Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo I: ESTRUCTURA EUCLÍDEA Y TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^N$

Tema 3: CONTINUIDAD. LÍMITE FUNCIONAL

María D. Acosta

Universidad de Granada

27-10-2020

Continuidad de funciones

Recordamos que si $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$, entonces f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aplicación continua

Sean $(E, d), (F, \rho)$ espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ y $a \in E$. Se dice que f es **continua** en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

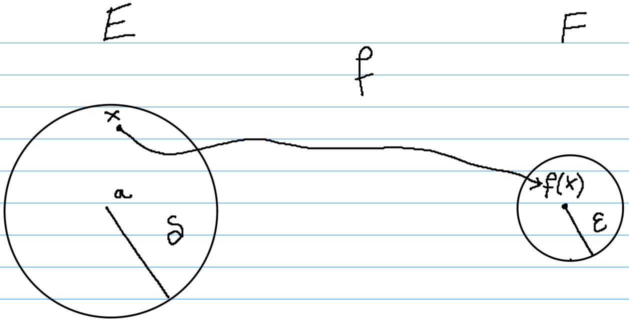
Se dice que f es continua en $A \subset E$ si lo es en cada punto de A. En caso de que f sea continua en E, diremos simplemente que f es continua.

Continuidad

Idea intuitiva

Continuidad

Idea intuitiva



$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \ f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$$

Continuidad

Definición

Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$.

- Se dice que f es **lipschitziana** si existe $M \in \mathbb{R}$ que verifica

  $$\rho(f(x), f(y)) \leq M\, d(x,y), \qquad \forall x, y \in E.$$

  A la "mejor constante" M que verifica la desigualdad anterior se llama constante de Lipschitz de f.
- Diremos que f es **no expansiva** si

  $$\rho(f(x), f(y)) \leq d(x,y), \qquad \forall x, y \in E.$$
- En caso de que exista $0 < M < 1$ tal que

  $$\rho(f(x), f(y)) \leq Md(x,y), \qquad \forall x, y \in E,$$

  se dice que f es **contractiva**.

Continuidad

Es claro que las aplicaciones no expansivas son continuas. En este caso, basta tomar $\delta = \varepsilon$ para comprobar la condición de continuidad. Por tanto, las aplicaciones contractivas (que son no expansivas) también son continuas.

Ejemplos

1. La aplicación identidad es continua.
   En efecto, si E es un espacio métrico, $I_E : E \longrightarrow E$ es no expansiva, luego continua.
2. Las aplicaciones constantes son continuas.
3. Las proyecciones canónicas en $\mathbb{R}^N$ son continuas.
   Si $1 \leq k \leq N$, notaremos por P_k a la **proyección** k**-ésima en** $\mathbb{R}^N$ dada por $P_k(x_1, x_2, \cdots, x_N) = x_k$ para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Dado que se verifica $|x_k| \leq \|x\|$ para cada vector $x \in \mathbb{R}^N$ y cada $1 \leq k \leq N$, entonces

$$|P_k(x) - P_k(y)| = |x_k - y_k| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

   Como P_k es no expansiva para $1 \leq k \leq N$, entonces es continua.

Continuidad

Ejemplos

4. Las aplicaciones lipschitzianas (entre espacios métricos) son continuas.
   Por tanto, la aplicación $x \mapsto 3x$ es continua.
   Es claro que la aplicación anterior (la llamamos g) verifica

   $$\|g(x) - g(y)\| = \|3x - 3y\| = 3\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

   luego g es lipschitziana.

Ejercicio: Comprueba que las aplicaciones lipschizianas son continuas.

Caracterización secuencial de la continuidad

Sean $(E,d),(F,\rho)$ espacios métricos, $f : E\longrightarrow F$ y $a \in E$. Entonces f es continua en a si, y sólo si, se verifica la siguiente condición

$$\big(\forall\{x_n\} \text{ en } E, \{x_n\} \to a\big) \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a). \tag{1}$$

