Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo III: DIFERENCIACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES

Tema 11: TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

María D. Acosta

Universidad de Granada

26-11-2020

Teorema de derivación de la función inversa

Empezamos recordando el resultado que caracteriza la derivabilidad de la inversa de una función de una variable derivable.

Teorema de derivación de la inversa

Sea $A \subset \mathbb{R}, a \in A \cap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva y derivable en a. Entonces $f(a) \in f(A)'$ y equivalen las siguientes afirmaciones:
1) $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es derivable en $f(a)$.
2) $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es continua en $f(a)$ y $f'(a) \neq 0$.
Si se verifican las condiciones anteriores, entonces $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Idea de la prueba:
1) $\Rightarrow$ **2)** Derivable implica continua y regla de la cadena aplicada a $f^{-1} \circ f = I_A$.

2) $\Rightarrow$ **1)** El cociente incremental de f^{-1} en $f(a)$ es (salvo cambio de variable) el inverso del cociente incremental de f en a.

Teorema de diferenciación de la inversa

Teorema de diferenciación de la inversa

Sea $A \subset \mathbb{R}^N, a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ inyectiva, diferenciable en a y $f(a) \in f(\mathring{A})$. Entonces equivalen las siguientes afirmaciones:

1) $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es diferenciable en $f(a)$.

2) $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es continua en $f(a)$ y $\det\big(Jf(a)\big) \neq 0$.

Si se verifican las condiciones anteriores, entonces $Jf^{-1}(f(a)) = Jf(a)^{-1}$, equivalentemente $Df^{-1}(f(a)) = Df(a)^{-1}$.

Observación previa a la prueba: Como la identificación de aplicaciones lineales con matrices, $\Phi : L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{M}_N$ transforma la composición de aplicaciones en producto de matrices, entonces conserva inversos esto es, si $T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ es biyectiva, se tiene que $\Phi(T^{-1}) = \Phi(T)^{-1}$.

Teorema de diferenciación de la inversa

1) $\Rightarrow$ **2)** Como f^{-1} es diferenciable en $f(a)$, es continua en $f(a)$. Por ser f inyectiva en A, existe $f^{-1}: f(A) \longrightarrow A$ y podemos aplicar la Regla de la cadena a la composición $f^{-1} \circ f = I_A$ en el punto a. Por tanto

$$Df^{-1}\big(f(a)\big) \circ Df(a) = DI_A(a) = I,$$

luego

$$Df^{-1}\big(f(a)\big) = \big(Df(a)\big)^{-1}.$$

Escribiendo la igualdad anterior en términos de las matrices asociadas tenemos

$$Jf^{-1}\big(f(a)\big) = \big(Jf(a)\big)^{-1}.$$

Teorema de diferenciación de la inversa

2) $\Rightarrow$ **1)** Suponemos ahora que f^{-1} es continua en $f(a)$ y $Df(a)$ es biyectiva. Llamamos $T = Df(a)$.
Llamamos

$$\Phi(x) = \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} \qquad (x \in A \backslash \{a\}).$$

Si $y \in f(A)\backslash\{f(a)\}$, llamamos $x = f^{-1}(y) \in A\backslash\{a\}$ y escribimos

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) - T^{-1}(y - f(a)) = x - a - T^{-1}(f(x) - f(a)) =$$
$$T^{-1}\big(T(x-a) - f(x) + f(a)\big)$$

Llamamos Ψ a la función dada por

$$\Psi(y) := \|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) - T^{-1}(y - f(a))\|.$$

Sabemos que

$$\Psi(y) \leq \|T^{-1}\| \, \|T(x-a) - f(x) + f(a)\| \leq \|T^{-1}\| \, \Phi(x) \, \|x-a\|. \quad (1)$$

Queremos probar que

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{\Psi(y)}{\|y - f(a)\|} = 0.$$

Teorema de diferenciación de la inversa

Por otra parte,

$$x-a = T^{-1}\big(T(x-a)\big) = T^{-1}\big(T(x-a)-f(x)+f(a)\big)+T^{-1}(f(x)-f(a)).$$

