30/10/2020

- Aplicación continua $f:(\mathbb{X},T)\to(Y,T')$. si $f^{-1}(U')\in T$ $\forall U'\in T'$
- Aplicación continua en $x_0\in\mathbb{X}$. $f:(\mathbb{X},T)\to(Y,T')$ cont. en $x_0\in\mathbb{X}$ si $\forall V\in N'_{f(x_0)}$, $\exists U\in N_{x_0}$ tal que $f(U)\subset V$

<u>Propiedades</u>: Sean $(\mathbb{X},T)$, (Y,T') dos e. top., $f:\mathbb{X}\to Y$ aplicación
Son equivalentes:

1. f continua
2. $f^{-1}(C')$ es cerrado en $(\mathbb{X},T)$ para todo $C'\subset Y$ cerrado en (Y,T') $(f^{-1}(C')\in C_T \ \forall C'\in C_{T'})$
3. $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ para todo $A\subset\mathbb{X}$.

<u>Dem</u>: $(1)\Leftrightarrow(2)$, $(1)\Leftrightarrow(3)$

1) ⇒ 2) Sea $C'\in C_{T'}$ $\Rightarrow Y\setminus C'\in T' \underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(Y\setminus C')}_{=\mathbb{X}\setminus f^{-1}(C')}\in T \Rightarrow f^{-1}(C')\in C_T$

2) ⇒ 1) exactamente igual cambiando cerrado por abierto.

1) ⇒ 3) Sea $y\in f(\overline{A}) \Rightarrow \exists x\in\overline{A}$ tal que $y=f(x)$. Queremos probar que $y\in\overline{f(A)}$. Tomamos $V\in N'_y$. Como f es continua en x, como $V\in N'_{f(x)}$ existe $U\in N_x$ tal que $f(U)\subset V$. Como $x\in\overline{A}$, $U\cap A\neq\emptyset$. Por tanto $f(U\cap A)\neq\emptyset$.

$$\emptyset\neq f(U\cap A)\subset f(U)\cap f(A)\subset V\cap f(A).$$

$(z\in f(U\cap A)\Rightarrow z=f(w)\ w\in U\cap A\Rightarrow z=f(w)\in f(U),\ z=f(w)\in f(A)$
$\Rightarrow z\in f(U)\cap f(A))$

Hemos probado que $\forall V \in N_y'$, $V \cap f(A) \neq \phi \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$. Entonces $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $U' \in T'$. Veamos que $f^{-1}(U') \in T$. Para ello vamos a ver que $X \setminus f^{-1}(U') \in G_T$. Sea $A = X \setminus f^{-1}(U')$. Por hipótesis $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

$$f(\bar{A}) = f(\overline{\underbrace{X \setminus f^{-1}(U')}}) = f(\overline{f^{-1}(Y \setminus U')}) \subset \overline{Y \setminus U'} = Y \setminus U'$$

U' abto

$$\Rightarrow f(\bar{A}) \subset Y \setminus U'$$

$$\Rightarrow f(\overline{\underbrace{X \setminus f^{-1}(U')}}) \subset Y \setminus U' \Rightarrow \overline{X \setminus f^{-1}(U')} \subset f^{-1}(Y \setminus U') = X \setminus f^{-1}(U')$$

$\supset$

Por tanto: $\overline{X \setminus f^{-1}(U')} = X \setminus f^{-1}(U') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(U') \in G_T \Rightarrow f^{-1}(U') \in T$ ∎

Ejemplos: 1. (X,T), (Y,T') espacios topológicos. $f: X \to Y$ aplicación

- Si $T' = T_t \Rightarrow f$ continua siempre

$$T' = T_t = \{\phi, Y\} \Rightarrow f^{-1}(\phi) = \phi,\ f^{-1}(Y) = X,\quad \phi, X \in T$$

- Si $T = T_D \Rightarrow f$ continua siempre

$$\underline{U' \in T'} \Rightarrow \underline{f^{-1}(U')} \in P(X) = T_D$$

2. $Id: (X,T) \to (X,T')$ continua si y solo si $\underline{T' \subset T}$ (T' es menos fina que T). Si $\underline{U \in T'} \Rightarrow \underset{\underline{U}}{\underset{\shortparallel}{Id^{-1}(U)}} \in \underline{T}$