GEOMETRÍA III - Doble Grado IIM

Actividad 3 del Tema 2 (Espacios Afines Euclídeos)

Vamos a recordar con detalle el concepto de ángulo orientado y sus propiedades básicas.

1. Dado un espacio vectorial V real de dimensión finita $n \geq 1$, en la familia $\mathcal{B}$ de las bases ordenadas de V establecemos la siguiente relación binaria, claramente de equivalencia:

$$B_1 \sim B_2 \Longleftrightarrow \det\big(M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)\big) > 0.$$

Es fácil ver que el conjunto cociente $\mathcal{B}/\sim$ tiene dos elementos. En efecto, si $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada y tomamos $B_2 = \{-v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, es claro que $B_1 \nsim B_2$ ya que

$$\det\big(M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)\big) < 0,$$

y que para cualquier base $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $B_1 \sim B$ ó $B_2 \sim B$. Por tanto $\mathcal{B}/\sim$ consiste exactamente de las clases de equivalencia $\{[B_1], [B_2]\}$. Por definición, una *orientación* en V es una clase de equivalencia $[B] \in \mathcal{B}/\sim$, y el par $(V, [B])$ es un espacio vectorial orientado. Una base B' de V se dice positivamente orientada en $(V, [B])$ si $B' \in [B]$, esto es,

$$\det\big(M(\mathrm{Id}_V, B, B')\big) > 0,$$

y en caso contrario se dice negativamente orientada.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ se adopta como orientación canónica o natural (y por tanto, como referencia de orientación positiva) la que induce la base canónica $B_0 = \{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)\}$.

2. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plano vectorial euclidiano, y fijemos una orientación $[B]$ en V. Definamos el ángulo orientado que forman dos vectores u_1, $u_2 \in V$ no nulos respecto de la orientación fijada $[B]$ en V. Llamemos $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$, y tomemos un vector unitario $w_2 \in V$ de forma que $w_1 \perp w_2$. Salvo cambiar w_2 por $-w_2$, podemos suponer que

$$B_0 = \{w_1, w_2\} \text{ es una base ortonormal positiva de } (V, \langle \cdot, \cdot \rangle, [B]).$$

Llamemos (x, y) a las coordenadas de $w_2' := \frac{1}{\|u_2\|} u_2$ respecto de esta base ortonormal positiva:

$$w_2' = x w_1 + y w_2.$$

Como $\|w_2'\| = 1$ inferimos que $x^2 + y^2 = 1$. En análisis clásico nos dice que existe un único número real $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tal que

$$\big(\cos(\alpha + 2k\pi), \sin(\alpha + 2k\pi)\big) = (x, y) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Por definición, decimos que $\alpha \in]-\pi, \pi]$ es el ángulo orientado que forman u_1 y u_2 (en este orden) en el espacio vectorial orientado $(V, [B])$, y escribimos

$$\angle_{\mathrm{o}}(u_1, u_2) = \alpha.$$

En ocasiones es conveniente identificar $\angle_{\mathrm{o}}(u_1, u_2)$ con la sucesión periódica $\{\alpha + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ si no deseamos fijar como referencia la rama principal del argumento en $]-\pi, \pi]$. Veamos algunas propiedades elementales del ángulo orientado.

