Problemas Tema 1. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Curso 2020–21

1.– Describir todas las topologías que existen en un conjunto de dos elementos.

2.– En los siguientes casos, estudiar si T es una topología en X.

(a) $X \neq \emptyset$, $T = \{\emptyset, A_1, \ldots, A_k, X\}$, donde $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$ forman una familia creciente de subconjuntos de X.

(b) $X \neq \emptyset$ y $T = \mathcal{P}(A) \cup \{X\}$, donde $A \subset X$ y $\emptyset \neq A \neq X$ ($\mathcal{P}(A)$ es la familia de todos los subconjuntos de A).

(c) $X = \mathbb{N}$ y $T = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, donde $U_n = [n, +\infty) \cap \mathbb{N}$.

3.– Sea X un conjunto no vacío y $A, B \subset X$ con $\emptyset \neq A, B \neq X$. ¿Qué propiedades deben cumplir A y B para que la familia $T = \{\emptyset, A, B, X\}$ sea una topología en X?

4.– Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el semiplano $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$.

(a) Demostrar que la familia $T = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

(b) Estudiar si $T \subset T_u$ o $T_u \subset T$ (T_u es la topología usual de $\mathbb{R}^2$).

(c) Describir la familia de cerrados C_T.

5.– Sea X un conjunto no vacío, y $A \subset X$ un subconjunto. Probar que la familia de subconjuntos de X:

$$T(A) = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

en una topología en X.

6.– (Topología fuerte en un punto). Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Definimos:

$$\mathcal{C} = \{F \subset X : x_0 \in F\} \cup \{F \subset X : F \text{ es finito}\}.$$

Probar que existe una única topología T en X cuya familia de cerrados es $\mathcal{C}$. Describir los abiertos de T.

7.– (Topología inducida en un subconjunto). Sea (X, T) un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que la familia de subconjuntos de A definida por:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$$

en una topología en A.

8.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset B$ dos subconjuntos no vacíos de X. Probar que $T_B = (T_A)_B$.

9.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si $\mathcal{B}$ es una base de T, probar que:

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de T_A.

10.– Sea (X, T) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de T. Probar que, para cada punto $x \in X$, la familia:

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

es una base de entornos abiertos del punto x.

11.– Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$ y $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Probar que son equivalentes:

(a) $x \in \overline{A}$.
(b) Para todo $B \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$.

12.– (Semiplano de Moore). En $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ se considera la familia:

$$\mathcal{B}_M = \big\{B((x, y), \varepsilon) : y > 0,\ \varepsilon \in (0, y)\big\} \cup \big\{B((x, y), y) \cup \{(x, 0)\} : y > 0\big\}.$$

Probar que existe una única topología T_M en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{B}_M$ es base para T_M.

13.– En $\mathbb{R}$ se consideran las familias:

$$T_1 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}, \quad T_2 = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

(a) Probar que T_1 es una topología en $\mathbb{R}$ y que T_2 no lo es.
(b) Demostrar que T_2 es base de una única topología T en $\mathbb{R}$.
(c) Estudiar si $T_u \subset T_1$, $T_1 \subset T_u$, $T_u \subset T$ o $T \subset T_u$.
(d) En $(\mathbb{R}, T)$, ¿es la intersección arbitraria de abiertos un conjunto abierto?

14.– Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Probar que la familia:

$$\mathring{\mathcal{B}}_x = \{\mathring{B} : B \in \mathcal{B}_x\}$$

es una base de entornos abiertos de x.

15.– En $\mathbb{R}$ se considera la familia de subconjuntos:

$$T = \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : (-1, 1) \subset U\}.$$

(a) Probar que T es una topología en $\mathbb{R}$. Describir los cerrados de T.
(b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ para T con la menor cantidad posible de abiertos.
(c) Dado $x \in \mathbb{R}$, encontrar una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$.
(d) Calcular la clausura, el interior y la frontera de $[0, 1]$ en $(\mathbb{R}, T)$.

16.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

(a) $A = \mathring{A}$ si y solo si A es abierto.
(b) $\mathring{\mathring{A}} = A$.
(c) Si $A \subset B$, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
(d) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.
(e) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

17.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

(a) $A = \overline{A}$ si y solo si A es cerrado.
(b) $\overline{\overline{A}} = A$.
(c) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

18.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar
(a) A es abierto si y solo si $A \cap \partial A = \emptyset$.
(b) A es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$.
(c) A es abierto y cerrado si y solo si $\partial A = \emptyset$.
(d) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

19.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$. Demostrar que $\partial \mathring{A} \subset \partial A$. Describir una situación en la que $\partial \mathring{A} = \partial A$ y otra en la que $\partial \mathring{A} \neq \partial A$.

20.– Sea X un conjunto y $A \subset X$ con $\emptyset \neq A \neq X$. Probar que la familia:

$$\mathcal{B} = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$$

es base de una topología T en X. Calcular el interior y la clausura de A en (X, T).

21.– En $(\mathbb{R}, T_{CF})$ calcular la clausura, el interior y la frontera de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\{1, 2\}$.

