GEOMETRÍA III - Doble Grado IIM

Actividad 2 del Tema 2 (Espacios Afines Euclídeos)

1. Recuerda...

- El concepto de isometría lineal entre espacios vectoriales métricos euclidianos. Una aplicación lineal entre espacios vectoriales métricos es una isometría lineal si y solo si la matriz que la representa en cualesquiera *bases ortonormales* es una matriz ortogonal: $A \cdot A^t = I$.
- Recuerda los conceptos de determinante, traza, valores propios, vectores y subespacios propios,... de un endomorfismo $h\colon V \to V$ en un espacio vectorial V.
- Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial métrico euclidiano y $h\colon V \to V$ una isometría lineal, entonces $\det(h) = \pm 1$. Además sus únicos posibles valores propios son 1 y -1; en efecto, si $h(v) = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ entonces $\lambda^2 \|v\|^2 = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2$, de donde $\lambda^2 = 1$. Los subespacios propios para los valores propios 1 y -1 de h son ortogonales.
- Clasificación de las isometrías vectoriales $h\colon V \to V$ en un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle , \rangle)$ de dimensión 2. Si $h \neq \mathrm{Id}_V$, caben dos posibilidades:

  (I) $\det(h) = 1$. En este caso, fijada una orientación en V, existe un único $\theta \in]0, 2\pi[$ tal que

  $$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  en cualquier base ortonormal B positivamente orientada. Se dice que h es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de la orientación fijada, y escribimos $h = G_\theta$. Si no se enfatiza la orientación, el correspondiente ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$ del giro h se determina por la ecuación $\mathrm{Traza}(h) = 2\cos\theta$. El elemento geométrico que determina un giro es su ángulo.

  (II) $\det(h) = 1$. En este caso h diagonaliza con valores propios 1 y -1, ambos de multiplicidad 1. Elegidos vectors propios *unitarios* (de norma 1) v_1 y v_{-1} para los valores propios 1 y -1, respectivamente, y formando la base ortonormal $B = \{v_1, v_{-1}\}$, se tiene que

  $$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Concluímos que h es la simetría lineal $\vec{\sigma}_U$ respecto del subespacio propio

  $$U = L\{v_1\} = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$$

  en la dirección de su ortogonal $U^\perp = L\{v_{-1}\} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$, o simplemente, la simetría ortogonal respecto de la recta vectorial U. El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal es la recta vectorial respecto a la cual se simetriza.

- Clasificación de las isometrías vectoriales $h\colon V \to V$ en un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle , \rangle)$ de dimensión 3. Si $h \neq \mathrm{Id}_V$, caben tres posibilidades:

  (I) $\det(h) = 1$. En este caso 1 es valor propio de h con multiplicidad 1. Llamemos $U = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$ al subespacio propio de 1 ($\dim U = 1$) y elijamos $v_1 \in U$ unitario. Como h es una isometría que deja U invariante entonces también deja invariante el plano $U^\perp$. Deducimos que isometría $h|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ satisface $\det(h|_{U^\perp}) = 1$ y por tanto es un giro en $U^\perp$.

Eligiendo $\{v_2, v_3\}$ base ortonormal de $U^\perp$, se tiene que $B = \{v_2, v_3, v_1\}$ es una base ortonormal de V en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se dice que h es un giro con eje la recta vectorial U y de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ (respecto de la orientación inducida por $\{v_2, v_3\}$ en $U^\perp$). Si no se enfatiza orientación, el correspondiente ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$ del giro h se determina por la ecuación $\mathrm{Traza}(h) = 1 + 2\cos\theta$. Los elementos geométricos que determinan un giro son su eje y su ángulo.

(II) $\det(h) = -1$. En este caso -1 es valor propio de h y podemos elegir $v_{-1} \in V$ vector propio unitario para el valor propio -1 de h. Al igual que antes, si llamamos $U = L\{v_{-1}\} \subseteq \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$, el plano $U^\perp$ es invariante por h y $\det(h|_{U^\perp}) = 1$. Surge aquí una dicotomía:

(II)$_1$ $h|_{U^\perp} = \mathrm{Id}_{U^\perp}$, y por tanto $U^\perp = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$ y $U = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$. En este caso h diagonaliza con valores propios -1 y 1 de multiplicidades 2 y 1, respectivamente. Elegida una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $U^\perp$, $B = \{v_1, v_2, v_{-1}\}$ es una base ortonormal de V en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluímos que h es la simetría lineal $\vec{\sigma}_{U^\perp}$ respecto del plano $U^\perp = L\{v_1, v_2\} = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$ en la dirección de su ortogonal $U = L\{v_{-1}\} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$, o simplemente, la simetría ortogonal respecto del plano vectorial $U^\perp$. El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal repecto de un plano es el plano vectorial respecto del cual se simetriza.

