# GEOMETRÍA III - Doble Grado IIM

## Actividad 3 del Tema 2 (Espacios Afines Euclídeos)

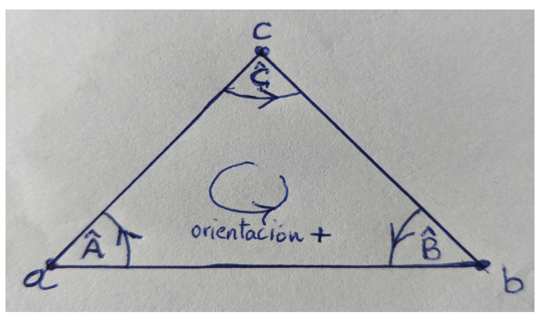
Vamos a recordar algunos de los resultados clásicos acerca de triángulos en el plano euclidiano. No se necesitan conocimientos previos más allá de lo ya comentado anteriormente. En especial es importante que recuerdes el concepto de ángulo orientado.

1. Recuerda que un *triángulo* $T$ en un espacio afín son tres puntos $\{a, b, c\}$ afínmente independientes, que se suelen llamar vértices de $T$. Normalmente, se suele hablar de triángulos $T = \{a, b, c\}$ en planos afines, ya que sus propiedades se pueden circunscribir al plano $\Pi = \langle\{a, b, c\}\rangle$ que lo contiene.

2. Supongamos que $T = \{a, b, c\}$ es un triángulo en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$. Se definen los *ángulos interiores* $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de $T$ en los vértice $a$, $b$ y $c$ respectivamente como los ángulos orientados

$$\hat{A} = \angle(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle(\vec{bc}, \vec{ba}) \quad \text{y} \quad \hat{C} = \angle(\vec{ca}, \vec{cb})$$

respecto de la orientación del plano $\vec{\mathcal{A}}$ inducida por la base ordenada $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$.




**Nota:** *Lee con atención la definición anterior y date cuenta de que la ordenación de vértices y vectores es crucial. Aparentemente, el vértice $a$ juega un papel relevante respecto de los otros dos en cuanto a la elección de la orientación en $\vec{\mathcal{A}}$, pero no es así: las bases ordenadas $\{\vec{bc}, \vec{ba}\}$ y $\{\vec{ca}, \vec{cb}\}$ inducen la misma orientación en $\vec{\mathcal{A}}$ que $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$.*

Propiedades básicas de los ángulos de un triángulo (Euclides siglo III A.C.):

- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C} \in ]0, \pi[$. Es conveniente recordar que, por definición, el ángulo orientado pertenece al intervalo $[0, 2\pi[$, salvo que elijamos otra rama del argumento y sumemos un múltiplo entero de $2\pi$. Calculemos $\hat{A}$ (análogamente se razonaría con $\hat{B}$ y $\hat{C}$), para lo cual llamemos $B = \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ y escribamos

$$w_1 = \frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab}, \text{ y } w_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2, \text{ donde } u_2 = \vec{ac} - \langle w_1, \vec{ac}\rangle w_1.$$

Un cálculo sencillo nos dice que $B_0 = \{w_1, w_2\}$ es una base ortonormal de $\vec{\mathcal{A}}$ y $\det(B, B_0) > 0$, esto es, $B_0$ induce la misma orientación que $B$ en $\vec{\mathcal{A}}$. Por definición, $\hat{A}$ es el único real en $[0, 2\pi[$ satisfaciendo

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|}\vec{ac} = \cos(\hat{A})w_1 + \sin(\hat{A})w_2,$$

de donde como $\vec{ac} = \langle w_1, \vec{ac}\rangle w_1 + \|u_2\|w_2$ inferimos que $\sin\hat{A} = \frac{\|u_2\|}{\|\vec{ac}\|} > 0$, esto es, $\hat{A} \in ]0, \pi[$.

- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$. Este cálculo es sencillo si se recuerdan dos propiedades básicas del ángulo orientado *respecto a una orientación fijada en el espacio vectorial ambiente.* A saber que $\angle(u, v) = \angle(-u, -v)$ (su demostración es trivial) y que salvo sumar un múltiplo de $2\pi$ la regla de aditividad $\angle(u, v) + \angle(v, w) = \angle(u, w)$ es válida.

