GEOMETRÍA III - Doble Grado IIM

Actividad 4 - Tema 3 (Hipercuádricas)

1. Recuerda y repasa los siguientes resultados sobre diagonalización de matrices estudiados en cursos anteriores...

   - Una matriz $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (espacio de las matrices cuadradas de orden n) se dice *diagonal* si $d_{i,j} = 0$, $i \neq j$. Si $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ($k \leq n$) son números reales distintos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^k n_i = n$, denotaremos por $D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big)$ a la matriz diagonal $(d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ con entradas en la diagonal a_1 con multiplicidad n_1, $\ldots$, a_k con multiplicidad n_k:

   $$(d_{1,1}, \ldots, d_{n,n}) = \big((a_1, \overset{n_1}{\ldots}, a_1), \ldots, (a_i, \overset{n_i}{\ldots}, a_i), \ldots, (a_k, \overset{n_k}{\ldots}, a_k)\big).$$

   - Dada una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuadrada de orden n, un número $a \in \mathbb{R}$ se dice un valor propio de C si existe $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $C \cdot y = ay$. A tal vector $y \in \mathbb{R}^n$ se le denominará vector propio del valor propio a. Si a es un valor propio de C, al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

   $$V_a = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon C \cdot y = a\, y\}$$

   se le llamará subespacio propio de a.

   Los valores propios de C coinciden con las raíces del polinomio característico

   $$P_C(x) = \det\Big(C - x \cdot \mathrm{I}_n\Big)$$

   de C. La *multiplicidad algebraica* de un valor propio a de C es, por definición, la multiplicidad $m_a \geq 1$ de a como raiz de $P_C(x)$. Asimismo, el entero $\dim V_a \geq 1$ es conocido como la *multiplicidad geométrica* de a. No es difícil ver que $\dim V_a \leq m_a$ para todo valor propio a de C.

   Dos matrices C_1 y C_2 se dicen *semejantes* si existe $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ (espacio de las matrices regulares) tal que $Q^{-1} C_1 Q = C_2$. La relación binaria de semejanza en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es de equivalencia. Una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *diagonalizable por semejanza* si existe $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $Q^{-1} C Q$ es diagonal. No es difícil probar que:

   Teorema 1: *Una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable por semejanza si y solo si*

   $$\sum_{i=1}^{k} \dim V_{a_i} = n,$$

   donde $a_1, \ldots, a_k$ son sus valores propios. De forma equivalente, si $P_C(x)$ descompone en $\mathbb{R}$ y $m_a = \dim V_a$ para todo valor propio a de C.

   Date cuenta que, como consecuencia del Teorema 1, dos matrices C_1 y C_2 diagonalizables son semejantes si y solo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

Nota 1: *Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable por semejanza, el procedimiento estándar para su diagonalización es el siguiente:*

Resolviendo la ecuación $P_C(x) = 0$ se calculan los distintos valores propios $a_1, \ldots, a_k$ de C, y para cada a_i se determina una base $B_i = \{u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i\}$ del subespacio propio V_{a_i}, donde hemos escrito $n_i = \dim V_{a_i}$.

Finalmente se forma la matriz $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ que distribuye por columnas los vectores de la base ordenada

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_k = \{u_1^1 \ldots, u_{n_1}^1, \ldots, u_1^k, \ldots, u_{n_i}^k\}$$

de $\mathbb{R}^n$, en la que claramente $Q^{-1}CQ = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big)$.

- Recordemos que dos matrices C_1 y C_2 se dicen *congruentes* si existe $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ (espacio de las matrices regulares) tal que $Q^t C_1 Q = C_2$. La relación binaria de congruencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es de equivalencia. Una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *diagonalizable por congruencia* si existe $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ matriz regular tal que $Q^t C Q$ es diagonal.

  La diagonalización por congruencia es natural en el conjunto de las matrices simétricas $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, esto es, de las matrices $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $C = C^t$. En este contexto disponemos del siguiente resultado:

  Teorema 2: *Dada $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, los siguientes resultados son ciertos:*

  (a) *Si a es valor propio de C y $v \in V_a^\perp$ (ortogonal respecto al producto escalar euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathbb{R}^n$) entonces $C \cdot v \in V_a^\perp$.*

  (b) *Si a_1, a_2 son valores propios distintos de C entonces $V_{a_1} \perp V_{a_2}$.*

  (c) *C es diagonalizable por semejanza.*

  La prueba de este teorema no es trivial, mira tus apuntes de Geometría II. Enunciemos el resultado fundamental de la diagonalización por congruencia.

  Teorema 3: [Sylvester, diagonalización por congruencia] *Dada una matriz $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, existe una matriz $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ (espacio de las matrices regulares de orden n) tal que*

  $$Q^t \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

  donde $c, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c + s + t = n$. (Puede ocurrir que alguno de esos enteros sea nulo, en cuyo caso no aparece reflejado en la matriz diagonal.) Además:

  - *Los números c, s, t son únicos en el sentido de que C solo puede ser congruente a una única matriz diagonal con 1, -1 y 0 ordenados en la diagonal: si $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ y $D\big(1^{(t')}, (-1)^{(s')}, 0^{(c')}\big)$ son congruentes entonces $c = c', s = s', t = t'$. A la matriz $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ se la llama* matriz o forma de Sylvester *de C.*
  - *Los números t y s de la forma de Sylvester de una matriz simétrica C coinciden con el número de raíces $+$ y $-$ de su polinomio característico $P_C(x)$, y el número c con la multiplicidad de 0 como raíz de $P_C(x)$.*

  Como consecuencia del Teorema 3, dos matrices C_1 y C_2 son congruentes si y solo si tienen la misma forma de Sylvester.

