# Soluciones de la prueba 2, DG, 8 enero 2021

## 1 Aplic. diferenciable, derivada direccional, gradiente.

Sean $X$ e $Y$ espacios normados, $A \subseteq X$, $a \in \mathring{A}$ y $f: A \to Y$.
$f$ es diferenciable en $a$ si existe $T: X \longrightarrow Y$ lineal y continua tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

En tal caso $T$ es única y es la diferencial de $f$ en $a$, que se nota por $Df(a)$. Si $A = \mathring{A}$, se dice que $f$ es diferenciable si lo es en cada punto de $A$.

Si $a \in \mathring{A}$, $v \in X \setminus \{0\}$ y $f: A \subseteq X \longrightarrow Y$, $f$ tiene derivada direccional en $a$ según $v$ si existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

En ese caso notamos por $f'(a;v)$ al límite anterior.

En caso de que $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $Y = \mathbb{R}$, se nota

$$D_i f(a) = f'(a; e_i) \quad \forall\ 1 \leq i \leq N,$$ donde $\{e_1, \ldots, e_N\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$. El vector

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a), \ldots, D_N f(a))$$ se llama vector gradiente de $f$ en $a$, supuesto que existan todas las derivadas direccionales $f'(a; e_i)$ $\forall\ 1 \leq i \leq N$.

Si $f$ es una aplicación diferenciable en $a$, entonces $\exists\ f'(a;v)$, $\forall\ v \in X \setminus \{0\}$. El recíproco no es cierto ni siquiera para campos escalares.

Todo campo escalar con derivadas direccionales en un punto $a$ tiene gradiente en $a$. Si un campo escalar tiene gradiente en un entorno $U$ de $a$ y $\nabla f$ es continuo en $a$, entonces $f$ es diferenciable en $a$. El recíproco de este resultado no es cierto.

(2) Clasifica los puntos críticos del siguiente campo escalar $f(x,y) = -2x^3 - 6xy^2 + 3x^2 + 3y^2$.
¿Tiene $f$ extremos absolutos?

Como $f$ es una función polinómica, entonces $f$ es de clase $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, luego tiene gradiente y hessiano.
Calculamos $\nabla f(x,y)$. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x^2 - 6y^2 + 6x = 6(-x^2 - y^2 + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -12xy + 6y = 6y(-2x+1), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto $\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow -x^2 - y^2 + x = 0 \ \wedge$

$$y(1-2x) = 0$$

De la segunda ecuación tenemos $y = 0 \vee 1 = 2x$.
Luego $y = 0$ ó bien $x = \frac{1}{2}$. Si $y = 0$, sustituyendo en la primera ecuación tenemos $0 = x(-x+1)$, luego $x = 0$ ó $x = 1$. Obtenemos las soluciones $(0,0)$ y $(1,0)$.
Si $x = \frac{1}{2}$, sustituyendo de nuevo en la 1ª ecuación obtenemos $-\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} = y^2 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$.
Obtenemos entonces las soluciones $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Para clasificar los puntos críticos calculamos la matriz hessiana dada por

$$Hf(x,y) = 6\begin{pmatrix} -2x+1 & -2y \\ -2y & -2x+1 \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto crítico obtenemos

$Hf(0,0) = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es definida positiva, luego f tiene en (0,0) un mínimo relativo.

$Hf(1,0) = 6\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, definida negativa, luego f tiene en (1,0) un máximo relativo.

$Hf(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 6\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Como la matriz es de orden 2 y el determinante es negativo, es indefinida.

$Hf(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = 6\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Por la misma razón que antes es indefinida.

Luego f no tiene en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ni en $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ extremos relativos.

Por último como $g(x) := f(x,0) = -2x^3+3x^2$, luego g diverge negaticamente en $+\infty$ y positivamente en $-\infty$, entonces g no está mayorada ni minorada, luego f tampoco lo está. Como consecuencia f no tiene extremos absolutos.

3 Prueba que $f$ tiene un punto fijo, donde

$$f(x,y) = \left( \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{3}, \frac{y^3+e^y}{7} \right) \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

Si $|x|,|y|\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen} x+1}{3}\right| \leq \frac{|\operatorname{sen} x|+1}{3} \leq \frac{2}{3} < 1$ y

$$\left|\frac{y^3+e^y}{7}\right| \leq \frac{|y|^3+e}{7} \leq \frac{1+e}{7} < \frac{4}{7} < 1$$

Luego $f([-1,1]^2) \subseteq [-1,1]^2$ y $[-1,1]^2$ es completo, por ser cerrado de $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$ que es completo.

Además $[-1,1]^2$ es convexo, luego podemos usar las consecuencias del TVM ya que $f$ es diferenciable.

