Prueba Tema 2. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
5 de diciembre de 2019

1.– Sean $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\},$$

y T la topología en X inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos una relación de equivalencia R en X de modo que las clases de equivalencia son:

$$[(x, y)] = \begin{cases} \{(x, 0), (x, 1)\}, & x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), \\ \{(x, y)\}, & x \in [-1, 1). \end{cases}$$

1. ¿Es $(X/R, T/R)$ un espacio Hausdorff?
2. ¿Es la proyección $p : (X, T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación abierta?
3. ¿Es la proyección $p : (X, T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación cerrada?

1. El espacio X/R no es Hausdorff. Sea $\pi : X \to X/R$ la proyección. Los puntos $\pi((-1, 0))$, $\pi((-1, 1))$ son distintos puesto que no están relacionados. Sean $U, V \in T/R$ tales que $\pi((-1, 0)) \in U$, $\pi((-1, 1)) \in V$. Entonces $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V) \in T$, y $(-1, 0) \in \pi^{-1}(U)$, $(-1, 1) \in \pi^{-1}(V)$.

Para $0 < \varepsilon < 1$, las bolas abiertas en X con la distancia inducida de radio ε centradas en un punto dado son base de entornos del punto. Pero

$$B((x, y), \varepsilon) \cap X = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}.$$

Existe entonces $0 < \delta < 1$ tal que:

$$(-1 - \delta, -1 + \delta) \times \{0\} \subset \pi^{-1}(U), \quad (-1 - \delta, -1 + \delta) \times \{1\} \subset \pi^{-1}(V).$$

Si $x \in (-1 - \delta, -1)$, entonces $\pi((x, 0)) = \pi((x, 1))$. Pero

$$\pi((x, 0)) \in \pi(\pi^{-1}(U)) = U, \quad \pi((x, 1)) \in \pi(\pi^{-1}(V)) = V,$$

lo que demuestra que $U \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, no podemos encontrar dos entornos disjuntos de $\pi((-1, 0))$ y $\pi((-1, 1))$.

Una segunda forma de probar que el espacio X/R no es Hausdorff es la siguiente: si lo fuera, el conjunto

$$A = \{((x, y), (x', y')) \in X \times X : (x, y)R(x', y')\}$$

sería cerrado en $X \times X$. Pero la sucesión

$$\big\{((-1 - \frac{1}{n}, 0), (-1 - \frac{1}{n}, 1))\big\}_{n \in \mathbb{N}}$$

está contenida en A y su límite es $((-1, 0), (-1, 1))$, que no pertenece a A.

2. Veamos que π no es abierta. Recordemos que $A \in T/R$ si y solo si $\pi^{-1}(A) \in T$. Buscamos entonces un conjunto $U \in T$ tal que $\pi^{-1}(\pi(U)) \notin T$. Tenemos que:

$$x \in \pi^{-1}(\pi(U)) \Leftrightarrow \pi(x) \in \pi(U) \Leftrightarrow \exists u \in U : xRu \ (\pi(x) = \pi(u)).$$

Utilizando esta fórmula se comprueba enseguida que, si $U = (0,2) \times \{0\}$,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \big((0,2) \times \{0\}\big) \cup \big([1,2) \times \{1\}\big),$$

que no es abierto porque $(1,1)$ no es punto interior.

3. Veamos que π no es cerrada. Recordemos que $B \in C_{T/R}$ si y solo si $\pi^{-1}(B) \in C_T$. Buscamos entonces un conjunto $F \in C_T$ tal que $\pi^{-1}(\pi(F)) \notin C_T$.

Tomando $F = [-2,0] \times \{0\}$, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(F)) = \big([-2,0] \times \{0\}\big) \cup \big([-2,-1) \times \{1\}\big),$$

que no es abierto porque $(-1,1)$ pertenece a su clausura, pero no está en el conjunto.