Como consecuencia,

$$\|x-a\| \leq \|T^{-1}\|\,\Phi(x)\,\|x-a\| + \|T^{-1}\|\,\|y-f(a)\|.$$

Por tanto,

$$\Big(1-\|T^{-1}\|\,\Phi(x)\Big)\|x-a\| \leq \|T^{-1}\|\,\|y-f(a)\|.$$

Como f^{-1} es continua en $f(a)$ entonces $\lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = a$. Esto es, si $y \to f(a)$, entonces $x \to a$. Sabemos además que $\lim_{x\to a}\Phi(x) = 0$. Existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$x \in A\backslash, 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \Phi(x) < \frac{1}{2\|T^{-1}\|}.$$

Por continuidad de f^{-1} en $f(a)$ existe $r > 0$ tal que

$$B(f(a), r) \subset f(A),\ \ \|y-f(a)\| < r \ \ \|f^{-1}(y)-a\| < \delta.$$

Teorema de diferenciación de la función inversa

Por último, si $0 < \|y - f(a)\| < r$, dado que

$$1 - \|T^{-1}\|\,\Phi(x) \geq \frac{1}{2},$$

en vista de (1) tenemos

$$\Psi(y) = \|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) - T^{-1}(y - f(a))\| \leq$$

$$\|T^{-1}\|\,\Phi(x)\,2\|T^{-1}\|\,\|y - f(a)\| =$$

$$2\|T^{-1}\|^2\,\Phi(f^{-1}(y))\,\|y - f(a)\|.$$

Por tanto, si $y \in B(f(a), r)$, $y \neq f(a)$ entonces

$$\frac{\Psi(y)}{\|y - f(a)\|} \leq 2\|T^{-1}\|^2\,\Phi(f^{-1}(y)).$$

Como f^{-1} es continua en $f(a)$ y Φ tiene límite en a igual a 0, entonces $\lim_{y \to f(a)} \Phi(f^{-1}(y)) = 0$, luego $\lim_{y \to f(a)} \frac{\Psi(y)}{\|y - f(a)\|} = 0$. Hemos probado que f^{-1} es diferenciable en $f(a)$. $\square$

Difeomorfismo

Definición

Sean A, B abiertos de $\mathbb{R}^N$.
Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es un **difeomorfismo** si f es biyectiva, diferenciable y f^{-1} también es diferenciable. En tal caso escribiremos $f \in \mathrm{Dif}(A, B)$.
Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un **difeomorfismo local** si para cada $a \in A$ existe un entorno abierto U de a contenido en A tal que f es un difeomorfismo de U en $f(U)$.
En caso de que $f \in \mathrm{Dif}(A, B)$, y que tanto f como f^{-1} sean de clase $\mathcal{C}^k$, diremos que f es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^k$. Análogamente se definen los difeomorfismos en A de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto y los difeomorfismos locales de clase $\mathcal{C}^k$.
Si f es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^k$ para todo natural k, diremos que f es un **difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$.**

Por ejemplo, la función exponencial es un difeomorfismo en $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema de la función inversa para 1 variable

Empezamos por enunciar la versión local del teorema en una variable.

Teorema de la función inversa para funciones reales

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en un punto $a \in \mathring{A}$ y que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto U de a contenido en A tal que $V := f(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, f es un difeomorfismo de U sobre V, $f^{-1} : V \to U$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $f(a)$ y

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \ \forall x \in U.$$

Teorema de la función inversa

Proposición

La aplicación determinante es continua en el espacio $\mathcal{M}_N$ de matrices cuadradas de orden N con coeficientes reales. Por tanto, el conjunto

$$\{T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : T \text{ es biyectiva}\}$$

es un abierto de $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.
Como consecuencia, si $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación de clase C^1 en un punto $a \in A$ y $\det Jf(a) \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(a, r) \subset A \quad \text{y} \quad \det Jf(x) \neq 0, \ \forall x \in B(a, r).$$

Demostración: Como $\mathcal{M}_N$ es un espacio vectorial (real) finito-dimensional, consideramos en este espacio la única topología que procede de una norma. Sea $T = \mathbb{R}^{N^2} \longrightarrow \mathcal{M}_N$ una aplicación lineal y biyectiva. Luego T es un homeomorfismo. La aplicación $\det \circ T$ es una función polinómica, luego continua. Por tanto $\det = (\det \circ T) \circ T^{-1}$ es continua.