(II)$_2$ $h|_{U^\perp}$ es un giro en $U^\perp$. Eligiendo $\{v_1, v_2\}$ base de $U^\perp$, $B = \{v_1, v_2, v_{-1}\}$ es una base ortonormal de V y

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para algún $\theta \in]0, 2\pi[$. En este caso h es la composición del giro de eje $U = L\{v_{-1}\} \subseteq \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$ y ángulo θ (respecto a la orientación inducida por $\{v_1, v_2\}$ en $U^\perp$) y la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{U^\perp}$. Nótese que $U = L\{v_{-1}\} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$ si y solo si $\theta \neq \pi$, y si $\theta = \pi$ entonces $h = -\mathrm{Id}_V = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$. Sus elementos geométricos son los mismos que los del giro involucrado.

De todos esos contenidos de Geometría II se dan detalles complementarios en las notas de clase de las que ya dispones.

2. Lee con atención la Sección 2.3 de las notas de clase y reflexiona...

- Dados espacios afines euclidianos $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$ y $(\mathcal{A}', \vec{\mathcal{A}}', \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$, una isometría afín $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es una afinidad cuya aplicación lineal asociada $\vec{f} \colon \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}'$ es una isometría vectorial entre los espacios vectoriales euclidianos $(\vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\vec{\mathcal{A}}', \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

- Las isometrías afines $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dejan invariante la distancia ente puntos ($d(f(p), f(q)) = d(p,q)$) y el ángulo entre rectas secantes, y respetan la ortogonalidad de subespacios afines ($S \perp T$ si y solo si $f(S) \perp f(T)$).
- Una aplicación afín $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre espacios afines euclidianos es una isometrìa afín si y solo si la matriz

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right],$$

  que la representa en cualesquiera sistemas de referencia rectangulares $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}'$ tiene núcleo ortogonal, esto es, la matriz $A = M(\vec{f}, B, B')$ de $\vec{f}\colon \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}'$ en las bases de direcciones ortonornales B de $\mathcal{R}$ y B' de $\mathcal{R}'$ es *ortogonal*: $A \cdot A^t = I$.
- Las traslaciones en un espacio afín euclidiano $\mathcal{A}$ son isometrías.
- Una homotecia h de razón $r \neq 0, 1$ satisface $d(h(p), h(q)) = |r| d(p, q)$ para todos $p, q \in \mathcal{A}$, conserva el ángulo entre rectas secantes y respeta la ortogonalidad de subespacios afines. Una semejanza en es la composición de una isometría y una homotecia (el orden de factores en esa composición es irrelevante).

3. Lee con atención la Sección 2.4 de las notas de clase y reflexiona...

   Por definición, un movimiento rígido en un espacion afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle , \cdot, \cdot \rangle, \vec{\ })$ es una isometría afín $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Un movimiento rígido se dice *directo o positivo* si $\det(\vec{f}) = 1 > 0$, e *inverso o negativo* si $\det(\vec{f}) = -1 < 0$.

   Para la comprensión de los movimientos rígidos es fundamental obtener información del conjunto P_f de sus puntos fijos. El siguiente lema, no incluído en las notas de clase, resulta de gran ayuda para la comprensión de los resultados de clasificación de isometrías que veremos después. Te aconsejo que leas al menos una vez su demostración, es muy descriptiva de la estructura íntima de los movimientos.

   Lema: *Dado un movimiento rígido $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, existen un* único *vector $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$ y un* único *movimiento rígido $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ con $P_g \neq \emptyset$ tales que $f := \tau_u \circ g$, donde τ_u es la traslación de vector u.*

   Como $\vec{f} = \vec{g}$, si $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$ entonces P_f es no vacío y consiste de un único punto.

   El lema expresa que todo movimiento rígido se descompone de forma única como la composición de una traslación con dirección en $\mathrm{Ker}(\vec{f} - Id)$ y un movimiento rígido con puntos fijos. Obsérvese que, por unicidad, $u = \vec{0}$ y $g = f$ cuando $P_f \neq \emptyset$.

