GEOMETRÍA III

(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

RESPUESTAS EXAMEN FINAL JUNIO 2019

1. Dados un espacio afín real $(\mathcal{A}, V, \vec{\ })$ con $\dim \mathcal{A} = 3$, dos rectas R_1, $R_2 \subset \mathcal{A}$ y un punto $p_0 \in \mathcal{A}$, se dice que una recta afín $R \subset \mathcal{A}$ *pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2* si satisface las condiciones

$$p_0 \in R \quad \text{y} \quad R \cap R_j \neq \emptyset, \quad j = 1, 2.$$

Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

(a) Si R_1, $R_2 \subset \mathcal{A}$ son rectas que se cruzan y $p_0 \notin \big(p_1 + L(\{v_1, v_2\})\big) \cup \big(p_2 + L(\{v_1, v_2\})\big)$ entonces existe una única recta afín $R \subset \mathcal{A}$ que pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2.

Respuesta: *Escribamos $R_j = p_j + L(v_j)$, $j = 1, 2$, y recordemos que $R_1 \vee R_2 = p_1 + (L(\overrightarrow{p_1p_2}) + L(v_1) + L(v_2)) = p_2 + (L((\overrightarrow{p_1p_2}) + L(v_1) + L(v_2))$. La condición de que R_1 y R_2 se cruzan se escribe como $R_1 \vee R_2 = \mathcal{A}$, esto es,*

$$\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\} \quad \textit{es base de } V.$$

Para resolver el ejercicio tendíamos que probar que existen puntos

$$q_j = p_j + \lambda_j v_j \in R_j, \quad j = 1, 2,$$

tales que p_0, q_1, q_2 están alineados; la recta L que contuviese a esos tres puntos sería la solución. Esta condición de alineación es equivalentemente a que los vectores $\{\overrightarrow{p_0q_1}, \overrightarrow{p_0q_2}\}$ son linealmente dependientes. Un cáculo elemental nos dice que

$$\overrightarrow{p_0q_1} = \overrightarrow{p_0p_1} + \lambda_1 v_1 \quad \textit{y} \quad \overrightarrow{p_0q_2} = \overrightarrow{p_0p_2} + \lambda_2 v_2 = \overrightarrow{p_0p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \lambda_2 v_2,$$

por lo que $\{\overrightarrow{p_0q_1}, \overrightarrow{p_0q_2}\}$ son linealmente dependientes si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{p_0p_1} + \lambda_1 v_1 = \lambda\big(\overrightarrow{p_0p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \lambda_2 v_2\big). \tag{1}$$

Nótese que como $\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\}$ son linealmente independientes necesariamente $\lambda \neq 1$, y por tanto la ecuación (1) es equivalente a

$$\overrightarrow{p_1p_0} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{p_1p_2} + \frac{\lambda_1}{1 - \lambda} v_1 + \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda - 1} v_2.$$

Por tanto y resumiendo, existen puntos $q_j \in R_j$, $j = 1, 2$, tales que p_0, q_1, q_2 están alineados si y sólo si existen reales $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, $\lambda \neq 1$, tales que

$$\overrightarrow{p_1p_0} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{p_1p_2} + \frac{\lambda_1}{1 - \lambda} v_1 + \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda - 1} v_2, \tag{2}$$

siendo en este caso $q_j = p_j + \lambda_j v_j \in R_j$, $j = 1, 2$, los puntos que resuelven el problema. Ahora tenemos el algoritmo eurístico para poder encontrar tales puntos $q_j \in R_j$, $j = 1, 2$. En efecto, consideremos el vector $\overrightarrow{p_1p_0} \in V$, y como $\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\}$ es una base de V, tomemos los únicos *escalares $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\overrightarrow{p_1p_0} = \mu\overrightarrow{p_1p_2} + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2,$$

donde $\mu \neq 0, 1$ ya que de nuestras hipótesis $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2} \notin L(\{v_1, v_2\})$. Es inmediato comprobar que la ecuación (2) se satisface para los valores reales finitos

$$\lambda = \frac{\mu}{\mu - 1}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu_1}{1 - \mu} \quad \textit{y} \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu}, \tag{3}$$

de donde los puntos

$$q_1 = p_1 + \frac{\mu_1}{1-\mu} v_1 \;\; y \;\; q_2 = p_2 + \frac{\mu_2}{\mu} v_2 \qquad \textit{están alineados con } p_0.$$