Teorema de la función inversa

Consideramos ahora la identificación $\Phi : \mathcal{M}_N \longrightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ que es una biyección lineal, luego un homeomorfismo. Por ser $\det$ continua, el conjunto

$$\{B \in \mathcal{M}_N : \det B \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

es un abierto de $\mathcal{M}_N$. Por ser Φ un homeomorfismo, el conjunto

$$\Phi(A) = \{T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : T \text{ es biyectiva}\}$$

es un abierto de $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Por último, sea $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación de clase C^1 en un punto $a \in A$ y $\det Jf(a) \neq 0$. Por hipótesis f es diferenciable en una bola $B(a, R) \subset A$. Consideramos la composición de las aplicaciones $Df : A \longrightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\Phi^{-1} : L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{M}_N$ y $\det : \mathcal{M}_N \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $\Phi \circ Jf = Df$ en $B(a, R)$, entonces $\Phi^{-1} \circ Df = Jf$ en $B(a, R)$. Por tanto,

$$(\det \circ \Phi^{-1} \circ Df)(x) = \det Jf(x), \qquad \forall x \in B(a, R).$$

Las aplicaciones Φ^{-1} y $\det$ son continuas y Df es continua en a por hipótesis. Luego la aplicación $x \mapsto \det Jf(x)$ es continua en $B(a, R)$. Como en a la función anterior no se anula, existe $0 < r < R$ tal que

$$B(a, r) \subset A \quad \text{ y } \quad \det Jf(x) \neq 0, \ \forall x \in B(a, r). \qquad \square$$

Teorema de la función inversa

Proposición

Sea $A = \{T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : T \text{ es biyectiva } \}$ y $J : A \longrightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ la aplicación dada por $J(T) = T^{-1}$. Entonces J es diferenciable y además

$$DJ(T)(S) = -T^{-1} \circ S \circ T^{-1}, \qquad \forall T \in A, S \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

Demostración: Primero probamos que J es continua. Si $S, T \in A$ tenemos que

$$J(S) - J(T) = S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T - S)T^{-1}, \tag{2}$$

luego

$$\|J(S) - J(T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|S - T\| \, \|T^{-1}\|. \tag{3}$$

Usando la desigualdad anterior obtenemos que

$$\left| \frac{1}{\|S^{-1}\|} - \frac{1}{\|T^{-1}\|} \right| \leq \left| \frac{\|T^{-1}\| - \|S^{-1}\|}{\|S^{-1}\| \, \|T^{-1}\|} \right| \leq \left| \frac{\|J(S) - J(T)\|}{\|S^{-1}\| \, \|T^{-1}\|} \right| \leq \|S - T\|.$$

Hemos probado que la aplicación $T \mapsto \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ es continua, luego $T \mapsto \|T^{-1}\|$ también es continua. Como consecuencia de (3), J es continua.

Teorema de la función inversa

Falta probar la diferenciabilidad de J en cada elemento $T \in A$. Notemos que para cada $T \in A$ fijo, la aplicación

$$S \mapsto -T^{-1}ST^{-1}$$

es lineal definida en $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y con valores en el mismo espacio. Luego es continua por ser el dominio un espacio vectorial finito-dimensional. En vista de (2) tenemos

$$\frac{\|J(T+S) - J(T) + T^{-1}ST^{-1}\|}{\|S\|} =$$

$$\frac{\|(T+S)^{-1}(-S)T^{-1} + T^{-1}ST^{-1}\|}{\|S\|} =$$

$$\frac{\|\big((T+S)^{-1} - T^{-1}\big)ST^{-1}\|}{\|S\|} \leq$$

$$\frac{\|J(T+S) - J(T)\|\,\|S\|\,\|T^{-1}\|}{\|S\|} =$$

$$\|J(T+S) - J(T)\|\,\|T^{-1}\|.$$

Como J es continua en T, tomando límite ($S \to 0$) se obtiene que J es diferenciable en T.

Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa (versión local)

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial diferenciable. Supongamos que Df es continua en $a \in A$ y además $Df(a)$ es biyectiva. Entonces existe un entorno abierto U de a contenido en A tal que $V := f(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^N$, f es un difeomorfismo de U sobre V y $f^{-1} : V \to U$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $f(a)$. Además,

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \ \forall x \in U,$$

equivalentemente

$$J(f^{-1})(f(x)) = (Jf(x))^{-1}, \ \forall x \in U.$$

La dificultad de la demostración está en la prueba de la inyectividad local de f, la continuidad de la inversa en un entorno de $f(a)$ y que f transforma un abierto que contiene al punto a , en un abierto de $\mathbb{R}^N$.

Teorema de la función inversa

Demostración:
Caso particular: Primero probaremos el enunciado en caso de que $a = f(a) = 0$ y $Df(a) = Df(0) = I$. Primero probaremos que en un entorno de 0 f es inyectiva. Para eso usaremos la idea de que cerca de 0 f se comporta como $Df(0) = I$.
Como A es abierto y $0 \in A$, existe $R > 0$ tal que $B(0, R) \subset A$. Definimos $g : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por $g(x) = f(x) - x$. Por ser f diferenciable y $Df(0) = I$, g es diferenciable y

$$Dg(x) = Df(x) - I, \forall x \in B(0, R).$$

Como Df es continua en 0, entonces Dg es continua en 0. Además $Dg(0) = Df(0) - I = 0$ y $g(0) = 0$. Usando además la proposición anterior, existe $0 < 2r < R$ tal que

$$\det Jf(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad \|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \overline{B}(0, 2r).$$

Como $\overline{B}(0, 2r)$ es un convexo, por el Teorema del valor medio, g es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que $\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\|f(x) - x - f(y) + y\| = \|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{B}(0, 2r).$$

Teorema de la función inversa

Además,

$$\|y-x\|-\|f(x)-f(y)\| \leq \|y-x+f(x)-f(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|, \forall x, y \in \overline{B}(0,2r).$$

Luego

$$\frac{1}{2}\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|, \quad \forall x, y \in \overline{B}(0,2r).$$

Como consecuencia, la restricción de f a $\overline{B}(0,2r)$ es inyectiva y además $f^{-1} : f(\overline{B}(0,2r)) \longrightarrow \overline{B}(0,2r)$ es lipschitziana, luego continua.

Probaremos ahora que la imagen por f de un entorno de cero es un abierto en $\mathbb{R}^N$. Probaremos que $\overline{B}(0,r) \subset f(\overline{B}(0,2r))$.
Sea $y \in \overline{B}(0,r)$, entonces se verifica $y = f(x)$ si, sólo si, $y - x = g(x)$, esto es, $y - g(x) = x$, esto es, la aplicación $x \mapsto y - g(x)$ tiene un punto fijo.
Definimos $h : \overline{B}(0,2r) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $h(x) = y - g(x)$. Como g es contractiva con constante menor o igual que $\frac{1}{2}$, h también lo es. Además $g(0) = 0$. Por tanto,

$$\|h(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq r + \|g(x) - g(0)\| \leq r + \frac{1}{2}\|x\| \leq 2r.$$