  Nota 2: *Si $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, un procedimiento para realizar la diagonalización por congruencia que nos lleve a su forma de Sylvester es el siguiente:*

Por el Teorema 2-(c) la matriz C es diagonalizable por semejanza. Por el Teorema 1, el polinomio $P_C(x)$ descompone sobre $\mathbb{R}$ y podemos calcular sus distintas raíces $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ (valores propios de C). Como en la Nota 1, para cada a_i buscamos una base $B_i = \{u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i\}$ de V_{a_i} (escribimos $n_i = \dim V_{a_i}$).

Para cada i, sometemos la base B_i al procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt para el producto escalar de $\mathbb{R}^n$, y generamos una $B_i' = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$ base ortonormal de V_{a_i} para cada i.

En los subespacios V_{a_i} con $a_i \neq 0$, *normalizamos* cada v_j^i de B_i' multiplicando por el número real $\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$, formando la nueva base $B_i'' = \{\frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_1^i, \ldots \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_{n_i}^i\}$ de V_{a_i}. Este paso *se omite para el subespacio propio* V_0 si 0 fuese uno de los valores propios, dejando inalterada la base ortonormal que nos proporcionó Gram-Schmidt en al paso anterior: si $a_i = 0$ para algún i, escribimos $B_i'' = B_i'$.

Finalmente construimos la matriz Q que distribuye por columnas los vectores de la base ordenada $B = B_1'' \cup \ldots \cup B_k''$ de $\mathbb{R}^n$. De las propiedades (a) y (b) no es difícil deducir que B es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y $Q^t \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$, si previamente hemos tenido la precaución de ordenar la lista de autovalores $a_1, \ldots, a_k$ de forma que aparezcan primero los positivos, después los negativos, y por último el 0.

En lo que sigue $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \vec{\ })$ será un espacio afín con $\dim \mathcal{A} = n$.

2. Un subconjunto $H \subset \mathcal{A}$ es una *hipercuádrica* en $\mathcal{A}$ si existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ y una matriz simétrica $\hat{C} \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ *no nula* de forma que

$$H = \{p \in \mathcal{A} \colon \big(1, {p_{\mathcal{R}}}^t\big) \cdot \hat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0\}, \tag{1}$$

donde como siempre

$$p_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

denota las coordenadas del punto p en $\mathcal{R}$ escritas con *notación columna*. La matriz $\hat{C}$ la llamaremos *la matriz de H en el sistema de referencia $\mathcal{R}$,* y la denotaremos por $M_{\mathcal{R}}(H)$.

Escribamos

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

donde

$$a \in \mathbb{R}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{y} \quad C = (c_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Referiremos a la matriz C como la *matriz del núcleo lineal* de H, y la denotaremos por $N_{\mathcal{R}}(H)$:

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & N_{\mathcal{R}}(H) \end{array}\right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Desarrollando (1), un cálculo elemental nos dice que H consiste de los puntos de $p \in \mathcal{A}$ cuyas coordenadas $p_{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{R}$ satisfacen la *ecuación cuadrática* $p_{\mathcal{R}}^t \cdot C \cdot p_{\mathcal{R}} + 2\langle z, p_{\mathcal{R}} \rangle + a = 0$, esto es,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a = 0 \tag{2}$$

donde $p_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En otras palabras, los puntos de H se caracterizan en coordenadas por ser los ceros del polinomio de grado dos en n variables $P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a$.

Observa que H también es también la hipercuádrica asociada a la matriz $\lambda M_{\mathcal{R}}(H)$ según (1) o al polinomio $\lambda P(x_1, \ldots, x_n)$ según (2), $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por este motivo la matriz que determina a H en un sistema de referencia está bien definida salvo un factor de proporcionalidad.

Veamos que el sistema de referencia $\mathcal{R}$ utilizado para la definición de la hipercuádrica H es irrelevante, en el sentido de que en cualquier otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ los puntos de H se caracterizan en coordenadas en $\mathcal{R}'$ por una ecuación matricial (que dependerá de $\mathcal{R}'$) como la de (1), o equivalentemente, se corresponden con el conjunto de ceros de otro polinomio (que dependerá de $\mathcal{R}'$) como el de (2). Para ello tomemos otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ y escribamos la matriz de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ de la forma

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right).$$

Recordemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 1 \\ p'_{\mathcal{R}} \end{pmatrix},$$

de donde sustituyendo el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ por la expresión

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p'_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p'_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

en (1) , deducimos que H consiste de los puntos $p \in \mathcal{A}$ cuyas coordenadas $p'_{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{R}'$ satisfacen

$$(1, {p'_{\mathcal{R}}}^t) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p'_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0,$$

esto es,

$$(1, {p'_{\mathcal{R}}}^t) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a + b^t \cdot z + z^t \cdot b + b^t \cdot C \cdot b & z^t \cdot A + b^t \cdot C \cdot A \\ \hline A^t \cdot z + A^t \cdot C \cdot b & A^t \cdot C \cdot A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p'_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0.$$

Para el cálculo anterior téngase en cuenta que $C^t = C$.

