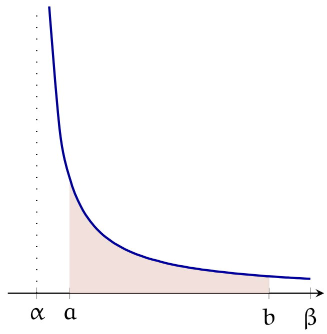
13 INTEGRACIÓN IMPROPIA

13.1 DEFINICIÓN

En lo que sigue $]\alpha, \beta[$ indica un intervalo, acotado o no, de $\mathbb{R}$. En otras palabras, α puede ser un número real o $-\infty$ y β puede ser un número real o $+\infty$.

Definición 13.1.1. 1) Sea $f\colon [a, \beta[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que la función f es *impropiamente integrable* en $[a, \beta[$ o que la integral impropia es convergente si existe el límite

$$\lim_{b \to \beta} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{13.1}$$



Usaremos, en ese caso, la notación

$$\int_a^\beta f(x)\, dx = \lim_{b \to \beta} \int_a^b f(x)\, dx.$$

2) Sea $f\colon]\alpha, b] \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que f es impropiamente integrable si existe el límite

$$\lim_{a \to \alpha} \int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Usaremos la notación $\int_\alpha^b f(x)\, dx = I$.

3) Sea $f\colon]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ localmente integrable y sea $c \in]\alpha, \beta[$. Diremos que f es impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ si f es impropiamente integrable en $]\alpha, c]$ y en $[c, \beta[$. En ese caso,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^c f(x)\, dx + \int_c^\beta f(x)\, dx.$$

Observación 13.1.2. 1) De la aditividad de la integral se deduce que la definición de integral impropia no depende del punto c elegido en el tercer ítem.

2) Si α y β son números reales y f es acotada, la función f es impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, f es integrable en $[\alpha, \beta]$. Además ambas integrales coinciden.

A partir de ahora da igual si estamos hablando de intervalos abiertos o cerrados. Se aplica la definición de integral apropiada dependiendo del caso en que estemos.

En lo que sigue, para simplificar la notación, hablaremos algunas veces de integrabilidad impropia en intervalos de la forma $[a, \beta[$ en lugar de $]\alpha, \beta[$.

Ejemplos 13.1.3. 1) La función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ es impropiamente integrable en $[0, +\infty[$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b \to +\infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

La integral impropia de una función continua y monótona puede ser divergente (no convergente)

2) La función $f(x) = 1/x$ no es impropiamente integrable en $]0, 1]$ ya que

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \log(1) - \lim_{x \to 0} \log(x) = +\infty.$$

3) La función $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ es impropiamente integrable en $]-1, 1[$ ya que la función arcoseno tiene límite en 1 y en -1. Por tanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \to 1} \operatorname{arc\,sen}(x) - \lim_{x \to -1} \operatorname{arc\,sen}(x) = \pi.$$

4) La función $f(x) = 1/x^c$ es impropiamente integrable en $[1, +\infty[$ si, y sólo si, $c > 1$.

Vamos a distinguir varios casos.

a) Si $c = 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log(x) - \log(1) = +\infty.$$

b) Si $c \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^c} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-c+1}}{-c+1} - \frac{1}{-c+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } -c+1 > 0, \\ \dfrac{-1}{1-c}, & \text{si } -c+1 < 0, \end{cases}$$

Por tanto, la función es impropiamente integrable sólo si $-c + 1 < 0$ o, lo que es lo mismo, si $c > 1$.

5) La función $f(x) = e^{-x}$ es impropiamente integrable en $[a, +\infty[$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} + e^{-a} \right) = e^{-a}.$$

13.2 CARACTERIZACIONES

Podemos reescribir la definición de integral impropia usando una integral indefinida cualquiera o, en el caso de que exista, una primitiva. En la práctica es la forma en la que hemos demostrado la integrabilidad impropia en los ejemplos anteriores.

