20/11/2020

$(\mathbb{X},T)$ e.top., R rel. equiv. en $\mathbb{X}$, $\pi: \mathbb{X} \to \mathbb{X}/R$ $\pi(x)=[x]$.

T/R = top. cociente = top. final para $\pi: (\mathbb{X},T) \to \mathbb{X}/R$
$= \{ U \subset \mathbb{X}/R : \pi^{-1}(U) \in T \}$.

π continua, pero no es abierta en general.

Decimos que $A \subset \mathbb{X}$ es R-saturado si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. ($\Leftrightarrow$ se verifica la propiedad "si $x \in A \Rightarrow [x] \subset A$").

<u>Propiedad</u>: En las condiciones anteriores, $\pi(A) \in T/R$ para conjunto A abierto R-saturado.

<u>Dem</u>: sea $A \subset \mathbb{X}$ abto R-saturado. Entonces $\pi(A) \in T/R \Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) \in T$
Como $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) \in T$ ∎

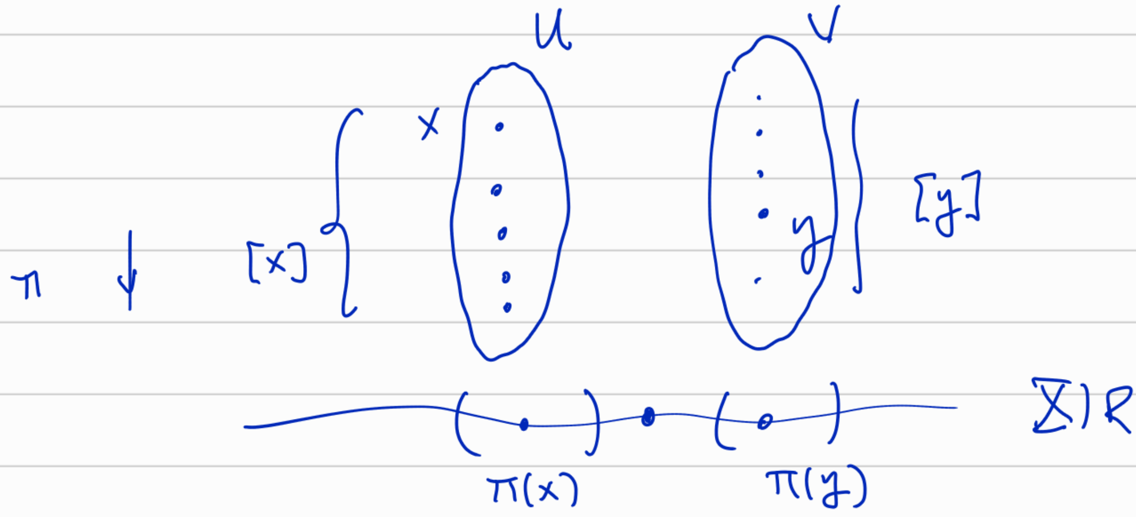
<u>Def</u>: diremos que $\pi: \mathbb{X} \to \mathbb{X}/R$ es casi abierta si $\pi(A) \in T/R$ para todo $A \in T$ R-saturado.

<u>Observación</u>: si $A \in T$ es R-saturado $\Rightarrow \pi(A) \in T/R$
⊙ si $B \in T/R \Rightarrow \pi^{-1}(B) \in T$ y es R-saturado $\left(\pi^{-1}(\underbrace{\pi(\pi^{-1}(B))}_{=B}) = \pi^{-1}(B) \right.$
$(\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ porque π es sobreyectiva$))$.

Además $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$.

Todo abierto de T/R es imagen por π de un abierto R-saturado de $(\mathbb{X},T)$

Ejemplo. ¿Cuándo X/R es Hausdorff? Sean $\pi(x), \pi(y) \in X/R$, $\pi(x) \neq \pi(y)$. Entonces $x \not R y$ (x e y no están relacionados)



Si existen U, V R-saturados con $x \in U$, $y \in V$, tales que $U \cap V = \phi$, entonces $\pi(x) \in \pi(U)$, $\pi(y) \in \pi(V)$, $\pi(U), \pi(V)$ son abiertos.

→ Veamos que $\pi(U) \cap \pi(V) = \phi$: Si existe $\pi(z) \in \pi(U) \cap \pi(V)$, entonces $\pi(z) \in \pi(U)$ y $\pi(z) \in \pi(V) \Rightarrow z \in U \cap V$!! (suponemos $U \cap V = \phi$).

$$\pi(z) \in \pi(U) \Leftrightarrow z \in \pi^{-1}(\pi(U)) = U$$

R-saturado

Si para cada par de puntos $x, y \in X$ tales que $x \not R y$, podemos encontrar dos abiertos R-saturados U, V tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \phi$, entonces $(X/R, T/R)$ es Hausdorff.