ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Grado en Matemáticas. Doble grado en Física y Matemáticas. 2^0 Curso.

Examen Final (enero 2018)

1) Teoría

2) Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Existe un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ que es completo (para la distancia euclídea).
Verdadera. Como consecuencia del teorema de complitud, $\mathbb{R}^2$ es completo. Además es abierto.
De hecho, dado que cualquier subespacio completo de un espacio métrico completo es cerrado, si $A \subset \mathbb{R}^2$ es completo, entonces ha de ser cerrado. Si además A es abierto, por ser $\mathbb{R}^2$ conexo, entonces tenemos que $A = \varnothing$ o $A = \mathbb{R}^2$.

b) La restricción a un conjunto acotado de un campo escalar C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ es una función lipschitziana.
Verdadera. Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto no vacío acotado. Luego existe $R > 0$ tal que $A \subset B(0, R)$, donde $B(0, R)$ denota la bola abierta de centro 0 y radio R para la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$. Por ser $B(0, R)$ un abierto convexo y $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, entonces Df es continua, luego por el Teorema de conservación de la compacidad, Df está acotada en $\overline{B}(0, R)$. Como consecuencia del Teorema del valor medio, la restricción de f a $B(0, R)$ es lipschitziana. Luego también es lispschitziana la restricción de f al subconjunto A.

c) Consideramos los campos escalares u, v y f definidos en $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x, y) = e^x + y, \quad v(x, y) = \arctan(x^2 + y^2), \quad \text{y} \quad f(u, v) = \sqrt{1 + u^2 + v^4}.$$

Entonces se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Falsa.

Se puede escribir f en función de las variables x e y, calcular la derivada parcial de f respecto de x usando las reglas de derivación y evaluar después en $(x, y) = (1, 0)$. También se puede aplicar la Regla de la cadena en derivada parciales y evaluar después en $(1, 0)$. Usamos este último procedimiento.

Como los campos escalares tienen gradiente continuo en $\mathbb{R}^2$ (lo calcularemos ahora después), son diferenciables. Por la Regla de la cadena sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales anteriores y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^4}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \frac{2v^3}{\sqrt{1 + u^2 + v^4}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

Ahora evaluamos para $(x, y) = (1, 0)$, obteniendo que

$$u(1,0) = 1, \quad v(1,0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u(1,0), v(1,0)) = \frac{\partial f}{\partial u}\Big(1, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{\pi}{4})^4}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u(1,0), v(1,0)) = \frac{\partial f}{\partial v}\Big(1, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{2\frac{\pi^3}{4^3}}{\sqrt{2 + (\frac{\pi}{4})^4}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = e, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{2} = 1.$$

Por tanto, sustituyendo en (1) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{e}{\sqrt{2 + (\frac{\pi}{4})^4}} + \frac{2\frac{\pi^3}{4^3}}{\sqrt{2 + (\frac{\pi}{4})^4}} > \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donde hemos usado que $e > 2, 0 < (\frac{\pi}{4})^4 < 1$, luego $\frac{e}{\sqrt{2+(\frac{\pi}{4})^4}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

d) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto compacto es un conjunto compacto.
Falsa. Basta considerar la función (f) constantemente igual a 0 en $\mathbb{R}^2$, que es trivialmente continua. El conjunto $\{0\}$ es compacto y, sin embargo, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$, que no es compacto.

3) Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$ (dotado de la norma usual). Prueba que equivalen las siguientes condiciones:

i) E es compacto

ii) Todo campo escalar continuo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que el conjunto $f(E)$ tiene mínimo.

i) ⇒ ii)]
Supongamos que E es compacto y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Por el Teorema de conservación de la compacidad, $f(E)$ es un compacto de $\mathbb{R}$, luego $f(E)$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Por la compacidad de $f(E)$, éste es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y además es no vacío, luego tiene ínfimo. Como el ínfimo de $f(E)$ es un valor adherente de $f(E)$, y este conjunto es cerrado, entonces el ínfimo de $f(E)$ pertenece a $f(E)$, esto es, $f(E)$ tiene mínimo.

ii) ⇒ i)]
Como $E \subset \mathbb{R}^N$, basta probar que E es cerrado y acotado para que E sea compacto, en virtud de la caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$.

Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que E no es cerrado. Entonces existe un elemento $x_0 \in \overline{E}\backslash E$. Definimos entonces la función $f : E \longrightarrow$ dada por $f(x) = \|x - x_0\|_2$ para cada $x \in E$, que obviamente es una función continua en E. Por ser $x_0 \in \overline{E}$ tenemos que $\inf f(E) = 0$. Sin embargo, como $x_0 \notin E$, f no se anula, luego el conjunto $f(E)$ no tiene mínimo. Hemos probado que si E no es cerrado no se verifica la condición ii). Luego si ii) es cierto, E es cerrado.