  Usando estas fórmulas, y respecto de la orientación en $\vec{\mathcal{A}}$ inducida por $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$, se tiene que:

  $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} = \angle(\vec{ab}, \vec{ac} + \angle(\vec{ca}, \vec{cb}) + \angle(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle(\vec{ab}, \vec{ac} + \angle(-\vec{ca}, -\vec{cb}) + \angle(\vec{bc}, \vec{ba}) =$$

  $$= \angle(\vec{ab}, \vec{ac} + \angle(\vec{ac}, \vec{bc}) + \angle(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle(\vec{ab}, \vec{ba}) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

  En la última identidad hemos usado que $\angle(\vec{ab}, \vec{ba}) = \pi$. Como $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in ]0, \pi[$, necesariamente $\pi + 2k\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$, por lo que $k = 0$ y se tiene lo deseado.

3. *Teorema de Pitágoras:* Dado un triángulo $T = \{a, b, c\}$ con ángulo $\hat{A} = \pi/2$,

   $$d(a, b)^2 + d(a, c)^2 = d(b, c)^2.$$

   Este tipo de triángulos se llaman *rectángulos* con ángulo recto en el vértice $a$. Los segmentos $[a, b]$ y $[a, c]$ se denominan los *catetos* de $T$, y el segmento $[b, c]$ la *hipotenusa* de $T$.

   La prueba del teorema de Pitágoras es muy simple para nosotros:

   $$d(b, c)^2 = \|\vec{bc}\|^2 = \langle\vec{bc}, \vec{bc}\rangle = \langle\vec{ba} + \vec{ac}, \vec{ba} + \vec{ac}\rangle = \|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle\vec{ba}, \vec{ac}\rangle = d(a, b)^2 + d(a, c)^2,$$

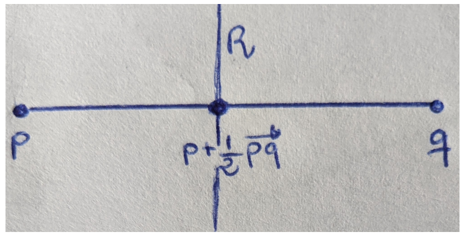
   donde simplemente hemos tenido en cuenta que $\hat{A} = \pi/2$ si y solo si $\langle\vec{ba}, \vec{ac}\rangle = 0$ (esto es, $\vec{ab} \perp \vec{ac}$).

4. Los tres puntos notables de un triángulo son el *baricentro, el circuncentro y el ortocentro.* Explicamos a continuación cómo se generan y sus propiedades básicas.

   - **Baricentro:** punto de corte de las tres medianas. Dado un triángulo $T = \{a, b, c\}$, recordemos que la mediana asociada al vértice $a$ es la recta $M_a = \langle\{a, b + \frac{1}{2}\vec{bc}$ que une $a$ y el punto medio $b + \frac{1}{2}\vec{bc}$ o centro de masas del lado opuesto $[b, c]$. Análogamente se define las medianas $M_b$ y $M_c$ asociadas a $b$ y $c$. Es fácil comprobar (lo hicimos en un ejercicio de clase) que $M_a$, $M_b$ y $M_c$ se cortan en un punto $B$, el llamado baricentro o centro de masas del triángulo $T$ y que viene dado por

     $$B = a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac}) = b + \frac{1}{3}(\vec{ba} + \vec{bc}) = c + \frac{1}{3}(\vec{ca} + \vec{cb}).$$

     Este concepto es puramente afín y no requiere del aditivo de una métrica euclidiana.

- **Circuncentro:** Recordemos que dados dos puntos $p, q$ en un plano afín euclidiano euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$, la *mediatriz* del segmento $[p, q]$ es la recta $R$ que pasa por el punto medio del segmento $p + \frac{1}{2}\vec{pq} = q + \frac{1}{2}\vec{qp}$ y es ortogonal a la recta $\langle\{p, q\}\rangle$ que generan $p$ y $q$, esto es, la recta
$$R = (p + \frac{1}{2}\vec{pq}) + L\{\vec{pq}\}^{\perp} = (q + \frac{1}{2}\vec{qp}) + L\{\vec{pq}\}^{\perp}.$$