   Dem.: Llamemos

$$V_f = \{\overrightarrow{pf(p)} \colon p \in \mathcal{A}\} \subset \vec{\mathcal{A}},$$

   y veamos que V_f es un subespacio afín de $\vec{\mathcal{A}}$ (dotado de su estructura afín canónica como espacio vectorial) con variedad de dirección

$$\vec{V}_f = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}).$$

   En efecto, basta fijar $\overrightarrow{pf(p)} \in V_f$ y observar que la identidad general

$$\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \mathrm{Id})(\vec{pq}) \quad \forall q \in \mathcal{A}$$

   implica que $V_f = \overrightarrow{pf(p)} + \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Usando la descomposición de $\vec{\mathcal{A}}$ en suma directa ortogonal

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^{\perp},$$

deducimos que existe un *único* vector $u \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp$ tal que

$$\overrightarrow{qf(q)} - u \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}) \text{ para todo } \overrightarrow{qf(q)} \in V_f.$$

En otras palabras, el vector u no es sino la proyección ortogonal de $\overrightarrow{qf(q)}$ sobre $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp$, que no depende del vector $\overrightarrow{qf(q)} \in V_f$ usado.

> **Nota:** *En un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle , \rangle)$, dado $U \subset V$ subespacio vectorial y la descomposición $V = U \oplus U^\perp$, la proyección ortogonal sobre U no es sino la proyección lineal $\vec{\pi}_U : V \to V$ sobre U en la dirección del suplementario $U^\perp$.*

De lo anterior inferimos que u es el único vector en $\vec{\mathcal{A}}$ satisfaciendo

$$u \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp \quad \text{y} \quad u + \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = V_f.$$

Comprobemos que $\vec{f}(u) = u$. En efecto, como para todo $q \in \mathcal{A}$ se tiene que $\vec{f}(\overrightarrow{qf(q)}) = \overrightarrow{sf(s)} \in V_f$ con $s = f(q)$, deducimos que $\vec{f}(V_f) \subset V_f$ y por tanto $\vec{f}(V_f) = V_f$, ya que ambos subespacios afines de $\vec{\mathcal{A}}$ son de igual dimensión (al ser $\vec{f}$ una afinidad en $\vec{\mathcal{A}}$ por ser un isomorfismo!!). En particular $\vec{f}\big(\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})\big) = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})$, y como además $\vec{f}$ es una isometría lineal, también $\vec{f}\big(\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp\big) = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp$. Por tanto $\vec{f}(u)$ satisface las mismas propiedades que determinan unívocamente a u, a saber,

$$\vec{f}(u) \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp \quad \text{y} \quad \vec{f}(u) + \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = V_f.$$

Por unicidad $\vec{f}(u) = u$ como habíamos anunciado, esto es, $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$.

Definiendo $g = \tau_{-u} \circ f$, este nuevo movimiento rígido satisface $V_g = \{\overrightarrow{pg(p)} : p \in \mathcal{A}\} = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})$; basta con observar que $\overrightarrow{pg(p)} = \overrightarrow{pf(p)} - u$ para todo $p \in \mathcal{A}$ y recordar que $V_f = u + \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Por tanto $\vec{0} \in V_g$ y $P_g \neq \emptyset$, lo que prueba la parte de existencia en el lema.

Para la unicidad de la descomposición, supongamos que $f = \tau_{u'} \circ g'$ con $u' \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$ y $P_{g'} \neq \emptyset$. Tomando $p \in \mathcal{A}$ con $g'(p) = p$ inferimos que $u' = \overrightarrow{pf(p)}$, y como $u' \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp$ (para la última inclusión téngase en cuenta que $\vec{f}$ es una isometría lineal), deducimos que u' es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{pf(p)}$ sobre $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id})^\perp$, de donde por unicidad $u' = u$. Esto concluiría la prueba del lema salvo el comentario final para el caso particular $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$. Obsérvese que si $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$ entonces trivialmente $u = \vec{0}$, $f = g$ y $\vec{P_f} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$, lo que prueba lo deseado.

4. Clasificación de los movimientos rígidos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \vec{\ })$ $(\dim \mathcal{A} = 2)$. Se pueden dar los siguientes casos:

   (a) f es directo y $P_f = \emptyset$. De la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial, como $\det(\vec{f}) = 1$ deducimos que o bien $\vec{f} = \mathrm{Id_V}$ o $\vec{f}$ es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$. Si se diese el segundo caso tendríamos $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \{\vec{0}\}$, y por tanto por el Lema anterior que $P_f \neq \emptyset$ consistiría de un punto, absurdo. Por tanto $\vec{f} = \mathrm{Id}_V$ y f **es una traslación τ_u,** $u \in \vec{\mathcal{A}}$.

