Juan Valentín Guerrero Caro 45338112Y.

(1)

Derivada direccional:

Sean X e Y dos espacios normados y $A \subseteq X$, y sea $a \in A$, $v \in X \setminus \{0\}$. Supongamos que $\{0\} \in \{t \in \mathbb{R} : a + t \cdot v \in A\}'$. Si $f : A \to Y$,, f tiene derivada direccional en a según v si existe el siguiente límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = f'(a; v)$$ → derivada de f en a según v.

Gradiente: Para definir gradiente previamente tenemos que definir "derivada parcial en f en a respecto de la variable i-ésima". Se denota como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ó como $D_i f(a)$.

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = f'(a; e_i)$$

Una vez definido esto. El gradiente de f en a es:

$$\nabla f(a) = \left(\underset{D_1 f(a)}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)}}, \underset{D_2 f(a)}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}}, \ldots \underset{D_N f(a)}{\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)} \right)$$

Aplicación diferenciable en un punto:

Sea X e Y dos espacios normados, $A \subseteq X$ $a \in \mathring{A}$ y $f: A \to Y$. Se dice que la aplicación f es diferenciable en a si $\exists$ una aplicación $T \in L(X,Y)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

A la aplicación T se le conoce como diferencial de f en a ($Df(a)$).

Relacionando con campo escalar:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$; $a \in \mathring{A}$ y $f: A \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en el punto a, entonces f tiene gradiente en a y se cumple:

$$Df(a)(x) \langle \nabla f(a), x \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(2)

$$f(x,y) = -2x^3 - 6x\cdot y^2 + 3x^2 + 3y^2 \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Para calcular los puntos críticos calculamos primero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x^2 - 6y^2 + 6x$$

$$\nabla f(x,y) = (-6x^2 - 6y^2 + 6x, -12xy + 6y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12x\cdot y + 6y$$

Igualamos a cero ambas derivadas.

$$\begin{cases} -6x^2 - 6y^2 + 6x = 0 \\ -12x\cdot y + 6y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 - y^2 + x = 0 \\ -2xy + y = 0 \Rightarrow y(-2x+1) = 0 \end{cases}$$

Luego si $y(-2x+1) = 0$ $\quad y = 0$ ó $-2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Si } y = 0}$: $\quad -x^2 - 0^2 + x = 0 \Rightarrow \quad x\cdot(-x+1) = 0 \Rightarrow$ Los puntos solución son: $(0,0)$ $(1,0)$

$\boxed{\text{Si } x = \frac{1}{2}}$ $\quad -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Los puntos solución son: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Los puntos críticos obtenidos son:

$(0,0)$ $(1,0)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Clasifiquémoslos con $Hf(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x\,\partial x}(x,y) = -12x + 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = -12y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y\,\partial y}(x,y) = -12x + 6$$

Luego: $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -12x+6 & -12y \\ -12y & -12x+6 \end{pmatrix}$$

Estudiemos $Hf(x,y)$ para cada punto crítico:

• En $(0,0)$: $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf(0,0)$ es def. positiva $\Rightarrow$ f tiene un mín relativo en $(0,0)$.

• En $(1,0)$: $$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -12+6 & 0 \\ 0 & -12+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Como la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf(1,0)$ es def. negativa $\Rightarrow$ f ~~no~~ tiene ~~ningún~~ ~~extremo~~ máximo relativo en $(1,0)$

• En $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $$Hf\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6+6 & -6 \\ -6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es indefinida $\Rightarrow$ f no tiene extremo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, punto de silla.

· En $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$:

$$Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6+6 & 6 \\ 6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la forma cuadrática asociada a la matriz $Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ es indefinida $\Rightarrow$ f no tiene extremo relativo en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Lo punto de silla.

No tiene extremos absolutos pues $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$f(x,y) > f(1,0)$ y $f(z,t) < f(0,0)$

Luego $(1,0)$ no es máx. absoluto.

$(0,0)$ no es min. absoluto.