Como $$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x)}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3y^2+e^y}{7} \end{pmatrix}$$

Entonces $\|Df(x,y)\| = \operatorname{Max}\left\{ \frac{|\cos x|}{3}, \left|\frac{3y^2+e^y}{7}\right| \right\}$

Si $|x|,|y|\leq 1 \Rightarrow \frac{|\cos x|}{3} \leq \frac{1}{3}, \left|\frac{3y^2+e^y}{7}\right| \leq \frac{3+e}{7} < 1$

Luego $\|Df(x,y)\| \leq \frac{3+e}{7} := \alpha < 1$ si $(x,y)\in[-1,1]^2$

Por tanto $f$ es contractiva al restringir a $[-1,1]^2$ y fija este conjunto. Como consecuencia, la restricción de $f$ a $[-1,1]^2$ tiene un único punto fijo por el Teorema del punto fijo de Banach.

4 Distancia mínima entre $S^1$ y la recta $y=x+4$. Prueba que se alcanza el mínimo.

Con objeto de facilitar los cálculos, minimizamos la distancia euclídea al cuadrado entre puntos de la esfera y puntos de la forma $(x,x+4)$ (los de la recta).

~~$f(x,u,v)$~~ =

$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ función a optimizar

Restricciones $y = x+4$, $u^2+v^2=1$.

$M = \{(x,y,u,v) : y=x+4, \ u^2+v^2=1\}$.

Para probar que $M$ es una variedad, definimos

$$F(x,y,u,v) = (y-x-4, u^2+v^2-1) \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$
$$(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$F\in C^1(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ abto

$$JF(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Es claro que si $(x,y,u,v)\in\Omega \Rightarrow (u,v)\neq(0,0)$

$\Rightarrow$ rango $JF(x,y,u,v) = 2$, luego $M$ = ceros de $F$

es una variedad diferenciable de dimensión 2.

Podemos usar el método de multiplicadores de Lagrange para la función

$$\mathcal{L}(x,y,u,v,\lambda,\mu) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda(y-x-4) + \mu(u^2+v^2-1)$$

Claro que $\mathcal{L}\in C^\infty(\mathbb{R}^6)$

Calculamos $\nabla \mathcal{L}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x-u) - \lambda \,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2(y-v) + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 2(u-x) + 2\mu u \,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 2(v-y) + 2\mu v$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y-x-4 \,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = u^2+v^2-1$$

Las soluciones del sistema de Lagrange verifican

$$2(x-u) = \lambda \qquad 2(y-v) = -\lambda$$

$$x-u = \mu u \,, \quad y-v = \mu v$$

$$y = x+4 \qquad u^2+v^2 = 1$$

Luego $x-u = \frac{\lambda}{2} = v-y = \mu u = -\mu v$

$$\Rightarrow \mu(u+v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \text{ó} \\ v = -u \end{cases}$$

Si $\mu = 0 \Rightarrow x = u$, $y = v$. Como $y = x+4$ y $u^2+v^2 = 1$,

tenemos $x^2 + (x+4)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 15 = 0$

El discriminante de la ecuación anterior es $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 < 0$,

luego la ecuación no tiene soluciones reales.

Por tanto $\mu \neq 0$ y ha de verificarse $v = -u$

Como $u^2+v^2 = 1 \Rightarrow 2u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Por tanto $(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ó $(u,v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Si $(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, usando que $x-u = v-y$, $y = x+4$

tenemos $x+y = v+u = 0 \Rightarrow x+x+4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2$

Luego $(x,y,u,v) = \left(-2, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es crítico ⑦

Si $(u,v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ usando las mismas ecuaciones obtenemos también $(x,y) = (-2,2)$. Luego

$\left(-2, 2, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ también es crítico.

Evaluando $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ en ambos obtenemos

$$f\left((-2,2), \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

mientras que

$$f\left(-2, 2, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 2\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

El valor en el 2º es menor que en el 1º

El conjunto $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 = 1\}$ es compacto y $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+4\}$ es cerrado.

En $\mathbb{R}^N$ se alcanza la distancia entre un compacto y un cerrado.

Si $d = \operatorname{Inf}\{ \|u-x\|_2 : u \in K, x \in C\}$

$\Rightarrow \exists \{u_n\}$ en $K$, $\{x_n\}$ en $C$ : $\{\|u_n - x_n\|_2\} \to d$. $\{\|u_n - x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado,

Como $K$ es compacto y

$\exists \{u_{\sigma(n)}\} \to u \in K$, $\exists \{x_{\sigma(\tau(n))}\} \to x \in C$

$\Rightarrow \{\|u_{\sigma(\tau(n))} - x_{\sigma(\tau(n))}\|_2\} \to \|u-x\|_2$, $\to d$

$\Rightarrow d = \|u-x\|_2$ con $u \in K$, $x \in C$.