

①

# Examen doble Grado y 2º Matemáticas.

## 2.a) Verdadera/Falsa

Toda  $f$ . continua conserva abtos y acotados

En general, las funciones continuas no conservan conjuntos abiertos ni acotados, ni conjuntos que verifican las dos condiciones simultáneamente.

Ejemplo:  $f: ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in ]0,1[.$

Es claro que  $f$  es continua,  $]0,1[$  es un abto acotado y  $f(]0,1[) = ]1,+\infty[$  que es abierto, pero no acotado.

## 2.b) $C \subseteq \mathbb{R}^3$ , no vacío, $f(x) = d(x, C), \forall x \in \mathbb{R}^3$ , ¿f unif. continua?

Verdadera. De hecho, usando la desigualdad triangular para  $\| \cdot \|_2$  y la definición de ínfimo, puede probarse que

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\|_2, \forall x, y \in \mathbb{R}^3,$$

luego  $f$  es no expansiva, en particular Lipschitziana, luego uniformemente continua.

## 2.c) $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, $h(x, y) = f(x, y)g(x, y).$

Entonces  $h$  es diferenciable y además

$$\nabla h(x, y) = \textcircled{g} \nabla f(x, y) + \textcircled{f} \nabla g(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verdadera.

Por ser  $h$  el producto de dos campos escalares diferenciables, entonces es diferenciable.

Como  $f$  y  $g$  son diferenciables, existe  $\nabla f$  y  $\nabla g$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Se tiene además que

$$D_1 h(x, y) = (D_1 f(x, y))g(x, y) + f(x, y)D_1 g(x, y) \quad y$$

$$D_2 h(x, y) = (D_2 f(x, y))g(x, y) + f(x, y)D_2 g(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto,

$$\nabla h(x,y) = (D_1 h(x,y), D_2 h(x,y)) =$$

$$g(x,y) \nabla f(x,y) + f(x,y) \nabla g(x,y)$$

2.d) Polinomio de Taylor de orden 2 de  $f$  en  $(0,0)$  es

$$P(x,y) = 2 + 2(x+y) + 2x^2 + 2xy + y^2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{siendo } f(x,y) = x^2 + 2e^{x+y}$$

Tenemos que  $f(0,0) = 2$ . Obviamente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , por ser suma de dos campos escalares de clase infinito. Calculamos  $\nabla f$  y las derivadas parciales de segundo orden de  $f$ . Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (2x + 2e^{x+y}, 2e^{x+y}), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ luego}$$

$$D_1 f(0,0) = 2 \neq D_2 f(0,0)$$

$$\text{Además } D_{11} f(x,y) = 2 + 2e^{x+y}, \quad D_{12} f(x,y) = 2e^{x+y},$$

$D_{22} f(x,y) = 2e^{x+y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ . Usando el Teorema de Schwarz y las igualdades anteriores obtenemos

$$D_{11} f(0,0) = 4, \quad D_{12} f(0,0) = D_{21} f(0,0) = 2 = D_{22} f(0,0).$$

El polinomio de Taylor de  $f$  en  $(0,0)$  de orden 2 es

$$f(0,0) + (\nabla f(0,0) / (x,y)) + \frac{1}{2} (D_{11} f(0,0)x^2 + D_{12} f(0,0)xy +$$

$$+ D_{21} f(0,0)yx + D_{22} f(0,0)y^2) =$$

$$= 2 + 2(x+y) + \frac{1}{2} (4x^2 + 2xy + 2yx + 2y^2) =$$

$$= 2 + 2(x+y) + 2x^2 + 2xy + y^2 = P(x,y).$$

Luego la afirmación es verdadera.

③  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  cerrado no acotado,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , esto es,

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} : x \in C, \|x\| \geq k \Rightarrow f(x) \geq M.$$

Prueba que  $f$  tiene mínimo absoluto.

Como  $C \neq \emptyset$  por ser no acotado, entonces existe  $x_0 \in C$ .

