Actividad 1

Ejercicio (a): $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle , \rangle_{\vec{\ }})$

$S, T \subseteq \mathcal{A}$ subesp. afines

·) Si $S \cap T \neq \emptyset$ Tomo $p = q \in S \cap T$

$\vec{0} = \vec{pq} \perp \vec{S}, \vec{T}$ y $\text{dist}(S,T) = d(p,q) = \|\vec{pq}\| = 0$.

·) Si $S \cap T = \emptyset \Rightarrow S \vee T = s + (L\{\vec{st}\} + \vec{S} + \vec{T})$

$S = s + \vec{S}$ $\qquad S \vee T = t + (L\{\vec{st}\} + \vec{S} + \vec{T})$

$T = t + \vec{T}$

Como $\overrightarrow{S \vee T} = L\{\vec{st}\} + \vec{S} + \vec{T}$ tiene $\dim \overrightarrow{S \vee T} = 1 + \dim(\vec{S} + \vec{T})$,

puedo poner $\overrightarrow{S \vee T} = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus (\vec{S} + \vec{T})^{\perp}$,

donde $(\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = \{v \in \overrightarrow{S \vee T} : v \perp (\vec{S} + \vec{T})\}$

Claramente $\dim (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = 1 \Rightarrow (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = L\{u\}$,

$u \in \overrightarrow{S \vee T}$. Podemos escribir:

$$u = \lambda \vec{st} + (v + w) \quad \text{con } v \in \vec{S} \text{ y } w \in \vec{T}, \ \lambda \neq 0$$

ya que $u \in \overrightarrow{S \vee T} = L\{\vec{st}\} + \vec{S} + \vec{T}$, y por tanto

$u, \vec{st} \notin \vec{S} + \vec{T}$!!

deducimos que $\vec{st} + \frac{1}{\lambda} v + \frac{1}{\lambda} w \in (\vec{S} + \vec{T})^{\perp}$.

dos ptos $p = s - \frac{1}{\lambda} v \in s + \vec{S} = S$ y $q = t + \frac{1}{\lambda} w \in T$

satisfacen $\vec{pq} = \vec{st} + \frac{1}{\lambda} v + \frac{1}{\lambda} w \in (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = \vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp}$.

y resuelven el ejercicio. Veamos por qué....

Siempre podemos poner

$S = p + \vec{S}$ y $T = q + \vec{T}$

Tomemos $a \in S$, esto es $a = p + x$, $x \in \vec{S}$

Tomemos $b \in T$, esto es $b = q + y$, $y \in \vec{T}$.

Tenemos que:

$$d(a,b)^2 = \|\vec{ab}\|^2 = \langle \vec{ab}, \vec{ab} \rangle = \langle \overrightarrow{p+x, q+y}, \overrightarrow{p+x, q+y} \rangle =$$

$$= \langle \vec{pq} + y - x, \vec{pq} + y - x \rangle = \|\vec{pq}\|^2 + 2\langle \vec{pq}, y-x \rangle + \|y-x\|^2$$

Pero $\vec{pq} \perp \vec{S} + \vec{T} \Rightarrow \langle \vec{pq}, y-x \rangle = 0$ ya que $y - x \in \vec{S} + \vec{T}$.

Luego $d(a,b)^2 = \|\vec{pq}\|^2 + \|y-x\|^2 \geq \|\vec{pq}\|^2 = d(p,q)^2$,

esto es $d(a,b) \geq d(p,q)$ $\forall a \in S, b \in T$.

Por tanto

$$dist(S,T) = \inf\{d(a,b) : a \in S, b \in T\} \geq d(p,q)$$

Como $p \in S$, $q \in T$, este ínfimo es un mínimo y se alcanza en $p \in S$, $q \in T$:

$$dist(S,T) = d(p,q).$$

<u>ACLARACIÓN</u> Hay una errata en el enunciado del ejercicio (b), la recta S ha de ser:

$$S = (1,0,0) + L\{(-1,1,1)\}.$$

Hay que probar que S y T se cruzan y encontrar la perpendicular común.