Tema 4

Lógica proposicional o de enunciados.

Además de los apuntes debéis leer este guión y ver como se hacen los ejercicios.

4.1 Lenguaje proposicional.

4.1.1 Introducción

Hemos añadido el concepto de lógica y una descripción intuitiva de la lógica proposicional.

Concepto ingenuo.

Todo el mundo posee una idea espontánea sobre lo que significa lógica, y, como calificativo emplea esta palabra en su conversación más corriente: “eso es lógico", “se trata de una falta de lógica"…, oimos como expresiones habituales. Según esta idea vulgar, se llama lógico al pensamiento recto y consecuentemente trabado, e ilógico al que carece de esta interna ilación. Todo hombre normal, aunque no tenga más que esta idea elemental de lo que la lógica sea, posee, sin embargo, una lógica natural, que le lleva a conducir de una manera habitualmente lógica su pensamiento y a percibir la falta de lógica o trabazón racional allá donde la encuentra. Esta lógica espontánea se hace reflexiva en esto que llamamos ciencia lógica, cuya definición estamos persiguiendo.

Etimología.

Podemos alcanzar una primera noción de qué sea lógica a través de la etimología de su mismo nombre. Logía (del griego logos) significa estudio o tratado racional. En la designación de los distintos campos del saber humano suele formar parte de los nombres de casi todas las ciencias: así, geología, zoología, psicología…, que son el tratado de Geos (la Tierra), zoon (el animal), psiqué (el alma), etc. Cabe, sin embargo, que se haga objeto de ese estudio o tratado científico, no a un objeto exterior, sino al propio pensamiento racional en lo que le constituye en auténtico orden racional y científico para alcanzar la verdad. Así, los griegos llamaron $\tau\alpha\ \lambda o\gamma\iota\kappa\alpha$ (las cosas lógicas) a aquella ciencia o tratado que versaba sobre el propio pensamiento, sobre sus formas y leyes.

Concepto histórico.

La palabra *lógica* ha sido utilizada a lo largo de los siglos para designar cosas con frecuencia muy distintas, de manera que, si uno tiene la intención de hacer no ya historia del término *lógica*, sino de la *Lógica* misma, se ve naturalmente obligado a realizar previamente una elección del significado unívoco que piensa atribuir a dicho término, a fin de poder proceder luego al examen del desarrollo histórico de la disciplina de ese modo definida como *Lógica*.

Nosotros entenderemos por *Lógica* el estudio de las formas correctas del razonamiento, reconociendo como primer ejemplo de tratado concreto el contenido de los *Primeros Analíticos* de **Aristóteles** y, por tanto, como ulteriores desarrollos históricos suyos todas aquellas aportaciones que, aun siendo diferentes desde el punto de vista expositivo y enriqueciéndose con nuevos contenidos, continúan, sin embargo moviéndose dentro del mismo ámbito de problemas de los *Primeros Analíticos*. La adopción de semejante significado del término está justificada desde un punto de vista histórico, pero no deja de ser oportuno observar que no es la única posible.

La lógica de Aristóteles carece de una teoría de las conectivas, por más que en distintas ocasiones el Estagirita hechara mano de determinadas leyes de lógicas proposicionales, manifestando en tal postura que era consciente de que dichas leyes lógicas no dependían de la teoría del silogismo. El desarrollo de una teoría de las conectivas débese a **Teofrasto**, discípulo de Aristóteles y, de modo particular, a los lógicos megáricos y estoicos. El fundador de la escuela de Megara es Euclides de Megara (430 a 360 a.C.); se consideran sus figuras más reputadas Eubúlides de Mileto, Diodoro Cronos y Filón (de Megara). Se reconoce en Crisipo (279 a 206 a.C.) el máximo exponente lógico de la escuela estoica. En los megáricos y estoicos se encuentra un análisis, que hoy llamaríamos "veritativo-funcional", de las conectivas "no", "y", "o" y "si...,entonces...".

Hasta el siglo XVII, independientemente de que se usase para designarlas el término *Lógica* o de que se prefiriese el de *Dialéctica*, las investigaciones lógicas estaban inscritas en el campo de lo que hemos caracterizado como *Lógica formal*. En cambio, el siglo XVII registra una primera ampliación de este horizonte, y, así, la *Logica vetus et nova* de **Johannes Clauberg** (1654) parece ya lastrada por un fárrago de cuestiones psicológicas y gnoseológicas. Sin embargo, la obra que se propuso deliberadamente transgredir los límites de la lógica formal (aun concediendo gran extensión a su tratamiento) fue *La logique ou l'art de penser* (1662) de **Antoine Arnaud** y **Pierre Nicole**, la famosa *Lógica de Port-Royal*. La sustitución del concepto de *arte de razonar* por el de *arte de pensar* no es casual, sino que acarrea el ingreso en la *Lógica* de toda la teoría cartesiana de las ideas y de las preocupaciones metodológicas que precisamente en aquella época habían sido suscitadas por **Descartes** y por **Pascal** en el campo de la *Filosofía*. A partir de ese momento, las obras de *Lógica* tendieron a conceder cada vez más atención a los temas *gnoseológicos*, *psicológicos* e incluso *ontológicos*, situando cada vez más en segundo plano la teoría de la inferencia.

