Parcial 18/19. Doble Grado

① Define los conceptos de espacio métrico compacto, conexo y completo. Si K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, ¿es K completo dotado de la distancia euclídea?

- E. métrico compacto: Diremos que (X,d) es un e.m. compacto si para cada recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de X, existe un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$.

  X compacto $\Leftrightarrow$ $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento por abiertos de X, $\exists F \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{U \in F} U$

- E. métrico conexo: Diremos que (X,d) es un e.m. conexo si X no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separados $(\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \emptyset)$.

- E. métrico completo: Se dice que (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

- Como K es compacto, toda sucesión de K admite una subsucesión convergente. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ de Cauchy, sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \sigma(n), p \geq n_0$ tenemos que $\| x_{\sigma(n)} - x_p \| < \varepsilon/2$. Como $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \sigma(n) \geq n_0$ tenemos que $\| x_{\sigma(n)} - x \| < \varepsilon/2$. Entonces tenemos:

  $$\| x_p - x \| \leq \| x_{\sigma(n)} - x_p \| + \| x_{\sigma(n)} - x \| < \varepsilon$$

  Luego $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p \geq n_0$, $\| x_p - x \| < \varepsilon$. Por tanto K es completo.

② Describe el interior, la adherencia y el conjunto de puntos de acumulación del conjunto A en los siguientes casos:

a) $A =]0,1] \subset \mathbb{R}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $A = \{(2,2)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

¿Cuáles de los conjuntos anteriores son compactos? ¿Y cuáles conexos?

a) $A =]0,1] \subset \mathbb{R}$

- $\mathring{A} =]0,1[$ ($1 \notin \mathring{A}$, porque dado $\varepsilon > 0$, $B(1,\varepsilon) \not\subseteq A$)
- $\bar{A} = [0,1]$ ($0 \in \bar{A}$, porque dado $\varepsilon > 0$, $B(0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$)
- $A' = [0,1]$ ($0 \in A'$, porque $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ abierto $: x \in U \Rightarrow A \cap (U - \{0\}) \neq \emptyset$)

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

- $\mathring{A} = A$
- $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$
- $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

c) $A = \{(2,2)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

- $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\bar{A} = A$
- $A' = A - \{(2,2)\}$

③ Sea (E,d) un e. métrico y $K \subset E$ un conjunto compacto no vacío. Prueba que para cada $x \in E$, existe (al menos) un elemento $K_x \in K$ que verifica que $d(x,K) = d(x,K_x)$.

Nota: La distancia de un punto a un conjunto (no vacío) K se define como sigue:

$$d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$$

Sea $\begin{aligned} f_x : K &\to \mathbb{R} \\ k &\mapsto d(x,k) \end{aligned}$, como la distancia es continua, f_x es continua.

Por el Th. de conservación de la compacidad, $f(K)$ es compacto, y, por tanto, cerrado y acotado, y tiene mínimo.

Es decir, $\exists k_0 \in K$ tal que $\forall k \in K$, $f(k_0) \leq f(k)$, que es lo mismo que decir, $\underbrace{d(x,k_0)}_{= d(x,K)} \leq d(x,k)$, $\forall k \in K$.

Ya que $d(x,k_0)$ es el ínfimo, en particular, el mínimo.

(4) Prueba que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1$$

Sabemos que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ porque:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \; \text{IND} \overset{\text{L'Hopital}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to 0} e^t = 1$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1$