Soluciones prueba de Análisis I, DG, Curso 2020-21

1. Teoría

2. $\mathring{A}$, $\bar{A}$, A', $Fr(A)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0, x^2+y^2 \leq 1\} \cup$
$\cup \{(3,3)\}$

¿convexo? ¿conexo?

Como $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0, x^2+y^2<1\} \subseteq A$ y es abierto, entonces $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0, x^2+y^2<1\} \subseteq \mathring{A}$.

Es inmediato comprobar que $B((3,3);1) \cap A = \{(3,3)\}$, luego $(3,3) \notin \mathring{A}$ y es un punto aislado de A.

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $x^2+y^2=1$, toda bola centrada en (x,y) contiene puntos de norma mayor que 1 ($t(x,y)$ con $t>1$), luego $(x,y) \notin \mathring{A}$. Por tanto, como $\mathring{A} \subseteq A$, tenemos $\mathring{A} = B$.

El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(3,3)\}$ es cerrado y contiene a A, luego $\bar{A} \subseteq C$. Además $A \subseteq \bar{A}$.

Basta comprobar que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x+y=0$, $x^2+y^2 \leq 1$, entonces $(x,y) \in \bar{A}$. Si $x^2+y^2<1$ y $\varepsilon>0$, entonces $(x, y+\frac{r}{2}) \in A$ si $r>0$ y $x+(y+\frac{r}{2})^2<1$. Por continuidad esto ocurre para r suficientemente pequeño. Si además $\frac{r}{2}<\varepsilon$, entonces $(x,y+\frac{r}{2}) \in B((x,y),\varepsilon)$. En caso de que $x^2+y^2=1$, como $x=-y \Rightarrow |x|=|y|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $xy<0 \Rightarrow$ Por tanto $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ o $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. En el primer caso, si $0<\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\varepsilon}{2}) \in A$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\varepsilon}{2}) \in B((\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}});\varepsilon)$

El argumento para $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ es idéntico. Luego $\bar{A}=C$.

En un normado se tiene $\mathring{A} \subseteq A'$, luego $B \subseteq A'$. Además $A' \subseteq \bar{A}$.

En este caso se tiene que $A' = \overline{A} \setminus \{(3,3)\}$.

Por último $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{(3,3)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0,\ x^2+y^2 = 1\}$.

A no es convexo, ya que $(\frac{1}{2},0) \in A$, $(3,3) \in A$ y si

$$t(\tfrac{1}{2},0) + (1-t)(3,3) = \left(\tfrac{t}{2} + (1-t)3,\ (1-t)3\right), \text{ luego}$$

$$\frac{t}{2} + (1-t)3 \overset{t=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow \left(\tfrac{7}{4}, \tfrac{3}{2}\right) \notin A$$

No es conexo, ya que $\{(3,3)\}$ es un abierto en la topología inducida, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\} =$
$= B((0,0),\frac{3}{2}) \cap A$ es abto en la topología inducida en A y la unión de ambos abiertos, que no son triviales es A.

3) límite en $(0,0)$ de $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x+y}$ si $x+y \neq 0$.

En el primer caso se tiene

$\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

Como $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$.

En el segundo caso no tiene límite, ya que si $y = x$ se tiene $f(x,x) = \dfrac{x^3}{2x} = \dfrac{x^2}{2} \to 0$ $(x \to 0)$.

En cambio si $y = -x + x^3$ se tiene

$$f(x,-x+x^3) = \frac{x^2(-x+x^3)}{x^3} = -1 + x^2 \longrightarrow -1 \text{ si } x \to 0.$$

Como los límites según dos conjuntos en $(0,0)$ son distintos, esta función no tiene límite en $(0,0)$

4) (E,d) y (F,ρ) métricos y $f: E \to F$ continua

a) $C \subseteq F$ conexo $\Rightarrow f^{-1}(C)$ conexo

Falsa. Contraejemplo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\{1\}$ conexo y $f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$ que no es conexo.

b) $O \subseteq E$ abto $\Rightarrow f(O)$ abierto

Falso: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ abto y $f(]-1,1[) = \{0\}$ que no es abto. en $\mathbb{R}$

c) $A \subseteq E$ acotado $\Rightarrow f(A)$ acotado

Falso $f:]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$]0,1[$ acotado y $f(]0,1[) =]1, +\infty[$ no acotado.

d) $K \subseteq E$ compacto $\Rightarrow f(K)$ acotado.

Cierta.

$f(K)$ es compacto por el Teorema de conservación de la compacidad, luego acotado.