Demostración: Supongamos que f es continua en a. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E convergente al punto a. Tenemos que probar que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.
Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis sabemos que

$$\exists\delta > 0 : x \in E, d(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Como $\{x_n\} \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \delta$ si $n \geq N$, por tanto, $\rho(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ si $n \geq N$. Hemos probado que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Continuación de la demostración:
Supongamos ahora que se verifica la condición (1). Probaremos que f es continua en a.
En realidad, probaremos el contrarrecíproco. Si f no es continua en a, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ que verifica

$$\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x \in B(a, \delta) : \rho(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ usamos la condición anterior para $\delta = \frac{1}{n}$, luego

$$\exists x_n \in E : d(x_n, a) < \frac{1}{n} \text{ y } \rho(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Por tanto, la sucesión $\{x_n\} \to a$ y, sin embargo, $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(a)$, luego no se verifica (1). Hemos terminado la prueba. $\square$

Continuidad

Ejemplos

Si X es un espacio normado, entonces la norma, la suma y el producto en X son continuas.

Demostración.

1. La norma es continua, ya que verifica

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in X.$$

   Esto es, la norma es no expansiva.

2. Usamos la caracterización secuencial para probar la continuidad de la suma. Sea $\big\{(x_n, y_n)\big\}$ una sucesión en $X \times X$ que converge a (x, y), luego $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$. Por tanto

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Por hipótesis, se tiene que $\{\|x_n - x\|\} \to 0$ y $\{\|y_n - y\|\} \to 0$. De la desigualdad anterior deducimos que $\{\|(x_n + y_n) - (x + y)\|\} \to 0$, esto es, $\{x_n + y_n\} \to x + y$.

Continuidad

Ejemplos

3. Por último consideramos el producto por escalares.
Sea $\{(t_n, x_n\}$ una sucesión $\mathbb{R} \times X$ convergente a $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$. Es decir, $\{x_n\} \to x$ y $\{t_n\} \to t$. Por tanto, para cada natural n tenemos que

$$\|t_n x_n - tx\| = \|(t_n x_n - t_n x) + (t_n x - tx)\| \leq$$

$$\|t_n(x_n - x)\| + \|(t_n - t)x\| \leq$$

$$|t_n| \, \|x_n - x\| + |t_n - t| \, \|x\|.$$

Por hipótesis, la sucesión que aparece al final de la desigualdad converge a cero, luego $\{\|t_n x_n - tx\|\} \to 0$, esto es, $\{t_n x_n\} \to tx$.
Por la caracterización secuencial de la continuidad, hemos probado que el producto por escalares es una aplicación continua. $\square$

Continuidad de funciones

Observación

Nótese que en la definición de función continua, si cambiamos el codominio por un espacio métrico mayor tal que la distancia inducida sea la de partida, entonces la continuidad de ambas aplicaciones no cambia.

Esto es, si (E, d) y $(F_i, \rho_i), i = 1, 2$ son espacios métricos tales que $F_1 \subset F_2$ y la restricción de ρ_2 a F_1 coincide con ρ_1, $f : E \longrightarrow F_1$ y $a \in E$ entonces f es continua en a si, y sólo si, $i_{F_2} \circ f$ es continua en a.

Hemos notado antes por i_{F_2} a la inclusión de F_1 en F_2.

En cambio, no ocurre lo mismo en el dominio, como muestra el siguiente ejemplo sencillo.

Continuidad de funciones

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \ x < 0 \\ 1 & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

no es continua en 0, pero su restricción a $\mathbb{R}_0^+$ sí lo es.

Nótese que 0 no es un punto interior de $\mathbb{R}_0^+$.

Proposición

Sean E y F espacios métricos, $A \subset E$ y $f : E \to F$, y consideremos la aplicación restricción de f a A, $f_{|A} : A \to F$ definida por $f_{|A}(x) := f(x)$, $\forall x \in A$. Entonces $f_{|A}$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. En consecuencia, si la función f es continua, entonces su restricción a A también lo es.

El recíproco no es cierto. Sin embargo se tiene el siguiente recíproco parcial.

Continuidad

Carácter local de la continuidad

Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : E \to F$ y $a \in A$. Si $a \in \mathring{A}$ y $f_{|A}$ es continua en a, entonces f es continua en a. En particular, si $f : E \to F$, $A \subset E$ es abierto y si $f_{|A}$ es continua, entonces f es continua en A.

