

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Grado en Matemáticas. Doble grado en Física y Matemáticas, 2º Curso.

Examen Final (enero 2019)

1. [2 puntos] Teorema del Valor Medio. Consecuencias.
2. [2 puntos] Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 - a) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto cerrado y acotado es un conjunto cerrado y acotado.
 - b) Sea f un campo escalar C^1 en una bola abierta centrada en 0 y de radio 2. ¿Es f lipschitziana en la bola cerrada unidad?
 - c) Consideramos los campos escalares u , v y f definidos en \mathbb{R}^2 por

$$u(x, y) = e^x + y, \quad v(x, y) = \arctan(x^2 + y^2), \quad f(u, v) = \sqrt{1 + u^2 + v^4}.$$

Entonces se verifica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- d) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial $C^1(A)$ tal que $\det(J_f(x)) \neq 0$ para todo $x \in A$. Entonces f es abierta.

¿Cuales de los conjuntos anteriores son compactos? ¿Y cuales son conexos? Justifica las respuestas.

3. [2 puntos] Estudia si el campo escalar definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es $C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$. ¿Es $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

4. [2 puntos] Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^u - yu - u^2 = 0 \\ y \cos v + x^2 - u^2 = 1 \end{cases}$$

define a u y v como funciones implícitas de x e y entorno al punto $(2, 1)$ de forma que $u(2, 1) = 2$ y $v(2, 1)$. Calcula $D_2u(2, 1)$ y $D_2v(2, 1)$

5. [2 puntos] Sea C el círculo dado por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

Calcula la imagen de C mediante el campo escalar f dado por

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2, ((x, y) \in C).$$