Proposición 13.2.1. *Sea* $f\colon [a, \beta[\to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable. Si* $x_0 \in [a, \beta[$ *y* $F\colon [a, \beta[\to \mathbb{R}$ *es la integral indefinida*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \quad \forall x \in [a, \beta[.$$

Son equivalentes:

1) f *es impropiamente integrable en* $[a, \beta[$.

2) F *tiene límite en* β.

En ese caso,

$$\int_a^\beta f(x)\, dx = \lim_{x \to \beta} F(x) - F(a).$$

Demostración. Sólo hay que usar la aditividad de la integral

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

y tomar límites. □

Corolario 13.2.2. *Sea* $f\colon [a,\beta[\to \mathbb{R}$ *localmente integrable y sea* G *una primitiva de* f *en* $[a,\beta[$. *Son equivalentes:*

1) f *es impropiamente integrable en* $[a,\beta[$.

2) G *tiene límite en* β.

En ese caso,

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x\to\beta} G(x) - G(a).$$

Podemos usar la caracterización con cuantificadores o con sucesiones, convergentes o de Cauchy, del límite.

Lema 13.2.3. *Sea* $f\colon [a,\beta[\to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable y sea* $I \in \mathbb{R}$. *Son equivalentes:*

1) $\displaystyle\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = I$.

2) *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $b_0 \in [a,\beta[$ *tal que si* $b_0 \leqslant b < \beta$, *entonces*

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon.$$

3) *Para cualquier sucesión* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* $[a,\beta[$ *con* $\lim b_n = \beta$ *se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b_n} f(x)\,dx = I.$$

Lema 13.2.4 (Condición de Cauchy)**.** *Sea* $f\colon [a,\beta[\to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable. Son equivalentes:*

1) f *es impropiamente integrable en* $[a,\beta[$.

2) *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $b_0 \in [a,\beta[$ *tal que si* $x, y \geqslant b_0$, *entonces*

$$\left|\int_{x}^{y} f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Demostración. Es la condición de Cauchy aplicada al límite que define la integral impropia. □

13.3 PROPIEDADES

13.3.1 Linealidad y monotonía

Proposición 13.3.1. *Sean* $f, g\colon]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ *dos funciones impropiamente integrables y sean* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Linealidad

1) *La función* $\lambda f + \mu g$ *es impropiamente integrable y*

$$\int_\alpha^\beta (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

Monotonía

2) *Si* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in]\alpha, \beta[$, *entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

Ejemplo 13.3.2 (Producto de funciones impropiamente integrables). La función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es impropiamente integrable en $]0, 1[$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Por otro lado, ya hemos visto que su cuadrado $f^2(x) = 1/x$ no lo es.

13.3.2 Aditividad

Proposición 13.3.3. *Sea* $f\colon]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ *localmente integrable y sea* $c \in]\alpha, \beta[$. *Son equivalentes:*

1) f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$.

2) f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, c[$ *y en* $]c, \beta[$.

En ese caso,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx.$$

13.3.3 Integración por partes

Proposición 13.3.4. *Sean* f, g *dos funciones derivables en* $]\alpha, \beta[$. *Supongamos que*

1) f' *y* g' *son localmente integrables, y*

2) *existen* $\lim_{x\to\alpha} fg$ *y* $\lim_{x\to\beta} fg$.

Entonces

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx = fg\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx$$

en el sentido de que si una de las integrales existe, existe la otra y se cumple la igualdad.

13.3.4 Cambio de variable

Proposición 13.3.5. *Sea* $g\colon]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ *una función derivable y estrictamente monótona con derivada* g' *localmente integrable. Sea* $\gamma = \lim_{x\to\alpha} g(x)$ *y sea* $\delta = \lim_{x\to\beta} g(x)$. *Si* $f\colon]\gamma, \delta[\to \mathbb{R}$ *una función continua, entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \int_\gamma^\delta f(x)\,dx$$

en el sentido de que si una de las integrales impropias es convergente, lo es la otra y se da la igualdad.

13.4 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

El siguiente resultado es el análogo al test de comparación para series: si una función localmente integrable está mayorada por una función integrable, la más pequeña también lo es.

