Problemas Tema 2. Topología I
Doble grado en Informática y Matemáticas
Curso 2020–21

1.– Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Probar que son equivalentes:

1. f es continua.
2. $f^{-1}(B') \in T$ para todo elemento B' de una base $\mathcal{B}'$ de T'.
3. $f^{-1}(S') \in T$ para todo elemento S' de una subbase $\mathcal{S}'$ de T'.

2.– Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. ¿Es equivalente la continuidad de f a alguna de las dos siguientes propiedades?

1. $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\overline{C})$ para todo $C \subset Y$.
2. $f^{-1}(\text{int}(C)) \subset \text{int}(f^{-1}(C))$ para todo $C \subset Y$.

3.– Sean f, g dos aplicaciones continuas de un espacio topológico (X, T) en $(\mathbb{R}, T_u)$. Probar que $f + g$ y fg son aplicaciones continuas.

4.– Sea $f_i : (X, T) \to (Y, d)$, $i \in \mathbb{N}$, una sucesión de aplicaciones continuas de un espacio topológico (X, T) en un espacio métrico (Y, d). Supongamos que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f : X \to Y$. Probar que $f : (X, T) \to (Y, d)$ es continua.

(La sucesión f_i converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_i(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $i \geq i_0$ y todo $x \in X$).

5.– Una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre espacios métricos es lipschitziana si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant K\, d(x, y), \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Probar que una aplicación lipschitziana es continua.

6.– Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Probar que la aplicación $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ definida por $f(z) = d(z, x)$ para todo $z \in X$ es lipschitziana. (d_u es la distancia usual en $\mathbb{R}$).

7.– Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que la aplicación $\delta_A : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ definida por:

$$\delta_A(z) = \inf\{d(z, a) : a \in A\}$$

es lipschitziana y, por tanto, continua.

8.– Sean (X, T), (Y, T') dos espacios topológicos, $U, V \subset X$ conjuntos abiertos tales que $X = U \cup V$. Probar que $f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua si y sólo si $f|_U : (U, T_U) \to (Y, T')$ y $f|_V : (V, T_V) \to (Y, T')$ son continuas.

9.– Consideramos el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

1. Probar que A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.
2. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación $p((x, y)) = x$. Probar que $p(A)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

10.– Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona estrictamente creciente y continua. Probar que es un homeomorfismo.

11.– Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Probar que los subconjuntos (a, b), $(-\infty, c)$, $(d, +\infty)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

12.– Probar que las traslaciones son homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual.

13.– Probar que las bolas en $\mathbb{R}^n$ con las distancias asociadas a las normas

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

son homeomorfas.

14.– Sea A un subconjunto no vacío de un espacio topológico (X, T). Probar que la topología inducida T_A es la topología inicial definida por la aplicación inclusión $i_A : A \to X$.

Concluir que una aplicación $f : (Y, T') \to (A, T_A)$ es continua si y sólo si $i_A \circ f : (Y, T') \to (X, T)$ es continua.

15.– Sean (X, T), (Y, T') espacios topológicos y $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación continua. Se define el grafo de f como el subconjunto $G(f)$ de $X \times Y$ definido por:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Probar que (X, T) es homeomorfo a $G(f)$ con la topología inducida en $G(f)$ por la topología producto $T \times T'$.

16.– Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Se define en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia xRy sy y sólo si $f(x) = f(y)$ (si y solo si $x - y$ es un múltiplo entero de 2π).

1. Probar que existe una aplicación $g : \mathbb{R}/R \to \mathbb{S}^1$ tal que $g \circ p = f$, donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/R$ es la proyección.
2. Probar que g es un homeomorfismo cuando se consideran en $\mathbb{R}/R$ la topología cociente y en $\mathbb{S}^1$ la topología inducida por la topología usual.

17.– Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Se define la relación de equivalencia en X:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow y = y', |x - x'| = 0, 1.$$

Probar que X/R es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

18.– Sea (X, T) un espacio topológico. Probar que es Hausdorff si y sólo si el subconjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ es cerrado en $(X \times X, T \times T)$.

19.– Sea $f, g : (X, T) \to (Y, T')$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que (Y, T') es Hausdorff. Probar que:

1. El conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
2. El grafo de f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es cerrado en $X \times Y$.
3. Si f y g coinciden en un conjunto denso de X, entonces $f = g$.

20.– Sea (X, T) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Se considera el subconjunto $R \subset X \times X$ definido por:

$$R = \{(x, x') \in X \times X : x \sim x'\}.$$

Probar:

1. Si $(X/\sim, T/\sim)$ es un espacio Hausdorff, entonces R es un subconjunto cerrado de $(X \times X, T \times T)$.
2. Si R es un subconjunto cerrado de $X \times X$ y la aplicación $\pi : X \to X/\sim$ es abierta, entonces $(X/\sim, T/\sim)$ es un espacio de Hausdorff.

21.– En $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideramos la relación de equivalencia:

$$xRy \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y.$$

El espacio cociente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/R$ es el espacio proyectivo real $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de dimensión n.

Si se considera en $\mathbb{S}^n$ la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, probar que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{S}^n/\sim$ son homeomorfos.