Tomamos  $M = f(x_0)$  y usamos la hipótesis, luego

$$(*) \exists k \in \mathbb{R} : x \in C, \|x\| \geq k \Rightarrow f(x) \geq M.$$

Llamamos  $k_0 = \max\{k, \|x_0\|\} \geq k$ .

El conjunto  $C_0 = C \cap \bar{B}(0, k_0)$  es un cerrado, por ser intersección de dos cerrados, no vacío, ya que  $x_0 \in C$

y acotado.

La restricción de  $f$  a  $C_0$  alcanza su mínimo absoluto en un punto  $u_0 \in C_0$ , por el Teorema de Weierstrass.

Por tanto, se tiene que

$$x \in C \Rightarrow \begin{cases} \|x\| \leq k_0 \Rightarrow x \in C_0 \Rightarrow f(x) \geq f(u_0) \\ \text{o} \\ \|x\| > k_0 \Rightarrow f(x) \geq M = f(x_0) \geq f(u_0) \end{cases}$$

por (\*)  $x_0 \in C_0$

Hemos probado que  $f$  alcanza su mínimo absoluto en  $u_0$ .

④  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x \frac{\sin(x^2-y)}{x^2-y} \text{ si } (x,y) \in A, f(x,y) = x \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$$

(a) ¿Es  $f$  continua en  $(0,0)$ ?

Comprobaremos que en  $(0,0)$  el límite de la función según  $A$  y el límite según  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  coinciden con  $0$ , que es  $f(0,0)$ .

Como la proyección sobre la primera coordenada es continua en  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$$

Dado que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , entonces  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{\sin(x^2-y)}{x^2-y} = 1$ ,

luego  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} x \frac{\sin(x^2-y)}{x^2-y} = 0$ .

Hemos probado que  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = 0 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A}} f(x,y) = f(0,0)$

luego  $f$  es continua en  $(0,0)$

ii) Estudiamos si  $\exists \nabla f(0,0)$ .

Si  $t \neq 0$ ,  $\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{t \sin(t^2)}{t^2} = \frac{\sin(t^2)}{t^2}$

Como  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = 1 \Rightarrow \exists D_1 f(0,0) = 1$

De nuevo si  $t \neq 0$  tenemos que  $f(0,t) - f(0,0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$

luego  $\exists D_2 f(0,0) = 0$ .

Por tanto existe  $\nabla f(0,0) = (1,0)$ .

(iii) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0,0)$ ?

5

Como  $f$  tiene gradiente en  $(0,0)$ , estudiamos si  $f$  verifica la definición de dif en  $(0,0)$ , ya que, en caso de serlo dif,  $T(x,y) = Df(0,0)(x,y) = (\nabla f(0,0) | (x,y))$

$$f(x,y) - f(0,0) - T(x,y) = x - 0 - ((1,0) | (x,y)) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$$

Por tanto,  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0.$

Estudiamos ahora la existencia de límite en  $A$   $(0,0)$  según  $A$ .

Si  $(x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ , tenemos que

$$f(x,y) - f(0,0) - T(x,y) = x \frac{\sin(x^2 - y)}{x^2 - y} - 0 - x, \text{ por tanto}$$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{\sin(x^2 - y)}{x^2 - y} - 1 \right)$$

Como  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ , entonces

$$\exists \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

luego  $f$  es dif. en  $(0,0)$  y

$$Df(0,0)(x,y) = (\nabla f(0,0) | (x,y)) = x, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

⑤ Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

⑥

(a) Calcula los extremos relativos de  $f$

Como  $f$  es polinómica,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . ~~luego~~ Dado que  $D_1 f(x,y) = 8x - 2xy^2$ ,  $D_2 f(x,y) = 18y - 2x^2y$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (8x - 2xy^2 = 0 \wedge 18y - 2x^2y = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x - xy^2 = 0 \wedge 9y - x^2y = 0) \Leftrightarrow (x(4 - y^2) = 0 \wedge y(9 - x^2) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee y^2=4) \wedge (y=0 \vee x^2=9)$$

Por tanto, los puntos críticos de  $f$  coinciden con los del conjunto

$$\{(0,0), (3,2), (-3,2), (3,-2), (-3,-2)\}$$

Para intentar averiguar los posibles extremos relativos de  $f$ , calculamos el hessiano de  $f$ . Se tiene que

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & 18 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

Luego  $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ , que es definida positiva, ~~absoluto~~ relativo en  $(0,0)$ .

