Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo II: FUNCIONES DIFERENCIABLES. APLICACIONES

Tema 10: TEOREMA DE TAYLOR. EXTREMOS RELATIVOS

María D. Acosta

Universidad de Granada

9-11-2020

Derivadas parciales de orden superior

Derivadas parciales de orden superior

Si $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f tiene derivadas parciales. Si para cada $k \leq N$, la aplicación $D_k f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales, diremos que f **tiene derivadas parciales de segundo orden.** En tal caso, notaremos

$$D_{ij} f(a) = D_i(D_j f)(a)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a),$$

para $1 \leq i, j \leq N$. En caso de que $i = j$ escribiremos simplemente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ en lugar de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$. A los elementos del conjunto

$$\{D_{ij} f(a) : 1 \leq i, j \leq N\}$$

se llaman **derivadas parciales de segundo orden de f en a.**

Matriz hessiana

Matriz hessiana

Las derivadas parciales de orden superior se definen por recurrencia. Si las derivadas parciales de f de orden n admiten derivadas parciales en a, diremos que f admite **derivadas parciales de orden** $n+1$ y se usa la notación análoga para éstas.

Por ejemplo, $D_{123}f(a)$ es la derivada parcial respecto de la primera variable de $D_{23}f$ en a.

Si f tiene derivadas parciales de segundo orden en a, llamamos **matriz hessiana de** f **en** a a la dada por

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) & \dots & D_{1N}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) & \dots & D_{2N}f(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{i1}f(a) & D_{i2}f(a) & \dots & D_{iN}f(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{N1}f(a) & D_{N2}f(a) & \dots & D_{NN}f(a) \end{pmatrix}$$

Campos escalares de clase C^k

Definición

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Si $k \in \mathbb{N}$, diremos que f es de **clase** $C^k(A)$ si f tiene derivadas parciales de orden k en A y además éstas son continuas.

Diremos que f es de **clase** $C^\infty(A)$ si f es de clase $C^k(A)$ para todo natural k.

Ejemplo

Cualquier función racional en $\mathbb{R}^N$ es de clase C^∞ en su dominio de definición.

Simetría de la matriz hessiana

Teorema de Schwarz

Si $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en a, entonces se verifica que

$$D_{ij} f(a) = D_{ji} f(a) \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

Por tanto la matriz hessiana es simétrica.

De hecho, si $k \geq 2$ y f tiene derivadas parciales de orden k continuas, entonces el valor de éstas en un punto dependen del número de veces que se haya derivado respecto de cada variable y no del orden en que se haya derivado respecto de cada variable.

Por ejemplo, si f es un campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$ y tiene derivadas parciales de orden 3 y son continuas, entonces para cada $a \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$D_{123} f(a) = D_{132} f(a) = D_{213} f(a) = D_{231} f(a) = D_{312} f(a) = D_{321} f(a).$$

Polinomio de Taylor de una función

Recordamos que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada de orden n en a, el polinomio de Taylor de orden n de f en a, que notamos por P_n, es un polinomio de grado menor o igual que n que verifica

$$P_n(a) = f(a), \qquad P_n^{k)}(a) = f^{k)}(a) \text{ si } k \leq n.$$

Para campos escalares daremos un polinomio similar donde se sustituyen las derivadas de la función en a por las derivadas parciales de orden menor o igual que n en a.

Ejemplo

Sea f la función polinómica en dos variables dada por

$$f(x, y) = a_0 + b_1 x + b_2 y + c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2,$$

donde a_0, b_1, b_2, c_1, c_2 y c_3 son números reales.

Comprobaremos que los coeficientes anteriores viene determinados por los valores de las derivadas parciales de f en $(0, 0)$ de orden menor o igual que 2.