Teorema de la función inversa

Por tanto, podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach a la función h, ya que $h(\overline{B}(0,2r)) \subset \overline{B}(0,2r)$. Si h tiene un punto fijo, entonces $y \in f(\overline{B}(0,2r))$. Por la estimación que hemos hecho antes, si $\|y\| < r$, entonces

$$\|h(x)\| < r,$$

luego $y \in f(B(0,2r))$. Es decir, hemos probado que

$$B(0,r) \subset f(B(0,2r)).$$

Tomamos $O = f^{-1}(B(0,r)) \cap B(0,2r)$ que es un abierto de $\mathbb{R}^N$ que contiene a 0. Sabemos que f es inyectiva en O y f^{-1} es lipschitziana en $B(0,r)$ y $f(O) = B(0,r)$. Además O contiene a 0.
Por tanto, O y $B(0,r)$ son abiertos que contienen a 0 y se verifica que $f(O) = B(x,r)$. Como f^{-1} es continua en $B(0,r)$ y además $\det Jf(x) \neq 0$ para cada $x \in O$, por el Teorema de diferenciación de la inversa, f^{-1} es diferenciable en $B(x,r)$ y además

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in O.$$

Hemos terminado la prueba del resultado en el caso de que $a = 0 = f(a)$ y $Df(0) = I$.

Teorema de la función inversa

Caso general: Por hipótesis f es clase C^1 en $a \in \mathring{A}$ y $\det Jf(a) \neq 0$.
Luego $T = Df(a)$ es biyectiva.
Vamos a componer f con difeomorfismos de forma que para la composición se consigan las hipótesis en las que hemos probado el teorema.
Consideramos entonces la composición de las aplicaciones

$$T_a : A - a \longrightarrow A, \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N, T_{-f(a)} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad T^{-1} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

donde

$$T_a(x) = x + a, \qquad T_{-f(a)}(x) = x - f(a).$$

Notemos que $A - a$ es un abierto que contiene a 0 y T_a, $T_{-f(a)}$ y T^{-1} son funciones de clase C^1 en sus dominios y

$$DT_a = I = DT_{-f(a)}, DT^{-1} = T^{-1}.$$

Luego $g = T^{-1} \circ T_{-f(a)} \circ f \circ T_a$ es diferenciable por la regla de la cadena. Además se tiene que

$$Dg(x) = T^{-1} \circ I \circ Df(a + x) \circ I = T^{-1} \circ Df(a + x), \forall x \in A - a.$$

Como Df es continua en a, entonces Dg es continua en 0.

Teorema de la función inversa

Además

$$T_a(0) = a, \quad T_{-f(a)}(f(a)) = 0 \;\text{ y }\; T^{-1}(0) = 0,$$

luego $g(0) = 0$ y $Dg(0) = T^{-1} \circ Df(a) = I$.
Podemos aplicar entonces al campo vectorial g la versión del resultado que demostramos antes. Luego existen abiertos de $\mathbb{R}^N$ que contienen al cero O_1 y O_2 tales que g es un difeomorfismo de O_1 y O_2 y además $O_1 \subset A - a$. Tomamos $U = O_1 + a$, que es un abierto contenido en A y $V = f(U)$. Como $g = T^{-1} \circ T_{-f(a)} \circ f \circ T_a$ es un difeomorfismo de O_1 en O_2 y la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo, entonces

$$f = T_{f(a)} \circ T \circ g \circ T_{-a}$$

es un difeomorfismo de U en V, que es un abierto en R^N, por ser la imagen del abierto U por un homeomorfismo.
Por el Teorema de diferenciación de la función inversa sabemos que

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U.$$

Como Df es continua en a y la inversión de operadores también, Df^{-1} es continua en $f(a)$.

Teorema de la función inversa

Corolario (versión global del Teorema de la función inversa)

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase C^1. Supongamos que f es inyectiva y además $\det Jf(x) \neq 0$ para cada punto $x \in A$. Entonces $f(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y f es un difeomorfismo de clase C^1 de A en $f(A)$.
En caso de que f sea de clase C^k, entonces es un difeomorfismo de clase C^k.

