Topología I. Convocatoria extraordinaria
Grados en matemáticas, física y matemáticas e ingeniería informática y matemáticas

7 de febrero de 2020

1.- Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin \mathbb{R}$. En X se considera la topología T de la que conocemos una base $\mathcal{B}$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

1. Decidir si (X,T) es un espacio Hausdorff.
2. Probar que $T_{X\setminus\{\alpha\}} = T_u$ y que $(X \setminus \{0\}, T_{X\setminus\{0\}})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, T_u)$.
3. Estudiar la conexión en (X,T) del conjunto $A = (a,b) \cup \{\alpha\}$.
4. ¿Es el conjunto $C = [-1,1]$ cerrado en (X,T)? ¿Es C compacto en (X,T)?

2.- Sean (X,T) e (Y,T') espacios topológicos. Probar que el espacio producto $(X \times Y, T \times T')$ es conexo si y sólo si (X,T) e (Y,T') son conexos.

3.- Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

1. Se considera $f : ([0,1], (T_u)_{[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$, donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y f se define como $f = 1$ en $[0,1/2)$ y $f = 0$ en $[1/2,1]$. Probar que T es la topología final para la aplicación f, y que f no es ni abierta ni cerrada.
2. Sea (X,T) un espacio compacto y $A \subset X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A en (X,T).

1 y **3**: 4 puntos
2: 2 puntos