Polinomio de Taylor de una función

$$f(x,y) = a_0 + b_1x + b_2y + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2,$$

Tenemos que

$$D_1f(x,y) = b_1 + 2c_1x + c_2y, \qquad D_2f(x,y) = b_2 + c_2x + 2c_3y,$$

$$D_{11}f(x,y) = 2c_1, \qquad D_{21}f(x,y) = D_{12}f(x,y) = c_2, \qquad D_{22}f(x,y) = 2c_3.$$

Por tanto,

$$a_0 = f(0,0), \quad b_1 = D_1f(0,0), \quad b_2 = D_2f(0,0),$$

$$c_1 = \frac{D_{11}f(0,0)}{2}, \quad c_2 = \frac{D_{12}f(0,0) + D_{21}f(0,0)}{2}, \quad c_3 = \frac{D_{22}f(0,0)}{2}.$$

Polinomio de Taylor de una función

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que tiene derivadas parciales de orden n en un punto $a \in A$.
Notaremos por

$$d^1(f,a,x) = Df(a)(x) = < \nabla f(a), x > = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) x_i \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Si $n \geq 2$, definimos

$$d^2(f,a,x) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(a) x_i x_j \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Para definir $d^k(f,a,x)$, consideramos el siguiente operador "formal" que nos daría $d^2(f,a,x)$ partiendo de $d^1(f,a,x)$.

$$\left(d^1(f,a,x)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} D_i f(a) x_i\right)^2 := \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j f(a) x_i x_j =$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(a) x_i x_j \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Con el mismo convenio de notación, de esta forma, definimos $d^k(f,a,x)$ de forma que

$$d^k(f,a,x) = \Big(\sum_{i=1}^{N} D_i f(a) x_i\Big)^k \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = e^y + x^4 + x^2 y$. Luego f es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En este caso, tenemos

$$D_1 f(x,y) = 4x^3 + 2xy, \quad D_2 f(x,y) = e^y + x^2.$$

Como

$$D_1 f(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad D_2 f(0,0) = 1,$$

si $a = (0,0)$, entonces

$$d^1 f(a,(x,y)) = y.$$

Dado que

$$D_{11} f(x,y) = 12x^2 + 2y, \quad D_{21} f(x,y) = D_{12} f(x,y) = 2x, \quad D_{22} f(x,y) = e^y,$$

Polinomio de Taylor de un campo escalar

entonces

$$D_{11}f(0,0) = 0 = D_{12}f(0,0) = D_{21}f(0,0), \quad \text{y} \quad D_{22}f(0,0) = 1.$$

Como consecuencia

$$d^2(f, a, (x,y)) = y^2.$$

Sabemos que

$$D_{11}f(x,y) = 12x^2+2y, \quad D_{21}f(x,y) = D_{12}f(x,y) = 2x, \quad D_{22}f(x,y) = e^y,$$

luego

$$D_{111}f(x,y) = 24x, \quad D_{221}f(x,y) = 0, \quad D_{112}f(x,y) = 2, \quad D_{222}f(x,y) = e^y.$$

Evaluando en $(0,0)$ tenemos

$$D_{111}f(0,0) = 0 = D_{221}f(0,0) = 0, \quad D_{112}f(0,0) = 2, \quad D_{222}f(0,0) = 1.$$

Luego

$$d^3(f, a, (x,y)) = 6x^2y + y^3.$$

Polinomio de Taylor de una función

Teorema de Taylor

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que f es de clase $C^{k+1}(A)$ y $a, x \in \mathbb{R}^N$ con x tal que $[a, a+x] \subset A$. Entonces existe $c \in]a, a+x[$ tal que

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i(f, a, x) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f, c, x).$$

Demostración: Caso particular para $k = 2$. Por hipótesis, sabemos que

$$\{a + tx : t \in [0,1]\} \subset A.$$

Definimos entonces $\varphi(t) = f(a+tx)$ para $t \in [0,1]$. Llamamos $\sigma(t) = a + tx$, luego σ es derivable en $[0,1]$ con derivada constante igual a x. Como f es de clase 3 en A, entonces es diferenciable, luego φ es derivable. Además