Definiendo la matriz de H en $\mathcal{R}'$ como

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a' & (z')^t \\ \hline z' & C' \end{array}\right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}), \qquad (3)$$

donde $a' = a + b^t \cdot z + z^t \cdot b + b^t \cdot C \cdot b$, $z' = A^t \cdot z + A^t \cdot C \cdot b$ y $C' = A^t \cdot C \cdot A$, tenemos que H se describe en términos de coordenadas en $\mathcal{R}'$ como

$$H = \{p \in \mathcal{A} \colon (1, {p_{\mathcal{R}'}}^t) \cdot M_{\mathcal{R}'}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0\},$$

o equivalentemente H consiste de los puntos $p \in \mathcal{A}$ cuyas coordenadas $p_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ en $\mathcal{R}'$

satisfacen la ecuación cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} c'_{i,j} x'_i x'_j + 2 \sum_{i=1}^{n} z'_i x'_i + a' = 0,$$

donde hemos escrito $z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ y $C' = (c'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$. Al igual que antes, $N_{\mathcal{R}'}(H) = C'$ es la matriz del núcleo lineal de H en $\mathcal{R}'$.

Nota 3: *En el anterior cálculo hemos probado que la matriz de una hipercuádrica H y la de su núcleo lineal cambian por* congruencia *al cambiar de sistema de referencia, de acuerdo a la siguiente pauta:*

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$$

$$N_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B)^t \cdot N_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B),$$

donde B y B' son las bases de direcciones de $\vec{\mathcal{A}}$ asociadas a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Como consecencia del círculo de ideas alrededor del Teorema de Sylvester, de la Nota 3 se deduce:

- El rango R_H de $M_{\mathcal{R}}(H)$ no depende del sistema de referencia $\mathcal{R}$.
- La forma de Sylvester $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ de $M_{\mathcal{R}}(H)$ no depende del sistema de referencia utilizado atendiendo a (3): denotaremos $S_H = t - s$.
- El rango r_H del núcleo $N_{\mathcal{R}}(H)$ de $M_{\mathcal{R}}(H)$ no depende del sistema de referencia $\mathcal{R}$.
- La forma de Sylvester $D\big(1^{(t')}, (-1)^{(s')}, 0^{(c')}\big)$ del núcleo $N_{\mathcal{R}}(H)$ de $M_{\mathcal{R}}(H)$ no depende del sistema de referencia utilizado atendiendo a (3): denotaremos $s_H = t' - s'$.

Hay que tener en cuenta que los números S_H, s_H cambian a sus opuestos si representamos H a partir de matrices $\lambda M_{\mathcal{R}}(H)$, $\lambda < 0$. Esa aparente discrecionalidad debe observarse con atención en las distintas aplicaciones.

1. Podemos ahora abordar la clasificación afín de las hipercuádricas de $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \vec{\ })$. La idea básica será probar que toda hipercuádrica H se escribe en un sistema de referencia de una forma canónica o simplificada.

   Dos hipercuádricas H_1, $H_2 \subset \mathcal{A}$ se dicen *equivalentes* si satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones:

   - Existen sistemas de referencia $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ de $\mathcal{A}$ en los que H_1 y H_2 pueden representarse por la misma matriz $M_{\mathcal{R}_1}(H) = M_{\mathcal{R}_2}(H)$.
   - Existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H_1 y H_2 pueden representarse por matrices $M_{\mathcal{R}}(H_1)$ y $M_{\mathcal{R}}(H_2)$ congruentes via una matriz $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{R})$ esto es, $M_{\mathcal{R}}(H_2) = Q^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q$.
   - En cualquier sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$, H_1 y H_2 pueden representarse por matrices $M_{\mathcal{R}}(H_1)$ y $M_{\mathcal{R}}(H_2)$ congruentes via una matriz $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{R})$.

   Comprueba que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí.

El concepto de equivalencia de hipercuádricas también se puede reformular en términos de afinidades. En efecto, es posible ver que dos hipercuádricas $H_1,\ H_2 \subset \mathcal{A}$ son equivalentes si existe una afinidad $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $f(H_1) = H_2$. Para darte cuenta, prueba como ejercicio que una afinidad $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lleva hipercuádricas en hipercuádricas de acuerdo a la siguiente regla matricial

$$M_{\mathcal{R}}(H) = M(f,\mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big) \cdot M(f,\mathcal{R})$$

o equivalentemente

$$M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big) = M(f^{-1},\mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(f^{-1},\mathcal{R}).$$

Ya podemos enunciar en teorema fundamental de clasificación de hipercuádricas. Necesitamos para ello alguna notación.

Fijemos un sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = n$) y consideremos las hipercuádricas $H \subset \mathcal{A}$ con matrices respecto de $\mathcal{R}_0$ dadas por:

(I) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)},0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, donde $t,s,c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $t+s+c=n$ y $t-s \geq 0$.
En este caso $R_H = r_H = t+s$ y $S_H = s_H = t-s > 0$.

(II) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)},0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, donde $t,s,c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $t+s+c=n$.
En este caso $R_H = r_H + 1 = t+s+1$ y $S_H = s_H + 1 = t-s+1$.

