ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Doble grado en Informática y Matemáticas, 2º Curso.

Examen Final (enero 2019)

1. [2 puntos] Compacidad. Caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}^N$. Teorema de conservación de la compacidad.

2. [2 puntos] Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto conexo es un conjunto conexo.

b) La restricción a un conjunto acotado de un campo escalar C^1 definido en R^3 es una función lipschitziana.

c) El polinomio $p(x,y) = x^2 + 8xy + 3$ se puede escribir en las variables $x-1$, $y-2$ y admite la expresión $20 + 18(x-1) + 8(y-2) + (x-1)^2 + 8(x-1)(y-2)$.

d) Todo campo vectorial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de clase uno y tal que $\det(J_f(x)) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ es inyectivo.

¿Cuales de los conjuntos anteriores son compactos? ¿Y cuales son conexos? Justifica las respuestas.

3. [2 puntos] Estudia si el campo escalar definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin x & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$. Calcula el gradiente de f en todos los puntos en los que exista.

4. [2 puntos] Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu - yv + e^u \cos v = 1 \\ \\ xv + yu + e^u \sin v = 0 \end{cases}$$

define a u y v como funciones implícitas de x e y entorno al punto $(0,0)$ si imponemos que $u(0,0) = 0 = v(0,0)$. Calcula las derivadas parciales de primer orden de u y v en $(0,0)$. ¿Es el campo vectorial $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ un difeomorfismo en algún entorno de $(0,0)$?

5. [2 puntos] Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 3\right\}$$

Calcula la imagen de A mediante el campo escalar f dado por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y, ((x, y) \in A).$$