1) Teoría

2) Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.
Sea (E,d) un espacio métrico compacto. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E, por hipótesis existe $x \in E$ y una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente a x.
Usando que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : p, q \geq N_1 \;\Rightarrow\; d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \;\Rightarrow\; d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Si definimos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces es claro que $N \in \mathbb{N}$.
Para cada natural $n \geq N$, se verifica que $\sigma(n) \geq n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, por tanto,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde hemos usado (1) y (2).

Hemos probado que toda sucesión de Cauchy en E converge, luego E es completo.

3) Prueba que toda aplicación bilineal $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y se verifica que

$$DB(u,v)(x,y) = B(u,y) + B(x,v), \qquad \forall u, x \in \mathbb{R}^N, y, v \in \mathbb{R}^M.$$

Solución: Damos dos posibles demostraciones alternativas:
1) Puede probarse que en cada punto B tiene gradiente y el gradiente es continuo.
2) También puede usarse la definición de función diferenciable.
Forma 1)
Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Para cada $t \in \mathbb{R}^*$ se verifica que

$$\frac{B((u,v) + t(x,0)) - B(u,v)}{t} = \frac{B(u+tx, v) - B(u,v)}{t}$$

$$= \frac{B(u,v) + tB(x,v) - B(u,v)}{t} = B(x,v).$$

Por tanto, existe $B'((u,v);(x,0) = B(x,v)$.

De manera análoga, se prueba que existe $B'((u,v);(0,y) = B(u,y)$, para cada $y \in \mathbb{R}^M \backslash \{0\}$. En particular, B tiene gradiente y además

$$\nabla B(u,v) = (B(e_1,v), B(e_2,v), \cdots, B(e_N,v), B(u,e_{N+1}), B(u,e_{N+2}), \cdots, B(u,e_{N+M})),$$

donde hemos usado la identificación canónica de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ con $\mathbb{R}^{N+M}$ (para enumerar los vectores de la base usual). Por ser B bilineal, es inmediato comprobar que la aplicación de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ en $\mathbb{R}^{N+M}$ dada por $(u,v) \mapsto \nabla B(u,v)$ es lineal, luego continua. Por tanto, B es diferenciable en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Forma 2)
Usaremos el hecho de que para cada forma bilineal B definida en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ existe un real K que verifica

$$|B(x,y)| \leq K\|x\|_2\ \|y\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^M. \tag{3}$$

En primer lugar, nótese que para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ se verifica que la aplicación

$$(x,y) \mapsto B(u,y) + B(x,v) \qquad (x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^M)$$

es lineal.

Comprobamos ahora que B es diferenciable en (u,v). En efecto, si $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, sabemos que

$$\begin{gathered}\Phi(x,y) := B(x,y) - B(u,v) - \big(B(u,y-v) + B(x-u,v)\big) = \\ B(x,y) - B(u,v) - B(u,y) + B(u,v) - B(x,v) + B(u,v) = \\ B(x,y) - B(u,y) - B(x,v) + B(u,v) = B(x-u,y) - B(x-u,v) = B(x-u,y-v)\end{gathered}$$

En vista de (3) y la cadena de igualdades anteriores deducimos que

$$|\Phi(x,y)| \leq K\|x-u\|_2\|y-v\|_2.$$

Por tanto, si $(x,y) \neq (u,v)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{|\Phi(x,y)|}{\|(x,y)-(u,v)\|_2} &\leq K\frac{\|x-u\|_2\|y-v\|_2}{\|(u,v)-(x,y)\|_2} \\ &\leq K\frac{\|x-u\|_2\|y-v\|_2}{\|(u-x,y-v)\|_2} \\ &\leq K\|y-v\|_2,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|x-u\|_2 \leq \|(u-x,y-v)\|_2$. Como consecuencia, dado que la función

$$(x,y) \mapsto \|y-v\|_2$$

tiene límite 0 en (u,v), entonces tenemos que

$$\lim_{(x,y)\mapsto(u,v)} \frac{|\Phi(x,y)|}{\|(x,y)-(u,v)\|_2} = 0.$$

Hemos probado que B es diferenciable en (u,v) y además

$$DB(u,v)(x,y) = B(u,y) + B(x,v).$$

4) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y convexo y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable con derivadas parciales acotadas. Prueba que f es lipschitziana ¿Ocurre lo mismo en $\mathbb{R}^N$?