22.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Sea $a \in A$ y $\mathcal{B}_a$ una base de entornos de a en (X, T). Probar que la familia

$$(\mathcal{B}_A)_a = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_a\}$$

es una base de entornos de a en (A, T_A)

23.– Calcular A' y $\text{ais}(A) = \{\text{puntos aislados de } A\}$ en los siguientes casos:
(a) (X, T_t) y $A \subset X$ con $\#A \geqslant 2$,
(b) (X, T_D) y $A \subset X$,
(c) (X, T_{CF}) y $A \subset X$ finito,
(d) $(\mathbb{R}, T_S)$ y $A = (0, 1]$.

24.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que $\overline{A} = A' \cup \text{ais}(A)$.

25.– Se considera la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, T_S)$.
(a) Calcular la clausura de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
(b) ¿Cuál es la frontera de los conjuntos $(a, b]$ y $[a, b)$?

26.– (Recta diseminada). En $\mathbb{R}$ se considera la familia de subconjuntos:

$$T = \{A \cup B : A \in T_u,\ B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

(a) Demostrar que T es una topología en $\mathbb{R}$ con $T_u \subset T$.
(b) Probar que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d)$ con $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, T)$.
(c) Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}, T)$ de $[0, 1]$ y $[0, \sqrt{2})$.
(d) Calcular una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, T)$.
(e) Obtener la clausura, el interior y la frontera de $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

27.– Consideramos el subconjunto $A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\}$ de $\mathbb{R}$ con la topología $(T_u)_A$ inducida en A por T_u.

(a) Estudiar si los conjuntos $\{5\}$ y $(1,3)$ son abiertos o cerrados en $(A,(T_u)_A)$.
(b) Comprobar si $[0,1/2]$ es entorno de 0 en $(A,(T_u)_A)$.
(c) Calcular la clausura de $[0,1)$ en $(A,(T_u)_A)$.

28.– Probar que en el semiplano de Moore $(\mathbb{R}^2, T_M)$, el eje de abscisas $y=0$ es un subconjunto discreto.

29.– Sea T_1 y T_2 dos topologías sobre un conjunto X con $T_1 \subset T_2$. Dado $A \subset X$, ¿existe alguna relación entre la clausura y el interior de A en (X,T_1) y en (X,T_2)?

30.– Probar que un espacio topológico (X,T) admite un subconjunto denso no trivial si y sólo si la topología T no es la topología discreta.

31.– Sea X un conjunto no vacío y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de X. Demostrar que existe una única topología T en X tal que $\{A_i\}_{i\in I}$ es base de T. Probar que los abiertos de T y los cerrados de T coinciden. ¿Es, en general, (X,T) un espacio de Hausdorff?

32.– Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subconjunto no vacío, se define $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ por la igualdad:

$$d_A(a,b) = d(a,b), \quad \text{para todo par de puntos } a,b \in X.$$

(a) Demostrar que (A,d_A) es un espacio métrico.
(b) Demostrar que $(T_d)_A = T_{d_A}$ (las topologías inducidas en A por T_d y por d_A coinciden).

33.– Probar que un espacio topológico AN-II es AN-I.

34.– Probar que la recta de Sorgenfrey es AN-I pero no es AN-II.

35.– Sea (X,T_D) un espacio con la topología discreta. Probar
(a) (X,T_D) es AN-I.
(b) (X,T_D) es AN-II si y solo si X es numerable.

36.– En un espacio topológico (X,T) una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno $U \in \mathcal{N}_x$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geqslant i_0$. Si la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x escribiremos $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ y diremos que x es límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) En un espacio (X,T_t) con la topología trivial cualquier sucesión en X converge a todos los puntos de X (los límites de sucesiones en espacios topológicos no son únicos).
(b) En un espacio topológico Hausdorff, una sucesión convergente tiene un único límite.
(c) Sea (X,T) un espacio topológico cualquiera, $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que existe una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a un punto $x \in X$. Probar que $x \in \overline{A}$.
(d) Sea (X,T) un espacio topológico AN-I, $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $x \in \overline{A}$. Probar que existe una sucesión de puntos de A que converge a x. Dar un contraejemplo cuando (X,T) no es AN-I (considerar los números irracionales $\mathbb{I}$ en $(\mathbb{R}, T_{CN})$ y usar el ejercicio 40).

37.– Sea (X,T) un espacio topológico, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $x \in X$, y $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Probar que son equivalentes:

(a) $x = \lim_{i\to\infty} x_i$.
(b) Para todo $B \in \mathcal{B}_x$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B$ para todo $i \geqslant i_0$.

38.– Sea (X,d) un espacio métrico, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, y $x \in X$. Probar que son equivalentes:

(a) $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ en (X,T_d).
(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,x_i) < \varepsilon$ para todo $i \geqslant i_0$.

39.– Sea (X,T_D) un espacio topológico con la topología discreta. Probar que una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X converge a $x \in X$ si y solo si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x$ para todo $i \geqslant i_0$.

40.– Consideramos en $\mathbb{R}$ la topología de los complementos numerables T_{CN}. Probar que una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si y solo si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x$ para todo $i \geqslant i_0$.

41.– Sea (X,T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que:

(a) Si (X,T) es Hausdorff, entonces (A,T_A) es Hausdorff.
(b) Si (X,T) es AN-I, entonces (A,T_A) es AN-I.
(c) Si (X,T) es AN-II, entonces (A,T_A) es AN-II.
(d) Si (X,T) es metrizable, entonces (A,T_A) es metrizable.

42.– Probar que un espacio topológico AN-II es separable.

43.– Probar que un espacio métrico es AN-II si y sólo si es separable.