Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo I: ESTRUCTURA EUCLÍDEA Y TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^N$

Tema 6: CONTINUIDAD DE APLICACIONES LINEALES

María D. Acosta

Universidad de Granada

25-10-2020

Aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^N$

Proposición

Toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$ es continua.

Demostración:

Por la caracterización de funciones continuas valuadas en $\mathbb{R}^M$, basta probar que si $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es lineal, cada componente de T es continua.

Sea $1 \leq k \leq M$ y $T_k = P_k \circ T$. Como P_k es lineal, entonces T_k también lo es.

Sabemos que las proyecciones canónicas en $\mathbb{R}^N$ son continuas. Por la estabilidad algebraica de las funciones continuas, entonces T_k es continua, por ser combinación lineal de las proyecciones en $\mathbb{R}^N$. $\square$

Aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^N$

Observación: Todo espacio normado X de dimensión N es isométrico a $\mathbb{R}^N$, dotado de una conveniente norma. Es decir, existe una aplicación biyectiva y lineal $\Phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow X$ tal que

$$\|\Phi(y)\| = \|| y \||, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\| \ \|$ es la norma de X y $\|| \ \||$ es la norma en $\mathbb{R}^N$.
Basta elegir una aplicación biyectiva y lineal Φ de $\mathbb{R}^N$ en X y definir la aplicaciónn $\|| \ \||$ en $\mathbb{R}^N$ dada por

$$\|| y \|| = \|\Phi(y)\|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

Como Φ es lineal y biyectiva y $\| \ \|$ es una norma en X, entonces es inmediato comprobar que $\|| \ \||$ es ua norma en $\mathbb{R}^N$ y para esa norma Φ es una isometría.
Como consecuencia del Teorema de Hausdorff y la observación anterior, todo espacio vectorial finito-dimensional tiene una única topología asociada a una norma.

Continuidad de aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^N$

Corolario

Si X es un espacio normado, toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^N$ en X es continua.

Notemos que si $T: \ R^N \longrightarrow X$ es lineal, entonces $T(X)$, dotado de la norma inducida por la de X es un espacio normado de dimensión finita, luego isométrico a $\mathbb{R}^M$, para conveniente M dotado de una norma. Además sabemos que las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^N$ en R^M son continuas.

En realidad, usando el mismo argumento en el dominio puede probarse el siguiente resultado más general.

Corolario

Sean X e Y espacios normados y supongamos que X tiene dimensión finita. Entonces toda aplicación lineal de X en Y es continua.

Continuidad de aplicaciones lineales

Más adelante veremos un ejemplo sencillo que prueba que el resultado anterior no es cierto en general para espacios infinito-dimensionales.

El siguiente resultado caracteriza la continuidad de aplicaciones lineales. En lo que sigue, si X es un espacio normado, notaremos por B_X y S_X a los conjuntos dados por

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \qquad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Proposición

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

1) T es continua.
2) T es continua en 0.
3) T está acotada en la bola unidad, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(x)\| \leq M, \forall x \in B_X$.
4) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que verifica

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Continuidad de aplicaciones lineales

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Trivial
2) $\Rightarrow$ 3) Como T es continua en 0

$$\exists r > 0 : \|x\| < r \Rightarrow \|T(x)\| < 1.$$

Sea $x \in B_X \backslash \{0\}$, entonces $\left\| \dfrac{r}{2} \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \dfrac{r}{2} < r$, luego $\left\| T\left(\dfrac{r}{2} \dfrac{x}{\|x\|} \right) \right\| < 1.$
Usando que T es lineal y la homogeneidad de la norma de Y obtenemos

$$\|T(x)\| \leq \frac{2}{r}\|x\| \leq \frac{2}{r},$$

desigualdad que es cierta también para $x = 0$. Hemos probado que T está acotada en la bola unidad.