En cualquier sistema de referencia $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ (B base de las direcciones de $\mathcal{R}$), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde (b_1, b_2) son las coordenadas u_B de u en la base B de $\vec{\mathcal{A}}$.

(b) f es directo y $P_f \neq \emptyset$. Razonando como antes deducimos que $\vec{f} = \mathrm{Id}_V$ o $\vec{f}$ es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$. Como $P_f \neq \emptyset$, si $\vec{f} = \mathrm{Id}_V$ entonces $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. Análogamente, si $\vec{f}$ es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ entonces $P_f = \{q\}$ es un punto; en este caso decimos que f **es un giro de centro** $q \in \mathcal{A}$ **y ángulo** $\theta \in]0, 2\pi[$**.** En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en el único punto fijo q (B representa la base ortonormal en $\vec{\mathcal{A}}$ de las direcciones de $\mathcal{R}$), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(c) f es inverso y $P_f \neq \emptyset$. Por la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial, como $\det(\vec{f}) = -1$ deducimos que $\vec{f}$ es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_U$ respecto de la recta vectorial $U = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. Como $P_f \neq \emptyset$, tomado $q \in P_f$ tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_U(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

y por tanto por definición f **es la simetría respecto de la recta afín** $S = q + U = q + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = P_f$ **en la dirección de** $U^\perp = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, o simplemente f **es la simetría ortogonal respecto de la recta afín** $S = P_f$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S = P_f$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_{-1}\}$ con $v_1 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $v_{-1} \in \vec{S}^\perp = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) f es inverso y $P_f = \emptyset$. Como antes $\vec{f}$ es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_U$ respecto de la recta vectorial $U = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. Usemos el Lema anterior y pongamos

$$f = \tau_u \circ g$$

donde $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$, $P_g \neq \emptyset$ y $\vec{f} = \vec{g}$. Por el caso anterior g es la simetría ortogonal respecto de la recta afín $S = P_g$, y por tanto f es la composición de la simetría ortogonal afín respecto de la recta $S = P_g$ y la translación de vector $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_V) = \vec{S}$. Este movimiento rígido se llama **simetría deslizante respecto de la recta afín** S **con vector de deslizamiento** $u \in \vec{S}$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S = P_g$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_{-1}\}$ con $v_1 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $v_{-1} \in \vec{S}^\perp = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $(b_1, 0)$ son las coordenadas u_B de u en B.

Nota 1: *Obsérvese que para todo punto $p \in \mathcal{A}$, el punto medio $p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}$ del segmento $[p, f(p)]$ pertenece a la recta de simetría S de f, y $\vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. Además el vector de deslizamiento u de f coincide con $\overrightarrow{pf(p)}$, para todo $p \in S$.*

5. Clasificación de los movimientos rígidos $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \vec{\ })$ de $\dim \mathcal{A} = 3$. Se pueden dar los siguientes casos:

(A) f es directo y $P_f \neq \emptyset$. De la clasificación de isometrías lineales de espacios vectoriales euclidianos tridimensionales, como $\det(\vec{f}) = 1$ deducimos que $\vec{f} = \mathrm{Id_V}$ ó $\vec{f}$ es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ con eje la recta vectorial $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. En el primer caso claramente $f = \mathrm{Id}_\mathcal{A}$. En el segundo caso, fijado $q \in P_f$, tenemos que

$$P_f = q + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) \text{ y } f(p) = q + \vec{f}(\vec{qp}) \text{ para todo } p \in \mathcal{A}.$$

Por definición se dice que f **es un giro con eje la recta afín $S = P_f$ de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$.** En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_3 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 2: *Obsérvese que los puntos del eje S de f vienen caracterizados por la propiedad:*

$$p \in S \Longleftrightarrow \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V).$$

(B) f es directo y $P_f = \emptyset$. Aquí tenemos en cuenta nuestro Lema y descomponemos $f = \tau_u \circ g$, donde $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $P_g \neq \emptyset$. Del caso anterior $\vec{g} = \mathrm{Id_V}$ ó $\vec{g}$ es un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ con eje la recta vectorial $\mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ (recordar que $\vec{f} = \vec{g}$).
Al ser $P_f = \emptyset$, en el primer caso f **es una traslación τ_u,** $u \in \vec{\mathcal{A}}$. En cualquier sistema de referencia $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde (b_1, b_2, b_3) son las coordenadas u_B de u en la base B.
En el segundo caso, por lo visto en (A), g es un giro con eje la recta afín $S = P_g$ de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$, y por tanto f es la composición de un giro con eje la recta afín S de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ y una traslación de vector $u \in \vec{S}$. Se dice que f **es un movimiento helicoidal de eje la recta afín S, ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ y vector de deslizamiento** $u \in \vec{S}$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_3 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $(0, 0, b_3)$ son las coordenadas u_B de u en la base B.

