

WUOLAH



RubiksJorge
www.wuolah.com/student/RubiksJorge



Solucion-20145-Final2.pdf

Exámenes Geometría III



2º Geometría III



Grado en Matemáticas



Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

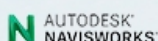
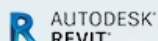
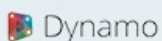


Escuela de **LÍDERES**

Master BIM Management



60 Créditos ECTS



Jose Maria Girela
Bim Manager.



5.- Calcular las ecuaciones de todas las proyectividades $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tales que $f((1:1:0)) = (0:1:1)$, $f((0:1:1)) = (1:0:1)$ y $f((1:0:1)) = (1:1:0)$.

Cualquier proyectividad $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ se obtiene a partir de una aplicación lineal biyectiva $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$(*) \quad \pi \circ \hat{f} = f \circ \pi,$$

donde $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ es la proyección canónica. Para calcular f , basta calcular la matriz de \hat{f} en la base usual.

La condición:

$$f((1:1:0)) = (0:1:1)$$

implica, por la condición (*), que:

$$\pi(\hat{f}(1,1,0)) = f(\pi(1,1,0)) = f((1:1:0)) = (0:1:1) = \pi(0,1,1).$$

Esto implica que los puntos $\hat{f}(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ están relacionados en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Por tanto, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\hat{f}((1,1,0)) = \alpha(0,1,1).$$

De la misma forma, se demuestra que existen $\beta, \gamma > 0$ tales que:

$$\hat{f}((0,1,1)) = \beta(1,0,1),$$

$$\hat{f}((1,0,1)) = \gamma(1,1,0).$$

Expresamos el vector $(1,0,0)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$:

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \hat{f}((1,0,0)) &= \frac{1}{2}\hat{f}((1,1,0)) - \frac{1}{2}\hat{f}((0,1,1)) + \frac{1}{2}\hat{f}((1,0,1)) \\ &= \frac{1}{2}(0, \alpha, \alpha) - \frac{1}{2}(\beta, 0, \beta) + \frac{1}{2}(\gamma, \gamma, 0) \\ &= \frac{1}{2}(-\beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha - \beta). \end{aligned}$$

De la misma forma se demuestra que:

$$\hat{f}((0,1,0)) = \frac{1}{2}(\beta - \gamma, \alpha - \gamma, \alpha + \beta),$$

$$\hat{f}((0,0,1)) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma, -\alpha + \gamma, -\alpha + \beta).$$

Por tanto, la matriz de \hat{f} en la base usual de \mathbb{R}^3 es:

$$(\#) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\beta + \gamma & \beta - \gamma & \beta + \gamma \\ \alpha + \gamma & \alpha - \gamma & -\alpha + \gamma \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

Las proyectividades de \mathbb{P}^2 que verifican la condición del enunciado son las aplicaciones f cuya aplicación lineal asociada \hat{f} tiene una matriz de la forma (#), con $\alpha, \beta, \gamma > 0$.