La unicidad de la recta L que pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2 es consecuencia inmediata de que los puntos q_j, $j = 1, 2$, están determinados unívocamente por los escalares λ_j, $j = 1, 2$, dados en (3)*, que dependen también unívocamente de las coordenadas (μ, μ_1, μ_2) de $\overrightarrow{p_1p_0}$ en la base $\{\overrightarrow{p_1p_2}, v_1, v_2\}$.*

(b) Encontrar la recta del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 = (1, 1, 1)$ y se apoya en las rectas $R_1 = (0, 0, 1) + L\{(1, 0, 1)\}$ y $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = z - y + 1 = 0\}$.

Respuesta: *Como las rectas R_1 y R_2 se cruzan y $p_0 \notin R_1 \cup R_2$, el apartado* (a) *garantiza que existe una recta L en $\mathbb{R}^3$ que contiene a p_0 y se apoya en R_1 y R_2. El obvio que $L \subset \Pi_j$, donde Π_j es el único plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a p_0 y R_j, $j = 1, 2$. Un cálculo sencillo nos dice que*

$$\Pi_1 = (0, 0, 1) + L(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -x + y + z = 1\},$$

y análogamente

$$\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 3y - 2z = 2\}.$$

Como $L \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$ y la intersección $\Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta, necesariamente

$$L = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -x + y + z - 1 = x + 3y - 2z - 2 = 0\}$$

2. Clasifica el movimiento rígido del espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Describe sus elementos geométricos.

Respuesta: *Llamemos*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y obsevermos que $A^t A = I_3$, esto es, $A \in O(3, \mathbb{R})$ es una matriz ortogonal. Por tanto f es un movimiento rígido del espacio afín euclidiano tridimensional. Como $\det(A) = -1$ se trata de un movimiento inverso. Además, la ecuaciónn

$$f(x, y, z) - (x, y, z) = 0$$

no tiene soluciones, por lo que carece de puntos fijos. El polinomio característico de A viene dado por

$$\det(A - tI_3) = -(-1 + t)^2(1 + t),$$

por lo que $\vec{f}$ es una simetría ortogonal respecto de un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$, y por tanto f es una simetría deslizante respecto a un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.

Un cálculo directo nos dice que el suespacio propio V_1 de valor propio 1 de $\vec{f}$, que coincide con la variedad de dirección $\vec{\Pi}$, viene dado por

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - \sqrt{2}y - z = 0\}.$$

Por otra parte, el punto medio m del segmento $[O, f(O)]$ está contenido en el plano de simetría Π, donde $O = (0,0,0)$. Como $f(O) = (1,-1,0)$ deducimos que $m = (1/2, -1/2, 0) \in \Pi$, y al ser $\vec{\Pi} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - \sqrt{2}y - z = 0\}$,

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - \sqrt{2}y - z = -1/2(1+\sqrt{2})\}.$$

Por último, como $m = (1/2,-1/2,0) \in \Pi$, el vector de deslizamiento de f viene dado por $v = \overrightarrow{mf(m)}$. Un cálculo sencillo nos da $f(m) = \left(\frac{1}{4}\left(5-\sqrt{2}\right), \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-4\right), \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$, de donde

$$v = \overrightarrow{mf(m)} = \left(\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{2}\right), \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-2\right), \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

3. Consideremos la siguiente familia 1-paramétrica de cuádricas en el espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^3$:

$$H_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon kx^2 + ky^2 + kz^2 + 2xy + 2xz + 2yz = k\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Clasifica afínmente H_k para cada $k \in \mathbb{R}$.