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Además

$$\varphi'(t) = D\varphi(t)(1) = D(f \circ \sigma)(t)(1) = \Big(Df(\sigma(t)) \circ D\sigma(t)\Big)(1) =$$

$$Df(\sigma(t))\big(D\sigma(t)(1)\big) = Df(\sigma(t))\big(\sigma'(t)\big) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} D_i f(\sigma(t))x_i = d^1(f, \sigma(t), x)$$

Como σ es afín y f es de clase $C^3(A)$, entonces $D_i f$ es de clase $C^2(A)$ para cada $i \leq N$. En particular φ es derivable en $[0, 1]$. Para calcular φ'' usamos el mismo procedimiento que para derivar φ, sólo que ahora para cada $i \leq N$, $D_i f$ hace el mismo papel que antes hacía f.
Para cada $i \leq N$, la derivada de $t \mapsto D_i f(\sigma(t))x_i$ en t vale

$$\sum_{j=1}^{N} D_j(Dif)(\sigma(t))x_i x_j.$$

Por tanto,

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(\sigma(t))x_i x_j = d^2(f, \sigma(t), x)$$

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Como f es de clase $C^3(A)$, entonces $D_{ij}f$ tiene derivadas parciales continuas para cada $i, j \leq N$. Luego $D_{ij}f$ es diferenciable, por tanto, φ'' es derivable. Repitiendo el mismo argumento usado para derivar φ, donde ahora $D_{ij}f$ hace el mismo papel de f, se obtiene

$$\varphi^{3)}(t) = \sum_{i,j,k=1}^{N} D_{ijk}f(\sigma(t))x_i x_j x_k = d^3(f, \sigma(t), x), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Por las fórmulas obtenidas, al ser f de clase $C^3(A)$, entonces φ es de clase $C^3([0,1])$.
Usamos entonces la fórmula del resto de Taylor de orden 3 para φ desarrollando en 0 y evaluando en 1. Tenemos entonces

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \frac{1}{3!}\varphi^{3)}(t_0),$$

para algún punto $t_0 \in]0,1[$.

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Dado que $\sigma(1) = a + x, \sigma(0) = a$ y $\varphi(t) = f(\sigma(t))$ sustituyendo las derivadas de φ en la fórmula anterior obtenemos que

$$f(a+x) = f(a) + d^1(f, a, x) + \frac{1}{2}d^2(f, a, x) + \frac{1}{3!}d^3(f, \sigma(t_0), x).$$

Si llamamos $c = \sigma(t_0) = a + t_0 x \in]a, a+x[$, ya que $t_0 \in]0, 1[$, tenemos el enunciado para $k = 2$. $\square$

Polinomio de Taylor de una función

Teorema de Taylor-Young

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que f es de clase $C^k(A)$, $a \in A$ y $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Entonces existe $\varphi : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i(f, a, x) + \|x\|^k \varphi(x), \forall x \in B(0, r)$$

y además $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.

Demostración: Caso particular para $k = 2$. Si $x \in B(0, r)$, sabemos que $a, a + x \in B(a, r) \subset A$. Como las bolas abiertas en un normado son convexas, entonces $[a, a + x] \subset A$. Usamos el Teorema de Taylor, luego existe $c \in]a, a + x[$ tal que

$$f(a + x) = f(a) + d^1(f, a, x) + \frac{1}{2} d^2(f, c, x).$$

Por tanto,

$$f(a+x) = f(a) + d^1(f, a, x) + \frac{1}{2} d^2(f, a, x) + \Big(\frac{1}{2} d^2(f, c, x) - \frac{1}{2} d^2(f, a, x)\Big).$$

