GEOMETRÍA III - Doble Grado IIM

Actividad 1 del Tema 2 (Espacios Afines Euclídeos)

1. Recuerda...

   - El concepto de orientación en un espacio vectorial real.
   - El concepto de métrica en un espacio vectorial real, en especial todo lo relativo a métricas euclidianas: norma, ángulo orientado y no orientado entre vectores, ortogonalidad, complemento ortogonal de un subespacio, bases ortonormales,...
   - Relación entre las matrices que representan a los cambios de base entre bases ortonormales en un espacio vectorial euclidiano con el grupo de las matrices ortogonales: $A \cdot A^t = I$.

   Aunque todos esos contenidos son de Geometría I y II, de algunos de ellos se hace un breve recordatorio en las notas de clase de las que ya dispones. No son materia evaluable para Geometría III, pero sí imprescindibles para comprender el material de clase correspondiente al Tema 2 de espacios afines euclidianos.

2. Lee **con atención** la Sección 2.2 del Tema 2 de las notas de clase y reflexiona...

   - Concepto de espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$ y distancia
   $$d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad d(p,q) := \|\vec{pq}\| = +\sqrt{\langle \vec{pq}, \vec{pq}\rangle},$$
   asociada: todo espacio afín euclidiano es un espacio métrico en el sentido del análisis o la topología.
   - El ángulo (orientado o no) entre rectas afines secantes no es sino el que forman sus vectores directores en el sentido de los espacios vectoriales euclidianos.
   - El concepto de ortogonalidad entre subespacios afines no es sino el de ortogonalidad entre sus variedades de dirección en el sentido de los espacios vectoriales euclidianos.
   - El concepto de sistema de referencia rectangular (u ortogonal) en un espacio afín euclidiano descansa de forma natural sobre el de base ortonormal de los espacios vectoriales euclidianos. En particular, en las matrices de cambio de sistema de referencia en $\mathcal{A}$ entre referencias rectangulares $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, la matriz del cambio de base $A = M(\mathrm{Id}, B, B')$ entre las bases B y B' de direcciones ortonornales asociadas a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente, es *ortogonal*:
   $$M(Id, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right], \quad A \cdot A^t = I.$$

   Ponte a prueba:

   (a) Dados dos subespacios afines S, T en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$, demuestra que existen puntos $p \in S$, $q \in T$ tales que $d(p,q) = \mathrm{dist}(S,T)$, donde
   $$\mathrm{dist}(S,T) = \inf\{d(s,t) \colon s \in S,\ t \in T\}.$$
   Pista: Prueba que existen $p \in S$, $q \in T$ tales que $\vec{pq}$ es ortogonal a $\vec{S}$ y $\vec{T}$ (esto es, $\vec{pq} \perp \vec{S} + \vec{T}$), y que la identidad $d(p,q) = \mathrm{dist}(S,T)$ siempre se da para parejas de puntos con esa propiedad. En particular, $\mathrm{dist}(S,T) = \min\{d(s,t) \colon s \in S,\ t \in T\}$.

   (b) En el espacio afín euclidiano tridimensional $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{pq} = q - p)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto escalar clásico, consideremos las rectas:
   $$S = (1,0,1) + L\{(-1,1,1)\} \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,z) \colon x + y - 1 = x - z + 1 = 0\}.$$
   Prueba que R y S se cruzan y encuentra la única recta en $\mathbb{R}^3$ que corta a S y T de forma ortogonal. Calcula dist(S,T).

(c) Dados los siguientes pares de rectas de$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{pq} = q - p)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto escalar clásico, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo (no orientado) que forman; en otro caso, calcula la distancia entre ellas.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y = 0\}, \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x - y = 0\}.$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y = 1\}, \quad S = \{(2\lambda, 1 + 2\lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(d) En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales, se considera la métrica euclidiana

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Dotemos a $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de la estructura afín estándar, que lo convierte en un espacio afín euclidiano, y consideremos las rectas afínes

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p(0) = 5,\ p''(8) = 4\} \quad y \quad T = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(0) = 0,\ p'(1) = 4\}.$$

Comprueba que S y T son secantes y calcula el ángulo (no orientado) que forman.