Pista: $p_{A_k}(t) = -(t-k+1)^2(t-k-2)$ es el polinomio característico de la matriz $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

Respuesta: *La matriz que representa a la hipercuádrica H_k en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por*

$$M_{\mathcal{R}_0}(H_k) = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Sabemos que $p_{A_k}(t) = -(t-k+1)^2(t-k-2)$ es el polinomio característico del núcleo simétrico $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H_k)$. Además

$$\det(M_{\mathcal{R}_0}(H_k)) = -k(k-1)^2(k+2) \quad y \quad \det(A_k) = (k-1)^2(k+2).$$

(I) $\operatorname{rango}(M_{\mathcal{R}_0}(H_k)) = \operatorname{rango}(A_k) + 1 = 4$ *si* $k \neq 0, -2, 1$.

(II) $\operatorname{rango}(M_{\mathcal{R}_0}(H_{-2})) = \operatorname{rango}(A_{-2}) + 1 = 3$.

(III) $\operatorname{rango}(M_{\mathcal{R}_0}(H_0)) = \operatorname{rango}(A_0) = 3$.

(IV) $\operatorname{rango}(M_{\mathcal{R}_0}(H_1)) = \operatorname{rango}(A_1) + 1 = 2$.

Por tanto la clasificación afín dependiendo de $k \in \mathbb{R}$ es la siguiente:

Caso (I)*:*

Si $k < -2$, la matriz A_k tiene dos valores propios negativos (uno doble) y $M_{\mathcal{R}_0}(H_k)$ tiene esos mismos tres autovalores además del autovalor $-k > 0$. La cuádrica es un elipsoide afín ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $-2 < k < 0$, la matriz A_k tiene un valor propio > 0 y otro doble < 0, mientras que $M_{\mathcal{R}_0}(H_k)$ tiene esos mismos autovalores además del autovalor $-k > 0$. La cuádrica es el *hiperboloide de dos hojas, ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $0 < k < 1$*, la matriz* A_k *tiene un valor propio* > 0 *y otro doble* < 0*, mientras que* $M_{\mathcal{R}_0}(H_k)$ *tiene esos mismos autovalores además del autovalor* $-k < 0$*. La cuádrica es el hiperboloide de una hoja, ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $1 < k$*, la matriz* A_k *tiene dos valores propios positivos (uno doble) y* $M_{\mathcal{R}_0}(H_k)$ *tiene esos mismos tres autovalores además del autovalor* $-k < 0$*. La cuádrica es un elipsoide afín ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso (II)*: Si* $k = -2$*, razonando como arriba la cuádrica es un cilindro elíptico ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso (III)*: Si* $k = 0$ *la cuádrica es un cono ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Caso (IV)*: Si* $k = 1$ *la cuádrica es un plano doble ya que su forma reducida en un conveniente sistema de referencia afín es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Clasifica métricamente la cónica resultante de proyectar ortogonalmente sobre el plano coordenado xy la sección plana

$$H_0 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x + y + 1\}.$$

Respuesta: *En coordenadas* (x, y, z) *en el sistema de referencia usual* $\mathcal{R}_0$*, la cuádrica* H_0 *viene dada por*

$$H_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2xy + 2xz + 2yz = 0\}.$$

Si hacemos la sustitución $z \to x+y$ en esa expresión, nos queda la cónica

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x + 2x^2 + 2y + 6xy + 2y^2 = 0\}.$$

En el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, la matriz que representa a esta cónica en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_0}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Su núcleo simétrico $C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p(t) = (t+1)(t-5)$. Los subespacios propios asociados a los valores propios -1 y 5 de C_0 son los siguientes:

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+y=0\} = L\big(\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}\big)$$

$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-y=0\} = L\big(\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}\big)$$

En el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}$ la matriz de la cónica C es la siguiente

$$M_{\mathcal{R}_1}(C) = P^t M_{\mathcal{R}_0}(C) P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde

$$P = M(\mathrm{Id}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

En coordenadas rectangulares (x_1, y_1) respecto a $\mathcal{R}_1$, la ecuación analítica que define a C es la siguiente

$$5x_1^2 - y_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 = 5(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{5})^2 - y_1^2 - \frac{2}{5} = 0,$$

En el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_2$ de coordenadas (x_2, y_2) dadas por las expresiones

$$x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad y_2 = y_1$$

nuestra cónica se escribe analíticamente como la hipérbola de ecuación

$$\frac{25}{2}x_2^2 - \frac{5}{2}y_2^2 - 1 = 0.$$

Esto concluye el ejercicio.

4. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

   (a) Sea V un espacio vectorial real con $\dim V = 3$, y sean R_1, R_2, S_1, S_2 rectas proyectivas en $P(V)$ con $R_1 \neq R_2$ y $S_1 \neq S_2$. Probar que existe una homografía $h \colon P(V) \to P(V)$ tal que

   $$h(R_j) = S_j, \quad j = 1, 2.$$

   Respuesta: *Como $\dim P(V) = 2$, $R_1 \neq R_2$ y $\dim R_1 = \dim R_2 = 1$, la fórmula de dimensiones*

   $$\dim v(R_1 \cup R_2) + \dim R_1 \cap R_2 = \dim R_1 + \dim R_2$$

nos dice que $\dim R_1 \cap R_2 = 0$*, esto es,* $R_1 \cap R_2 = \{p_0\}$*,* $p_0 \in P(V)$*. Elijamos un punto* $p_j \in R_j$*,* $p_j \neq p_0$*, para cada* $j \in \{1,2\}$*, y observemos que* $\{p_0, p_1, p_2\}$ *son proyectivamente independientes. Esto significa que* $v(X_1) = P(V)$ *(o equivalentemente* $\hat{X}_1 = V$*), donde* $X_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$*.*

Análogamente, $S_1 \cap S_2 = \{q_0\}$ *para algún punto* $q_0 \in P(V)$*, podemos elegir* $q_j \in S_j$*,* $q_j \neq q_0$*, para cada* $j \in \{1,2\}$*, y se tiene que* $\{q_0, q_1, q_2\}$ *son proyectivamente independientes, esto es,* $v(X_2) = P(V)$ *(o equivalentemente* $\hat{X}_2 = V$*), donde* $X_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$*.*

Para construir la homografía que resuelva el problema bastará con encontrar una proyectividad $f\colon P(V) \to P(V)$ *tal que* $f(p_j) = q_j$*,* $j = 0,1,2$*, pues claramente una tal* f *aplicaría la recta proyectiva* $R_j = v(\{p_0, p_j\})$ *en la recta proyectiva* $S_j = v(\{q_0, q_j\})$ *,* $j = 1,2$ *(la biyectividad de* f *estaría garantizada por la independencia proyectiva de las tripletas* $\{p_0, p_1, p_2\}$ *y* $\{q_0, q_1, q_2\}$*).*

En efecto, tomemos $v_j, u_j \in V \setminus \{\vec{0}\}$ *con* $\pi(v_j) = p_j$*,* $\pi(u_j) = q_j$ *respectivamente,* $j = 0,1,2$*, donde como siempre* $\pi\colon V \setminus \{\vec{0}\} \to P(V)$ *es la proyección canónica. A continuación construyamos la única aplicación lineal* $\hat{f}\colon V \to V$ *satisfaciendo*

$$\hat{f}(v_j) = \lambda_j u_j, \quad j = 0,1,2,$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *son números reales arbitrarios. Observemos que* f *es un isomorfismo ya que* $\{v_0, v_1, v_2\}$ *y* $\{u_0, u_1, u_2\}$ *son bases de* V*; téngase en cuenta que* $\{p_0, p_1, p_2\}$ *y* $\{q_0, q_1, q_2\}$ *son proyectivamente independientes. Sea* $f\colon P(V) \to P(V)$ *la única proyectividad, necesariamente homografía por ser* f *isomorfismo, tal que*

$$f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}.$$

Como claramente $f(p_j) = f(\pi(v_j)) = \pi(\hat{f}(v_j)) = \pi(u_j) = q_j$*,* $j = 0,1,2$*, deducimos que*

$$f(R_j) = f(v(\{p_0, p_j\})) = v(\{f(p_0), f(p_j\}) = v(\{q_0, q_j\}) = S_j, \quad j = 1,2.$$

De hecho así se construyen todas las homografás posibles realizando lo que pide el ejercicio.