Cuando estudiamos los límites de f cuando x e y tienden a infinito, la función también tiende a infinito, luego f no tiene extremos absolutos

③ $f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen}(x)+1}{3}, \frac{y^3+e^y}{7} \right)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

Dado que los puntos fijos son aquellos que cumplan $f(x,y) = x, y \Rightarrow$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)+1}{3} = x \Rightarrow \operatorname{sen}(x)+1-3x=0$$

$$\frac{y^3+e^y}{7} = y \Rightarrow y^3+e^y-7y=0$$

Definamos dos funciones $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Siendo $g(x) = \operatorname{sen}(x) - 3x + 1$

$h(x) = x^3 + e^x - 7x$

Son funciones continuas claramente (composición de funciones continuas)

- definiendo g en $[0, \pi]$. $g(0) > 0$

$g(\pi) < 0$

Luego al ser g continua en $[0, \pi]$ con imagen en los extremos del intervalo con distinto signo, podemos aplicar el Teorema de Bolzano que sostiene que $\exists\, c \in \mathbb{R}: g(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c : g(c) = \operatorname{sen}(c) - 3c + 1 = 0$

Análogamente, definiendo h en $[0, 1]$ $h(0) > 0$

$h(1) < 0$

Podemos, mediante el Teorema de Bolzano llegar a la misma conclusión:

$\exists\ c_2 : \quad h(c_2) = 0 \Rightarrow \exists\ c_2 : h(c_2) = c_2^3 + c^4 - 7c_2 = 0$

Luego dado que $\exists (c, c_2)$ tal que se cumple que $g(c) = 0 \quad h(c_2) = 0$, f tiene al menos un punto fijo (c, c_2)

(4) $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ $\quad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+4=y\}$

Consideramos

$$M = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+4=y \ \wedge \ z^2+t^2=1\}$$

Probemos que se trata de una variedad diferenciable.

$F(x,y,z,t) = (x+4-y \ , \ z^2+t^2-1)$ función cuyos cero determina M. F es C^∞ claramente.

$$JF(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\operatorname{ran}(JF(x,y,z,t)) = 2 \iff z\neq 0$ y $t\neq 0$

Luego

$F: \mathbb{R}^4 \setminus \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : z=t=0\} = G \to \mathbb{R}^2$

Sabemos que $M \subseteq G \Rightarrow F$ representa una variedad diferenciable que es de $\dim = 2$ y $F \in C^\infty$

Definimos:

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$: $f(x,y,z,t) = \|(x,y),(z,t)\|_2^2 = (x-z)^2+(y-t)^2$

f es diferenciable y $f\in C^\infty$

Calculemos la Función de Lagrange:

$$L(x,y,z,t,\lambda) = f(x,y,z,t) + \lambda_1 \cdot F_1(x,y,z,t) + \lambda_2 \cdot F_2(x,y,z,t) =$$

$$= (x-z)^2 + (y-t)^2 + \lambda_1 \cdot (x+4-y) + \lambda_2 \cdot (z^2+t^2-1)$$

$$(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2))$$

Luego:

$$\nabla L(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2) =$$

$$= (2(x-z)+\lambda_1,\ 2(y-t)-\lambda_1,\ -2(x-z)+2\lambda_2 \cdot z,\ -2(y-t)+2\lambda_2 \cdot t,$$

$$x+4-y,\ z^2+t^2-1)$$ Igualando con (000000):

$$\begin{cases} 2(x-z)+\lambda_1 = 0 \\ 2(y-t)-\lambda_1 = 0 \\ -2(x-z)+2\lambda_2 \cdot z = 0 \\ -2(y-t)+2\lambda_2 \cdot t = 0 \\ x+4-y=0 \\ z^2+t^2-1=0 \end{cases} \quad \left\{ x-z = t-y \right. \quad \Downarrow \quad \begin{cases} +2(y-t)+2\lambda_2 \cdot z = 0 \\ -2(y-t)+2\lambda_2 \cdot t = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ t = -z \right.$$

Luego $z^2+z^2-1=0 \qquad 2z^2=1 \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad x-z = t-y \Rightarrow \quad x = \underset{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\underset{\shortparallel}{t}} + \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\underset{\shortparallel}{z}} - y = -y \Rightarrow$

$\Rightarrow x+4-y=0 \qquad 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=2$

Si $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad x=-y \Rightarrow \quad x=-2 \Rightarrow y=2$

Luego como sabemos que la distancia entre dos puntos (la función) siempre alcanza un mínimo absoluto:

$$f\left(-2,2,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=9+4\sqrt{2}$$

$$f\left(-2,2,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=9-4\sqrt{2}$$

Luego f alcanza mín. absoluto en $\left(-2,2,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Luego la distancia mínima se da entre los puntos $(-2,2)\in R$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in S^1$

El valor de la distancia mínima es:

$$\left\|(-2,2),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\|_2=\sqrt{\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{9-4\cdot\sqrt{2}}=\boxed{1'8284}$$