25/11/2020

$\pi: \mathbb{X} \to \mathbb{X}/R$ continua pero no abierta; sí es casi-abierta.

$f(U) \in T/R$ si $U \in T$ es R-saturado

$(f^{-1}(f(U)) = U)$

<u>Def</u>: Sea $f: (\mathbb{X}, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Diremos que f es una identificación si es <u>sobreyectiva</u> y T' es la topología final para f.

$$T' = \underbrace{\{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\}}_{\text{Topología final}}$$

<u>Def.</u> Sea $f: \mathbb{X} \to Y$ una aplicación. Diremos que $U \subset \mathbb{X}$ es f-saturado si $f^{-1}(f(U)) = U$. (como $U \subset f^{-1}(f(U))$ siempre, la información relevante de esta igualdad es $f^{-1}(f(U)) \subset U$).

¿Qué significa $f^{-1}(f(U)) \subset U$? Si $x \in f^{-1}(f(U)) \Rightarrow x \in U$

$f(x) \in f(U)$

$\exists y \in U: \quad f(x) = f(y)$

Si $\exists y \in U$ tal que $f(x) = f(y)$, entonces $x \in U$.

<u>Def.</u> Si $f: \mathbb{X} \to Y$ es una aplicación, podemos definir una relación de equivalencia en $\mathbb{X}$, R_f.

$$x R_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

$\pi: X \to X/R_f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R_f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos definir $\tilde{f}$ como $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$. $\tilde{f}$ está bien definida porque si $\pi(x)=\pi(x') \Rightarrow x R_f x' \Rightarrow f(x)=f(x')$. Por tanto $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x) = f(x') = \tilde{f}(\pi(x'))$ si $\pi(x)=\pi(x')$

$\tilde{f}$ siempre es inyectiva.

Def: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación. Diremos que f es casi-abierta si $f(U)\in T'$ para todo $U\in T$ y f-saturado.
La noción de aplicación casi-cerrada es casi igual: "$f(C)\in \mathcal{C}_{T'}$ $\forall C\in \mathcal{C}_T$ f-saturado"

Proposición: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación sobreyectiva. Entonces f es una identificación si y sólo si f es continua y casi-abierta (o casi-cerrada).

Dem: Sup. que f es identificación. Entonces f es continua porque T' es la topología final para la aplicación f. Veamos que f es casi-abierta.
Sea $U\subset X$ abierto f-saturado. ¿Cuándo $f(U)\in T'$? Como T' es la top. final para f, $f(U)\in T' \Leftrightarrow f^{-1}(f(U))\in T$. Como U es f-saturado $f^{-1}(f(U)) = U\in T$
(Si $C\subset X$ es cerrado f-saturado, $f(C)\in \mathcal{C}_{T'} \Leftrightarrow Y\setminus f(C)\in T' \Leftrightarrow$ $f^{-1}(Y\setminus f(C))\in T$; $f^{-1}(Y\setminus f(C)) = X\setminus f^{-1}(f(C)) = X\setminus C\in T$)

Supongamos ahora que f es continua y casi-abierta. Tenemos que probar que f es identificación, es decir, que $T' = \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\}$. Como f es continua, si $U' \in T'$, entonces $f^{-1}(U') \in T \Rightarrow T' \subset \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\}$. Sea ahora $U' \subset Y$ tal que $f^{-1}(U') \in T$. Queremos ver que $U' \in T'$. El conjunto $f^{-1}(U')$ es f-saturado ($f^{-1}(f(f^{-1}(U'))) = f^{-1}(U')$ porque $f(f^{-1}(U')) = U'$ por ser f sobreyectiva). Como f es casi abierta, $f(\underbrace{f^{-1}(U')}_{\text{abto } f\text{-saturado}}) \in T'$. Acabamos de ver que $U' = f(f^{-1}(U')) \in T'$

$\Rightarrow U' \in T'$. Por tanto $\{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\} \subset T'$. Concluimos que

$$\{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\} = T'$$

Por tanto, f es una identificación. ■

<u>Teorema</u>: Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una identificación (sobreyectiva). Entonces $\tilde{f} : (X/R_f) \to (Y, T')$ es un homeomorfismo.

<u>Dem</u>: Tenemos que ver que $\tilde{f}$ es biyectiva, continua y abierta. Ya sabemos que $\tilde{f}$ es inyectiva. Además, como f es sobreyectiva, $\tilde{f}$ también lo es (Si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x) = y$).

$$\begin{tikzcd}
(X, T) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (Y, T') \\
& (X/R_f, T/R_f) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como T/R_f es la topología final para π, $\tilde{f}$ es continua si y sólo si $\tilde{f} \circ \pi$ es continua. Pero $\tilde{f} \circ \pi = f$. Como f es continua, $\tilde{f}$ también lo es.

Veamos por último que $\tilde{f}$ es abierta. Sea $V \in T|R_f$. Queremos ver que $\tilde{f}(V) \in T'$.

$$\tilde{f}(V) = \{ \tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in V \}$$

$$= \{ f(x) : x \in \pi^{-1}(V) \}$$

$$\overset{\circledast}{=} f(\pi^{-1}(V))$$

$\circledast$ $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$

$\circledast$ $\pi(x) \in V \Leftrightarrow x \in \pi^{-1}(V)$

Comprobemos que $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado. Hay que ver $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) = \pi^{-1}(V)$. Solo hay que comprobar que $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \subset \pi^{-1}(V)$. Para comprobarlo tomamos $x \in f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \Rightarrow f(x) \in f(\pi^{-1}(V)) \Rightarrow$ existe $x' \in \pi^{-1}(V)$ tal que $f(x) = f(x')$. Si $f(x) = f(x')$, entonces $x \, R_f \, x' \Rightarrow \pi(x) = \pi(x')$. Como $\pi(x') \in V$, entonces $\pi(x) = \pi(x') \in V \Rightarrow x \in \pi^{-1}(V)$. Esto demuestra que $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \subset \pi^{-1}(V)$ y, por tanto, $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) = \pi^{-1}(V)$ y $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado. Como f es casi abierta, $f(\pi^{-1}(V)) \in T'$, pero entonces:

$$\tilde{f}(V) = f(\pi^{-1}(V)) \in T'$$

Por tanto, $\tilde{f}$ es una aplicación abierta. $\blacksquare$