Nota 3: *Obsérvese que los puntos del eje S de f vienen caracterizados por la propiedad:*

$$p \in S \Longleftrightarrow \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V),$$

siendo el vector de deslizamiento u igual a $\overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in S$.

En efecto, basta ver que $\overrightarrow{pf(p)} = u + \overrightarrow{pg(p)} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ si y solo si $\overrightarrow{pg(p)} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_V)$, esto es, si y solo si $\overrightarrow{pg(p)} = \vec{0}$ (y $p \in S$) por ser g un giro con eje S.

(C) f es inverso y $P_f \neq \emptyset$. Por la clasificación de isometrías lineales de un espacio vectorial tridimensional, como $\det(\vec{f}) = -1$ surgen dos posibilidades para $\vec{f}$:

- $\vec{f}$ es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_U$ respecto de un plano vectorial $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. En este caso, como $P_f \neq \emptyset$, tomado $q \in P_f$ tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_U(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A}, \quad U = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V).$$

  y por tanto por definición f **es la simetría** σ_S **respecto del plano afín** $S = q + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = P_f$ **en la dirección de** $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)^{\perp} = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, o simplemente f **es la simetría ortogonal respecto del plano afín** $S = P_f$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $v_3 \in \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\vec{f}$ es un giro con eje una recta vectorial $U = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$ (y ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$) seguido de la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{U^{\perp}}$ respecto del plano vectorial $U^{\perp}$. En este caso $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \{0\}$, y por el Lema anterior f tiene un único punto fijo que llamaremos q. Resulta que f **es la composición del giro de eje** $S = q + \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$ **y la simetría ortogonal** σ_T**, donde** $T = q + \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)^{\perp}$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en el único punto fijo q y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_3 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(D) f es inverso y $P_f = \emptyset$. Razonamos como en el caso anterior, solo que como $P_f = \emptyset$ el caso $\mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V) = \{0\}$ no se puede dar, y $\vec{f}$ ha de ser necesariamente la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_U$ respecto de un plano vectorial $U = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. Por el Lema anterior

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $P_g \neq \emptyset$. Siguiendo lo visto en (C), g ha de ser la simetría ortogonal respecto de la recta afín $S = P_g$, y por tanto f es la composición de la simetría ortogonal afín respecto del plano $S = P_g$ y la translación de vector $u \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_V) = \vec{S}$. Este movimiento rígido se llama **simetría deslizante respecto del plano afín** S **con vector de deslizamiento** $u \in \vec{S}$.

En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de $\mathcal{A}$ con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in \vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$ y $v_3 \in \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id}_V)$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $(b_1, b_2, 0)$ son las coordenadas u_B de u en B.

Nota 4: *Obsérvese que para todo punto $p \in \mathcal{A}$, el punto medio $p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}$ del segmento $[p, f(p)]$ pertenece al plano de simetría S de f, y $\vec{S} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$. Además el vector de deslizamiento u de f coincide con $\overrightarrow{pf(p)}$, para todo $p \in S$.*

Ponte a prueba: Dibuja los elementos geométricos de los movimientos estudiados en cada caso (rectas o planos de simetría, ángulos de giro y vectores de deslizamiento en una cuartilla de papel. Intenta visualizar como actúa cada uno de ellos, entendiendo la posición relativa de un punto genérico y su imagen. Este ejercicio geométrico sencillo es importante, te ayudará a comprender mejor la naturaleza de todos estos movimientos.

Por ejemplo, en el espacio se puede visualizar un movimiento helicoidal f con eje S, ángulo θ y vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$ de la siguiente manera. Dibuja el eje S y coge un punto p cualquiera del espacio. Toma el plano Π_p perpendicular a S que contiene a p y llama O_p al punto $S \cap \Pi_p$. Luego con un compás (virtual) pinchas en O_p como centro de giro y lo abres hasta alcanzar en el extremo a p, realizando el giro del punto p con ángulo θ y centro O_p de la forma tradicional. Te saldrá un nuevo punto $q \in \Pi_p$, la imagen de p por el giro con eje S y ángulo θ, al que luego sumarás el vector de deslizamiento u (ortogonal a Π_p y en la dirección de $\vec{S}$): el punto $f(p)$ es el $q + u$. Mira la figura de abajo.