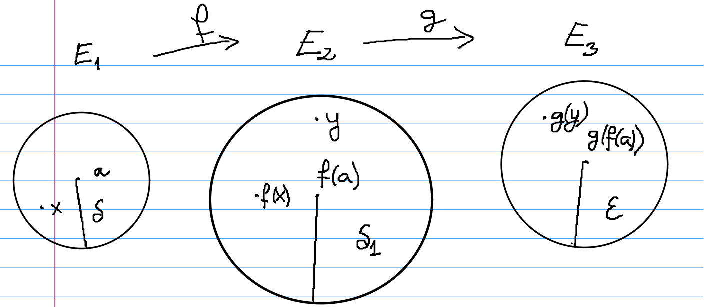
La demostración es inmediata. Lo mismo ocurre con el resultado siguiente.

Regla de la cadena para funciones continuas

Sean E_1, E_2, E_3 espacios métricos, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ y $g : E_2 \longrightarrow E_3$.
Si f es continua en un punto a de E_1 y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a. Como consecuencia, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Continuidad

Demostración:



g continua en $f(a) \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0 : g(B(f(a),\delta_1)) \subseteq B(g(f(a)),\varepsilon)$

f continua en $a \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\delta_1)$

$$g(f(B(a,\delta))) \subseteq B(g(f(a)),\varepsilon)$$

Luego $g \circ f$ es continua en a

Continuidad

Estabilidad de la continuidad por operaciones algebraicas

Sean (E, d) un espacio métrico, $(X, \|.\|)$ un espacio normado y $a \in E$.

1. Si $f, g : E \longrightarrow X$ son continuas en a y $t \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y tf son continuas en a.
2. Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \longrightarrow X$ son continuas en a, entonces fg es continua en a.
3. Si $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en a y $g(x) \neq 0, \ \forall x \in E$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Como consecuencia, dado que las proyecciones canónicas son continuas en $\mathbb{R}^N$, entonces las funciones del tipo

$$(x_1, x_2, \cdots, x_N) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N}$$

son continuas en $\mathbb{R}^N$, siempre que $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para $1 \leq i \leq N$. Multiplicando por números reales y haciendo sumas finitas se obtienen las **funciones polinómicas** en $\mathbb{R}^N$.

Continuidad

Corolario

Toda función polinómica en $\mathbb{R}^N$ es continua.
Las funciones racionales en $\mathbb{R}^N$ son continuas en todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ donde el denominador no se anule.

Recordamos que una **función racional** en $\mathbb{R}^N$ es un cociente de funciones polinómicas.

Ejemplos

1) La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = -2x^3 y + y^7$$

es continua.
2) La función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{xyz + 9x^4 - 7x^2 y}{1 + x^2 y^2}$$

es continua.

Continuidad

Caracterización de la continuidad global

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) f es continua, es decir,

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_a > 0 : \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ d(x, a) < \delta_a \end{array} \right\} \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

ii) La imagen inversa por f de cualquier abierto de F es un abierto en E.

$$O \in \mathcal{T}_F \Rightarrow\ f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_E.$$

iii) La imagen inversa por f de cualquier cerrado de F es un cerrado en E, es decir,

$$C \in \mathcal{C}_F \Rightarrow f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_E.$$

Los símbolos $\mathcal{T}_E$ y $\mathcal{C}_E$ denotan las familias de los abiertos y cerrados, respectivamente, en el espacio métrico E. La notación para F es análoga.

Continuidad global

Además, si $B \subset F$, entonces

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\},$$

que se llama imagen inversa de B mediante f.

Demostración: Probaremos solamente que i) implica ii).
Supongamos que f es continua y sea $O \subset F$ un conjunto abierto. Sea $x \in f^{-1}(O)$, esto es, $x \in E$ y $f(x) \in O$. Por ser O abierto existe $r > 0$ tal que $B(f(x), r) \subset O$. La continuidad de f en x nos asegura la existencia de un positivo δ_x tal que

$$f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), r) \subset O.$$

Por tanto, $B(x, \delta)) \subset f^{-1}(O)$. Como $f^{-1}(O)$ contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos, es un conjunto abierto.

Continuidad global

Para probar que ii) implica i) basta usar la definición de conjunto abierto y el hecho de que las bolas abiertas son conjuntos abiertos.

Por último, la equivalencia entre ii) y iii) se deduce de la relación entre conjuntos abiertos y cerrados y de la igualdad $f^{-1}(F \backslash B) = E \backslash f^{-1}(B)$ para cada subconjunto $B \subset F$.

