Juan Valentín Guerrero Cano.

(5) $g_n(x) = n \cdot (\cos x)^n \cdot \operatorname{sen} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$

<u>solución:</u> CORRECCIÓN EJERCICIO 5 RELACIÓN 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$ g_n es derivable en $[0, \pi/2]$.

$g_n'(x) = -n^2 \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x + n \cdot (\cos x)^n \cdot \cos x =$

$= -n^2 \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}^2 x + n \cdot (\cos x)^{n+1} =$

$= n \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot (-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$

$$g_n'(x) = 0 \iff \begin{cases} n \cdot (\cos x)^{n-1} = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \\ (-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 0 \end{cases}$$

$-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 \iff -n \operatorname{sen}^2 x = -\cos^2 x \iff$

$\iff \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{n} \iff (\operatorname{Tg}(x))^2 = \frac{1}{n} \iff x = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$

Estudiamos monotonía de $g_n'(x)$.

$g_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left]0, \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\right[\Rightarrow$ creciente.

$g_n'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left]\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right), \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$ decreciente.

Luego: $\max\{g_n(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = g_n\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\right) = \alpha$.

<u>Convergencia puntual.</u>

Si $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \{g_n(x)\} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow (\cos x) \in]0,1[\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n(\cos x)^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{g_n(x)\} \to 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Luego: $\{g_n(x)\} \to 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Converge puntualmente a la función nula:

Sea $e \in (0, \frac{\pi}{2}]$ $\exists\, m \in \mathbb{N}: \forall n \geq m \quad \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) < e$

Definimos $x_n: \begin{cases} x_n = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) & \forall n \geq m \\ x_n = 0 & \forall n < m. \end{cases}$

Entonces $x_n \in [0, e] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{g_n(x) - g(x)\} =$

$= \{g_n(x)\}^{*} \not\to 0 \Rightarrow \{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0, e]$. (* $\{g_n(x)\}$ diverge a $+\infty$)

Para $n \geq m$ $\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) < e$ y g_n decreciente en $[e, \frac{\pi}{2}[$.

$\{g_n(e)\} \to 0$ por la convergencia puntual antes estudiada. $\Rightarrow$ Por el primer criterio de convergencia uniforme como tenemos que,

$$0 < g_n(x) \leq g_n(e) \Rightarrow |g_n(x)| \leq g_n(e)$$

y $\{g_n(e)\} \to 0 \Rightarrow \{g_n\}$ converge uniformemente en $[e, \frac{\pi}{2}]$

Juan Valentín Guerrero Cano

(4) $$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad \forall x \in]0,1[$$

Para que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converja absolutamente en $]-1,1[$

~~debe~~ $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ debe converger puntualmente:

$$|f_n| = \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x^n|}{\underbrace{|1-x^n|}_{>0 \ \forall x\in]0,1[}} = \frac{|x|^n}{1-x^n}.$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^n}{1-x^n} \longrightarrow \text{CRITERIO COCIENTE} \quad \{a_n\};\ a_n = \frac{|x|^n}{1-x^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{1-x^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}(1-x^n)}{|x|^n(1-x^{n+1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|(1-x^n)}{(1-x^{n+1})} = |x| < 1 \quad \text{Como } x \in]0,1[\Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} |f_n|$ converge puntualmente $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente.

Sabemos que todo compacto en $(\mathbb{R}, T_u)$ es de la forma $[a,b]$.

Apliquemos el test de Weierstrass.

$|f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{1-x^n}$. Escojamos un $\alpha \in \,]0,1[$.

Y un compacto $[-\alpha,\alpha] \subset \,]-1,1[$.

$\forall x \in \,]-1,1[$ $\quad \dfrac{|x|^n}{|1-x^n|} \le \dfrac{\alpha^n}{1-x^n} \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha^n}$

$\sum_{n\ge1} \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha^n}$ converge por la misma razón que $\sum_{n\ge1} \dfrac{|x|^n}{|1-x^n|}$ convergía (CRITERIO COCIENTE).

Luego $\forall x\in[-\alpha,\alpha]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x)|\le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sum_{n\ge1} f_n$ converge uniformemente en $[-\alpha,\alpha]$, el compacto definido anteriormente (* además como $\alpha\in\,]0,1[$, $[-\alpha,\alpha]\subset\,]-1,1[$). Luego, por el Test de Weierstrass $\sum_{n\ge1} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en todo compacto.

* Matizar que si el compacto es de la forma $\{\alpha\}$ $\{\alpha\}\in K \subset\,]-1,1[\;\Rightarrow$ el Test de Weierstrass sigue validando la convergencia de $\sum_{n\ge1} f_n$ en todo compacto

Demostremos que el término general no converge a 0, de ahí que no se produzca convergencia uniforme a 0 y por tanto la serie no converja uniformemente en $]-1,1[$.

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{1-x^n}\right\} \quad \forall x \in]0,1[.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)|.$$

Tomando $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad \{x_n\} \in]0,1[$

$$|f_n(x_n)| = \left| \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n}$$ Por criterio de equivalencia logarítmica:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{1}{n}-1\right) = L$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n-1}{n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n-1-n}{n}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$ Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n$$ no converge uniformemente en $]-1,1[$.

(5)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)} = \sum_{n\geq 0} C_n (x-a)^n$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{\log(n+2)} \qquad a=0}$$

Calculemos su radio de convergencia (R)

$R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ $\quad R = \dfrac{1}{L}$ donde $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$.

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\log(n+2)} \right| = \frac{1}{\log(n+2)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{\log(n+2)}} = 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow$ intervalo de convergencia:

$J = \cancel{]}[-1,1]$

Luego $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)}$ converge absolutamente en $]-1,1[$

y uniformemente en cada compacto $K \subset]-1,1[$.

Pero no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

Índice de comentarios

2.1 ¿Esto de donde sale? No es evidente en
absoluto, tienes que resolver una indeterminación

4.1 ¿Todos los compactos son intervalos?
Hay que pensar un poco lo que uno dice

6.1 Esto tendrías que explicarlo. Tienes una indeterminación del tipo "0 elevado a 0"
Si piensas que siempre da 1, te equivocas