(III) $M_{\mathcal{R}0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^t \\ \hline e_n & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)},0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, donde $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $t,s,c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $t+s+c=n$ y $c, t-s \geq 0$.
En este caso $R_H = r_H + 2 = t+s+2$ y $s_H = t-s \geq 0$.

El siguiente teorema expresa que cualquier matriz simétrica de orden $n+1$ (típicamente la de una hipercuádrica) puede ser transformada por congruencia utilizando matrices regulares de la forma $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$ en una de las matrices canónicas del listado anterior.

Teorema 5: *Toda hipercuádrica de $\mathcal{A}$ es equivalente a una de las hipercuádricas canónicas descritas matricialmente respecto a $\mathcal{R}_0$ en los casos* (I), (II) *y* (III).

Demost: Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en (I), (II) y (III).

Tomemos una matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ que represente a H en $\mathcal{R}_0$, y escribamos $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right)$.

Recordemos que, dado un sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ con $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$, se tiene que $M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1^t \\ \hline 0 & A_1^t \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$, esto es,

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 + b_1^t \cdot z_0 + z_0^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^t \cdot A_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array}\right).$$

Por el Teorema de Sylvester, podemos elegir $A_1 \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ para que

$$A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 = D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)},0^{(c)}\big).$$

Fijemos esta A_1 y escribamos $A_1^t \cdot z_0 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right)$ con $z' \in \mathbb{R}^{t+s}$ y $z_1 \in \mathbb{R}^c$. Llamemos $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$ al único vector tal que

$$z' + D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s}.$$

Como A_1 es regular existe un único $b_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_1^{-1} \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^n$, y para esta elección de b_1 se tiene que

$$A_1^t \cdot z + A_1^t \cdot C \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right) + D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \cdot \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array}\right).$$

Para el sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ con $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$ así elegido quedaría

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde $a_1 = a + b_1^t \cdot z + z^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C \cdot b_1$, $z_1 = A_1^t \cdot z + A_1^t \cdot C \cdot b_1$.

Si $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$, se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que $s_H = t - s \geq 0$ sin más que cambiar al inicio $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right)$ por su matriz opuesta.

Si $a_1 \neq 0$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right)$ por su matriz opuesta podemos suponer $a_1 > 0$. Consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\,\mathrm{I}_n \end{array}\right),$$

y observamos que

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\,\mathrm{I}_n \end{array}\right) \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\,\mathrm{I}_n \end{array}\right) = a_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Salvo eliminar de la matriz el factor de proporcionalidad a_1 llegamos a la matriz canónica del caso (II) (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que $s_H = t - s \geq 0$).

Finalmente supongamos que $z_1 \neq 0$, y observemos que salvo cambiar al principio $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right)$ por su matriz opuesta podemos suponer que $s_H = t - s \geq 0$. Consideremos ahora el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right),$$

donde $b_2 \in \mathbb{R}^c$ y $A_2 \in \mathrm{Gl}(c, \mathbb{R})$.

Sabemos que en este sistema de referencia se tiene

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_2 & 0 & z_2^t \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde $a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2$ y $z_2 = A_2^t \cdot z_1$.

Como $z_1 \neq 0$ siempre podemos encontrar $A_2 \in \mathrm{Gl}(c, \mathbb{R})$ tal que $z_2 = A_2^t \cdot z_1 = e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$, y una vez fijada esta matriz A_2, elegir $b_2 \in \mathbb{R}^c$ tal que $a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2 = 0$. Por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^t \\ \hline e_n & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array}\right),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba.

Indicación: La parte final correspondiente al caso (III) puede realizarse de otra forma. En efecto, como en $\mathcal{R}_1$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

un punto $p \in \mathcal{A}$ pertenece a H si y solo si sus coordenadas $p_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} x_i^2 + 2\langle z_1, \begin{pmatrix} x_{s+t+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle + a_1 = 0.$$

El sistema de ecuaciones analíticas

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad y_n = \langle z_1, \begin{pmatrix} x_{s+t+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} a_1,$$

define el cambio de $\mathcal{R}_1$ a un sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que $p_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, justo el que matricialmente se determina por

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_{c-1} & 0 \\ \hline \frac{1}{2} a_1 & 0 & z_1' & z_1'' \end{array}\right).$$

Claramente $p \in H$ si y solo si las coordenadas $p_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sum_{i=1}^{s} y_i^2 + 2y_n = 0,$$

de donde $M_{\mathcal{R}_2}(H)$ se corresponde con la matriz canónica del caso (III) como habíamos afirmado.

3. En un plano afín euclidiano las hipercuádricas reciben el nombre de *cónicas*. En este apartado supondremos $\dim \mathcal{A} = 2$, y vamos a describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cónicas de $\mathcal{A}$. No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general que probamos en el apartado anterior y recordar alguna notación clásica.

