21/10/2020

# Problemas del tema 1

1. $X = \{a,b\}$ ¿Cuántas topologías?

En un conjunto finito hay una cantidad finita de topologías

$\# X$ = cardinal de $X$ = nº elementos de $X$

$\# X = K$ $\quad \# P(X) = 2^K$ $\quad T \subset P(X)$ una topología $T$ es un subconjunto de $P(X)$ ¿Cuántos subconjuntos tiene $P(X)$?

$\# P(X) = 2^K$ $\quad \# P(P(X)) = 2^{2^K}$ El número de topologías en $X$ finito con $\# X = K$ es menor que igual que $2^{2^K}$

Si $X = \{a,b\} \Rightarrow$ el nº de top en $X$ es finito y $\underline{\underline{\leq 2^{2^2} = 16}}$

$T_t = \{\phi, X\}$, $T_D = P(X)$

· $T_a = \underline{\{\phi, \{a\}, X\}}$ $\quad T_b = \{\phi, \{b\}, X\}$

$T_t, P(X), T_a, T_b$ son todas las posibles topologías en $X$

$T_a = P(X) \setminus \{\underline{\{b\}}\}$ (no se pueden añadir más conjuntos)

Ta, Tb = topología de Sierpinski

$\cancel{\boxed{P(X) \setminus \{b\}}}$

· $P(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$
4

$\underline{A \subset X}$
subconj

$\underline{A \in P(X)}$
elemento de $P(X)$

$\cancel{\boxed{A \subset P(X)}}$

2. (a) $X \neq \emptyset$ $\quad T = \{\emptyset, A_1, \dots, A_k, X\}$ $\quad \emptyset \neq A_1 \subset \dots \subset A_k \neq X$

podemos suponer $A_i \neq A_j$, $i \neq j$

Sí es topología

1. $\emptyset, X \in T$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ $\quad U_i = \emptyset$ ó $A_j$ ó $X$

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \begin{cases} X & \text{si } U_i = X \text{ para algún } i \in I \\ A_j & \text{si } U_i = A_j \text{ para algún } i \text{ y } U_r \neq A_{j+1}, \dots, A_k, X \ \forall r \in I \\ \emptyset & \text{si } U_i = \emptyset \ \forall i \in I \end{cases}$$

3. $U_1, \dots, U_r \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_r \in T$.

Existe $U_{i_0} \in \{U_1, \dots, U_r\}$ tal que $U_{i_0} \subset U_j \ \forall j \in \{1, \dots, r\}$

$U_1 \cap \dots \cap U_r = U_{i_0}$ $\quad U_{i_0} \subset U_{i_1} \subset \dots \subset U_{i_r}$

$$\left.\begin{array}{l} U_{i_0} \subset U_j \ \forall j \Rightarrow U_{i_0} \subset U_1 \cap \dots \cap U_r \\ U_1 \cap \dots \cap U_r \subset U_{i_0} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{i_0} = U_1 \cap \dots \cap U_r$$ $\boxed{\text{E}}$

$X = \{a, b, c\}$ $\quad T = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ es top en $X$

$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset X$

2 (a) $\quad X \neq \emptyset$ $\quad T = P(A) \cup \{X\}$ $\quad P(A) = \{B : B \subset A\}$

1. $\emptyset \in P(A) \Rightarrow \emptyset \in T$; $X \in T$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T \Rightarrow U_i \subset A$ ó $U_i = X$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si algún } U_{i_0} = X = \bigcup_{i\in I} U_i = X \\ \text{Si ningún } U_i = X \Rightarrow U_i \subset A \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \subset A \Rightarrow \underline{\bigcup_{i\in I} U_i} \in P(A) \subset \underline{T} \end{array} \right.$$

3. $U_1, \dots, U_k \in T$

Si $U_i = X \ \forall i \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k = X \in T$

Supongamos que algún $U_{i_0} \in P(A) \Rightarrow U_{i_0} \subset A \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \subset U_{i_0} \subset A$
$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in P(A) \subset T$

$T = \{\phi, \{a\}, X\}$ $\quad X = \{a, b\}$ $\quad P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$

$P(\{a\}) \cup X = \{\phi, \{a\}, X\}$

3 (c) $X = \mathbb{N}$ $\quad T = \{\underbrace{[n, +\infty) \cap \mathbb{N}}_{= U_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\underline{\phi, \mathbb{N}}\}$

$\uparrow$ $\quad U_n \supset U_{n+1}$

1. $\phi, X \in T$

2. $\bigcup_{i\in I} V_i \in T$. $\quad \boxed{\exists\, V_{i_0} \text{ tal que } V_i \subset V_{i_0} \quad \forall i \in I}$

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} V_i = V_{i_0} \in T}$$