Así, mediante la imposición de nuevos lastres a la lógica formal, va preparándose el radical cambio de perspectiva que se encierra en el concepto kantiano de *Lógica transcendental*, que el propio **Kant** intencionada y explícitamente contrapuso a la *Lógica formal*. Si se quiere exponer brevemente el complejo concepto kantiano de *Lógica transcendental*, puede decirse que, a diferencia de la *Lógica formal*, no se ocupa ya de las condiciones a satisfacer para una correcta deducción, sino de las condiciones *a priori* que hacen posible el conocimiento objetivo, o sea que hacen posible la subsunción de los datos de la experiencia bajo ciertos conceptos *a priori*, a fin de obtener así juicios de caracter universal y necesario, es decir, que no puedan ser refutados por ningún ser dotado de la facultad de juzgar. De esta manera la *Lógica transcendental* ya no se presenta como teoría del razonamiento, sino como una teoría del *juicio* mucho más exigente, no pudiendo evitar el presentarse, más que como un capítulo de la *Lógica*, como una parte de la *Gnoseología*. El caso de **Kant**, naturalmente, no permaneció aislado y trás él fueron apareciendo otros muchos que proponían ejemplos de *Lógica no formal*. El más célebre de tales casos es ciertamente la *Lógica* de **John Stuart Mill** que, junto a una presentación de la *Lógica deductiva* (sustancialmente coincidente con la *Lógica formal* tradicional), presenta también una *Lógica inductiva*, pero éste no es el único caso. Concretamente puede decirse que gran parte de las investigaciones epistemológicas actuales, especialmente las relativas a la metodología de las ciencias experimentales, pertenecen al espíritu de la *Lógica* de **Mill**, aunque a veces prefieran no titularse explícitamente *Lógica*. En esas investigaciones se suele hallar una presentación rigurosa y de tipo formal de teorías que, sin embargo, no son lógico-formales.

Vino a complicar todavía más las cosas la *Lógica hegeliana*. La Lógica de **Hegel** es una doctrina de las categorías, es decir, de las determinaciones sumamente generales del pensamiento, como, por ejemplo, cualidad, cosa, causa o finalidad. Por ello se parece poco a muchas otras obras de tema "lógico". Ni es un tratado sobre la validez formal del razonamiento ni una investigación de los métodos de las ciencias. La de Hegel es más bien una prolija revisión de los libros metafísicos de Aristóteles y, a la vez, de la "Lógica trascendental" —tanto de la parte llamada "analítica" como de la parte llamada "dialéctica"— que Kant presentó en su Crítica de la razón pura. Pero a diferencia de la Lógica de Kant, la de Hegel no es una doctrina acerca de las condiciones de posibilidad del conocimiento empírico, ni sobre la síntesis que de lo diverso en la intuición obra supuestamente el entendimiento humano, ni concretamente —al menos no en particular— sobre el juzgar. Es más, a diferencia de otras doctrinas de las categorías con intenciones empíricas o epistemológicas, su punto de vista no es en ningún sentido psicológico. La pregunta que la suscita es más bien: ¿son las categorías más generales —por ejemplo, cualidad, cantidad, relación, sustancialidad, pero también límite, ser esencial, apariencia, causalidad, objetividad, vitalidad o carácter ideal— verdaderas? Esto es, ¿puede pensarse en y con ellas lo verdadero? Y, por cierto, ¿qué es lo verdadero?

El álgebra de la lógica tiene sus inicios en 1847, en las publicaciones de Boole **"The Mathematical Analysis of Logic"** y de De Morgan **"Formal Logic"**. Los primeros escritos hacen referencia a un álgebra del cálculo de clases, isomorfa a la de las relaciones. Un cálculo proposicional aparece por primera vez en los trabajos de Hugh MacColl a comienzos de 1877.

