ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Grado en Matemáticas. Doble grado en Física y Matemáticas, 2º Curso.

Examen Extraordinario (febrero 2018)

1. [2 puntos] Teorema del valor medio. Consecuencias.

2. [2 puntos] Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Toda función continua conserva conjuntos abiertos y acotados.

b) $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^3$, entonces $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, donde:

$$f(x) = d(x, C) = \inf \{||x - c||_2 : c \in C\}.$$

c) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos campos escalares diferenciables y definimos h como sigue:

$$h(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y), ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Entonces h es diferenciable y se verifica que:

$$\nabla h(x, y) = g\nabla f(x, y) + f\nabla g(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

d) El polinomio de Taylor de orden 2 de la función:

$$f(x, y) = x^2 + 2 \cdot e^{x+y}$$

en $(0, 0)$ es:

$$P(x, y) = 2 + 2(x + y) + 2x^2 + 2xy + y^2$$

3. [2 puntos] Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado, no acotado y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua tal que verifica que $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$, esto es, para cada real M existe $K \in \mathbb{R}$ que verifica:

$$x \in C, ||x|| \geq K \Rightarrow f(x) \geq M.$$

Prueba que bajo esas condiciones f tiene mínimo absoluto.

4. [2 puntos] Sea A el conjunto dado por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin(x^2 - y)}{x^2 - y} & (x, y) \in A \\ x & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases}$$

i) ¿Es f continua en $(0, 0)$?

ii) Estudia la existencia de gradiente de f en $(0, 0)$.

iii) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

5. [2 puntos] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$.

a) Calcula los extremos relativos de f.

b) Calcula los extremos absolutos de la restricción de f a C, donde restringida a C, donde:

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

c) Describe $f(C)$.

Examen doble Grado y 2º Matemáticas.

2.a) Verdadera/Falsa

Toda f. continua conserva abtos y acotados

En general, las funciones continuas no conservan conjuntos abiertos ni acotados, ni conjuntos que verifican las dos condiciones simultáneamente.

Ejemplo: $f:]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in]0,1[$.

Es claro que f es continua, $]0,1[$ es un abto acotado y $f(]0,1[) =]1,+\infty[$ que es abierto, pero no acotado.

2.b) $C \subseteq \mathbb{R}^3$, no vacío, $f(x) = d(x,C)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, ¿f unif. continua?

Verdadera. De hecho, usando la desigualdad triangular para $\| \|_2$ y la definición de ínfimo, puede probarse que

$$|d(x,C) - d(y,C)| \leq \|x-y\|_2, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^3,$$

luego f es no expansiva, en particular lipschiteriana, luego uniformemente continua.

2.c) $f,g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, $h(x,y) = f(x,y)\,g(x,y)$.

Entonces h es diferenciable y además

$$\nabla h(x,y) = g\,\nabla f(x,y) + f\,\nabla g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verdadera.

Por ser h el producto de dos campos escalares diferenciables, entonces es diferenciable.

Como f y g son diferenciables, existe ∇f y ∇g en $\mathbb{R}^2$.

Se tiene además que

$D_1 h(x,y) = (D_1 f(x,y))g(x,y) + f(x,y) D_1 g(x,y)$ y

$D_2 h(x,y) = (D_2 f(x,y))g(x,y) + f(x,y) D_2 g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(2)

Por tanto,

$$\nabla h(x,y) = (D_1 h(x,y), D_2 h(x,y)) =$$

$$g(x,y)\,\nabla f(x,y) + f(x,y)\,\nabla g(x,y)$$

2.d) Polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 2 + 2(x+y) + 2x^2 + 2xy + y^2, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

siendo $f(x,y) = x^2 + 2e^{x+y}$

Tenemos que $f(0,0) = 2$. Obviamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, por ser suma de dos campos escalares de clase infinito. Calculamos ∇f y las derivadas parciales de segundo orden de f. Tenemos que

$\nabla f(x,y) = (2x + 2e^{x+y}, 2e^{x+y})$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego

$D_1 f(0,0) = 2 = D_2 f(0,0)$

Además $D_{11} f(x,y) = 2 + 2e^{x+y}$, $D_{12} f(x,y) = 2e^{x+y}$, $D_{22} f(x,y) = 2e^{x+y}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Usando el Teorema de Schwarz y las igualdades anteriores obtenemos

$D_{11} f(0,0) = 4$, $D_{12} f(0,0) = D_{21} f(0,0) = 2 = D_{22} f(0,0)$.