Continuidad de aplicaciones lineales

3) $\Rightarrow$ 4) Suponemos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M, \qquad \forall x \in B_X.$$

Sea $x \in X \backslash \{0\}$, entonces $\dfrac{x}{\|x\|} \in S_X$, luego

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M.$$

Usando de nuevo la linealidad de T y la homogeneidad de la norma de Y deducimos que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|,$$

desigualdad que es trivial para $x = 0$. Hemos probado que se verifica 3).
4) $\Rightarrow$ 1) Por hipótesis, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Como T es lineal, tenemos entonces que

$$\|T(x) - T(z)\| = \|T(x - z)\| \leq K\|x - z\|, \qquad \forall x, z \in X.$$

Continuidad de aplicaciones lineales

Hemos probado que T es lipschitziana, luego continua. $\square$

Como consecuencia de la prueba se obtiene que para aplicaciones lineales, la continuidad y la continuidad uniforme coinciden.

Continuidad de aplicaciones lineales

Es inmediato comprobar que si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces

$$\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} =$$

$$\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M, \forall x \in B_X\}.$$

Por tanto, tomando ínfimos en los conjuntos anteriores se tiene

$$\text{ínf}\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}.$$

Definimos $\|T\|$ como la constante anterior.

Además si $X \neq \{0\}$, y $x \in B_X \backslash \{0\}$, entonces

$$\|T(x)\| = \left\| \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|.$$

Como $\dfrac{x}{\|x\|} \in S_X$, como consecuencia de la desigualdad anterior tenemos

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\} = \sup\{\|T(x)\| : x \in S_X\}.$$

Continuidad de aplicaciones lineales

Dado que

$$\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} =$$

$$\{M \in \mathbb{R} : \|T(x) - T(z)\| \leq M\|x - z\|, \forall x, z \in X\},$$

entonces $\|T\|$ coincide con la constante de Lipschitz de T.
Además es inmediato comprobar que

$$\text{ínf}\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} =$$

$$\text{mín}\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}.$$

Para comprobar la igualdad anterior, basta usar que $\|T\| = \text{lím}\{M_n\}$ y se verifica que

$$\|T(x)\| \leq M_n\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Fijado $x \in X$, tomando límite en la desigualdad anterior ($n \to \infty$), se obtiene que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Continuidad de aplicaciones lineales

Es inmediato probar que la aplicación $T \mapsto \|T\|$ es una norma en $L(X, Y)$. Es la llamada **norma de operadores** en $L(X, Y)$.

Continuidad de aplicaciones lineales

A continuación daremos un ejemplo que prueba que en espacios normados infinito-dimensionales puede haber aplicaciones lineales que no son continuas.

Ejemplo

Sea c_{00} el espacio dado por

$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}, x(k) = 0, \forall k \geq N\}.$$

Es claro que el conjunto anterior es un espacio vectorial y la aplicación dada por

$$\|x\| = \text{máx}\{|x(k)| : k \in \mathbb{N}\}$$

es una norma en c_{00}.
La aplicación $f : c_{00} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)$$

está bien definida en c_{00} y es lineal.

Conjuntos conexos

Sin embargo, no es continua, ya que, para cada natural n, el elemento u_n dado por

$$u_n(k) = 1 \;\text{ si }\; k \leq n \quad \text{y} \quad u_n(k) = 0 \;\text{ si }\; k > n,$$

pertenece a c_{00}, verifica que $\|u_n\| = 1$ y $f(u_n) = n$, para cada natural n. Como f no está acotada en la bola unidad de c_{00}, no es continua. $\square$

Continuidad de aplicaciones lineales

Por último, probaremos el siguiente resultado sobre la norma de la composición de dos aplicaciones lineales y continuas.

Proposición

Sean X, Y, Z espacios normados. Si $S \in L(X,Y)$ y $T \in L(Y,Z)$, entonces $T \circ S \in L(X,Z)$ y además

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\|.$$

Demostración: Si $x \in X$ se verifica que

$$\|(T \circ S)(x)\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\| \, \|S(x)\| \leq \|T\| \, \|S\| \, \|x\|.$$

Hemos probado que

$$\|(T \circ S)(x)\| \leq \|T\| \, \|S\| \, \|x\|.$$

Como $\|T \circ S\| = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} : \|(T \circ S)(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}$, obtenemos que

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\|.$$