Demostración: En cada punto podemos usar la versión local del teorema. Por tanto, para cada punto $a \in A$ existe un entorno $U_a \subset A$ tal que $f(U_a)$ es abierto en $\mathbb{R}^N$. Luego $f(A) = \bigcup_{a \in A} f(U_a)$ es abierto. Como f es inyectiva, y para cada punto de a existe un abierto que contiene a a cuya restricción de f es un difeomorfismo de clase C^1, entonces f es un difeomorfismo de clase C^1.
No vamos a probar la tesis sobre C^k. La demostración está basada en la expresión de Df^{-1} y el hecho de que J (la inversión de los operadores biyectivos en $\mathbb{R}^N$) es de clase C^∞. $\square$

Teorema de la función inversa

En una variable real sabemos que una función derivable en un intervalo cuya derivada no se anula es inyectiva. El siguiente ejemplo muestra que en dimensión mayor que uno no es cierto un resultado similar. De hecho, no hay ninguna hipótesis sobre la diferencial de un campo vectorial que implique la inyectividad de éste.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2)\big),$$

es de clase C^1, su diferencial en cada punto es biyectiva, ya que

$$\det\big(J_f(x,y)\big) = e^{2x} \neq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

y no es inyectiva. De hecho,

$$f(x,y) = f(x, y+2\pi),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Salvo la identificación canónica de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, f es la exponencial compleja.

Teorema de la función implícita

Ejemplos

1) Consideramos la siguiente ecuación

$$f(x, y) = ax + by - c = 0,$$

donde a, b y c son reales fijos. En caso de que $b \neq 0$, el conjunto de soluciones de la ecuación anterior se puede describir como

$$\left\{ \left(x, \frac{c - ax}{b} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notamos que en este caso

$$Jf(x, y) = \nabla f(x, y) = (a, b), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego la condición $b \neq 0$ significa que la última matriz cuadrada que aparece en la matriz jacobiana de f es inversible.
2) Es fácil dar ejemplos de campos escalares tales que la ecuación $f(x, y) = 0$ no tiene soluciones. ($f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$).

Teorema de la función implícita

3) Aún en el caso de que una ecuación de la forma anterior tenga soluciones, es posible que no se puedan parametrizar localmente por una función, como ocurre en el ejemplo primero.
Consideramos

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Si partimos de la solución $(1,0)$, en cualquier entorno de $(1,0)$ hay puntos de la esfera unidad (los ceros de f) donde la segunda coordenada es positiva y también donde es negativa, luego en un entorno de $(1,0)$, los ceros de f no se pueden describir de la forma

$$(x, \varphi(x))$$

donde x está en un cierto intervalo que contiene a 1. En este caso

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se tiene que $f(1,0) = 0$, pero en este caso

$$\nabla f(1,0) = (2,0).$$

En este caso en el que la variable (y) no se puede describir por la gráfica de una función que dependa de x en los ceros de f próximos a $(1,0)$ se verifica que el segundo coeficiente de $\nabla f(1,0)$ se anula.

Teorema de la función implícita

Teorema de la función implícita

Sean $G \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ un conjunto abierto y $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que existe $(a, b) \in G$ tal que $f(a, b) = 0$ y que

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1}f_1(a,b) & \ldots & D_{N+M}f_1(a,b) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{N+1}f_M(a,b) & \ldots & D_{N+M}f_M(a,b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces existen un entorno abierto Ω de (a, b) contenido en G, un entorno abierto U de a y una función $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\{(x, y) \in \Omega : \; f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : \; x \in U\}.$$

Se tiene también que para todo $x \in U$ se verifica que

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1}f_1(x,\varphi(x)) & \ldots & D_{N+M}f_1(x,\varphi(x)) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{N+1}f_M(x,\varphi(x)) & \ldots & D_{N+M}f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Teorema de la función implícita

Si llamamos $C(x,y)$ y $D(x,y)$ a las matrices

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y) & \dots & D_N f_1(x,y) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D_1 f_M(x,y) & \dots & D_N f_M(x,y) \end{pmatrix}$$

y

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,y) & \dots & D_{N+M} f_1(x,y) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ D_{N+1} f_M(x,y) & \dots & D_{N+M} f_M(x,y) \end{pmatrix},$$

entonces

$$J_\varphi(x) = -D(x,\varphi(x))^{-1} C(x,\varphi(x)).$$

Además si f es de f es clase $\mathcal{C}^k$, entonces φ es de clase $\mathcal{C}^k$.