   Para ello fijemos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ y consideremos las cónicas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas anteriormente. A la luz del teorema de clasificación, toda cónica $H \subset \mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

   - Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

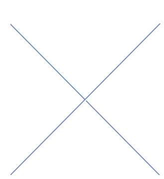
     $$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(recta doble).}$$

   - Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$):

     $$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

   - Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

     $$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(par de rectas secantes).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ $(t = 0,\ s = -1)$:

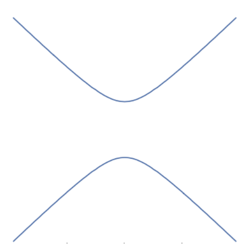
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - y^2 = 0 \quad \text{(par de rectas paralelas).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ $(t = 2,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

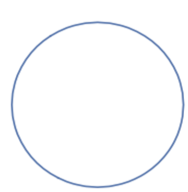
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_h + 1 = 1$ $(t = 1,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(hipérbola).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = -1$ $(t = 0,\ s = 2)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(elipse).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

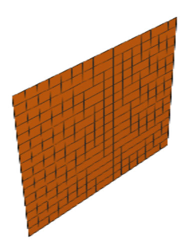
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2y = 0 \quad \text{(parábola).}$$

4. En un espacio afín euclidiano con $\dim \mathcal{A} = 3$, las hipercuádricas reciben el nombre de *cuádricas*. Vamos a describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cuádricas de $\mathcal{A}$ particularizando la información que nos da el teorema de clasificación general para el caso de $\dim \mathcal{A} = 3$.

   Fijemos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$, que jugará el papel del *usual* en los espacios euclidianos (aunque puede ser cualquiera), y consideremos las cuádricas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$. A la luz del teorema de clasificación, toda cuádrica $H \subset \mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

   - Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

   $$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(plano doble).}$$

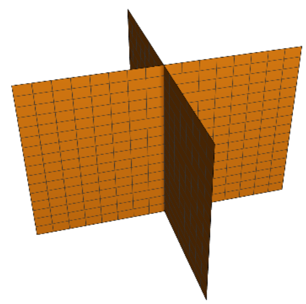
   

   - Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$):

   $$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(recta).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(par de planos secantes).}$$

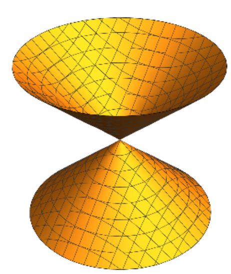


- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 3$ $(t = 3,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 2,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(cono).}$$

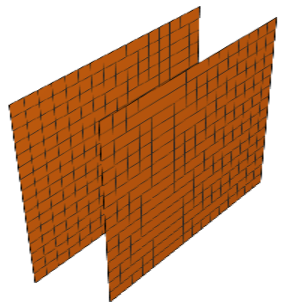


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ $(t = 1,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 0$ ($t = 0$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 = 0 \quad \text{(par de planos paralelos).}$$

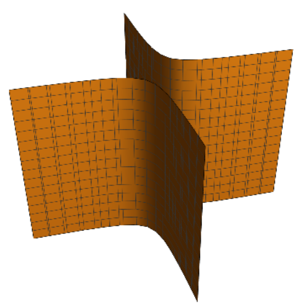


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

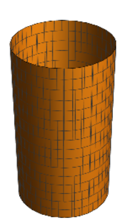
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(cilindro hiperbólico).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = -1$ ($t = 0$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(cilindro elíptico).}$$

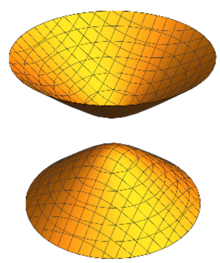


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 4$ ($t = 3$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

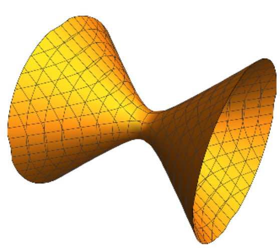
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 2$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de dos hojas).}$$



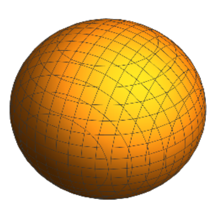
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 0$ ($t = 1$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de una hoja).}$$



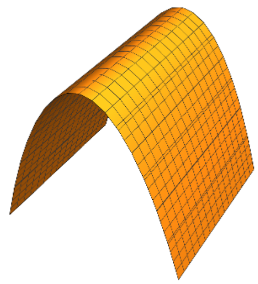
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = -2$ ($t = 0$, $s = 3$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(elipsoide).}$$



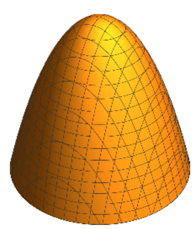
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2z = 0 \quad \text{(cilindro parabólico).}$$



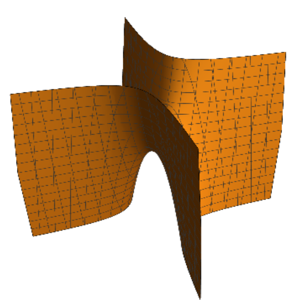
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $s_H = 2$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode elíptico).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode hiperbólico).}$$



4. Expliquemos el procedimiento práctico general para la clasificación afín de una hipercuádrica de forma sencilla. Entenderemos por clasificar afínmente una hipercuádrica H en $\mathcal{A}$ el encontrar la hipercuádrica canónica, de las tabuladas respecto del sistema de referencia fijado $\mathcal{R}_0$ para los casos (I), (II) y (II), a la que H es equivalente.

