DOBLE GRADO EN INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

Examen final de Análisis Matemático I, **Curso 2019-2020**

1) Tema: Espacios normados. Normas equivalentes. Teorema de Hausdorff. **(2 ptos.)**

2) Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Si E y F son espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$ es continua, para cada compacto K de F, el conjunto $f^{-1}(K)$ es compacto. FALSO

b) Si $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$ es compacto y $f : A \longrightarrow A$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo. ~~FALSO~~ VERDADERO

c) Toda aplicación continua entre espacios métricos preserva conjuntos abiertos. VERDADERO **(1.5 ptos.)**

3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Definimos

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$u = \frac{y}{x^2+1}, \quad v = \cos(x) - e^y + z, \quad r = f(u,v).$$
(x,y)

Da una fórmula que permita calcular $\frac{\partial r}{\partial x}$ (en función de f) y evalúa en $(x,y,z) = (\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ la derivada parcial anterior. **(1.5 ptos.)**

4) Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 9, \ x+y \leq 0\}$. **(2 ptos.)**

± **a)** Prueba que A es compacto y conexo.

± **b)** Prueba que la función $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^2$ alcanza el máximo y el mínimo absoluto en el conjunto A. Calcula el máximo y el mínimo y describe $f(A)$.

5) **i)** Enuncia el Teorema de la función implícita. ± **(1 pto.)**

ii) Prueba que la ecuación

$$e^{xy} - \sin(z) = e$$

define a z como función de clase C^∞ de (x,y) en un abierto que contiene a $(1,1)$ y además se verifica que $z(1,1) = 0$. Calcula el gradiente del campo escalar $(x,y) \mapsto z(x,y)$ en el punto $(1,1)$. Calcula $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}(1,1)$ **(2 ptos.)**

Granada, a 20 de enero de 2020