I. Ejercicios (Capítulo I. Espacios normados. Espacios métricos. Topología de $\mathbb{R}^N$.)

1. Consideramos la aplicación $(\ |\ ) : C([0,1]) \times C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ dt$. Prueba que la aplicación anterior es un producto escalar en $C([0,1])$, donde $C([0,1])$ es el espacio de las funciones reales continuas en $[0,1]$.

2. Si X es un espacio prehilbertiano, comprueba que se verifica la identidad del paralelogramo, esto es,
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \qquad \forall x, y \in X.$$

3. Prueba que la normas $\|\ \|_1$ en $\mathbb{R}^N$ para $N > 1$ y $\|\ \|_\infty$ en $C([0,1])$ no proceden de ningún producto escalar.

4. Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado. Prueba que se verifican las siguientes igualdades
$$B(a,r) = a + rB(0,1), \quad \forall a \in X, r \in \mathbb{R}^+,$$
$$rB(0,1) = B(0,r), \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$
Deduce que $B(0,1)$ determina la topología de un espacio normado.

5. Estudia para que pares de vectores de $\mathbb{R}^N$ se verifica la igualdad
$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

6. Justifica que la distancia usual de $\mathbb{R}$ induce en $\mathbb{N}$ la topología discreta (en la topología discreta todos los subconjuntos son abiertos).

7. Da ejemplos de un conjunto en $\mathbb{R}$ y otro en $\mathbb{R}^2$ que no sea abierto ni cerrado.

8. Da un ejemplo de una familia numerable de abiertos cuya intersección no sea un abierto.

9. Para los siguientes subconjuntos, describir la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación (en $\mathbb{R}^N$ se considera la topología usual):
$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}, \qquad B = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$
$$E = \mathbb{R}^2, \quad F = \overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x-a\|_2 \le r\} \subset \mathbb{R}^N \ \ (r \in \mathbb{R}^+),$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

10. Prueba que en un espacio normado X (no trivial) se verifica que la adherencia de $B(a,r)$ es $\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x-a\| \le r\}$, para cada elemento a en X y $r \in \mathbb{R}^+$.

    Justifica si en cualquier espacio métrico es cierta la misma propiedad.

11. Sea (E,d) un espacio métrico y $\varnothing \neq A \subset E$. Para cada $x \in E$ se define $d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$. Prueba que
$$\overline{A} = \{x \in E : d(x,A) = 0\}.$$

12. Justifica que para un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado, su supremo e ínfimo son valores adherentes al conjunto.

13. Sea (E,d) un espacio métrico. Se define $\rho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma
$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \quad (x, y \in E).$$
Comprueba que ρ es una distancia en E. Prueba además que para ambas distancias coinciden las sucesiones convergentes.

14. Prueba que en todo espacio métrico (E,d) la distancia es una función continua, esto es, se verifica
$$x_n, y_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}, x, y \in E, \{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \quad \Rightarrow \quad \{d(x_n, y_n)\} \to d(x,y).$$

15. Prueba que si (E,d) es un espacio métrico, $\varnothing \neq A \subset E$, entonces la aplicación $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_A(x) = d(x,A)$ es continua.
Indicación: Prueba que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y), \quad \forall x, y \in E$.

16. Si E y F son espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$ es continua, prueba que el conjunto $\{(x, f(x)) : x \in E\}$ es cerrado (en $E \times F$).

17. Si E es un espacios métrico y $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, prueba que la función dada por $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ para cada $x \in E$ es continua.

18. Prueba que la suma y el producto por escalares en un espacio normado son continuas. Como consecuencia, deduce que las traslaciones son aplicaciones continuas.

19. Sean A y B conjuntos no vacíos de un espacio normado X, se define $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Prueba que:
a) Si A es abierto entonces $A + B$ también es abierto.
b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es cerrado.

20. Estudia la existencia del límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones y calcula su valor cuando exista

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, **b)** $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + y^2}$, **c)** $f(x,y) = \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{|x| + |y|}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$, **e)** $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1+y)}{x + y}$, **f)** $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x + y}$,

21. Prueba que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} = 1.$$

22. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones definidas en A y la existencia del límite en el punto α:

    a) $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $\quad \alpha = (0,0)$, $\quad f(x,y) = \dfrac{e^{x^2} e^{y^2} - 1}{x^2 + y^2}$.

    b) $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\quad \alpha = (0,0)$, $\quad f(x,y) = \dfrac{1 - \cos(x+y)}{x^2 + y^2 + 2xy}$.

    c) $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\quad \alpha = (0,0)$, $\quad f(x,y) = \big(1 + xy\big)^{\frac{1}{xy}}$.

23. Prueba que todo compacto de $\mathbb{R}$ no vacío tiene máximo y mínimo.

24. Prueba que todo espacio métrico finito es compacto. En caso de que se considere la distancia discreta en un conjunto no vacío E, prueba todo subconjunto compacto de E es finito.

25. Prueba que en un espacio métrico todo subconjunto compacto es cerrado. El recíproco no es cierto. Sin embargo, todo subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto es compacto.

26. Un *homeomorfismo* es una aplicación biyectiva, continua y cuya inversa es continua. Prueba que una biyección continua entre dos espacios métricos compactos es un homeomorfismo.

27. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^N$ y $x = \lim\{x_n\}$. Prueba que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

28. Prueba que en todo espacio normado X se verifica que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}, \qquad \forall x, y \in X.$$

    Como consecuencia, justifica que la función $h(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ es continua en $X \backslash \{0\}$.

29. Prueba que si X es un espacio normado de dimensión mayor que 1, entonces $X \backslash \{0\}$ es un conjunto conexo. Deduce que $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ también es conexa.

30. Sea X un espacio normado (real) y $A \subset X$. Prueba que las siguientes condiciones son equivalentes:

    a) A es un conjunto acotado.

    b) Para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ en A y $\{t_n\} \to 0$ en $\mathbb{R}$, se verifica que $\{t_n a_n\} \to 0$.

    c) Para cualquier sucesión $\{a_n\}$ en A, se verifica que $\{\frac{a_n}{n}\} \to 0$.

    ¿Es cierto que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado es acotada si $\{\frac{x_n}{n}\} \to 0$?

31. Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un conjunto compacto. Prueba que para cada $x \in E$ existe (al menos) un elemento $k_x \in K$ que verifica que $d(x, K) = d(x, x_k)$.

32. Prueba que también se verifica el resultado anterior en caso de que $E = \mathbb{R}^N$, para la distancia euclídea y un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ cerrado (en lugar de un compacto).

33. Prueba que toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.

34. Prueba que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es acotada.

35. Prueba que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico que admita una subsucesión convergente es convergente.

    Nota: subsucesión = sucesión parcial

36. Prueba que todo espacio métrico compacto es completo. Prueba también que en un espacio métrico completo, todo subconjunto cerrado también es completo.

    ¿Es todo espacio métrico completo un conjunto compacto? Justifica la respuesta.

37. Justifica con un ejemplo que la imagen de una sucesión de Cauchy por una función continua puede no ser una sucesión de Cauchy. Prueba que toda función uniformemente continua preserva las sucesiones de Cauchy.

38. Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Prueba que equivalen las siguientes afirmaciones:

    a) T es continua.
    b) T es continua en 0.
    c) $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado.
    d) Existe un número real M tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

39. Para cada $y \in \mathbb{R}^N$, se considera la aplicación $T_y : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T_y(x) = (x|y)$. Calcula la norma de la aplicación lineal T_y cuando se consideran en $\mathbb{R}^N$ las normas $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$.