Una herramienta útil para este cálculo es la Regla de Descartes sobre el número de raíces positivas de un polinomio. Recordemos su enunciado:

Regla de Descartes: *El número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo de la secuencia ordenada (de mayor a menor exponente) de sus coeficientes no nulos.*

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 3x^5 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ tiene por coeficientes no nulos ordenados de mayor a menor exponente a $3, -1, -2, 4, -6$. En esa secuencia se observan tres cambios de signo (de 3 a -1, de -2 a 4 y de 4 a -6), por lo que a lo más puede tener tres raíces positivas. Si consideramos $q(x) = p(-x) = 3x^5 + x^3 - 2x^2 - 4x - 6$, la misma regla nos dice que $q(x)$ tiene a lo más una raíz positiva, esto es, $p(x)$ tiene a lo más una raíz negativa. Por tanto $p(x)$ tiene a lo más cuatro raíces, y en particular no descompone sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos pués una hipercuádrica H en $\mathcal{A}$ y elegimos una matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ que represente a H en $\mathcal{R}_0$. Llamemos $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ al núcleo lineal de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$:

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & N_{\mathcal{R}_0}(H) \end{array} \right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Calculamos los rangos R_H de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y r_H de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$. Si $R_H = r_H$ estamos en el caso (I), si $R_H = r_H + 1$ en el caso (II), y si $R_H = r_H + 2$ en el caso (III). Teniendo en cuenta el Teorema 3 (de Sylvester) podemos proceder así:

- *Caso* (I) *($R_H = r_H$):* Calculamos el polinomio característico $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y sus raíces. Realmente sólo nos interesa conocer los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $P(x)$ (nos podemos ayudar de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por $-M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, lo que determina unívocamente a qué hipercuádrica canónica es H equivalente.
- *Caso* (II) *($R_H = r_H + 1$):* Calculamos el polinomios característicos $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $\hat{P}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$, y determinamos sus raíces. Sólo nos interesan los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $P(x)$, y los números $\hat{t}$ de raíces positivas y $\hat{s}$ de raíces negativas de $\hat{P}(x)$ (en ambos casos nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por $-M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $\hat{t} = t + 1$ y $\hat{s} = s$, lo que determina unívocamente a qué hipercuádrica canónica es H equivalente.
- *Caso* (III) *($R_H = r_H + 2$):* Calculamos el polinomio característico $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y sus raíces. Sólo necesitamos los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $P(x)$ (nos podemos ayudar de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por $-M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, lo que determina unívocamente a qué hipercuádrica canónica es H equivalente.

Otra cuestión es encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en el que $M_{\mathcal{R}}(H)$ coincida con la matríz de su equivalente canónica en $\mathcal{R}_0$. Para ello hay que seguir la argumentación de la prueba del teorema de clasificación.

Veamos algunos ejemplos.

- Clasifica afínmente la hipercuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^4$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación

  $$2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 1 = 0.$$

  Lo primero que hacemos es calcular cuidadosamente $M_{\mathcal{R}_0}(H)$, que se determina a partir de la identidad

$$(1, x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

para

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 1.$$

Es conveniente que desarrolles la nemotecnia para pasar rápidamente de los coeficientes del polinomio a la matríz simétrica que definen la hipercuádrica. En este caso queda

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \in \mathcal{S}_5(\mathbb{R}).$$

El núcleo lineal quedaría

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}).$$

Un cálculo directo nos da $R_H = 5$, $r_H = 4$, por lo que $R_H = r_H + 1$ y la forma canónica corresponde al caso (II).
Los polinomios característicos $\hat{P}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ quedan

$$\hat{P}(x) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_5\big) = 3 + x - 14x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5$$

$$P(x) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_4\big) = 2 + 3x - 6x^2 - x^3 + x^4.$$

Por la regla de Descartes, $\hat{P}(x)$ tiene a lo más tres raíces positivas y $\hat{P}(-x)$ a lo más dos raíces positivas (luego $\hat{P}(x)$ tiene a lo más dos raíces negativas). Como $\hat{P}(x)$ ha de descomponer en $\mathbb{R}$ (recuerda el Teorema 2-(c)), inferimos que $\hat{P}(x)$ tiene exactamente tres raíces positivas y dos negativas. Por un razonamiento totalmente análogo $P(x)$ tiene dos raíces positivas y dos negativas. Deducimos que $S_H = 1$ y $s_h = 0$. De nuestra tabla de clasificación, H es equivalente a la hipercuádrica que en $\mathcal{R}_0$ viene representada por la matriz

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

o equivalentemente a la hipercuádrica de ecuación $1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ en $\mathcal{R}_0$. Esto significa que ha de existir un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^4$, obviamente distinto a $\mathcal{R}_0$, en el que H venga representada por esa misma matríz canónica.