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Basta probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{d^2(f,c,x) - d^2(f,a,x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Usaremos que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en a y que el numerador de la expresión anterior es una suma finita de términos de la forma

$$g_{ij}(x) := D_{ij}f(c)x_i x_j - D_{ij}f(a)x_i x_j$$

con $i, j \leq N$.
Probaremos que $\lim_{x\to 0} \frac{g_{ij}(x)}{\|x\|^2} = 0$ para cada $i, j \leq N$. En efecto, por la continuidad de $D_{ij}f$ en a, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < r$ tal que

$$z \in B(a,\delta) \Rightarrow |D_{ij}f(z) - D_{ij}f(a)| \leq \varepsilon.$$

Si $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\| < \delta$, entonces $a + x \in B(a,\delta)$, como $c \in [a, a+x] \subset B(a,\delta)$ tenemos que

$$|D_{ij}f(c) - D_{ij}f(a)| \leq \varepsilon.$$

Polinomio de Taylor de un campo escalar

Por tanto,

$$\frac{|g_{ij}(x)|}{\|x\|^2} \leq \frac{|D_{ij}f(c) - D_{ij}f(a)|\,|x_i x_j|}{\|x\|^2} \leq |D_{ij}f(c) - D_{ij}f(a)| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Extremo relativo

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f **tiene un máximo relativo en** a si existe $r > 0$ tal que

$$B(a,r) \subset A \quad \text{y} \quad f(x) \leq f(a), \ \ \forall x \in B(a,r).$$

Cambiando la última desigualdad se obtiene el concepto de mínimo relativo en a.
Diremos que f **tiene un extremo relativo en** a si tiene un máximo relativo en a ó un mínimo relativo en a.

Extremos relativos

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A$ y supongamos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en a y además tiene derivada direccional en a según $v \in \mathbb{R}^N$, entonces $f'(a; v) = 0$.
En particular, si f tiene gradiente en a, entonces $\nabla f(a) = 0$.

Demostración:

Supongamos que f tiene un mínimo relativo en a. Luego existe $r > 0$ que verifica

$$B(a, r) \subset A \quad \text{ y } \quad f(x) \leq f(a), \ \ \forall x \in B(a, r).$$

Sea $v \in \mathbb{R}^N$ y supongamos que existe $f'(a; v)$. Si $\delta = \frac{r}{\|v\|}$, entonces $a + tv \in B(a, r) \subset A$ si $|t| < \delta$. Entonces la la función $g :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(a + tv) \qquad (t \in]-\delta, \delta[),$$

tiene un mínimo relativo en 0, y es derivable en 0, luego $g'(0) = 0$.
Como

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = f'(a; v),$$

luego $f'(a; v) = 0$.

Extremos relativos

En particular, si f tiene gradiente en a, entonces tiene derivadas parciales en a, luego éstas han de ser cero Por tanto, f tiene gradiente nulo en a. $\square$

Notemos que el papel de $f'(a)$ para funciones de una variable lo desempeña en este caso el vector gradiente.

Para dar un criterio semejante al que existe en una variable para decidir si en un punto crítico una función tiene un extremo relativo, usaremos la matriz hessiana.

Definición

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^N$ es un aplicación $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe una forma bilineal $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$Q(x) := B(x,x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N .$$

Formas cuadráticas

Ejemplos

- Como en $\mathbb{R}$ las aplicaciones bilineales se identifican con $\mathbb{R}$, ya que si $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es bilineal, se tiene

  $$B(s,t) = sB(1,t) = stB(1,1), \quad \forall s,t \in \mathbb{R} \ ,$$

  entonces las únicas formas cuadráticas en $\mathbb{R}$ son de la forma

  $$Q(x) = ax^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

- En $\mathbb{R}^2$, como las formas bilineales se identifican con matrices de orden 2, entonces, las únicas formas cuadráticas son de la forma

  $$Q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Formas cuadráticas

Ejemplos

- La aplicación

$$Q(x,y,z) = x^2 - y^2 + xy + yz \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$. Matrices asociadas a las formas cuadráticas anteriores, son, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas, formas bilineales y matrices