El polinomio de Taylor de f en $(0,0)$ de orden 2 es

$$f(0,0) + (\nabla f(0,0) / (x,y)) + \frac{1}{2}(D_{11}f(0,0)x^2 + D_{12}f(0,0)xy +$$

$$+ D_{21}f(0,0)yx + D_{22}f(0,0)y^2) =$$

$$= 2 + 2(x+y) + \frac{1}{2}(4x^2 + 2xy + 2yx + 2y^2) =$$

$$= 2 + 2(x+y) + 2x^2 + 2xy + y^2 = P(x,y).$$

Luego la afirmación es verdadera.

(3) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ cerrado no acotado, $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que (3)

$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, esto es,

$$\forall\ M \in \mathbb{R}\ \exists\ k \in \mathbb{R} : x \in C,\ \|x\| \geq k \Rightarrow f(x) \geq M.$$

Prueba que f tiene mínimo absoluto.

Como $C \neq \emptyset$ por ser no acotado, entonces existe $x_0 \in C$.

Tomamos $M = f(x_0)$ y usamos la hipótesis, luego

(*) $\exists\ k \in \mathbb{R} : x \in C,\ \|x\| \geq k \Rightarrow f(x) \geq M.$

Llamamos $k_0 = \mathrm{Max}\,\{k, \|x_0\|\} \geq k$.

El conjunto $C_0 = C \cap \overline{B}(0, k_0)$ es un cerrado, por ser intersección de dos cerrados, no vacío, ya que $x_0 \in C$ y acotado.

La restricción de f a C_0 alcanza su mínimo absoluto en un punto $u_0 \in C_0$, por el Teorema de Weierstrass.

Por tanto, se tiene que

$$c \in C \Rightarrow \begin{cases} \|x\| \leq k_0 \Rightarrow x \in C_0 \Rightarrow f(x) \geq f(u_0) \\ \text{ó} \\ \|x\| > k_0 \underset{\text{por}(*)}{\Rightarrow} f(x) \geq M = f(x_0) \underset{x_0 \in C_0}{\geq} f(u_0) \end{cases}$$

Hemos probado que f alcanza su mínimo absoluto en u_0.

④ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ④

$$f(x,y) = \frac{x \operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} \text{ si } (x,y) \in A, \quad f(x,y) = x \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$$

(i) ¿Es f continua en $(0,0)$

Comprobaremos que en $(0,0)$ el límite de la función según A y el límite según $\mathbb{R}^2 \setminus A$ coinciden con 0, que es $f(0,0)$.

Como la proyección sobre la primera coordenada es continua en $\mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

Dado que $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, entonces $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A}} \frac{\operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} = 1$,

luego $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A}} x \frac{\operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} = 0$.

Hemos probado que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus A}} f(x,y) = f(0,0)$,

luego f es continua en $(0,0)$

ii) Estudiamos si $\exists\, \nabla f(0,0)$.

Si $t \neq 0$, $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t}{t} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2}$

Como $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} = 1 \Rightarrow \exists\, D_1 f(0,0) = 1$

De nuevo si $t \neq 0$ tenemos que $f(0,t) - f(0,0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

luego $\exists\, D_2 f(0,0) = 0$.

Por tanto existe $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

(iii) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Como f tiene gradiente en $(0,0)$, estudiamos si f verifica la definición de dif en $(0,0)$, ya que, en caso de ser dif, $T(x,y) := Df(0,0)(x,y) = (\nabla f(0,0) / (x,y))$

$$f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)) = x - 0 - ((1,0)/(x,y)) = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A$$

Por tanto, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash A}} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0.$

Estudiamos ahora la existencia de límite en $(0,0)$ según A.