- Clasifica afínmente la cónica H del plano afín $\mathbb{R}^2$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0.$$

La matríz $M_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ y el núcleo lineal $N_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ que surgen de la identidad

$$(1, x_1, x_2) \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 - 1$$

vienen dados por

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & -3/2 & 2 \\ \hline -3/2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo nos da $R_H = 3$, $r_H = 2$, por lo que $R_H = r_H + 1$ y la forma canónica corresponde al caso (II). Los polinomios característicos $\hat{P}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ quedan

$$\hat{P}(x) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_3\big) = 35/4 + (45x)/4 + x^2 - x^3$$

$$P(x) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_2\big) = -3 - 2x + x^2 = (x+1)(x-3).$$

Por la regla de Descartes, $\hat{P}(x)$ tiene a lo más una raíz positiva y $\hat{P}(-x)$ a lo más dos raíces positivas (luego $\hat{P}(x)$ tiene a lo más dos raíces negativas). Como $\hat{P}(x)$ ha de descomponer en $\mathbb{R}$ (recuerda el Teorema 2-(c)), inferimos que $\hat{P}(x)$ tiene exactamente una raíz positiva y dos negativas. Por un razonamiento totalmente análogo, o por comprobación directa, $P(x)$ tiene una raíz positiva y otra negativa. Tras cambiar de signo $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ (o cambiar de signo la ecuación de la cónica) para que $S_H = s_H + 1 = 1 > 0$ y encaje en nuestra tabla de clasificación, deducimos que H es equivalente a la cónica que en $\mathcal{R}_0$ viene representada por la matriz

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

o equivalentemente a la hipérbola de ecuación $1 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ en

$$\mathcal{R}_0 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_0 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \}.$$

Esto significa que ha de existir un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^2$, obviamente distinto a $\mathcal{R}_0$, en el que H venga representada por esa misma matríz canónica. Determinemos este sistema de referencia.

Lo primero que haremos es representar la cónica con la matriz adecuada para que $S_H = 1$, esto es, cambiandole el signo como hemos indicado antes:

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3/2 & -2 \\ \hline 3/2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora queda

$$P(x) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_2\big) = -3 + 2x + x^2 = (x-1)(x+3).$$

Para esta parte es conveniente tener presente lo explicado en la Nota 2 tras el teorema de Sylvester.

Calculamos los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ para los distintos valores propios, en este caso 1 y -3, del núcleo lineal. En cada uno de estos subespacios propios elegimos una base, que se ortonormalizará por Gram-Schmidt según el producto escalar clásico $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ *solo y solo cuando el valor propio sea no nulo* (en este caso hay que hacerlo para ambos subespacios propios). En nuestro ejercicio este cálculo nos da:

$$V_1 = L\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}, \quad V_{-3} = L\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}.$$

Luego para cada valor propio *no nulo*, dividimos los vectores de la base ortonormal de su subespacio propio construida por *la raíz cuadrada del valor absoluto del valor propio*:

$$V_1 = L\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}, \quad V_{-3} = L\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}.$$

En el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, B_1 = \{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\}\}$, el núcleo lineal $N_{\mathcal{R}_1}(H)$ de $M_{\mathcal{R}_1}(H)$ ha de coincidir con la forma de Sylvester de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$. En efecto,

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right)$$

y $M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)$, de donde

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc}1 & 3/2 & -2\\ \hline 3/2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right),$$

esto es,

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|cc}1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{6}}\\ \hline -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & 0\\ \frac{7}{2\sqrt{6}} & 0 & -1\end{array}\right)$$

siendo $N_{\mathcal{R}_1}(H) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ la forma de Sylvester.

Llamando $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ a las coordenadas genéricas de los puntos respecto de $\mathcal{R}_1$, la cónica se escribe como los ceros de la ecuación cuadrática

$$(1, y_1, y_2) \cdot \left(\begin{array}{c|cc}1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{6}}\\ \hline -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & 0\\ \frac{7}{2\sqrt{6}} & 0 & -1\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\end{pmatrix} = 1 - y_1/\sqrt{2} + y_1^2 + (7/\sqrt{6})y_2 - y_2^2 = 0.$$

Completando cuadrados queda

$$1 - y_1/\sqrt{2} + y_1^2 + (7/\sqrt{6})y_2 - y_2^2 = (y_1 - 1/\sqrt{8})^2 - (y_2 - 7/\sqrt{24})^2 + 35/12 = 0,$$

de donde introduciendo las nuevas coordenadas

$$z_1 = \sqrt{12/35}(y_1 - 1/\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{70}} \quad \text{y} \quad z_2 = \sqrt{12/35}(y_2 - 7/\sqrt{24}) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}}y_2 - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}},$$

la ecuación anterior se escribe como

$$1 + z_1^2 - z_2^2 = 0. \tag{4}$$

Llamemos $\mathcal{R}$ al único sistema de referencia con coordenadas $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, esto es, el determinado por el cambio

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{70}} & \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}} \end{array}\right).$$

Por (4), la cónica H está representada en $\mathcal{R}$ por la matriz canónica deseada

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

- Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0.$$

La matríz $M_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_5(\mathbb{R})$ y el núcleo lineal $N_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ que surgen de la identidad

$$(1, x_1, x_2, x_3) \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1$$

vienen dados por

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $R_H = r_H + 1 = 4$ y la forma canónica corresponde al caso (II). Los polinomios característicos $\hat{P}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ quedan

$$\hat{P}(x) = \det\left(M_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_4\right) = \frac{1}{16}(5 - 32x + 72x^2 - 64x^3 + 16x^4) = \frac{1}{16}(-5 + 2x)(-1 + 2x)^3$$

$$P(x) = \det\left(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_3\right) = \frac{1}{4}(2 - 9x + 12x^2 - 4x^3) = \frac{1}{4}(1 - 2x)^2(-2 + x).$$