Observación: Toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^N$ procede de una forma bilineal simétrica, luego está asociada a una matriz simétrica de orden N.
Justificación: Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^N$, por tanto, existe una forma bilineal $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Q(x) = B(x,x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ .$$

Ahora bien, la forma bilineal φ dada por $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\Big(B(x,y) + B(y,x)\Big)$ es simétrica y se verifica que

$$Q(x) = B(x,x) = \frac{1}{2}\Big(B(x,x) + B(x,x)\Big) = \varphi(x,x) \ .$$

Usaremos las siguientes identificaciones y la siguiente notación en lo que sigue:

f. cuadrát. en $\mathbb{R}^N \equiv$	bilineales simét. en $\mathbb{R}^N \equiv$	matrices simét. en $\mathbb{R}^N$
Q (forma cuadrática)	B (bilineal simét.)	A (matriz simét.)

Formas cuadráticas

Definición

- Una forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es **definida positiva** si

$$Q(x) > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \ .$$

- Una forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es **definida negativa** si

$$Q(x) < 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \ .$$

- Una forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es **semidefinida positiva** si

$$Q(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \ .$$

- Una forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es **semidefinida negativa** si

$$Q(x) \leq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \ .$$

- Una forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es **indefinida** si no es de ninguno de los tipos anteriores, esto es,

$$\exists x,\ y \in \mathbb{R}^N:\ \ Q(x) < 0, \quad Q(y) > 0.$$

Criterios para clasificar formas cuadráticas

Proposición

Suponemos que Q es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ y que A es la matriz simétrica asociada.

- Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, entonces
  - $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ equivale a que Q sea definida positiva.
  - $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, Q es definida negativa.
  - $\lambda_i = 0, \lambda_j < 0$, Q es semidefinida negativa.
  - $\lambda_i = 0, \lambda_j > 0$, Q es semidefinida positiva.
  - $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, Q es indefinida.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, entonces si $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ son los valores propios de A, se aplica el mismo criterio del apartado anterior (en función de los valores propios).

Criterios para clasificar formas cuadráticas

Ejemplos

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, entonces la forma cuadrática asociada a A $(Q(x,y) = x^2 + 7y^2)$ es definida positiva.
- Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, entonces la forma cuadrática Q dada por $Q(x,y) = -3y^2$ es semidefinida negativa (y no es definida negativa).
- Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, entonces la forma cuadrática asociada a A $(Q(x,y) = 4x^2 - 3y^2)$ es indefinida.
- Si $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces los valores propios son $\{3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}\}$, luego ambos son positivos.
  Entonces la forma cuadrática asociada a esta matriz es definida positiva.

Criterios para clasificar formas cuadráticas

Proposición

Supongamos que Q es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ y que A es la matriz simétrica asociada.
Supongamos que $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son los valores propios de la matriz.

- $\lambda_i > 0 \forall i$ equivale a que Q sea definida positiva.
- $\lambda_i < 0 \forall i$ equivale a que Q sea definida negativa.
- $\lambda_i \leq 0, \forall i$, Q es semidefinida negativa.
- $\lambda_i \geq 0, \forall i$, Q es semidefinida positiva.
- $\lambda_i \lambda_j < 0$, para ciertos i, j, entonces Q es indefinida.

Extremos relativos

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $A = \mathring{A}$ y supongamos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^2(A)$ y que $\nabla f(a) = 0$. Sea Q la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf(a)$ (hessiano de f en a).

- Si Q es definida positiva, f tiene un mínimo relativo en a.
- Si Q es definida negativa, f tiene un máximo relativo en a.
- Si f tiene un máximo relativo en a, entonces Q es semidefinida negativa.
- Si f tiene un mínimo relativo en a, entonces Q es semidefinida positiva.
- Si Q es indefinida, entonces f no tiene ningún extremo relativo en a.

Extremos relativos

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $A = \mathring{A}$ y supongamos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^2(A)$ y que $\nabla f(a) = 0$. Sea Q la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf(a)$ (hessiano de f en a).

