Juan Valentín Guerrero Cano 45338112Y

① Dadas dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ en un mismo espacio vectorial X, son equivalentes si $\exists\, m>0$ y $M>0$ que verifiquen:

$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$$

Dos normas equivalentes en el espacio vectorial X generan la misma topología.

Teorema de Hausdorff

En $\mathbb{R}^n$ dos normas son equivalentes sean cuáles sean dichas normas

② $A \subset \mathbb{R}^2$ $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0,\ x^2+y^2\leq 1\} \cup \{(3,3)\}$

$\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0,\ x^2+y^2<1\}$

$\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\} \cup \{(3,3)\}$

$A' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 0 \quad x^2+y\leq 1\}$

$Fr(A) = \bar{A}\setminus\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0,\ x^2+y^2=1\} \cup \{(3,3)\}$

¿Es A convexo?

A no es convexo porque $\exists\,(3,3)\in A$:

$\forall (x,y)\in A : (x,y)\neq(3,3) \quad [(x,y),(3,3)] \not\subset A$

ya que (3,3) claramente es un punto de acumulación.

Juan Valentín Gorrero Cano 45338112Y

¿Es A convexo?

A si es conexo porque $\exists$ una partición de A en dos abiertos relativos y no triviales,

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0, x^2+y^2 \leq 1\}$ y $\{(3,3)\}$

3 a) $f(x,y) = x \sin\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos(t) \\ y = \rho \cdot \sin(t) \end{array}\right\} \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \cos(t) \cdot \sin\left(\frac{\rho \cdot \cos(t)}{\rho \cdot \sin(t)}\right) = 0$$

$\hookrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad t = 2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{\rho + x}\right)$

$\sin(t)$ no se anula ya que $y \neq 0 \Rightarrow t \neq 0$.

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Juan Valentín Guerrero Cano 45338112P

3

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x+y}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x+y \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x+y} \qquad \begin{cases} x = \rho \cdot \cos(t) \\ y = \rho \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} T = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{\rho + x}\right) \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{matrix}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cdot \cos^2(t) \cdot \rho \sin(T)}{\rho \cos(t) + \rho \cdot \sin(t)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t)}{\rho\,(\cos(t) + \sin(t))} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x+y} = 0.$$

(4) Juan Valentín Guerrero Caro 49338112Y

d) Si $K \subset E$ es compacto $\Rightarrow f(K)$ es acotado

Verdadero: Por el Teorema de la conservación de la compacidad, al ser K compacto y f continua $\Rightarrow$ f(K) es compacto $\Rightarrow$ f(K) es acotado

b) Si $O \subset E$ es abierto $\Rightarrow f(O)$ es abierto

FALSO:

Contra Ejemplo: $\mathbb{R}$ abierto. $f(x) = x^4+1 \to$ continua

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$$
$$x \longmapsto x^4+1$$

La imagen de f es $[1, +\infty[$ que es cerrado pues $\mathbb{R} \setminus [1, +\infty[$ es abierto