De forma similar, probaremos que E es acotado. Supongamos que A no es acotado. Luego existe una sucesión $\{a_n\}$ en E tal que $\{\|a_n\|_2\} \to +\infty$. Es claro que la función $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{\|x\|_2+1}$ es continua en E. Por otra parte, como $\{a_n\}$ diverge, entonces $\{g(a_n)\} \to 0$. Además se verifica que $g(E) \subset \mathbb{R}^+$. Deducimos que $\inf g(E) = 0$ y que $g(E)$ no tiene mínimo.

4) Sea A el conjunto dado por $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} \sin(x+y) & \text{si } \ (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A \end{cases}$$

i) Si $s \in \mathbb{R}$, estudia la existencia del límite de f en $(s,-s)$ y su valor (si existe).
Solución:
Notamos que el elemento $(s,-s) \in A' \cap (\mathbb{R}^2 \backslash A)'$.

Dado $s \in \mathbb{R}$, estudiaremos primero la existencia de límite en $(s,-s)$ según el conjunto A.
Dado que $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, tenemos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(s,-s) \\ (x,y)\in A}} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} = 1,$$

de donde,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(s,-s) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = s - (-s) = 2s.$$

Como obviamente tenemos que el límite según $\mathbb{R}^2 \backslash A$ de f en $(s,-s)$ es 0, entonces f tiene límite en $(s,-s)$ si, y sólo si, $2s = 0$, esto es, $s = 0$. Además hemos obtenido que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

ii) Estudia la diferenciablidad de f en $(0,0)$.
Estudiamos primero la existencia de gradiente de f en $(0,0)$, condición que es necesaria para que f sea diferenciable en $(0,0)$.
Si $s \in \mathbb{R}^*$ tenemos que

$$\frac{f(s,0) - f(0,0)}{s}) = \frac{s}{s^2} \operatorname{sen} s = \frac{\operatorname{sen} s}{s}.$$

Tomando límite ($s \to 0$), obtenemos que existe $D_1 f(0,0)$ y además $D_1 f(0,0) = 1$.

Usando un argumento similar para la derivada parcial respecto de la segunda variable obtenemos para $s \in \mathbb{R}^*$ que

$$\frac{f(0,s) - f(0,0)}{s}) = \frac{-s}{s^2} \operatorname{sen} s = \frac{-\operatorname{sen} s}{s}.$$

Luego existe $D_2 f(0,0) = -1$. Por tanto $\nabla f(0,0) = (1,-1)$.

Entonces el hecho de que f sea diferenciable en $(0,0)$ equivale a que el límite de la siguiente función en $(0,0)$ exista y valga 0

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0)|(x,y))}{\|(x,y)\|_2}.$$

Estudiamos primero la existencia de límite de la función anterior en el punto $(0,0)$ restringida al conjunto $\mathbb{R}^2 \backslash A$. Si $x \in \mathbb{R}^*, y = -x$ tenemos que

$$\frac{f(x,-x) - f(0,0) - (\nabla f(0,0)|(x,-x))}{\|(x,-x)\|_2} = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2}} = -\sqrt{2}\frac{x}{|x|}. \tag{2}$$

Como el límite de la función de (2) en 0 no existe, entonces f no es diferenciable en $(0,0)$.

5) a) Enuncia el Teorema de la función implícita

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ un abierto, $a \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}^M$ tal que $(a,b) \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ tal que $f \in C^1(\Omega)$ y $f(a,b) = 0$. Supongamos además que $Df_a(b)$ es inyectiva, donde

$$\Omega_a = \{y \in \mathbb{R}^M : (a,y) \in \Omega\}, \qquad f_a(y) = f(a,y) \qquad\qquad (y \in \Omega_a).$$

Entonces existen abiertos $W \subset \Omega$ y $U \subset \mathbb{R}^N$ tales que $(a,b) \in W$ y $a \in U$, y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ tales que

$$\varphi \in C^1(U) \quad \text{y} \quad \{(x,y) \in W : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

b) Prueba que el sistema de ecuaciones

$$x^2 e^u + yv^3 = 1, \qquad x^2 y + uv^2 = 0 \tag{3}$$

define a las funciones $u = u(x,y)$ **y** $v = v(x,y)$ **implícitamente en un entorno de** $(0,1)$ **de manera que**

$$u(0,1) = 0 \quad \text{y} \quad v(0,1) = 1.$$

Calcula las derivadas parciales (de primer orden) de u **y de** v **en** $(0,1)$**.**

