Problemas Tema 3. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Curso 2020–21

1.– Sea X un conjunto y T, T' dos topologías en X tales que $T \subset T'$. Probar que si (X, T') es conexo entonces (X, T) también lo es. Dar un ejemplo en el que (X, T) es conexo y (X, T') no lo es.

2.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto arbitrario. Sea $B \subset X$ un subconjunto conexo tal que $B \cap A \neq \emptyset$, $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Probar que $B \cap \partial A \neq \emptyset$. ¿Es cierto el resultado si el conjunto B no es conexo?

3.– Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la recta:

$$R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/n\}$$

y la recta límite $R_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Sea $X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\right) \cup R_\infty$.

1. Describir las componentes conexas de X.
2. ¿Son las componentes conexas de X subconjuntos abiertos de X?

4.– Si X e Y son espacios topológicos conexos y $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y$, probar que $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ es conexo.

5.– Consideramos en $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ la topología inducida por la topología usual en $\mathbb{R}$. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una aplicación continua. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [0, 1]$ tal que $f(x_n) = x^n$.

6.– Estudiar las componentes conexas de $([-1, 1], T)$, donde T es la topología

$$T = \{U \subset X : 0 \notin U \text{ o } (-1, 1) \subset U\}.$$

7.– Sea X un conjunto, $A \subset X$. Se considera la topología

$$T = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Estudiar las componentes conexas de (X, T).

8.– Estudiar las componentes conexas de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey.

9.– Probar que la imagen por una aplicación continua de un espacio topológico conexo por arcos es un espacio topológico conexo por arcos.

10.– Sean (X_i, T_i), $i = 1, \ldots, n$, una familia finita de espacios topológicos. Probar que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es conexo por arcos con la topología producto si y sólo si todos los espacios X_i, $i = 1, \ldots, n$, son conexos por arcos.

11.– Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sin(1/x)$, y sea

$$G(f) = \{(x, y) : x > 0, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

el grafo de dicha función. Probar que:

1. $G(f)$ es conexo y conexo por arcos.
2. $\overline{G(f)} = G(f) \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big)$.
3. $\overline{G(f)}$ no es conexo por arcos.

12.– Si (X,T) es un espacio topológico compacto y $T' \subset T$, probar que (X,T') es compacto. ¿Es cierto el resultado si $T \subset T'$?

13.– Estudiar los subconjuntos compactos de $\mathbb{N}$ con la topología de los complementos finitos.

14.– Sea $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Consideramos en $\mathbb{R}$ la topología T_K generada por la base:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K : a < b\}.$$

1. ¿Es $[0,1]$ un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_K)$?
2. Probar que $(\mathbb{R}, T_K)$ es conexo.
3. Probar que $(\mathbb{R}, T_K)$ no es conexo por arcos.

15.– Probar que un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable. (Indicación: si X es conexo y $x \neq y$, probar que para cada $0 < r < d(x,y)$ el conjunto $\overline{B}(x,r) \setminus B(x,r)$ es no vacío).

16.– Sea (X,d) un espacio métrico compacto sin puntos aislados.

1. Dados $U \subset X$ abierto y $x \in X$, probar que existe V abierto tal que $V \subset U$ y $x \notin \overline{V}$.
2. Si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, probar que existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $V_{i+1} \subset V_i$ y $x_i \notin \overline{V}_i$. Concluir que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_i \neq \emptyset$.
3. Deducir que X es no numerable.

¿Es cierto el resultado si (X,T) es un espacio topológico compacto y Hausdorff sin puntos aislados?

17.– Sea $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Se define I_n inductivamente por la igualdad

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

Probar que la intersección

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I_n$$

es no vacía. Al conjunto C se le denomina el *conjunto de Cantor.*

1. Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados de longitud $1/3^n$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a C.
2. Probar que C es compacto.
3. Probar que C es totalmente disconexo.
4. Probar que C no tiene puntos aislados.
5. Probar que C es no numerable.