Solucion-20145-Final2.pdf

Exámenes Geometría III

2º Geometría III

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

5.– Calcular las ecuaciones de todas las proyectividades $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tales que $f((1:1:0)) = (0:1:1)$, $f((0:1:1)) = (1:0:1)$ y $f((1:0:1)) = (1:1:0)$.

Cualquier proyectividad $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ se obtiene a partir de una aplicación lineal biyectiva $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi, \tag{*}$$

donde $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ es la proyección canónica. Para calcular f, basta calcular la matriz de $\hat{f}$ en la base usual.

La condición:

$$f((1:1:0)) = (0:1:1)$$

implica, por la condición (*), que:

$$\pi(\hat{f}(1,1,0)) = f(\pi((1,1,0)) = f((1:1:0)) = (0:1:1) = \pi(0,1,1).$$

Esto implica que los puntos $\hat{f}(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ están relacionados en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Por tanto, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\hat{f}((1,1,0) = \alpha(0,1,1).$$

De la misma forma, se demuestra que existen β, $\gamma > 0$ tales que:

$$\hat{f}((0,1,1) = \beta(1,0,1),$$
$$\hat{f}((1,0,1) = \gamma(1,1,0).$$

Expresamos el vector $(1,0,0)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$:

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\hat{f}((1,0,0)) &= \frac{1}{2}\hat{f}((1,1,0)) - \frac{1}{2}\hat{f}((0,1,1)) + \frac{1}{2}\hat{f}((1,0,1)) \\ &= \frac{1}{2}(0,\alpha,\alpha) - \frac{1}{2}(\beta,0,\beta) + \frac{1}{2}(\gamma,\gamma,0) \\ &= \frac{1}{2}(-\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha-\beta).\end{aligned}$$

De la misma forma se demuestra que:

$$\hat{f}((0,1,0)) = \frac{1}{2}(\beta-\gamma, \alpha-\gamma, \alpha+\beta),$$
$$\hat{f}((0,0,1)) = \frac{1}{2}(\beta+\gamma, -\alpha+\gamma, -\alpha+\beta).$$

Por tanto, la matriz de $\hat{f}$ en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\beta+\gamma & \beta-\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha+\gamma & \alpha-\gamma & -\alpha+\gamma \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta & -\alpha+\beta \end{pmatrix}. \tag{\#}$$

Las proyectividades de $\mathbb{P}^2$ que verifican la condición del enunciado son las aplicaciones f cuya aplicación lineal asociada $\hat{f}$ tiene una matriz de la forma (#), con α, β, $\gamma > 0$.