Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$ se consideran las siguientes rectas:

$R = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{matrix} x+z=-1 \\ x-y=1\end{matrix}\right\}$

Encuentra la recta perpendicular común a R y S, y calcula $\mathrm{dist}(R,S)$.

Resolución: $R = \left\{\begin{pmatrix}1+\lambda_1\\1\\-1+\lambda_1\end{pmatrix} : \lambda_1\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Resolviendo el sistema, $S = \left\{\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_2-1\\ -1-\lambda_2\end{pmatrix} : \lambda_2\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Busco $p\in R$ y $q\in S$ tales que $\vec{pq}\perp \vec{R}+\vec{T}$.

$p = \begin{pmatrix}1+\lambda_1\\1\\-1+\lambda_1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{pq} = \begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1-1\\ \lambda_2-2\\ -\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix}$

$q = \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_2-1\\ -1-\lambda_2\end{pmatrix}$

$\vec{pq}\perp\vec{R} \Leftrightarrow \vec{pq}\perp\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1-1\\ \lambda_2-2\\ -\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow (\lambda_2-\lambda_1-1)+(-\lambda_1-\lambda_2)$ $\boxed{\lambda_1 = -\frac{1}{2}}$

$\vec{pq}\perp\vec{S} \Leftrightarrow \vec{pq}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1-1\\ \lambda_2-2\\ -\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow (\lambda_2-\lambda_1-1)+(\lambda_2-2)+(\lambda_1+\lambda_2) =$
$3\lambda_2 - 3 = 0$ $\boxed{\lambda_2 =}$

Luego $p = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} \in R$ y $q = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\in S$.

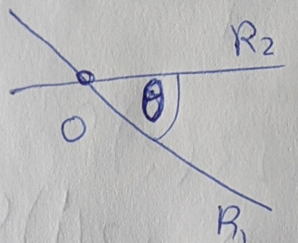
•) Como $\vec{pq}\perp\vec{R}+\vec{S} \Rightarrow \mathrm{dist}(R,S) = \|\vec{pq}\| = d(p,q) = +\sqrt{\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\-3/2\end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{5}{2}+1}$

•) La perpendicular común en este caso existe y es única (ya que R y S se cruzan), y es la recta $T = \langle\{p,q\}\rangle = \begin{pmatrix}3/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\-3/2\end{pmatrix}\right\}$

Reflexiona: En un espacio afín euclidiano tridimensional, siempre existen rectas perpendiculares a dos rectas dadas distintas y son únicas si y solo si las dos rectas dadas son secantes o se cruzan.

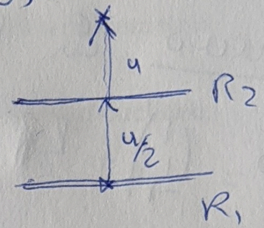
Observa ....

·) La composición de dos simetrías ortogonales en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ es un giro si las rectas respecto a las que simetrizamos no son paralelas (el centro del giro es el punto de corte) y una traslación si son paralelas.



$\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}$ giro de centro O y ángulo 2θ

$\theta = \measuredangle(R_1, R_2)$



$\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2} = \tau_u$, donde $u \perp \vec{R}_1 = \vec{R}_2$

·) Análogamente, la composición de 2 simetrías deslizantes en $\mathbb{R}^2$ es un giro ó una traslación...

·) La composición de un giro y una simetría ortogonal en $\mathbb{R}^2$ ha de ser un movimiento inverso, luego una simetría ortogonal o una simetría (ortogonal) deslizante.

En el caso de que el centro del giro esté contenido en la recta respecto a la que simetrizamos, esa composición es otra simetría ortogonal pues tiene puntos fijos (el centro del giro es fijo !!). En otro caso es una simetría deslizante.

·) La composición de un giro y una simetría deslizante en $\mathbb{R}^2$, de forma análoga, es una simetría deslizante ó una simetría dependiendo de que no haya ó sí haya puntos fijos.

Comprueba con un ejemplo que pueden darse los dos casos..