Modelos Matemáticos
Tema3: Cadenas de Markov

Angel Olmedo Navarro

Doble grado
Ingeniería Informática
Matemáticas

May 24, 2021

1 Planteamiento estadístico

Tenemos distintos estados $S_1, S_2, ..., S_k$ y llamamos u^i a la probabilidad de que el individuo se encuentre en el estado i. Llamamos u al vector formado por las probabilidades de cada estado

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix}$$

que tiene que verificar:

- 1) $0 \leq u^i < 1$
- 2) $\sum_{i=0}^{k} u^i = 1$

Entonces denominamos

$$\Delta = \{u \in \mathbb{R}^k : \text{u verifica 1) y 2)}\}$$

Es decir, el conjunto de todos los vectores de probabilidad. Llamamos $B = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si nos fijamos cada e_i es un vector de probabilidad. Añadimos ahora un proceso que va cambiando al individuo de estado y llamamos:

$$a_{ij} = P\begin{pmatrix} \text{individuo pase del} \\ \text{estado i al estado j} \end{pmatrix}$$

Si tenemos un estado inicial u_0:

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \\ \vdots \\ u_0^k \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{proceso} \\ \rightarrow \end{matrix} \quad u_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ \vdots \\ u_1^k \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente vamos pasando de un estado a otro.

Por el Teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$u_1^1 = a_{11}u_0^1 + a_{12}u_0^2 + ... + a_{1k}u_0^k$$

Sea ahora A = $(a_{ij})_{j=1...k}^{i=1...k}$ la matriz formada por las probabilidades de cambiar de un estado a otro, u = $(u^i)_{i=1...k}$ el vector de estados antes del proceso y v = (u^i) el vector de estados tras el proceso, entonces tenemos:

$$v = A \cdot u$$

2 Planteamiento dinámico

Si u_n es una distribución de estados en el proceso n, entonces:

$$u_{n+1} = A \cdot u_n \qquad u_n \in \Delta$$

y tenemos un sistema dinámico en Δ (Δ nuestro espacio métrico y F(u) = u nuestra función)

Pues una matriz se dice de estados (estocástica) si todas las columnas son vectores de probabilidad.

$$\forall j, \quad A_j \in \Delta$$

Debemos tener en cuenta que todos los fenómenos son independientes entre si.

3 Cadenas totalmente conectadas

Sea A una matriz de estados y consideramos

$$u_{n+1} = A \cdot u_n \qquad u_n \in \Delta \tag{1}$$

Se dice que (1) es totalmente conectado si:

$$a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$$

Antes de ver el siguiente resultado, vamos a hacer un repaso de unas nociones:

→ Normas vectoriales: una norma vectorial es una aplicación $\| \cdot \| \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ que cumple:

- 1) $\| u \| \geq 0$, $\| u \| = 0$ cuando u=0.
- 2) $\| \lambda u \| = |\lambda| \, \| u \| \qquad \lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^k$
- 3) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

Toda norma en un espacio vectorial define una distancia

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

→ Definimos $\Sigma_m = \{u \in \mathbb{R}^k, u_1 + u_2 + ... + u_k = m\}$

→ Lema: Existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$\| Av \|_1 \leq \alpha \, \| v \|_1 \qquad \forall v \in \Sigma_0$$

→ Lema: Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ números realestales que:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k|$$

entonces todos tienen el mismo signo, es decir:

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{ó} \quad \alpha_i \leq 0 \quad \forall i$$

→ Teorema del punto fijo de Banach: Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces existe un único punto fijo de f.

Teorema: En una cadena totalmente conectada el sistema dinámico (1) tiene un único punto fijo u^* atractor global. Es decir:

$$\forall u_0 \in \Delta, \quad u_n \to u^* \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración:
pendiente

4 La distribución estable

Si A es una matriz de estados conectados al valor $u^* \in \Delta$, se le llama distribución estable. Además, se tiene que:

$$u^* \in \mathring{\Delta} = \{u \in \mathbb{R}^k : 0 < u^i < 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} u^i = 1\}$$

Proposición: u^* es un vector propio asociado a $\lambda = 1$ y es único verificando $u^* \in \Sigma_1$. Además, para todo dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^k$ la sucesión dada por:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

verifica $x_n \to mu^*$ donde $m = x_0^1 + x_0^2 + ... + x_o^k$

5 Valor propio principal y dominante

Si $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}$$

entonces $A^n = PD^nP^{-1}$ y:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

El comportamiento asintótico vendrá dado por el mayor valor en módulo de los vectores propios.

Un valor propio λ se dice principal si:

$$|\lambda| \geq |\mu| \quad \forall \mu \in \sigma$$

Un valor propio se dice dominante si es algebráicamente simple y además:

$$|\lambda| > |\mu| \quad \mu \in \sigma \setminus \{1\}$$

6 Comportamiento asintótico con valor propio dominante

Sea A una matriz real y consideramos

$$x_{n+1} = Ax_n \quad x_n \in \mathbb{R}^k$$

entonces la presencia de un valor propio dominante tiene consecuencias sobre el sistema dinámico anterior.

Teorema: Sea $\lambda_1 \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:

- λ_1 es valor propio dominante.
- λ_1 es geométricamente simple y $\forall x_0 \in \mathbb{R}^k$ existe un valor propio v asociado a λ tal que

$$\frac{1}{\lambda^n} x_n \to v$$

Demostración:
pendiente.

Si A es una matriz de estados totalmente conectadas entonces u^* la distribución estable es un vector propio asociado a $\lambda = -1$.

Proposición: Sea A matriz de estados entonces $\lambda = 1$ es valor propio.
Proposición: $\lambda = 1$ en una matriz de estados totalmente conectada es un valor propio dominante.
Corolario: $\lambda = 1$ es geométricamente simple.

7 Ergodicidad en modelos de estados

Recordemos que A, la matriz de estados $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = P\{j \to i\}$

Si pensamoos ir del estado j al estado i en dos pasos:

Insertat foto de cambios de estados.

$$a_{1i}a_{j1} + a_{2i}a_{j2} + ... + a_{ki}a_{jk}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & ... & a_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_j \\ \vdots \\ a_{jk} \end{pmatrix}$$

luego

$$\underset{\text{2 pasos}}{P\{j \to i\}} = [A^2]_{ij}$$

En general

$$\underset{\text{k pasos}}{P\{j \to i\}} = [A^k]_{ij}$$

Entonces llamamos a A^p la matriz iterada.

Lema: Si A es una matriz de estados $\forall p \in \mathbb{N}$, entonces A^p es una matriz de estados.

Demostración: pendiente

Todas la filas de $[A^p]^t$ suman 1, debemos tener en cuenta que $[A^p]^t = [A^t]^p$

$$[A^p]^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = [A]^t \cdot [A]^t \cdot^{p-veces} \cdot [A]^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz A se dice ergódica si existe p tal que

$$[A^p]_{ij} > 0 \quad , j$$

Teorema: Sea A matriz de estados ergódica, entonces $\lambda = 1$ es un valor propio dominante y el correspondiente vector propio puede tomarse en u^*

Demostración: pendiente