El resultado es válido en $\mathbb{R}^N$. Como consecuencia del Teorema del valor medio (para campos escalares) que se puede aplicar para dos elementos x, y cualesquiera de C (por ser C abierto y convexo). Tenemos entonces que

$$x, y \in C, x \neq y \ \Rightarrow \ \exists c \in]x,y[: f(y) - f(x) = \big(\nabla f(c), y-x\big).$$

Si $D_i f$ está acotada para cada $i \leq N$, entonces ∇f está acotado en C. Luego existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\nabla f(z)\|_2 \leq M, \quad \forall z \in C.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos entonces que

$$|f(y) - f(x)| \leq \|\nabla f(c)\|_2\|y-x\|_2 \leq M\|y-x\|_2.$$

Hemos probado que f es lipschitziana.

5) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0, \end{cases}$$

estudia la continuidad y diferenciablidad de f. Calcula, en caso de que existan, $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Comprobaremos primero que f es diferenciable en $(0,0)$. Para ello calculamos las derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$. Dado que

$$f(x,0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces tenemos que

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Luego existe $D_1 f(0,0) = 0$. Por un argumento análogo, dado que $f(0,y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}$, se tiene también que existe $D_2 f(0,0)$ y vale 0.

Luego, en caso de que f sea diferenciable en $(0,0)$, la diferencial en este punto es nula, ya que $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Probaremos ahora que f es diferenciable en $(0,0)$.

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, entonces tenemos que

$$\Phi(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0)|(0,0))}{\|(x,y)\|_2} = \begin{cases} \frac{x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}}{\|(x,y)\|_2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

En vista de la desigualdad triangular y de que la función arco tangente está acotada ($|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$) obtenemos que

$$|\Phi(x,y)| \leq \frac{x^2 + y^2}{\|(x,y)\|_2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}(|x| + |y|), \tag{4}$$

donde hemos usado que $|x| \leq \|(x,y)\|_2$, luego

$$\frac{x^2}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|x||x|}{\|(x,y)\|_2} \leq |x|,$$

y el mismo argumento para la segunda coordenada (y).

De la desigualdad (4) deducimos que Φ tiene límite en $(0,0)$ igual a cero, esto es, f es diferenciable en $(0,0)$. Luego f es continua en $(0,0)$.

Para probar que existe $D_{12}f(0,0)$, calcularemos primero $D_2 f(x,0)$ para $x \in \mathbb{R}^*$. Para cada $x \in \mathbb{R}^*$ fijo, tenemos que

$$\frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \frac{x^2 \arctan \frac{t}{x} - t^2 \arctan \frac{x}{t}}{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Como la tangente está acotada se tiene

$$\lim_{t \to 0} t \arctan\left(\frac{x}{t}\right) = 0.$$

Usando además que $\lim_{s \to 0} \frac{\arctan s}{s} = 1$, se obtiene entonces que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x^2}{x} \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}} = x.$$

Hemos probado que $D_2 f(x,0) = x$, para cada real x.

Dado que se verifica

$$f(y,x) = -f(x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

comprobaremos que existe $D_1 f(0,y) = -y$ para cada $y \in \mathbb{R}^*$.

En efecto, si $y \in \mathbb{R}^*$, entonces, para cada $t \in \mathbb{R}^*$ tenemos

$$\frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \frac{-f(y,t) + f(y,0)}{t} = -\frac{f(y,t) - f(y,0)}{t}.$$

Tomando límite de la función anterior ($t \to 0$) en la expresión que aparece a la derecha de la igualdad anterior obtenemos $-D_2 f(y,0)$. Por tanto, existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = -D_2 f(y,0) = -y.$$

Hemos probado que existe $D_1 f(0,y) = -D_2 f(y,0) = -y$, para cada $y \in \mathbb{R}^*$, igualdad que también es válida en 0.

Dado que sabemos que

$$D_1 f(0,y) = -y, \qquad D_2 f(x,0) = x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

entonces se verifica que existen $D_{12} f(0,0)$ y $D_{21} f(0,0)$ y además

$$D_{12}(0,0) = 1, \qquad D_{21} f(0,0) = -1.$$

En Granada, a 1 de diciembre de 2017