Por la regla de Descartes, $\hat{P}(x)$ tiene a lo más cuatro raíces positivas y $\hat{P}(-x)$ ninguna (luego $\hat{P}(x)$ no tiene ninguna raíz negativa). Como $\hat{P}(x)$ descompone en $\mathbb{R}$ tiene exactamente cuatro raíces, todas positivas. Se puede observar este hecho de forma directa ya que $\hat{P}(x)$ descompone. Análogamente $P(x)$ tiene tres raíces positivas, por lo que $S_H = s_H + 1 = 4$ y $H = \emptyset$ es equivalente a la cuádrica canónica dada en $\mathcal{R}_0$ por

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2 = 0.$$

La matríz $M_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_5(\mathbb{R})$ y el núcleo lineal $N_{\mathcal{R}_0}(H) \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ que surgen de la identidad

$$(1, x_1, x_2, x_3) \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2$$

vienen dados por

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo nos da $R_H = 3$, $r_H = 1$, por lo que $R_H = r_H + 2$ y la forma canónica corresponde al caso (III). Los polinomios característicos $\hat{P}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $P(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ quedan

$$\hat{P}(x) = \det\left(M_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_4\right) = 8x + 2x^2 - 5x^3 + x^4 = (-4 + x)(-2 + x)x(1 + x)$$

$$P(x) = \det\left(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\,\mathrm{I}_3\right) = 3x^2 - x^3 = -x^2(x - 3).$$

Por la regla de Descartes, $\hat{P}(x)$ tiene a lo más dos raíces positivas y $\hat{P}(-x)$ a lo más una (luego $\hat{P}(x)$ tiene a lo más una raíz negativa). Como 0 es raíz de $\hat{P}(x)$ y $\hat{P}(x)$ ha de descomponer en $\mathbb{R}$ (recuerda el Teorema 2-(c)), inferimos que $\hat{P}(x)$ tiene exactamente dos raíces positivas y una negativa, además de la raíz 0 simple. También se puede observar este hecho por comprobación directa ya que el polinomio descompone. Por un razonamiento totalmente análogo, o por comprobación directa, $P(x)$ tiene una raíz positiva y 0 como raíz doble. Deducimos que $s_H = 1$, y por tanto, H es equivalente a la cuádrica que en $\mathcal{R}_0$ viene representada por la matriz

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

esto es, H es equivalente al cilindro parabólico de ecuación $x_1^2 + 2x_3 = 0$ en

$$\mathcal{R}_0 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_0 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}\}.$$

Esto significa que ha de existir un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^3$, obviamente distinto a $\mathcal{R}_0$, en el que H venga representada por esa misma matríz canónica. Determinemos este sistema de referencia. Para esta parte es conveniente tener presente lo explicado en la Nota 2 tras el teorema de Sylvester.

Calculamos los subespacios propios en $\mathbb{R}^3$ para los distintos valores propios, en este caso 0 y 3, del núcleo lineal.

En cada uno de estos subespacios propios elegimos una base, que se ortonormalizará por Gram-Schmidt según el producto escalar clásico $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{R}^3$ *solo y solo cuando el valor propio sea no nulo*. En nuestro ejercicio hay que hacerlo solo para la base de V_3, con la de V_0 no es necesario aunque si lo haces no pasa nada (te saldrían números más feos innecesariamente). Este cálculo nos da:

$$V_3 = L\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}, \quad V_0 = L\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}.$$

Luego para cada valor propio *no nulo* (este caso solo afecta al valor propio 3), dividimos los vectores de la base ortonormal construida en su subespacio propio (en este caso la base $\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ de V_3), por *la raíz cuadrada del valor absoluto del valor propio*, lo que nos lleva a fijar las siguientes bases en V_0 y V_3:

$$V_3 = L\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}, \quad V_0 = L\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}.$$

En el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, B_1 = \{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}\}$, el núcleo lineal $N_{\mathcal{R}_1}(H)$ de $M_{\mathcal{R}_1}(H)$ ha de coincidir con la forma de Sylvester de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$. En efecto, como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \end{array}\right)$$

y $M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)$, tenemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \end{array}\right),$$

esto es,

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -\frac{2}{3} & -2 & -2 \\ \hline -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

siendo $N_{\mathcal{R}_1}(H) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la forma de Sylvester.

Llamando $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ a las coordenadas genéricas de los puntos respecto de $\mathcal{R}_1$, la cuádrica se escribe como los ceros de la ecuación cuadrática

$$(1, y_1, y_2, y_3) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -\frac{2}{3} & -2 & -2 \\ \hline -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2 - \frac{2}{3} y_1 - 2y_2 - 2y_3 + y_1^2 = 0.$$

Completando cuadrados queda

$$(y_1 - 1/3)^2 - 2y_2 - 2y_3 + 37/19 = 0,$$

de donde introduciendo las nuevas coordenadas

$$z_1 = y_1 - 1/3, \quad z_2 = y_2, \quad \text{y} \quad z_3 = -y_2 - y_3 + 37/38,$$

la ecuación anterior se escribe como

$$z_1^2 + 2z_3 = 0. \tag{5}$$

Llamemos $\mathcal{R}$ al único sistema de referencia con coordenadas $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, esto es, el determinado por el cambio

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 37/38 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Por (5), la cuádrica H está representada en $\mathcal{R}$ por la matriz canónica deseada:

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$