23/10/2020

$\to$ $T_1 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$ topología en $\mathbb{R}$

$\to$ $T_2 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$ base de una topología $T$ en $\mathbb{R}$

$T_u$ = topología usual

13(c) Comparar $T_1, T_u$ Comparar $T, T_u$

- $T_1 \subset T_u$ $\quad (a,+\infty) \in T_u \quad x \in (a,+\infty) \Rightarrow x > a \Rightarrow r_x = x-a > 0$

$\Rightarrow (x-r_x, x+r_x) \subset (a,+\infty)$

$\Rightarrow (a,+\infty) = \bigcup\limits_{x \in (a,+\infty)} (x-r_x, x+r_x)$

$T_u \not\subset T_1$: $\quad (0,1) \in T_u \quad (0,1) \notin T_1$

$T_1 \subsetneq T_u$

- $T \not\subset T_u$ $\quad T_1 \subset T \quad [0,+\infty) \in T_1 \subset T$, pero $[0,+\infty) \notin T_u$

No existe $r>0$ tal que $(-r,r) \subset [0,+\infty) \Rightarrow [0,+\infty) \notin T_u \Rightarrow$
$T \not\subset T_u$

$T_u \not\subset T$ $\quad (0,1) \in T_u \quad (0,1) \in T \Leftrightarrow \forall x \in (0,1)$,
existe $B \in T_2$ tal que $x \in B \subset (0,1)$. Si $x \in B \Rightarrow B \neq \phi$
$\Rightarrow$ o bien $B = \mathbb{R}$ o bien $B = [a,+\infty)$ para cierto $a \in \mathbb{R}$
En ninguno de los dos casos, $B \subset (0,1)$. $\Rightarrow T_u \not\subset T$

Las topologías $T_1 T_n$ no son comparables

13 (d) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ ¿Es cierto que $\bigcap_{i\in I} U_i \in T$?

$$\left.\begin{aligned} &U_n = [-\tfrac{1}{n}, +\infty) \in T_1 \subset T \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ &\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\tfrac{1}{n}, +\infty) = [0, +\infty) \end{aligned}\right\} \text{ no sirve}$$

$\{U_i\}_{i\in I} \subset T$. Si $\bigcap_{i\in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i$ es abto. Sup $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset$.

Sea $\underline{x \in \bigcap_{i\in I} U_i} \Rightarrow \underline{x \in U_i \ \forall i \in I}$. $\Rightarrow \exists B_i \in T_1$ tal que $x \in B_i \subset U_i$

$B_i = \mathbb{R}$ o $B_i = [a, +\infty)$. En cualquiera de los dos casos, $[x, +\infty) \subset B_i \subset U_i$ $\forall i \in I \Rightarrow \underline{[x, +\infty)} \subset \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \in T$.