Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo II: FUNCIONES DIFERENCIABLES. APLICACIONES

Tema 9: CAMPOS VECTORIALES DIFERENCIABLES

María D. Acosta

Universidad de Granada

5 -11-2020

Campos vectoriales

Recordamos que un campo vectorial escalar es una aplicación definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ y con valores en $\mathbb{R}^M$.

Matriz jacobiana

Si $A \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial. Si $a \in \mathring{A}$ y cada componente de f tiene gradiente en a, diremos que f tiene matriz jacobiana en a. En tal caso, notaremos por $J_f(a)$ a la matriz jacobiana que viene dada por

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \vdots \\ \nabla f_M(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_j f_1(a) & \dots & D_N f_1(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_k(a) & \dots & D_j f_k(a) & \dots & D_N f_k(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_M(a) & \dots & D_j f_M(a) & \dots & D_N f_M(a) \end{pmatrix}.$$

Diferencial y matriz jacobiana

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Si f es diferenciable en a, entonces f tiene matriz jacobiana en a y además

$$Df(a)(x) = (J_f(a)x^t)^t, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

es decir, la matriz $J_f(a)$ es la matriz de orden $M \times N$ asociada a $Df(a)$.

Demostración: Sabemos que si f es diferenciable en a, entonces f_k es diferenciable en a para cada $1 \leq k \leq M$. Luego f_k tiene gradiente, para cada función componente de f, luego f tiene matriz jacobiana en a. Probaremos ahora que $Df(a)(x) = (J_f(a)x^t)^t$. para cada vector $x \in \mathbb{R}^N$. Si $x \in \mathbb{R}^N$, tenemos que

$$Df(a)(x) = (Df_1(a)(x), Df_2(a)(x), \ldots, Df_k(a)(x), \ldots, Df_M(a)(x)) =$$

$$(< \nabla f_1(a), x >, < \nabla f_2(a), x >, \ldots, < \nabla f_k(a), x >, \ldots, < \nabla f_M(a), x >).$$

Por definición del producto de matrices, las componentes de $Df(a)(x)$ coinciden con las del producto $J_f(a)x^t$. $\square$

Regla de la cadena para campos vectoriales

Proposición

Sean $A \subset \mathbb{R}^N, B \subset \mathbb{R}^M, f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^P$. Supongamos que f es diferenciable en a y que g es diferenciable en $f(a)$. Entonces se verifica que

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a).$$

Por tanto

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \qquad (1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq P).$$

Demostración: La igualdad

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a)$$

es consecuencia de la identidad

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

y de que la identificación de aplicaciones lineales y matrices transforma composición de aplicaciones en producto de matrices.

Diferencial y matriz jacobiana

Recordamos que

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_N}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

Luego en la entrada ij de la matriz jacobiana aparece $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Dado que

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a),$$

entonces

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = < \text{fila } i\text{-ésima de } Jg(f(a)), \text{columna } j\text{-ésima de } Jf(a) >=$$

$$< \Big(\frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(a)), \dots, \frac{\partial g_i}{\partial y_M}(f(a))\Big), \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(a)\Big) >=$$

Campos vectoriales diferenciables

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a),$$

para $1 \leq i \leq P$ y $1 \leq j \leq N$. $\square$

Regla de la cadena

Ejemplo

Consideramos las funciones

$$g(u,v) := u^2 + 3uv + 4v^2 \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

$$u(x,y) = 2 - 2xy^2, \qquad v(x,y) = 1 + x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

Calcular $\frac{\partial g}{\partial x}$.
En este caso, la composición que se considera es

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) \mapsto g(u(x,y)), v(x,y))$$

Esto es,

$$(x,y) \mapsto (2 - 2xy^2, 1 + x) \mapsto g(2 - 2xy^2, 1 + x) := h(x,y)$$

Usando la regla de la cadena en derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (2u + 3v)(-2y^2) + (3u + 8v) \cdot 1.$$

Teorema del valor medio

A continuación probaremos una versión del Teorema del valor medio para campos vectoriales. Empezamos con dos ejemplos que muestran que la versión que hemos dado para campos escalares no es cierta.

Ejemplos

1) Consideramos el campo vectorial dado por

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

que no es inyectivo, ya que, por ejemplo,

$$f(2\pi) = f(0) = (1, 0).$$

Sin embargo,

$$f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)),$$

luego $f'(t) \neq 0$, por tanto no se verifica que

$$f(2\pi) - f(0) = 0 = f'(c)2\pi.$$

Teorema del valor medio para campos escalares

2) Sea f el campo vectorial dado por

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)), \qquad ((x,y)) \in \mathbb{R}^2),$$

que no es inyectivo, ya que, por ejemplo,

$$f(0,2\pi) = f(0,0) = (1,0).$$

Es claro que f es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y además

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Luego $\det\left(Jf(x,y)\right) = e^x\left(cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = e^x \neq 0$.
Como consecuencia, tampoco puede darse la igualdad

$$f(0,2\pi) - f(0,0) = (0,0) = Df(x,y)(0,2\pi).$$

Sin embargo, probaremos que el corolario del Teorema del valor medio sí es cierto para campos vectoriales.

Teorema del valor medio para campos vectoriales

Teorema del valor medio

Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$ verificando que $a \neq b$ y que $[a, b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$ y $]a, b[\subset \mathring{A}$. Si $f : A \to \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial continuo en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup\{\|Df(x)\| : x \in]a, b[\},$$

donde se considera en $\mathbb{R}^M$ la norma euclídea.