- Para cada $u,v\in V\setminus\{\vec{0}\}$, tratemos el ángulo orientado $\angle_{\mathrm{o}}(u,v)$ como una sucesión periódica $\{\alpha+2k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\}$, donde $\alpha\in]-\pi,\pi]$.
  Con este lenguaje, dados $u_1,u_2,u_3\in V\setminus\{\vec{0}\}$ se tiene que
  $$\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_2)+\angle_{\mathrm{o}}(u_2,u_3)=\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_3).$$
  En efecto, como arriba tomemos $B_0=\{w_1,w_2\}$ base ortonormal positiva de $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,[B])$ con $w_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1$ y llamemos $w_2':=\frac{1}{\|u_2\|}u_2$. Si $\alpha=\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_2)$ tenemos que por definición
  $$w_2'=\cos(\alpha)w_1+\sin(\alpha)w_2.$$
  Ahora definamos
  $$w_3=-\operatorname{sen}(\alpha)w_1+\cos(\alpha)w_2$$
  y observemos que $B_1=\{w_2',w_3\}$ es una base ortonormal positiva de $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,[B])$; la ortonormalidad de B_1 es trivial, y date cuenta de que
  $$\det\big(M(\mathrm{Id}_V,B_1,B_0)\big)=\cos\alpha^2+\sin\alpha^2=1>0.$$
  Por tanto, si llamamos $w_3'=\frac{1}{\|u_3\|}u_3$ y escribimos $\beta=\angle_{\mathrm{o}}(u_2,u_3)$, la definición de ángulo orientado dice que
  $$w_3'=\cos(\beta)w_2'+\sin(\beta)w_3,$$
  esto es,
  $$w_3'=\cos\beta\big(\cos(\alpha)w_1+\sin(\alpha)w_2\big)+\sin(\beta)\big(-\sin(\alpha)w_1+\cos(\alpha)w_2\big)=$$
  $$=\big(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\operatorname{sen}\alpha\big)w_1+\big(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\big)w_2=$$
  $$=\cos(\alpha+\beta)w_1+\sin(\alpha+\beta)w_2,$$
  lo que prueba que
  $$\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_3)=\{(\alpha+\beta)+2k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\}=\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_2)+\angle_{\mathrm{o}}(u_2,u_3).$$
- Dada una base ortonormal positiva $B_0=\{e_1,e_2\}$ en un plano euclidiano orientado $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,[B])$ y $u_1,u_2\in V\setminus\{\vec{0}\}$, si escribimos
  $$u_1=x_1e_1+x_2e_2,\quad u_2=y_1e_1+y_2e_2,$$
  entonces se tiene que
  $$\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}=\|u_1\|\|u_2\|\sin\Big(\angle_{\mathrm{o}}(u_1,u_2)\Big).$$
  En efecto, recordemos que dada una base $B=\{v_1,v_2\}$ en V y llamando $B^*=\{\psi_1,\psi_2\}$ a su base dual en V^*, la 2-forma $\det_B:V\times V\to\mathbb{R}$ (tensor de tipo $(2,0)$ alternado) dada por
  $$\det_B=\psi_1\wedge\psi_2=\psi_1\otimes\psi_2-\psi_2\otimes\psi_1$$
  satisface
  $$\det_B(u_1,u_2)=\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix},$$
  para cualesquiera vectores $u_1=a_1v_1+a_2v_2$ y $u_2=b_1v_1+b_2v_2$ en V.
  En consecuencia
  $$\det_{B_0}(u_1,u_2)=\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}.$$

Por otra parte, si escribimos $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$, tomamos $B = \{w_1, w_2\}$ base ortonormal positiva de $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, [B])$ y llamamos $\alpha = \angle_{\mathrm{o}}(u_1, u_2)$, se tiene que

$$\det_B(u_1, u_2) = \det_B\Big(\|u_1\|w_1, \|u_2\|\big(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2\big)\Big) =$$

$$= \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)\det_B(w_1, w_2) = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha).$$

Pero

$$\det_B = \det\big(M(\mathrm{Id_V}, B, B_0)\big)\det_{B_0} = \det_{B_0}$$

ya que $\det\big(M(\mathrm{Id_V}, B, B_0)\big) = 1$ (la matriz del cambio de base entre bases ortonormales es ortogonal y positiva). De aquí que

$$\det_{B_0}(u_1, u_2) = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)$$

como queríamos demostrar.

3. Si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un plano vectorial euclidiano y $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$, se define el *ángulo no orientado* $\angle_{\mathrm{no}}(u_1, u_3)$ que forman u_1 y u_2 (el orden aquí es irrelevante) como el único número real α en $[0, \pi]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\|u_1\|\|u_2\|}.$$

Recuerda que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\langle u_1, u_2\rangle| \leq \|u_1\|\|u_2\|$, y por tanto la existencia y unicidad de $\angle_{\mathrm{no}}(u_1, u_3)$ está garantizada por la identidad

$$\angle_{\mathrm{no}}(u_1, u_2) = \arccos\Big(\frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\|u_1\|\|u_2\|}\Big).$$

Evidentemente, si fijamos una orientación $[B]$ en V es claro que

$$\cos\Big(\angle_{\mathrm{o}}(u_1, u_2)\Big) = \cos\Big(\angle_{\mathrm{no}}(u_1, u_2)\Big) = \Big(\frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\|u_1\|\|u_2\|}\Big),$$

por lo que $\angle_{\mathrm{o}}(u_1, u_2) = \pm\angle_{\mathrm{no}}(u_1, u_2)$.