El **método logístico** fué empleado por primera vez por Frege en sus **Begriffsschrift** de 1879. Este trabajo contiene la primera formulación del cálculo proposicional como un sistema logístico, pero los trabajos de Frege fueron poco entendidos y menos reconocidos por lo que los matemáticos como C.S.Peirce, Ernst Schröder, Giuseppe Peano y otros siguieron la otra línea.

Los principios de un cambio, aunque sin llegar al método logístico, empiezan a vislumbrarse en la escuela de Peano. Y de esta fuente A.N.Whitehead y B.Russell tomaron sus primeras inspiraciones. Con posterioridad quedaron arrebatados por el profundo trabajo de Frege y fueron los primeros en apreciar y difundir su significado.

Después de Frege los primeros trabajos que utilizan el método logístico son los de Russell. Muchas indicaciones de este tratamiento pueden encontrarse en **"The Principles of Mathematics"** de 1903. La formulación del cálculo proposicional fué publicada por Russell en 1908 y utilizada por Whitehead y Russell en sus **"Principia Mathematica"** de 1910. Bernays, en 1926, simplificó el sistema descubriendo la dependencia de uno de los axiomas.

C.I.Lewis en conexión con estos trabajos escribió inmediatamente un sistema para la **implicación estricta** en 1913.

El uso de **esquemas de axiomas** que hace innecesario utilizar la **regla de sustitución** en las formulaciones del cálculo proposicional fué introducido por J.V.Neumann.

En enero de 1917 Nicod dió una formulación con un sólo axioma. Con posterioridad las dieron Wajsberg y Lucasiewicz (todas ellas basadas en la conexión conocida como **barra de Sheffer**).

En opuesta tendencia a la de economizar axiomas aparecen las formulaciones de Hilbert que intenta separar el papel desempeñado por cada conectiva, aun a costa de la economía e independencia de los axiomas. A partir de estos trabajos aparecen los cálculos proposicionales fragmentarios.

El método de decisión de las tablas de verdad es aplicado informalmente y en casos particulares por Frege en 1879. La primera formulación explícita del método es de Peirce seis años más tarde. Muchos de los recientes deasarrollos del método matricial son debidos a los trabajos de Wajsberg, Lucasiewicz, Tarski y Post. El término tautología fué acuñado por Wittgenstein.

El **teorema de la deducción** no es una particularidad del cálculo proposicional clásico, es válido par muchos sistemas logísticos. La idea de este teorema y su primera prueba es de Jacques Herbrand en 1928. Su formulación como principio metodológico general es debida a Tarski y el nombre esta tomado del alemán de los **Grundlagen der Matematik** de Hilbert y Bernays.

La completitud del cálculo proposicional fué probada por primera vez por Post en 1921 utilizando las **formas normales conjuntivas**. Otra prueba fué dada por Kalmar en 1934. El método de Kalmar es uno de los más utilizados en los libros de texto estándar. Ambas pruebas son constructivas.

La prueba de Rasiowa y Sikorski de 1951 no es de caracter constructivo y depende del teorema del ultrafiltro. Tiene la ventaja de que existe una prueba análoga para el caso del cálculo de predicados de primer orden, en el que no existe prueba de completitud constructiva. En este caso la prueba utilizando álgebras de Boole tiene una gran ventaja en términos de elegancia y pone de relieve la naturaleza algebraica del resultado.

Concepto de Lógica.

La Lógica es la ciencia que estudia los razonamientos correctos. Por tanto se ocupa de:

- Las inferencias válidas o razonamientos correctos.
- El concepto de definición.
- El concepto de significado.
- El concepto de verdad.

Todo estos conceptos intervienen en el quehacer de los científicos por ello no podemos prescindir de estudiar Lógica, o por lo menos, aprender a utilizarla adecuadamente.

En resumen podemos decir, que el objeto de estudio de la *Lógica* es el razonamiento. El razonamiento se expresa en lenguaje. La diferencia entre la lógica clásica y la formal o simbólica es que en esta se crea un lenguaje especial para el estudio del razonamiento.

La lógica de proposiciones.

El apartado más elemental (en un doble sentido: el más simple y, al propio tiempo, el más básico) de la *Lógica formal*, aquel en que se trazan sus líneas más generales, es la *lógica de enunciados* o *proposiciones*.

La tarea de la *Lógica* es el análisis formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje. Sólo en el lenguaje, sólo en la medida en que están formulados en un lenguaje se ofrecen los razonamientos a la posibilidad del análisis. El análisis del razonamiento supone, por tanto, un análisis del lenguaje. Un análisis lógico del lenguaje.