¿Es el campo vectorial $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ **un difeomorfismo de alguna bola abierta centrada en** $(0,1)$ **sobre su imagen?**

Solución: Aplicaremos el Teorema de la función implícita para $N = M = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $a = (0,1) = b$ y el campo vectorial f dado por

$$f(x,y,u,v) = (x^2 e^u + yv^3 - 1, x^2 y + uv^2) \qquad\qquad (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4.$$

Como cada una de las funciones componentes de f es suma de productos de funciones de clase 1 (ambas componentes tienen gradiente continuo en $\mathbb{R}^4$), entonces $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Además se verifica que $f(a,b) = f(0,1,0,1) = (0,0)$. Sólo necesitamos comprobar que $Df_a(b)$ es inyectiva. Por ser $Df_a(b)$ una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, entonces será inyectiva si, y sólo si, es biyectiva; equivalentemente si la matriz jacobiana de f_a en b tiene determinante no nulo. Claramente tenemos que

$$J_{f_{(x,y)}}(u,v) = \begin{pmatrix} x^2 e^u & 3v^2 y \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}.$$

Para $(x,y) = a = (0,1)$ y $(u,v) = b = (0,1)$ obtenemos

$$J_{f_{(0,1)}}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matriz que tiene determinante no nulo.

Como hemos comprobado las hipótesis del Teorema de la función implícita, obtenemos que existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^4$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(0,1) \in U, (0,1,0,1) \in W$ y un campo vectorial $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase 1 tal que si llamamos u y v a las funciones componentes de φ se verifica que

$$f(x,y,u(x,y),v(x,y)) = (0,0), \qquad \forall (x,y) \in U,$$

esto es,

$$x^2 e^{u(x,y)} + yv(x,y)^3 - 1 = 0, \qquad x^2 y + u(x,y)v(x,y)^2 = 0, \qquad\qquad \forall (x,y) \in U. \tag{4}$$

De hecho, la tesis del Teorema de la función implícita afirma que

$$\{(x,y,u,v) \in W : f(x,y,u,v) = 0\} = \{(x,y,u(x,y),v(x,y)) : (x,y) \in U\}.$$

Hemos probado que en el entorno U de $(0,1)$, las ecuaciones (4) definen implícitamente a las funciones u y v. Dado que $f(0,1,0,1)=(0,0)$, la tesis del teorema nos asegura también que

$$u(0,1)=0, \quad v(0,1)=1.$$

Calcularemos ahora las derivadas parciales de u y v usando las ecuaciones (4) y derivando parcialmente en cada una de ellas. Recalcamos que u y v tienen derivadas parciales, por ser las componentes de φ, que es una función de clase C^1 en U, luego diferenciable.

Derivando respecto de x en las ecuaciones del sistema (4) obtenemos

$$2xe^{u(x,y)}+x^2e^{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+y3v(x,y)^2\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0,$$

$$2xy+\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y)^2+2u(x,y)v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0.$$

Sustituyendo para los valores $(x,y)=(0,1)$ y usando que $u(0,1)=0, v(0,1)=1$ obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,1)=0.$$

Ahora derivamos parcialmente respecto de y en $(0,1)$, obteniendo que

$$x^2e^{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+v(x,y)^3+y3v(x,y)^2\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$$

y

$$x^2+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)v(x,y)^2+2u(x,y)v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0.$$

Sustituyendo de nuevo para los valores $(x,y)=(0,1)$ tenemos que

$$1+3\frac{\partial v}{\partial y}(0,1)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,1)=0.$$

Esto es,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,1)=\frac{-1}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,1)=0.$$

Como $\varphi=(u,v)$ y hemos obtenido que

$$J_\varphi(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix},$$

luego la matriz matriz jacobiana no es inversible, entonces $D\varphi(0,1)$ tampoco es inversible. En tal caso, φ no puede ser un difeomorfismo en un entorno de $(0,1)$, ya que, aún en el caso de que la función φ tuviera inversa en un entorno de $(0,1)$ y fuese un homeomorfismo de ese entorno en su imagen, si su inversa fuese diferenciable en $\varphi(0,1)=(0,1)$, por la regla de la cadena habría de ser $D\varphi(0,1)$ inversible, ya que

$$D(\varphi^{-1})(0,1)\circ D(\varphi)(0,1)=I_{\mathbb{R}^2}.$$

En Granada, a 23 de enero de 2017