Si $r \in R$, se tiene que $r = p + (\frac{1}{2}\vec{pq} + v)$ para un vector $v \perp \vec{pq}$, y por tanto
$$d(p, r)^2 = \|\frac{1}{2}\vec{pq} + v\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{pq}\| + \|v\|^2 = d(q, r)^2.$$
No es difícil ver el recíproco, esto es, si $r \in \mathcal{A}$ es un punto que equidista de $p$ y $q$ (a saber, $d(p, r) = d(q, r)$) entonces $r$ está contenido en la mediatriz $R$ de $[p, q]$ (hágase como ejercicio).
Dado un triángulo $T = \{a, b, c\}$, llamemos $R_a$ a la mediatriz del lado $[b, c]$, $R_b$ a la mediatriz del lado $[a, c]$ y $R_c$ a la mediatriz del lado $[a, b]$. Si $R_a$ y $R_b$ fuesen paralelas tendríamos que las rectas vectoriales $L\{\vec{bc}\}^{\perp}$ y $L\{\vec{ac}\}^{\perp}$ en $\vec{\mathcal{A}}$ serían iguales, y por tanto $\{\vec{bc}, \vec{ac}\}$ serían linealmente dependientes, lo que es absurdo ya que $\{a, b, c\}$ son afínmente independientes. Por tanto $R_a$ y $R_b$ no son paralelas, y de igual forma ocurre con las parejas de rectas $R_a$, $R_c$ y $R_b$, $R_c$. Esto garantiza que $C := R_a \cap R_b$ es un único punto caracterizado por la propiedad de equidistar de $a$, $b$ y $c$, de donde necesariamente
$$C = R_a \cap R_b = R_a \cap R_c = R_b \cap R_c.$$
Al punto $C$ le llamaremos circuncentro del $\vec{ac}\,T$. Su nombre deriva de la propiedad geométrica que lo caracteriza: es el centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices de $T$.
- **Ortocentro:** Dado un triángulo $T = \{a, b, c\}$ en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$, la altura $H_a$ del vértice $a$ es la recta que pasa por $a$ y es ortogonal al lado opuesto $[b, c]$:
$$H_a = a + L\{\vec{bc}\}^{\perp}.$$
Análogamente se definen las alturas asociadas a los vértices $b$ y $c$:
$$H_b = b + L\{\vec{ac}\}^{\perp} \quad \text{y} \quad H_c = c + L\{\vec{ab}\}^{\perp}.$$
Como los vectores $\vec{ac}$ y $\vec{bc}$ son linealmente independientes ($T$ es un triángulo), las rectas $H_a$ y $H_b$ no son paralelas y se cortan en un único punto $O$. Comprobemos que $O \in H_c$, o equivalentemente, que $\vec{Oc} \perp \vec{ab}$. En efecto,
$$\langle\vec{Oc}, \vec{ab}\rangle = \langle\vec{Oa} + \vec{ac}, \vec{aO} + \vec{Ob}\rangle = \langle\vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{aO}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{Ob}\rangle =$$
$$= \langle\vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob}\rangle - \langle\vec{Oa}, \vec{ac}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{Ob}\rangle = \langle\vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} - \vec{ac}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{Ob}\rangle =$$
$$= \langle\vec{Oa}, \vec{ca} + \vec{aO} + \vec{Ob}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{Ob}\rangle = \langle\vec{Oa}, \vec{cb}\rangle + \langle\vec{ac}, \vec{Ob}\rangle = 0,$$

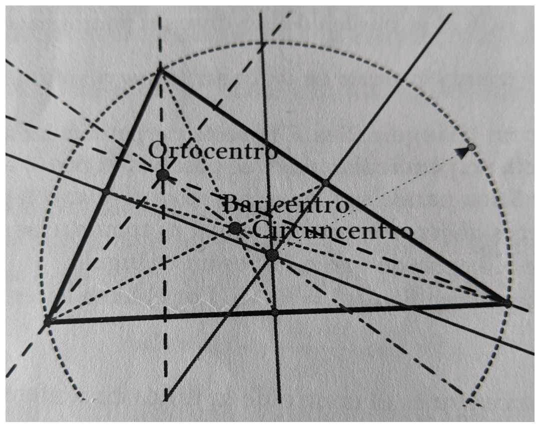
donde hemos tenido en cuenta que $\langle \vec{ac}, \vec{Ob}\rangle = \langle \vec{cb}, \vec{Oa}\rangle = 0$ al ser $O \in H_b \cap H_a$.

Al punto $O$ intersección de las tres alturas se le llama ortocentro del triángulo $T$.

5. Estamos en condiciones de enunciar y probar el *Teorema clásico de Euler*, que da información sobre la posición relativa de los tres puntos notables de un triángulo.

   **Teorema de Euler:** *Dado un triángulo $T = \{a, b, c\}$ en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$, el baricentro $B$, circuncentro $C$ y ortocentro $O$ de $T$ están alineados.*

   La recta que contiene a $B$, $C$ y $O$ se denomina *recta de Euler* de $T$.