Corolario

Sean (E, d) un espacio métrico y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Para cada real a se verifica:

1. $\{x \in E : f(x) < a\} \in \mathcal{T}$.
2. $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{T}$.
3. $\{x \in E : f(x) \leq a\} \in \mathcal{C}$.
4. $\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{C}$.
5. $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{C}$.

El resultado anterior es consecuencia de la caracterización global de la continuidad y de que los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos y los intervalos cerrados son subconjuntos cerrados.

Continuidad

Funciones componentes

Sean E un conjunto y $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_N$. Si $g : E \longrightarrow F$ es una aplicación, notaremos por g_k a la composición $P_k \circ g$ para cada $1 \leq k \leq N$, donde P_k es la proyección canónica de F en F_k. A g_k se llama **componente** k**-ésima de** g. Por tanto,

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_N(x)), \qquad \forall x \in E.$$

Proposición

Sean (E, d) y (F_i, ρ_i) para $1 \leq i \leq N$ espacios métricos, $a \in E$ y $g : E \longrightarrow F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_N$ una aplicación. Entonces

$$g \text{ es continua en } a \Leftrightarrow g_i \text{ es continuo en } \; a, \; \forall 1 \leq i \leq N.$$

Para probarlo basta usar la caracterización secuencial de la continuidad.

Límite funcional

Recordamos que si $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, la función f tiene límite en α si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que verifica

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definición

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$ y $\alpha \in A'$. Se dice que f **tiene límite en** α si existe $L \in F$ tal que se verifica

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), L) < \varepsilon.$$

En tal caso, el elemento L es único, se llama **límite de** f **en** α y escribiremos $L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

Límite funcional

Definición

Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $B\subset A\subset E$, $f:A\longrightarrow F$ y $\alpha\in B'$. Diremos que f **tiene límite en** α **según** B si la restricción de f a B tiene límite en α. Es decir, si existe $L\in F$ tal que se verifica

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0: x\in B, 0<d(x,\alpha)<\delta\Rightarrow\rho(f(x),L)<\varepsilon.$$

En tal caso, al elemento L es único, se llama **límite de** f **en** α **según** B y escribiremos $L=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x\in B}} f(x)$.

De la definición de límite funcional se deduce de forma inmediata el siguiente resultado.

Proposición

Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:E\longrightarrow F$ y $\alpha\in A'$. Si f tiene límite en α, entonces f tiene límite en α según A y además ambos limites coinciden.

Límite funcional

Obtenemos como consecuencia inmediata:

Corolario

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos, $A, B \subset E$, $f : E \longrightarrow F$ y $\alpha \in A' \cap B'$.

Si f tiene límites en α según los conjuntos A y B y ambos límites son distintos, entonces f no tiene límite en α.

Límite funcional

Ejemplo

Estudia la existencia de límite en $(0,0)$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por

$$f(x,y)=\frac{x^3-x^2}{x^2+y^2}.$$

Usamos los conjuntos

$$A=\{(x,x):x\in\mathbb{R}^*\},\qquad B=\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}^*\},$$

que están contenidos en el dominio de f. Claramente tenemos que $(0,0)\in A'\cap B'$. Si $x\in\mathbb{R}^*$ tenemos que

$$f(x,x)=\frac{x^3-x^2}{2x^2}=\frac{x-1}{2}\ \text{ y }\ f(x,x^2)=\frac{x^3-x^2}{x^2+x^4}=\frac{x-1}{1+x^2}.$$

Haciendo $x\to 0$ tenemos que el límite de f en $(0,0)$ según A existe y vale $-\frac{1}{2}$ y el límite según B vale -1. Luego f no tiene límite en $(0,0)$.

Límite funcional

Caracterización del límite funcional

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$ y $\alpha \in A'$. Entonces f tiene límite en α si, y sólo si, se verifica

$$\left(\forall \{x_n\} \text{ en } A\ ,\ x_n \neq \alpha\ ,\ \{x_n\} \xrightarrow{d} \alpha\right) \Rightarrow \{f(x_n)\} \text{ converge.} \qquad (2)$$

De hecho, si se verifica lo anterior, para toda sucesión $\{x_n\}$ en las condiciones de (2) se tiene que $\{f(x_n)\} \to \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

La prueba del resultado anterior es análoga a la de la caracterización secuencial de la continuidad.

