ANÁLISIS MATEMÁTICO I, Primer cuatrimestre

Curso 2020-21, 2^0 Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios para entregar escritos
Fecha de entrega: 15-1-2021

1) Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
a) Si E y F son espacios métricos y $f: E \longrightarrow F$ es continua, para cada compacto K de F, el conjunto $f^{-1}(K)$ es compacto.
b) Todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado es compacto.
c) Toda aplicación uniformemente continua entre espacios métricos preserva sucesiones de Cauchy.
d) Si $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar que tiene derivadas direccionales en un punto $a \in \mathbb{R}^2$, entonces f es diferenciable en a.

2) Estudia si el campo escalar definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{\sin x \sin y - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es $C^1(\mathbb{R}^2)$**.**

3) Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$,

$$u = f(r,s,t), \quad r = \sin(x+y), \quad s = e^z + 3x - 1, \quad t = \arctan(2xz),$$

da una fórmula (en función de f) de

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

y evalúa las derivadas parciales anteriores en $(x,y,z) = (1,1,0)$.

4) Comprueba que el conjunto M es una variedad y describe el subespacio tangente a M en el punto $a = (2,2,2)$, donde

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 8\}.$$

5) Describe el interior y la frontera del conjunto A y estudia los extremos absolutos del campo escalar f dado por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 6y + 3$$

en el conjunto A, siendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 100\}.$$

6) Prueba que existen funciones y y z de clase C^∞ definidas en un intervalo abierto centrado en e en el que se verifican las ecuaciones

$$x + y - e^z\cos(y) = 0, \qquad xyz - x\sin(y) + \arctan(y) = 0,$$

y tales que

$$y(e) = 0, \qquad z(e) = 1.$$

Calcula $y'(e), z'(e)$.

7) Calcula la distancia mínima entre la recta $x+y=3$ y la elipse $3x^2+y^2=3$. Prueba que el mínimo es absoluto.