Teorema 13.4.1 (Test de comparación)**.** *Sean* $f, g\colon]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ *dos funciones localmente integrables. Supongamos que* g *es impropiamente integrable en* $]\alpha,\beta[$ *y que*

$$|f(x)| \leqslant g(x), \quad \forall\, x \in]\alpha,\beta[.$$

Entonces f *es impropiamente integrable en* $]\alpha,\beta[$ *y*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \right| \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)\, dx. \tag{13.2}$$

Demostración. Usaremos el lema 13.2.4 para demostrar la convergencia de la integral. Dado $\varepsilon > 0$, como g es impropiamente integrable existe b_0 tal que si $x, y \geqslant b_0$ entonces

$$\left| \int_x^y g(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|\, dt \right| \leqslant \left| \int_x^y g(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

con lo que f es impropiamente integrable. La desigualdad (13.2) es consecuencia de la monotonía de la integral. □

Ejemplo 13.4.2. La función $f(x) = e^{-x^2}$ es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$. Para comprobarlo, obsérvese que como la función es par, es suficiente con considerar la integral en $\mathbb{R}_0^+$.

Dado que $\exp(-x^2) \leqslant \exp(-x)$ para cualquier $x \geqslant 1$, y que $g(x) = \exp(-x)$ es impropiamente integrable en $[1, +\infty[$, se tiene que f es impropiamente integrable en $[1, +\infty[$. En $[0, 1]$ es integrable por ser continua, con lo que f es integrable en $[0, +\infty[$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 13.4.3. Dado que la función $1/x^2$ es impropiamente integrable en $]1, +\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} - \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x} = 1,$$

y que

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 1$$

se cumple que la función $f(x) = \cos(x)/x^2$ es impropiamente integrable en $]1, +\infty[$ y que

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx \right| \leqslant 1.$$

Obsérvese que no conocemos el valor concreto de la integral.

Ejemplo 13.4.4. 1) La función $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ es impropiamente integrable.

Usando la fórmula de integración por partes,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx = \left. \frac{-\cos(x)}{x} \right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

Como

$$\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) = \cos(1),$$

y, usando el test de comparación o el ejemplo anterior, $\cos(x)/x^2$ es impropiamente integrable en $[1,+\infty[$, se tiene que f es impropiamente integrable en $[1,+\infty[$

2) La función $|f|$ no es impropiamente integrable en $\mathbb{R}^+$. Como $|\operatorname{sen}(x)| \geqslant \operatorname{sen}^2(x)$,

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| dx \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\, dx.$$

La función $\cos(2x)/2x$ es impropiamente integrable repitiendo el mismo argumento que hemos usado en el primer apartado. La función $1/2x$ no es impropiamente integrable ya que su primitiva no tiene límite en $+\infty$.

Corolario 13.4.5 (Test de comparación por paso al límite)**.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $f, g\colon [\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ funciones localmente integrables. Supongamos que $f(x) \geqslant 0$ y que $g(x) > 0$ para todo $x \in [\alpha,\beta[$.*

1) *Si $\lim_{x\to\beta} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}^+$, f es impropiamente integrable si, y sólo si, lo es g.*

2) *Si $\lim_{x\to\beta} f(x)/g(x) = 0$ y g es impropiamente integrable, entonces f es impropiamente integrable.*

3) *Si $\lim_{x\to\beta} f(x)/g(x) = +\infty$ y f es impropiamente integrable, entonces g es impropiamente integrable.*

Teorema 13.4.6 (Test de Abel)**.** *Sean $f, g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ dos funciones verificando que*

1) *f es impropiamente integrable,*

2) *g es monótona y acotada.*

Entonces fg es impropiamente integrable en $[a,+\infty[$.

13.5 SERIES E INTEGRALES

Lema 13.5.1 (Brink, [10])**.** *Sea $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable no negativa. Supongamos que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup\{|f(k)-f(t)| : k-1 \leqslant t \leqslant k\} < \infty. \tag{13.3}$$

Entonces la serie $\sum_{k\geqslant 1} f(k)$ y la integral $\int_0^\infty f$ tienen el mismo comportamiento: las dos son convergentes o las dos son divergentes.

