

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Grado en Matemáticas, Grupo 2ºB. Doble grado Física y Matemáticas

Prueba de evaluación continua

1. [2 puntos] Define los conceptos de conjunto cerrado, compacto y acotado en un espacio métrico. Relaciona los conceptos anteriores y explica el porqué.

2. [2 puntos] Enuncia los siguientes resultados:

a) Teorema de Hausdorff.

b) Teorema del Punto fijo de Banach.

3. [2 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2(x+y)}\right) & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

a) Estudiar continuidad y diferenciabilidad de f .

b) Calcular $D_{12}(0, 0)$ y $D_{21}(0, 0)$.

Sea \mathbb{R}^n con la norma $\| \cdot \|$ usual. Probar las siguientes afirmaciones:

4. [2 puntos] Dado un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$, C es compacto si y sólo si, cualquier función continua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada.

5. [2 puntos] Una sucesión $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si, se verifican las dos condiciones siguientes: $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ y $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$