Límite funcional

Por definición, el límite de una función en un punto α depende de la restricción de la función a $B(\alpha, r)\backslash\{\alpha\}$ para algún real positivo r. Obtenemos, por tanto, el siguiente resultado.

Carácter local del límite funcional

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : E \longrightarrow F$ y $\alpha \in A'$. Si $\alpha \in \mathring{A}$, entonces f tiene límite en α si, y sólo si, f tiene límite en α según A y ambos límites coinciden.

Límite funcional y composición de funciones

Sean (E, d_1), (F, d_2) y (G, d_3) espacios métricos, $A \subset E, B \subset F$, $f : A \longrightarrow B$, y $g : B \longrightarrow G$, $\alpha \in E \cap A'$ y $\beta \in F \cap B'$. Supongamos además que $f(x) \neq \beta, \forall x \in A \backslash \{\alpha\}$ y que

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta \quad \text{y} \quad \exists \lim_{y \to \beta} g(x).$$

Entonces $g \circ f$ tiene límite en α y coincide con $\lim_{y \to \beta} g(x)$.

Puede usarse al caracterización secuencial del límite para probar el resultado.

Límite funcional

Ejemplo

Estudia la existencia de límite en $(0,0)$ del campo escalar $h : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$h(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

En este caso consideramos las funciones $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Usaremos el resultado anterior para $\alpha = (0,0)$ y $\beta = 0$.
Se verifica que f tiene límite en $(0,0)$ y vale 0 y $f(x,y) \neq 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Además existe $\lim_{t \to 0} g(t) = 1$. Luego la composición $g \circ f = h$ tiene límite em $(0,0)$ y vale 1. Esto es, h tiene límite en $(0,0)$ y vale 0.

Límite funcional

Estabilidad algebraica

Sea (E, d) un espacios métricos, $A \subset E$, $\alpha \in E \cap A'$, $(X, \| \ \|)$ un espacio normado $f, g : A \longrightarrow X$.

1. Si f, g tienen límite en α, entonces $f + g$ y tf tienen límite en α y
$$\lim_{x \to \alpha} (f + g)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x),$$
$$\lim_{x \to \alpha} (tf)(x) = t \ \lim_{x \to \alpha} f(x).$$
2. Si $X = \mathbb{R}$ y f, g tienen límite en α, entonces fg tiene límite en α y
$$\lim_{x \to \alpha} (fg)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) \ \lim_{x \to \alpha} g(x).$$
3. Si $X = \mathbb{R}$ y f, g tienen límite en α, $g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in A$, y $\lim_{x \to \alpha} g(x) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ tiene límite en α y
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to \alpha} f(x)}{\lim_{x \to \alpha} g(x)}.$$

Límite funcional

Proposición

Sea E un espacio métrico, $A \subset E$, $\alpha \in E \cap A'$ y $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si se verifica que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \forall x \in A \backslash \{\alpha\}$$

y además $\text{lím}_{x \to \alpha} \; f(x) = \text{lím}_{x \to \alpha} \; h(x)$, entonces g tiene límite en α y coincide con el límite de f y el de h en α.

Proposición

Sean (E, d) y (F_i, ρ_i) para $1 \leq i \leq N$ espacios métricos, $A \subset E$, $\alpha \in E \cap A'$ y $g : A \longrightarrow F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_N$ una aplicación. Entonces

$$g \text{ tiene límite en } \alpha \Leftrightarrow g_i \text{ tiene límite en } \alpha, \; \forall 1 \leq i \leq N.$$

Además en ese caso se verifica que

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = (\lim_{x \to \alpha} g_1(x), \lim_{x \to \alpha} g_2(x), \cdots, \lim_{x \to \alpha} g_N(x)).$$

Límite funcional

Límite funcional y continuidad

Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$ y a un punto de A.

1. Si a es un punto aislado de A, entonces f es continua en a.
2. Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y sólo si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Límites dobles

Definición

Un **campo escalar** es una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. En caso de que $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, diremos que f es un **campo vectorial**.

