Temas teóricos de Análisis Matemático I,
2^0 Doble Grado de Informática y Matemáticas, curso 2020-21

Posible desarrollo de los temas (hay después una segunda página)

1. **Complitud. Teorema del punto fijo de Banach.**
   Definiciones de sucesión de Cauchy, espacio métrico completo y aplicación contractiva. Enunciado y demostración del Teorema del punto fijo de Banach.

2. **Compacidad. Caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}^N$. Teorema de conservación de la compacidad.**
   Definición de espacio métrico compacto. Enunciado del Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^N$. Enunciado y demostración del resultado que caracteriza los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ como los cerrados y acotados. Enunciado y demostración del resultado que afirma que la imagen de un compacto por una función continua es un compacto.

3. **Espacios normados. Normas equivalentes. Teorema de Hausdorff.**
   Definición de norma y de espacio normado. Definición y caracterización de normas equivalentes. Enunciado y demostración del Teorema de Hausdorff.

4. **Conexión. Caracterización y conservación mediante funciones continuas.**
   Definición de espacio métrico (o topológico) conexo. Resultado que caracteriza los conjuntos conexos en términos de funciones continuas (enunciado y demostración). Enunciado y demostración del resultado que afirma que las funciones continuas conservan conjuntos conexos.

5. **Diferenciabilidad, derivadas direccionales y derivadas parciales. Relaciones entre los conceptos anteriores.**
   Definición de campo escalar (o vectorial) diferenciable, de las derivadas direccionales y de las derivadas parciales. Enunciado y prueba de que un campo escalar diferenciable en un punto tiene derivadas direccionales en ese punto según cualquier dirección. Relación entre la diferencial y las derivadas direccionales. Condición suficiente de diferenciabilidad (enunciado y demostración).

6. **Teorema del valor medio. Consecuencias.**
   Enunciado y demostración del TVM para campos escalares. Todo campo escalar definido en un abierto convexo de $\mathbb{R}^N$ diferenciable y con gradiente acotado es una función lipschitziana. Si un campo escalar está definido en un dominio de $\mathbb{R}^N$, es diferenciable y tiene diferencial nula, entonces es constante (enunciado y demostración). Teorema del valor medio para campos vectoriales (enunciado y prueba).

7. **Teorema de Taylor para campos escalares. Aplicaciones (extremos relativos).**
   Definición de $d^k(f, a, x)$, al menos para $k = 1, 2, 3$. Enunciado y demostración del Teorema de Taylor (fórmula del resto de Taylor). Enunciado y breve esquema de la demostración del Teorema de Taylor-Young (versión de la fórmula infinitesimal del resto). Definición del hessiano de un campo escalar. Relación entre la forma cuadrática asociada al hessiano de un campo escalar en un punto crítico y los extremos relativos de ese campo escalar. Demostrar al menos una de las afirmaciones del resultado anterior.

8. **Teoremas de la función inversa e implícita.**
   Enunciado del Teorema de diferenciación de la inversa. Enunciado y demostración de la versión local del Teorema de la función inversa. Enunciado de la versión global del Teorema. Enunciado del Teorema de la función implícita e idea de la prueba.

Consideraciones generales

1. Todos los temas deberían de contener algunas definiciones necesarias para entender los enunciados, enunciados correctos, al menos una demostración de un resultado esencial en el tema y, si es posible, alguna consecuencia o aplicación del resultado principal.

2. La demostración del resultado principal es la que vosotros querais elegir. Con algunas restricciones lógicas razonables, como, por ejemplo, que sea correcta, y que no useis un resultado más potente que el que pretendeis probar del que se deduzca de manera trivial.

3. Para el tema del teorema de Taylor, seguí (salvo algunos cambios de forma) los apuntes de Javier Pérez, profesor del Dpto. de Análisis Matemático de la UGR, que podeis descargar desde su página web.

4. Para el enunciado del Teorema de la función implícita tal vez os pueda resultar útil mirar los enunciados que aparecen en los apuntes de Acosta, Aparicio y Moreno o los de J. Pérez. En ambos casos, de momento, podeis obviar la fórmula para el jacobiano de la función implícita. Ya sabeis que en casos concretos se puede calcular derivando implícitamente en las ecuaciones que verifica las función implícita. Lo importante es que tengais claro lo que dice el enunciado y sepais aplicarlo en casos concretos.