ANÁLISIS

FEDERICO CABRERA

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$ y uniformemente en todo compacto $K \subset]-1,1[$, pero no converge uniformemente en $]-1,1[$.

No nos encontramos ante una serie de potencias, el estudio debe de ser particular.

• | Sea K un compacto contenido en $]-1,1[$.

$K \subset]-1,1[$, por lo que encontramos un $\rho \in]0,1[$ tal que $K \subset [-\rho,\rho] \subset]-1,1[$. Utilicemos el test de Weierstrass para probar que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Encontremos una sucesión $\{M_n\}$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$ y además $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge. Sea $M_n = \frac{\rho^n}{1-\rho^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n\geq 1} \frac{\rho^n}{1-\rho^n}$ converge, gracias al criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} \cdot \frac{1-\rho^n}{\rho^n} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho^{n+1}} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\rho-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} \right\} = \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \text{ convergente.}$$

Además:

$$|f_n(x)| = \frac{x^n}{1-x^n} < \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \quad \forall x \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos por el Test de Weierstrass y por la arbitrariedad de K, que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset]-1,1[$. En particular, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y puntualmente en $]-1,1[$.

• | Convergencia uniforme en $]-1,1[$.

Para que se dé la convergencia uniforme es una condición necesaria que el término general de la serie converja uniformemente a 0. Veamos que no ocurre cogiendo una sucesión de puntos de $]-1,1[$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$. Es claro que $\{f_n\}$ tiene límite puntual la función idénticamente cero en todo $]-1,1[$. Así, sea $x_n = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\{|f_n(x_n) - f(x_n)|\} = \{|f_n(x_n)|\} = \left\{ \left| \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \right| \right\} \to \frac{1/e}{1-1/e} \neq 0$$

$\sum_{n\geq 1} f_n$ no converge uniformemente en $]-1,1[$.

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)}$$

Nos encontramos ante una serie de potencias centradas en 0 con $c_n = \frac{1}{\log(n+2)}$.
Calculemos el radio de convergencia R de la serie.

$$R = 1/L, \quad L = \lim \{\sqrt[n]{|c_n|}\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{|c_n|}\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{\log(n+2)}} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\log\left(\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n+2)}}\right)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\frac{-\log(\log(n+2))}{n}} \right\} =$$

$$e^{\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-\log(\log(n+2))}{n}\right\}}.$$

Como $-\log(\log(n+2))$ crece asintóticamente más lento que n, $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log\log(n+2)}{n}\right\} = 0$, de donde:

$$e^{\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-\log(\log(n+2))}{n}\right\}} = e^0 = \boxed{1}$$

Así ya tenemos el radio de convergencia $R = 1/L = 1$ y con el el intervalo de convergencia de la serie $J =]-1,1[$.

Ya tenemos mucha información:

- La serie converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto de $J =]-1,1[$.
- Converge absolutamente en $J =]-1,1[$
- No converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus J = \mathbb{R} \setminus]-1,1[$.

Veamos ahora qué ocurre en los extremos de J.

- $x=1$: Estudiemos la serie de números reales $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\log(n+2)}$.

  Claramente no converge ya que $\log(n+2) < n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{\log(n+2)}$, y $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2}$ no converge (criterio básico de comparación).

- $x=-1$: Tenemos la serie de números reales $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$.

Se trata de una serie alternada y como $\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ es decreciente y convergente a 0, por el criterio de Leibniz, la serie converge.

En cuanto a la convergencia absoluta, $\sum_{n\geq 0} |f_n(-1)| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\log(n+2)}$, que sabemos que no es convergente.

• La serie converge puntualmente pero no absolutamente en $x=-1$ y en $x=1$ no converge.