Demostración. Es consecuencia directa de que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\, dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} (f(k)-f(t))\, dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sup\{|f(k)-f(t)| : k-1 \leqslant t \leqslant k\}.\end{aligned}$$

□

Teorema 13.5.2 (Hardy). *Sea* $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *no negativa. Supongamos que* $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$*, entonces la serie* $\sum_{k\geqslant 0} f(k)$ *y la integral* $\int_0^\infty f$ *tienen el mismo comportamiento: las dos son convergentes o las dos son divergentes.*

Demostración. Veamos que se cumple la condición (13.3): sea $t \in [k-1,k]$,

$$|f(k)-f(t)| = \left|\int_t^k f'(x)\, dx\right| \leqslant \int_t^k \left|f'(x)\right| dx \leqslant \int_{k-1}^k \left|f'(x)\right| dx.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sup\{|f(k)-f(t)| : k-1 \leqslant t \leqslant k\} &\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \left|f'(x)\right| dx\\ &= \int_0^n \left|f'(x)\right| dx,\end{aligned}$$

con lo que

$$\sum_{k=1}^\infty \sup\{|f(k)-f(t)| : k-1 \leqslant t \leqslant k\} < \int_0^{+\infty} \left|f'(x)\right| dx < \infty. \qquad \square$$

Proposición 13.5.3 (Criterio integral). *Sea* $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una función positiva y decreciente. Entonces la serie* $\sum_{k\geqslant 1} f(k)$ *y la integral* $\int_1^\infty f$ *tienen el mismo comportamiento: las dos son convergentes o las dos son divergentes.*

El criterio integral para la convergencia de series se debe a Maclaurin y Cauchy por lo que también se le conoce como criterio de Maclaurin-Cauchy

Demostración. Como f es decreciente y acotada inferiormente, tiene límite en $+\infty$. En consecuencia, la condición (13.3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty \sup\{|f(k)-f(t)| : k-1 \leqslant t \leqslant k\} &= \sum_{k=1}^\infty (f(k)-f(k-1))\\ &= f(1) - \lim_{x\to\infty} f(x).\end{aligned}$$

del lema 13.5.1 se cumple y, por tanto, se obtiene lo pedido. $\square$

Observación 13.5.4. La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y la serie $\sum_{n\geqslant N} a_n$ tienen el mismo carácter. Lo mismo le ocurre, en los casos anteriores, a las integrales $\int_1^\infty f$ y $\int_N^\infty f$. Hardy ([30]) se refiere a estos criterios de la siguiente forma:

> "the series $\sum^\infty f(n)$ and the integral $\int^\infty f(x)\, dx$ converge or diverge together"

Ejemplo 13.5.5. Ya sabemos que la serie armónica generalizada $\sum \frac{1}{n^a}$ es convergente si, y sólo si, $a > 1$. Esto es se puede obtener como consecuencia del criterio integral: la función $1/x^a$ es impropiamente integrable en $[1,\infty[$ si, y sólo si, $a > 1$ como vimos en el ejemplo 13.1.3 al principio del tema.

13.6 EJERCICIOS

Ejercicio 13.1. Calcula las siguientes integrales

1) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, 3) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^2}$.

Ejercicio 13.2. Sea $F\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$.

1) Calcula los extremos relativos y absolutos de F.

2) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de F.

3) Calcula $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Ejercicio 13.3. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$

2) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{7}{12}\right)$

3) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

4) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx = \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 13.4. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\, dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

4) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Ejercicio 13.5. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2\, dx = 3\pi$

3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

4) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(y)\, dy = \frac{\pi}{16}$

5) $\int_0^1 \left(1-\rho^{2/3}\right)^{3/2} 3\rho d\rho = \frac{8}{35}$

Ejercicio 13.6. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(1+\sqrt{2})$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$

Ejercicio 13.7. Calcula $\int_1^{+\infty} \frac{3x+14}{(x+4)(x+3)^2}\, dx$,

Ejercicio 13.8. Demuestra que

1) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $\int_0^1 \log(x)^n\, dx = (-1)^n n!, \forall\, n \in \mathbb{N}$.