Teorema de la función implícita

Demostración: Consiste en aplicar el Teorema de la función inversa en el punto (a, b) al campo vectorial $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ definido por

$$F(x, y) := (x, f(x, y)), \qquad \forall (x, y) \in G.$$

F es de clase $\mathcal{C}^1$ con matriz jacobiana en cada $(x, y) \in G$ dada por

$$\begin{pmatrix} & I & & & 0 & \\ D_1 f_1(x,y) & \dots & D_N f_1(x,y) & D_{N+1} f_1(x,y) & \dots & D_{N+M} f_1(x,y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_M(x,y) & \dots & D_N f_M(x,y) & D_{N+1} f_M(x,y) & \dots & D_{N+M} f_M(x,y) \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\det\big(J_F(x,y)\big) = \det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,y) & \dots & D_{N+M} f_1(x,y) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{N+1} f_M(x,y) & \dots & D_{N+M} f_M(x,y) \end{pmatrix}, \ \forall (x,y) \in G, \tag{4}$$

y por hipótesis tenemos que

$$\det\big(J_F(a,b)\big) \neq 0.$$

Teorema de la función implícita

El Teorema de la función inversa (versión local) nos garantiza la existencia de un entorno abierto Ω de (a, b) en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ contenido en G tal que $F : \Omega \longrightarrow F(\Omega)$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F(\Omega)$ es de la forma $U \times W$, donde U es un entorno abierto de a en $\mathbb{R}^N$ y W es un entorno abierto de cero en $\mathbb{R}^M$, ya que

$$F(a, b) = (a, 0) \in F(\Omega),$$

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ tiene la topología producto de la de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ y la restricción de un difeomorfismo a un abierto de su dominio es un difeomorfismo.
Por definición de F, la aplicación F^{-1} tiene la forma

$$F^{-1}(x, z) = (x, h(x, z)),\ \forall (x, z) \in U \times W$$

para conveniente campo vectorial $h : U \times W \to \mathbb{R}^M$ de clase $\mathcal{C}^1$, pues F^{-1} es de clase $\mathcal{C}^1$. Definimos ahora el campo vectorial $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ por

$$\varphi(x) := h(x, 0),\ \forall x \in U.$$

La función φ es de clase $\mathcal{C}^1$, y, como
$(a, b) = F^{-1}(a, 0) = (a, h(a, 0)) = (a, \varphi(a))$, se verifica que $\varphi(a) = b$.

Teorema de la función implícita

Además para cada $x \in U$ se tiene que

$$(x, \varphi(x)) = (x, h(x, 0)) = F^{-1}(x, 0) \in \Omega \subset G$$

y también que

$$(x, f(x, \varphi(x))) = F(x, \varphi(x)) = F(x, h(x, 0)) = F\big(F^{-1}(x, 0)\big) = (x, 0),$$

en consecuencia,

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \qquad \forall x \in U.$$

Hemos comprobado la inclusión

$$\{(x, \varphi(x)) : \ x \in U\} \subset \{(x, y) \in \Omega : \ f(x, y) = 0\}.$$

Veremos que la inclusión anterior es de hecho una igualdad, por lo que φ es única:

$$\left.\begin{array}{r} (x, y) \in \Omega \\ f(x, y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, 0) = (x, f(x, y)) = F(x, y) \in U \times W,$$

por tanto, $x \in U$ y se tiene

$$(x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, h(x, 0)) = (x, \varphi(x)),$$

luego $y = \varphi(x)$.