Luego  $f$  tiene un mínimo

En el resto de los puntos tenemos

$$H_f(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}, \text{ det } H_f(3,2) < 0; \text{ en este caso } f$$

tiene un punto de silla en  $(3,2)$ .

En el resto de los puntos críticos tenemos

$$H_f(-3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(3,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} \quad y$$

$H_f(-3,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$ . Por el mismo argumento usado en  $(3,2)$   $f$  tiene puntos de silla en  $(-3,2)$ ,  $(3,-2)$  y en  $(-3,-2)$ .

⑤ b) Extremos absolutos de la restricción de  $f$  a  $C$ , ⑦  
donde  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Antes hemos estudiado los extremos relativos de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .  
Como  $C$  es compacto, por ser acotado y cerrado, y  $f$  continua,  $f$  alcanza el máximo y mínimo absoluto en  $C$ . Si se alcanza en un punto interior de  $C$ , este ha de ser un extremo relativo, y sabemos que el único posible extremo relativo de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$  es  $(0, 0)$  y además  $(0, 0) \in \overset{\circ}{C}$ .

Estudiamos los extremos relativos de  $f$  en la frontera de  $C$ . En este caso se tiene que

$$\overset{\circ}{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\} \text{ y}$$

$$\text{Fr } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Restringimos  $f$  a la frontera de  $C$ , esto es, definimos  $u(x)$ .

$$u(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = 4x^2 + 9(4-x^2) - x^2(4-x^2) \quad \forall x \in [-2, 2].$$

Nótese que si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{4-x^2}$ ,  
luego los puntos de la frontera de  $C$  son de la forma

$$(x, \sqrt{4-x^2}), (x, -\sqrt{4-x^2}) \text{ para } x \in [-2, 2].$$

Como  $f(x, y) = f(x, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$f(x, \sqrt{4-x^2}) = f(x, -\sqrt{4-x^2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 2.$$

Esto es, podemos restringir  $f$  a la mitad superior de la circunferencia para calcular los extremos absolutos de  $f$ .



⑧

Es claro que  $u$  es una función polinómica, luego  $f \in C^\infty([-2, 2])$ , de hecho

$$u(x) = x^4 - 9x^2 + 36, \quad \forall x \in [-2, 2].$$

$$\text{Luego } u'(x) = 4x^3 - 18x = 2x(2x^2 - 9), \text{ si } |x| \leq 2.$$

Por tanto

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee 2x^2 = 9) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 = \frac{9}{2})$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee |x| = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}).$$

En el segundo caso  $x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$ , el único punto crítico de  $u$  en  $[-2, 2]$  es  $0$ .

$$\text{Dado que } u(0) = 36 = f(0, 2)$$

$$u(-2) = u(2) = 2^4 - 9 \cdot 4 + 36 = 4(4 - 9 + 9) = 16$$

$$\text{Además } f(0, 0) = 0,$$

entonces el ~~extremo~~ <sup>mínimo</sup> absoluto de  $f$  en  $C$  (compacto) se alcanza en  $(0, 0)$  (y vale  $0$ ) y el máximo en  $(0, 2)$  y vale  $36$ .

Por ser  $C$  un disco cerrado, es convexo, luego conexo.

Como  $f$  es continua,  $f(C)$  ha de ser un conjunto conexo de  $\mathbb{R}$ , luego  $f(C)$  es un intervalo.

Como además  $f(C)$  es compacto,  $f(C)$  ha de ser un intervalo cerrado y acotado. Concluimos que

$$f(C) = [\min f(C), \max f(C)] = [0, 36].$$