(b) Sea $\mathfrak{c}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2$, $\mathfrak{c}(x,y) = (1 : x : y)$, la inclusión natural de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{RP}^2$, y para cada recta $R \subset \mathbb{R}^2$ escribamos por R^* la recta proyectiva $v(\mathfrak{c}(R)) \subset \mathbb{RP}^2$.

Dadas las rectas afines $L_1 = (1,1) + L\{(1,-1)\}$, $L_2 = (1,0) + L\{(0,1)\}$, $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y = 1\}$, y $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y = -1\}$ en $\mathbb{R}^2$, construir una homografía $h\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ tal que $h(L_j^*) = T_j^*$, $j = 1,2$.

Respuesta: *Como* L_1 *es una recta afín en* $\mathbb{R}^2$ *que pasa por el punto* $(1,1)$ *y tiene variedad de dirección* $L\{(1,-1)\}$*, sabemos que la variedad proyectiva* $L_1^* = v(\mathfrak{c}(L_1))$ *es justo la recta que pasa por los puntos* $(1:1:1)$ *y* $(1:-1:0)$ *de* $\mathbb{RP}^2$*, esto es,*

$$L_1^* = v\{(1:1:1), (0:1:-1)\}),$$

y análogamente $L_2^* = v(\{(1:1:0), (0:0:1)\})$*. Como*

$$\hat{L}_1^* = L(\{(1,1,1), (0,1,-1)\}), \quad \hat{L}_2^* = L(\{(1,1,0), (0,0,1)\}),$$

deducimos que $\hat{L}_1^* \cap \hat{L}_2^* = L(\{(1,1,1)\})$*, y en consecuencia*

$$p_0 := L_1^* \cap L_2^* = \pi(\hat{L}_1^* \cap \hat{L}_2^* \setminus \{0\}) = (1:1:1).$$

Llamemos $p_1 = (0:1:-1) \in L_1^*$ *y* $p_2 = (0:0:1) \in L_2^*$*, ambos puntos distintos de* p_0*.*

Realicemos el cálculo paralelo con las rectas $T_1 = (1,0) + L(\{(1,1)\})$ *y* $T_2 = (-1,0) + L(\{(1,1)\})$*. Se tiene que*

$$T_1^* = v(\{(1:0:1), (0:1:1)\}), \quad T_2^* = v(\{(1:-1:0), (0:1:1)\}),$$

y $q_0 = T_1^* \cap T_2^* = (0:1:1)$. *Llamemos* $q_1 = (1:0:1) \in T_1^*$ *y* $q_2 = (1:-1:0) \in T_2^*$, *ambos puntos distintos de* q_0.
Como hemos explicado en el apartado (a), *una homografía* $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ *que resuelve el ejercicio es, por ejemplo, la asociada al isomorfismo* $\hat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *determinado por las asignaciones*

$$\hat{f}(1,1,1) = \lambda(0,1,1), \quad \hat{f}(0,1,-1) = \mu(1,0,1), \quad \hat{f}(0,0,1) = \gamma(1,-1,0)$$

donde los escalares $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *se pueden elegir con libertad (de hecho, esas son todas las homografías que realizan lo que pide el ejercicio).*
Observa que si consideramos las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,1)\} \quad y \quad B_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,-1,0)\},$$

entonces

$$M(f,B_1,B_2) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Puedes completar el cálculo determinando la matriz $M(f,B_0,B_0)$.

Estructura y puntuación:

- **Primer Parcial:** $1+2$ (tienen el mismo valor)
- **Segundo Parcial:** $3+4$ (tienen el mismo valor)
- **Toda la Asignatura:** $2+3+(1$ ó $4)$ (tienen el mismo valor)