   **Demost:** Llamemos $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a la homotecia con centro $B$ y razón $-1/2$. La clave es observar qur $h$ lleva cada vértice de $T$ en el punto medio de su lado opuesto. En efecto, como $B = a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})$, es claro que

$$h(a) = B - \frac{1}{2}\vec{Ba} = a + \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac}) = b + \frac{1}{2}\vec{bc},$$

   o en otras palabras, $h$ lleva el vértice $a$ en el punto medio de $[b, c]$, y el mismo razonamiento se aplica a los otros dos vértices.

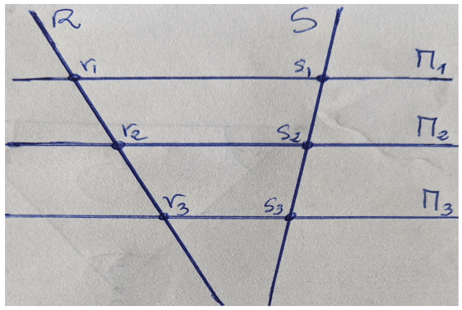
   Veamos que $h$ lleva las alturas de $T$ en las mediatrices de $T$. Como $a \in H_a$, el punto medio de $[b, c]$ (que no es sino $h(a)$) está contenido en $h(H_a)$. Pero sabemos que las homotecias preservan la dirección de las rectas, por lo que la recta $h(H_a)$ ha de ser perpendicular a la recta $\langle\{b, c\}\rangle$ al igual que $H_a$, esto es, por definición $h(H_a)$ ha de ser la mediatriz $R_a$ de $T$ asociada al vértice $a$. Análogamente se prueba que $h(H_b) = R_b$ y $h(H_c) = R_c$.

   Finalmente, como el ortocentro de $T$ es el cruce de las tres alturas $O = H_a \cap H_b \cap H_c$, deducimos que $h(O) = h(H_a) \cap h(H_b) \cap h(H_c) = R_a \cap R_b \cap R_c = C$. Pero un punto y su imagen por una homotecia están siempre alineados con el centro de la misma, por lo que $O$ y $C = h(O)$ están alineados con $B$ como queríamos demostrar.

6. Concluiremos el tema de espacios afínes euclidianos demostrando el *Teorema de Tales* (siglo VII A.C.). Nuestro enunciado será con un lenguaje más moderno.

   **Teorema de Tales:** *Sea $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \vec{\ })$ un espacio afín euclidiano de dimensión $\geq 2$. Sean $\Pi_1$, $\Pi_2$ y $\Pi_3$ tres hiperplanos en $\mathcal{A}$ paralelos y distintos dos a dos. Sean $R$ y $S$ dos rectas distintas en $\mathcal{A}$ no paralelas a los hiperplanos, y llamemos $r_i = \Pi_i \cap R$, $s_i = \Pi_i \cap S$, $i = 1, 2, 3$, a los correspondientes puntos de corte. Entonces*

$$\frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$




**Demost:** Llamemos $\pi_S\colon \mathcal{A} \to S \subset \mathcal{A}$ a la proyección afín sobre $S$ en la dirección $\vec{\Pi} := \vec{\Pi}_i$, $i = 1, 2, 3$ (no depende de $i$ porque son paralelos). Por la definición de esta proyección afín,

$$\pi_S(r_i) = S \cap (r_i + \vec{\Pi}) = S \cap \Pi_i = s_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como $r_1, r_2$ y $r_3$ están alineados, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ único y no nulo tal que $\overrightarrow{r_1r_3} = \lambda \, \overrightarrow{r_1r_2}$, y por tanto

$$d(r_1, r_3) = \| \overrightarrow{r_1r_3} \| = |\lambda| \| \overrightarrow{r_1r_2} \| = |\lambda| d(r_1, r_2).$$

Como $\pi_S$ es afin

$$\vec{\pi}_S(\overrightarrow{r_1r_3}) = \overrightarrow{\pi_S(r_1)\pi_S(r_3)} = \overrightarrow{s_1s_3} \quad \text{y} \quad \vec{\pi}_S(\overrightarrow{r_1r_2}) = \overrightarrow{\pi_S(r_1)\pi_S(r_2)} = \overrightarrow{s_1s_2},$$

de donde al ser $\vec{\pi}_S(\overrightarrow{r_1r_3}) = \lambda \vec{\pi}_S(\overrightarrow{r_1r_2})$ inferimos que $\overrightarrow{s_1s_3} = \lambda \, \overrightarrow{s_1s_2}$.
Así

$$d(s_1, s_3) = \| \overrightarrow{s_1s_3} \| = |\lambda| \| \overrightarrow{s_1s_2} \| = |\lambda| d(s_1, s_2),$$

por lo que

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

Esto concluye el teorema.