Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo I: ESTRUCTURA EUCLÍDEA Y TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^N$

Tema 5: COMPLITUD

María D. Acosta

Universidad de Granada

15-10-2020

Sucesión de Cauchy. Espacio completo

Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (E, d) es de **Cauchy** si se verifica

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon,$$

equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} :\ (n \geq m,\ \ k \in \mathbb{N}) \Rightarrow d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon.$$

Un espacio métrico E es **completo** si toda sucesión de Cauchy en E converge (en E).
Un espacio normado y completo para la métrica asociada a la norma es un **espacio de Banach**.

Es inmediato comprobar que en un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy. $(\mathbb{Q}, |.|)$ es un ejemplo de que el recíproco de esta afirmación no es cierto.

Complitud

Ejemplos

1) $\mathbb{R}$ es completo.

2) $\mathbb{Q}$ no es completo.

Proposición

Si X es un espacio vectorial y $\| \ \|$ y $\||\ \||$ dos normas equivalentes en X. Entonces las sucesiones de Cauchy para ambas normas coinciden.

Por tanto, bajo las mismas hipótesis $(X, \| \ \|)$ es un espacio de Banach si, y sólo si, lo es $(X, \||\ \||)$.

Complitud

Proposición

Una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^N$ es de Cauchy si, y sólo si, $\{x_n(k)\}$ es de Cauchy para cada $1 \leq k \leq N$.
Por tanto, $(\mathbb{R}^N, \| \ \|)$ es un espacio de Banach, para cualquier norma $\| \ \|$ en $\mathbb{R}^N$.

Usando la caracterización secuencial de la adherencia y el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue se obtiene el siguiente resultado:

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$.

1. Si A es completo, es cerrado.
2. Si (E, d) es completo y $A = \overline{A}$, entonces (A, d_A) es completo.
3. Si A es compacto, entonces (A, d_A) es completo.

Complitud

Es fácil dar ejemplos que prueban que el recíproco de las afirmaciones anteriores no es cierto en general.

Recordamos que si (E, d) y (F, ρ) son espacios métricos, y $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación, f es contractiva si se verifica

$$\exists 0 \leq M < 1 : \; \rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y), \qquad \forall x, y \in E.$$

Ejemplo

Si I es un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable y existe $\alpha < 1$ tal que

$$|f'(x)| \leq \alpha, \forall x \in I,$$

entonces f es contractiva.

Teorema del punto fijo de Banach

Teorema del punto fijo de Banach

Sea (E, d) un espacio métrico completo no vacío. Si $f : E \longrightarrow E$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo. Es decir, existe un único $x \in E$ tal que $f(x) = x$.

Demostración: Probamos primero que, como máximo, hay un punto fijo. Sea $\alpha < 1$ un real tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall x, y \in E.$$

Supongamos que $x, y \in E$ son tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$. Entonces

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Como $\alpha < 1$ ha de ser $d(x, y) = 0$, luego $x = y$.

Probaremos ahora la existencia de un punto fijo de f.

Teorema del punto fijo de Banach

Como $E \neq \emptyset$, elegimos $x_0 \in E$. Definimos $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Probaremos que la sucesión es de Cauchy.

Por ser f contractiva tenemos que

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha d(x_1, x_0).$$

Suponiendo que se verifica

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0),$$

desigualdad que hemos comprobado para $n = 1$, tenemos que

$$d(x_{n+2}, x_{n+1})) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq$$

$$\alpha\alpha^n d(x_1, x_0) = \alpha^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Por tanto, hemos probado que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Teorema del punto fijo de Banach

Probamos ahora que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Si $n, m \in \mathbb{N}$, usando (1) tenemos que

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{n+k} =$$

$$\alpha^n \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k \leq \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Hemos usado que $0 \leq \alpha < 1$, luego la serie $\sum_n \alpha^n$ converge. Como $\{\alpha^n\} \to 0$, de la desigualdad anterior se deduce que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E.
Por ser (E, d) completo, $\{x_n\}$ converge. Sea $x = \lim\{x_n\}$. Como f es contractiva, es continua. Luego $\{f(x_n)\} \to f(x)$.
Dado que

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tomando límites en la igualdad anterior obtenemos que $x = f(x)$, luego f tiene un punto fijo.

Teorema del punto fijo de Banach

De la desigualdad

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

para n fijo, si hacemos $m \to \infty$, como la distancia es continua, obtenemos que

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$