El estudio de límites de campos vectoriales se reduce al de límites de campos escalares (las componentes del primero). Un **límite doble** es el límite de un campo escalar definido en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Para el estudio de límites dobles pueden usarse límites según conjuntos, paso a coordenadas polares y límites iterados, que describimos a continuación. Por simplicidad, suponemos que pretendemos estudiar el límite en $(0,0)$, ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+a, y+b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

Límites dobles

Límites según conjuntos

Si $A \subset \mathbb{R}^2, (0,0) \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite en $(0,0)$, sabemos que f tiene límite según cualquier subconjunto $B \subset A$ que tenga a $(0,0)$ como punto de acumulación y además el valor de ese límite es independiente del subconjunto B.

En la práctica suelen usarse como subconjuntos rectas, parábolas, etc. que pasen por $(0,0)$. Al usar curvas los límites según conjuntos en este caso son límite de funciones de una variable.

Límites dobles

Ejemplo

Estudia la existencia del límite en $(0,0)$ del campo escalar

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}.$$

Si $y = mx$, con $m \neq -1$ tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{x^2}{x+mx} = \frac{x}{1+m}.$$

Si m está fijo, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$. Luego todos los límites según rectas en $(0,0)$ existen y valen 0.
Ahora bien, si $y = -x + x^2$ tenemos que

$$f(x,-x+x^2) = \frac{x^2}{x-x+x^2} = 1,$$

luego $\lim_{x\to 0} f(x,-x+x^2) = 1$.
Como f tiene límites distintos según dos conjuntos que tienen a $(0,0)$ como punto de acumulación, entonces f no tiene límite en $(0,0)$.

Límites dobles

La función de $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(\rho, t) \to (\rho \; cos(t), \rho \; \text{sen}(t)),$$

es una aplicación sobreyectiva, aplica el eje $\{0\} \times \mathbb{R}$ en $(0, 0)$, y es periódica de periodo 2π en la segunda variable. En consecuencia, esta aplicación induce una biyección de la franja $\mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ existe un único $(\rho, t) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ tal que

$$x = \rho \; cos(t), \quad y = \rho \; \text{sen}(t).$$

De hecho, ρ es la norma euclídea de (x, y) y t es el "argumento principal" de (x, y), y t viene dado por

$$t = \begin{cases} \pi & \text{si } x \in \mathbb{R}^-, y = 0 \\ 2 \; \arctan \dfrac{y}{\rho + x} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al par (ρ, t) se llama **coordenadas polares** del punto (x, y).

Límites dobles

Coordenadas polares

Sean $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una función y L un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$.
3. $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\ cos(t), \rho\,\text{sen}(t)) = L$ uniformemente en t, es decir:

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ (0 < \rho < \delta,\ t \in \mathbb{R}\ ) \Rightarrow |f(\rho\,cos(t), \rho\,\text{sen}(t)) - L| < \varepsilon.$$

En la práctica, para comprobar la condición 3 se acota la diferencia $|f(\rho\ cos(t), \rho\,\text{sen}(t)) - L|$ por una función que depende sólo de ρ y que tiene límite 0 en el punto 0.

Límites dobles

Ejemplo

Estudia la existencia del límite en $(0,0)$ del campo escalar

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Solución 1: Dado que $x^2 \leq x^2 + y^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$|f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

y por ser $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, entonces existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solución 2: Usamos coordenadas polares, esto es,
$x = \rho\cos(t), y = \rho\sin(t)$, y obtenemos

$$|f(\rho\cos(t), \rho\sin(t))| = \left|\frac{\rho^2\cos^2(t)\rho\sin(t)}{\rho^2}\right| = \rho|\cos^2(t)\sin(t)| \leq \rho.$$

Como $\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$, entonces existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Límites dobles

Límites iterados

Supongamos que f es un campo escalar definido en un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ y $(0,0) \in A'$. Si existen $L_1 = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$, y $L_2 = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$ y $L_1 \neq L_2$, entonces f no tiene límite en $(0,0)$.

Observaciones:
1) Si alguno de los dos primeros límites no existe, no puede afirmarse nada.
2) Si $L_1 = L_2$ tampoco.

Ejemplo

Estudia la existencia del límite en $(0,0)$ del campo escalar

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

En este caso, para $x \in \mathbb{R}^*$ fijo tenemos que $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$, luego $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1$.
En cambio, si $y \in \mathbb{R}^*$ fijo tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$, luego $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.