Lema

Si $x \in \mathbb{R}^M$ existe $y \in \mathbb{R}^M$ tal que $\|y\|_2 = 1$ y $< x, y >= \|x\|_2$.

Demostración: Si $x = 0$ el resultado es trivial.

En otro caso, basta tomar $y = \dfrac{x}{\|x\|_2}$. Es claro que $\|y\|_2 = 1$ y además

$$< x, y >= \left\langle x, \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|_2} < x, x >= \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_2^2 = \|x\|_2.$$

$\square$

Diferencial y matriz jacobiana

Demostración del Teorema del valor medio: Por el lema anterior existe $y \in \mathbb{R}^M$ tal que $\|y_0\|_2 = 1$ y verifica

$$< f(b) - f(a), y_0 >= \|f(b) - f(a)\|_2. \qquad (1)$$

Si $L : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación dada por

$$L(y) =< y, y_0 >, \qquad (y \in \mathbb{R}^M),$$

L es lineal y además $\|L\| = \|y_0\|_2 = 1$, si consideramos en $\mathbb{R}^M$ la norma euclídea. Por ser L lineal (y continua), es diferenciable y además $DL = L$. El campo escalar $g : A \longrightarrow R$ dado por

$$g(x) = (L \circ f)(x) =< f(x), y_0 >, \qquad (x \in A),$$

verifica las hipótesis del Teorema del valor medio en el segmento $[a, b]$ gracias a la regla de la cadena, luego existe $c \in]a, b[$ tal que

$$g(b) - g(a) = Dg(c)(b - a). \qquad (2)$$

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$Dg(c)(b-a) = D(L \circ f)(c)(b-a) = \big(DL(f(c)) \circ Df(c)\big)(b-a) =$$

$$L\big(Df(c)(b-a)\big) =< Df(c)(b-a), y_0 > .$$

Campos vectoriales diferenciables

Usando (1) y sustituyendo en (2) obtenemos

$$\|f(b)-f(a)\|_2 =< f(b)-f(a), y_0 >=< Df(c)(b-a), y_0 > .$$

Acotando, dado que $\|y_0\|_2 = 1$, obtenemos entonces

$$\|f(b)-f(a)\|_2 \leq \|Df(c)(b-a)\|_2 \leq \|Df(c)\| \, \|(b-a)\| \leq$$

$$\|b-a\| \sup\{\|Df(x)\| : x \in]a,b[\}.$$

$\square$

Corolario

Sean A un abierto convexo de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial diferenciable tal que existe un número real M que verifica

$$\|Df(x)\| \leq M, \ \forall x \in A,$$

entonces f es lipschitziano con constante de Lipschitz menor o igual que M.

Campos vectoriales diferenciables

Demostración: Dados $x, y \in A$, comprobamos que

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M\|y - x\|,$$

desigualdad que es trivial si $x = y$.
En otro caso podemos aplicar el Teorema del valor medio a f en el segmento $[x, y] \subset A$, luego

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq \|y - x\| \sup\{\|Df(z)\| : \ z \in]x, y[\} \leq M\|y - x\|.$$

$\square$

El siguiente resultado se deduce del análogo para campos escalares.

Corolario

Sean A un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial diferenciable tal que

$$Df(x) = 0, \ \forall x \in A,$$

entonces f es constante.

Teorema del valor medio para campos vectoriales

En caso de que consideremos la norma euclídea en $\mathbb{R}^N$ existe una fórmula para calcular la norma de un operador $T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Para obtener el resultado siguiente usaremos una cota de la norma de un operador, que es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Corolario

Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $a \neq b$ tales que $[a, b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : A \to \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial continuo en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, entonces

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|b - a\|_2 \ \sup\left\{ \sqrt{\sum_{i,j} D_j f_i(x)^2} : \ x \in]a, b[\right\}.$$

Demostración: Para cada $x \in]a, b[$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\|Df(x)\| := \text{máx}\ \{\|Df(x)(y)\|_2 : \|y\|_2 = 1\} =$$

$$\text{máx}\left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \big(\nabla f_i(x)|y\big)^2} : \|y\|_2 = 1 \right\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \|\nabla f_i(x)\|_2^2} = \sqrt{\sum_{i,j} D_j f_i(x)^2}\,.$$

Teorema del valor medio para campos vectoriales

El enunciado es una consecuencia inmediata del Teorema del valor medio. $\square$

Hay casos concretos en los que se puede mejorar la estimación de la norma usada en el resultado anterior. Damos un ejemplo sencillo de esta situación.

Proposición

Sea $T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y supongamos que T es un operador diagonal, esto es, su matriz en términos de la base canónica es diagonal.
Entonces

$$\|T\| = \text{máx}\{|\lambda_i| : i \in I\},$$

donde $\{\lambda_i : i \in I\}$ es el conjunto de valores propios de T.
La fórmula anterior es válida si se consideran tanto en el dominio como en la imagen, la norma euclídea, o la norma de la suma ó bien la norma del máximo.

Demostración: ejercicio

Teorema del valor medio para campos vectoriales

Ejemplo

Prueba que el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(x,y) = \left(\sin(x+y), \sqrt{1+x^2+y^2}\right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

es una aplicación lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que $\sqrt{3}$.

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{pmatrix},$$

luego

$$\sum_{i,j} D_j f_i(x,y)^2 = 2\ \cos^2(x+y) + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq 3.$$

Basta usar el último corolario que se enunció para obtener el resultado.