- Si Q es definida positiva, f tiene un mínimo relativo en a.
- Si Q es definida negativa, f tiene un máximo relativo en a.
- Si f tiene un máximo relativo en a, entonces Q es semidefinida negativa.
- Si f tiene un mínimo relativo en a, entonces Q es semidefinida positiva.
- Si Q es indefinida, entonces f no tiene ningún extremo relativo en a.

Extremos relativos

Demostración: Probaremos que si Q es definida positiva, f tiene un mínimo relativo an a.
Como Q es definida positiva y continua, existe $m > 0$ tal que

$$Q(x) \geq 2m, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1.$$

Por el Teorema de Taylor-Young, sabemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - < \nabla f(a), x > -\frac{1}{2}Q(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Por hipótesis, sabemos que $\nabla f(a) = 0$.
Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < \delta \Rightarrow a + x \in A \quad \text{y} \quad \frac{|f(a+x) - f(a) - \frac{1}{2}Q(x)|}{\|x\|^2} \leq m.$$

Por tanto, si $0 < \|x\| < \delta$ se verifica que

$$\frac{f(a) - f(a+x)}{\|x\|^2} \leq m - \frac{1}{2\|x\|^2}Q(x) = m - \frac{1}{2}Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq m - m = 0.$$

Por tanto $f(a) \leq f(a+x), \forall x \in B(0, \delta)$, es decir, f tiene un mínimo relativo en a.

Extremos relativos

Ahora probaremos que si f tiene un mínimo relativo an a, entonces Q es semidefinida positiva.

Como f tiene un mínimo relativo en a existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$ y $f(x) \geq f(a)$ si $x \in B(a,r)$. Por tanto,

$$\frac{f(a+x) - f(a)}{\|x\|^2} \geq 0, \qquad \forall x \in B(0,r), x \neq 0.$$

Por el Teorema de Taylor-Young, sabemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - \frac{1}{2}Q(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Sea $v \in \mathbb{R}^N$ tal que $\|v\| = 1$. Tenemos entonces que

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - \frac{1}{2}Q(tv)}{t^2}.$$

Como $\frac{Q(tv)}{t^2} = Q(v)$, para cada real t, entonces

$$\frac{1}{2}Q(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} \geq 0.$$

Extremos relativos

Hemos probado que $Q(v) \geq 0$, para cada vector v en $\mathbb{R}^N$ de norma 1.
Como Q es una forma cuadrática, la condición anterior implica que Q es semidefinida positiva.
Las pruebas de los apartados segundo y tercero son similares a las que hemos hecho.
El último apartado es consecuencia de los apartados tercero y cuarto. $\square$

Extremos relativos

Ejemplo

Consideramos el campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = x^2 + y^2$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Tiene f extremos relativos?

Como f es diferenciable (es un polinomio en dos variables), entonces tiene gradiente en cada punto.
Para averiguar los puntos donde f tiene posibles extremos relativos, podemos resolver el sistema $\nabla f(x, y) = 0$.
Como en este caso, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

la única solución del sistema

$$(0, 0) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y)$$

es $(0, 0)$.

Extremos relativos

Para averiguar si $(0,0)$ es un extremo relativo de f, calcularemos lo que se llama el **hessiano de** f en $(0,0)$, formado por las derivadas parciales de segundo orden de f en a.
Para ello usamos las derivadas parciales de primer orden (ya calculadas), que son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

y calculamos las derivadas parciales de las dos funciones anteriores.
Esto es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2.$$

Extremos relativos

Por último, el hessiano de f en (x,y) viene dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora sustituimos en el punto crítico ($(0,0)$ en nuestro caso) y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como los elementos de la diagonal principal de la matriz anterior, son ambos positivos, sabemos que f tiene un mínimo relativo en a.
De hecho, en este caso, mirando la def. de la función, es claro que f tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.