Teorema de la función implícita

Como F es un difeomorfismo de Ω en $U \times W$ se tiene que $\det\left(J_F(x,\varphi(x))\right) \neq 0$ para cada $x \in U$. Por la forma de la matriz jacobiana de F se tiene que $\det\left(J_F(x,\varphi(x))\right)$ coincide con el siguiente determinante

$$\det D(x,\varphi(x)) = \det \begin{pmatrix} D_{N+1}f_1(x,\varphi(x)) & \dots & D_{N+M}f_1(x,\varphi(x)) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ D_{N+1}f_M(x,\varphi(x)) & \dots & D_{N+M}f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix}.$$

Por último, calculamos la matriz jacobiana de φ. Para cada para cada $1 \leq i \leq M$ se tiene que

$$f_i(x,\varphi(x)) = 0, \qquad \forall x \in U.$$

Derivando parcialmente en la expresión anterior, en vista de la regla de la cadena, obtenemos que

$$D_j f_i(x,\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{M} D_{N+k} f_i(x,\varphi(x)) D_j \varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in U, \ \forall 1 \leq j \leq N.$$

Teorema de la función implícita

Para $1 \leq i \leq M$ tenemos

$$D_j f_i(x,\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{M} D_{N+k} f_i(x,\varphi(x)) D_j \varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in U, \ \forall 1 \leq j \leq N.$$

Esto es, para cada $x \in U$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(x,\varphi(x)) & \dots & D_N f_1(x,\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_M(x,\varphi(x)) & \dots & D_N f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,\varphi(x)) & \dots & D_{N+M} f_1(x,\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{N+1} f_M(x,\varphi(x)) & \dots & D_{N+M} f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} J\varphi(x) = 0,$$

esto es

$$C(x,\varphi(x)) + D(x,\varphi(x))\, J\varphi(x) = 0.$$

Como $D(x,\varphi(x)$ es inversible, de la expresión anterior, se puede despejar $J\varphi(x)$ para obtener

$$J\varphi(x) = -D(x,\varphi(x))^{-1} C(x,\varphi(x)), \quad \forall x \in U.$$

Teorema de la función implícita

Finalmente, si f es de clase C^k, entonces F también es de clase C^k y φ también lo es. $\square$

Ejemplo

Prueba que la igualdad

$$y \ln(x^2 + y^2) - 2xy = 0$$

define implícitamente a y como función de x en un entorno de 0 y además la gráfica de esa función contiene a $(0, 1)$.
Calcula la derivada de esa función en 0.

En esta caso aplicamos el Teorema de la función implícita con $N = M = 1$ y $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) - 2xy \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}).$$

Claramente f es de clase C^1 (de clase C^∞ de hecho).

Teorema de la función implícita

$$f(x,y) = y\ln(x^2+y^2) - 2xy \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}).$$

Además $f(0,1) = 0$ y

$$Jf(x,y) = \nabla f(x,y) = \Big(2x\frac{y}{x^2+y^2} - 2y, \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} - 2x\Big).$$

Luego

$$\nabla f(0,1) = (-2,2).$$

Como el último coeficiente del gradiente de f en $(0,1)$ es no nulo, podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Luego existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ y un abierto $U \subset \mathbb{R}$ con $0 \in U$ y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\} = \{(x,\varphi(x)) : x \in U\}. \qquad (5)$$

Como $(0,1) \in \Omega$ y $f(0,1) = 0$, de la igualdad anterior obtenemos que $\varphi(0) = 1$.

Teorema de la función implícita

En vista de (5) obtenemos que

$$\varphi(x)\ln(x^2+\varphi(x)^2)-2x\varphi(x)=0. \tag{6}$$

Como φ es derivable en U, derivando implícitamente en al ecuación anterior se tiene para cada $x \in U$

$$\varphi'(x)\ln(x^2+\varphi(x)^2)+\varphi(x)(2x+2\varphi(x)\varphi'(x))\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2}-2\varphi(x)-2x\varphi'(x)=0.$$

Particularizando para $x=0$, como $\varphi(0)=1$ tenemos

$$\varphi'(0)\ln(1)+2\varphi'(0)-2=0,$$

es decir $\varphi'(0)=1$.
Usando la ecuación que verifica la primera derivada, y derivando de nuevo implícitamente, puede calcularse $\varphi''(0)$.
Por el mismo procedimiento, puede calcularse la derivada de cualquier orden en 0, ya que en este caso φ es de clase C^∞.