r denota el radio de la circunferencia.