Si $(x,y) \in A \backslash \{(0,0)\}$, tenemos que

$$f(x,y) - f(0,0) - T(x,y) = x\frac{\operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} - 0 - x, \text{ por tanto}$$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} - 1\right)$$

Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ y $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y)}{x^2-y} = 1$, entonces

$$\exists \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

luego f es dif. en $(0,0)$ y

$$Df(0,0)(x,y) = (\nabla f(0,0) / (x,y)) = x, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

5 Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(a) Calcula los extremos relativos de f

Como f es polinómica, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. ~~Luego~~ Dado que $D_1 f(x,y) = 8x - 2xy^2$, $D_2 f(x,y) = 18y - 2x^2y$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (8x - 2xy^2 = 0 \wedge 18y - 2x^2y = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x - xy^2 = 0 \wedge 9y - x^2y = 0) \Leftrightarrow (x(4-y^2) = 0 \wedge y(9-x^2) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee y^2 = 4) \wedge (y = 0 \vee x^2 = 9)$$

Por tanto, los puntos críticos de f coinciden con los del conjunto

$$\{(0,0), (3,2), (-3,2), (3,-2), (-3,-2)\}$$

Para intentar averiguar los posibles extremos relativos de f, calculamos el hessiano de f. Se tiene que

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 18-2x^2 \end{pmatrix}$$

Luego $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$, que es definida positiva, luego f tiene un mínimo ~~absoluto~~ relativo en $(0,0)$.

En el resto de los puntos tenemos

$Hf(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$, $\det Hf(3,2) < 0$; en este caso f tiene un punto de silla en $(3,2)$.

En el resto de los puntos críticos tenemos

$Hf(-3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$, $Hf(3,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$ y

$Hf(-3,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$. Por el mismo argumento usado en $(3,2)$ f tiene puntos de silla en $(-3,2)$, $(3,-2)$ y en $(-3,-2)$.

5 b) Extremos absolutos de la restricción de f a C, donde $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$.

Antes hemos estudiado los extremos relativos de f en $\mathbb{R}^2$.

Como C es compacto, por ser acotado y cerrado, y f continua, f alcanza el máximo y mínimo absolutos en C. Si se alcanza en un punto interior de C, éste ha de ser un extremo relativo, y sabemos que el único posible extremo relativo de f en $\mathbb{R}^2$ es $(0,0)$ y además $(0,0)\in\mathring{C}$.

Estudiamos los extremos relativos de f en la frontera de C. En este caso se tiene que

$$\mathring{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\} \text{ y}$$

$$\operatorname{Fr} C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}.$$

Restringimos f a la frontera de C, esto es, definimos.

$$u(x)=f(x,\sqrt{4-x^2})=4x^2+9(4-x^2)-x^2(4-x^2) \quad \forall x\in[-2,2].$$

Nótese que si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$, luego los puntos de la frontera de C son de la forma

$$(x,\sqrt{4-x^2}),\ (x,-\sqrt{4-x^2}) \quad \text{para} \quad x\in[-2,2].$$

Como $f(x,y)=f(x,-y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, entonces

$$f(x,\sqrt{4-x^2})=f(x,-\sqrt{4-x^2}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x|\leq 2.$$

Esto es, podemos restringir f a la mitad superior de la circunferencia para calcular los extremos absolutos de f.

Es claro que u es una función polinómica, luego $f \in C^\infty([-2,2])$, de hecho

$$u(x) = x^4 - \cancel{}\, 9x^2 + 36, \quad \forall x \in [-2,2].$$

Luego $u'(x) = 4x^3 - 18x = 2x(2x^2 - 9)$, si $|x| \leq 2$.

Por tanto

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee 2x^2 = 9) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 = \frac{9}{2})$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee |x| = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}).$$

En el segundo caso $x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$, el único punto crítico de u en $[-2,2]$ es 0.

Dado que $u(0) = 36 = f(0,2)$

$$u(-2) = u(2) = 2^4 - 9.4 + 36 = 4(4 - 9 + 9) = 16$$

Además $f(0,0) = 0$,

entonces el ~~extremo~~ mínimo absoluto de f en C (compacto) se alcanza en $(0,0)$ (y vale 0) y el máximo en $(0,2)$ y vale 36.

Por ser C un disco cerrado, es convexo, luego conexo. Como f es continua, $f(C)$ ha de ser un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, luego $f(C)$ es un intervalo. Como además $f(C)$ es compacto, $f(C)$ ha de ser un intervalo cerrado y acotado. Concluimos que

$$f(C) = [\min f(C), \operatorname{Max} f(C)] = [0, 36].$$