En efecto, ante una expresión como:

"*dieron las seis y llamó Cabra a lición: fuimos y oimosla todos*"

el análisis literario reparará en la prosa, en el estilo de Francisco de Quevedo; el análisis lingüístico sintáctico hablará de sintagmas nominales, verbales, etc. El análisis lógico, desde el nivel de la lógica proposicional, se limitará a señalar la existencia de cuatro enunciados:

1. Dieron las seis
2. Llamó Cabra a lición
3. Fuimos
4. Oimosla todos

Y en el siguiente cuarteto de Garcilaso la *Lógica proposicional* no hallaría tampoco sino cuatro proposiciones, a una por verso:

> El ancho campo me parece estrecho.
> La noche clara para mí es escura.
> La dulce compañía, amarga y dura.
> Y duro campo de batalla el lecho.

Como nos encontramos en el apartado más elemental de la *Lógica*. El análisis que le corresponde es, también, el más elemental, el más *grueso*, el más *burdo*.

El análisis del lenguaje en que se basa la *Lógica de proposiciones* divide el lenguaje, y ya es simplificar, en dos tipos de constituyentes:

1. De una parte, oraciones, frases enteras.
2. De otra parte, conjunciones o conexiones (en el sentido lógico del término), partículas que sirven para enlazar oraciones y formar nuevas oraciones.

Estas son las dos únicas categorías de constituyentes que la *Lógica de enunciados* considera relevantes: las proposiciones tomadas en bloque, por un lado, y, por otro lado, las conexiones entre ellas.

Quiere ello decir que el análisis lógico se detiene, por ahora, al borde de los enunciados, sin penetrar en la estructura interna de estos, siendo el enunciado, por tanto, la unidad de análisis.

La *Lógica proposicional* es una lógica de los enunciados sin analizar. La *Lógica proposicional* sólo tendra en cuenta aquellas formas de deducir un enunciado a partir de otros que sean válidas sin necesidad de analizar por dentro cada uno de ellos. Los elementos que componen internamente un enunciado son, por el momento, irrelevantes desde el punto de vista lógico. Sólo interesan los enunciados como tales, cada uno de ellos en cuanto formando un todo.

Conexiones lógicas.

Si observamos el lenguaje natural vemos que a partir de frases construimos otras mediante conjunciones. Para nosotros estas partículas se llamarán *conexiones, conectivas* o *constantes lógicas* muy abundantes en lenguaje natural. El sentido de estas partículas de unión es ambigüo, por eso hemos de abandonar el lenguaje natural.

Los enunciados del lenguaje que no se pueden dividir en otros se llamarán enunciados, proposiciones o sentencias **atómicas**. Utilizaremos las primeras letras minúsculas del alfabeto griego para simbolizar los enunciados. Es clásico emplear minúsculas a partir de la p (p,q,r,s,...) con subíndices, primas,. . . . Se llamarán variables porque representan enunciados de los que no nos interesa el significado ni el mismo enunciado.

Las partículas conectivas relevantes desde un punto de vista matemático y científico en general son:

no: Se antepone a un enunciado y da lugar a otro enunciado. Se representa por el símbolo "$\neg$". Es una conexión monaria.

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

y: Se corresponde, casi completamente con uno de los usos de la y del lenguaje natural. Se le llama conjunción y se representa con el símbolo "$\wedge$". Es una conexión binaria.

En el lenguaje hablado la conjunción copulativa "y" tiene diferentes significados:
Juan y Pedro son tontos, 2 enuciados atómicos.
Juan y Pedro son parientes, 1 enunciado atómico.
Dijo "hasta luego Lucas" y se murió.
Deja de estudiar y te mato.

α	β	$\alpha\wedge\beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

o: Se llama disyunción se corresponde con uno de los dos sentidos más usuales en el lenguaje natural y se representa por el símbolo "$\vee$". Es una conexión binaria.

En el lenguaje hablado la conjunción "o" tiene sentido inclusivo o bien exclusivo. A la conexión "o" le daremos en lógica un sentido similar al de la "o" inclusiva del lenguaje natural.

α	β	$\alpha\vee\beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Otra conexión usada en lógica es la que representaremos por "$\rightarrow$" y que llamaremos implicación o condicional. Se corresponde con la estructura gramatical "si...entonces..." del lenguaje y es una conexión binaria. En el lenguaje natural "si...entonces..." no siempre se usa y a veces se utiliza con otro sentido.

Nuestras conexiones quedarán precisadas cuando estudiemos la semántica del lenguaje que utilizaremos.

El "cuando" puede emplearse en sentido condicional como el "si...entonces..." y otras veces en sentido temporal.

El símbolo "$\rightarrow$" es el más importante en lógica y el que tiene la interpretación en lenguaje natural más delicada. De él dependen conceptos importantes.

α	β	$\alpha \to \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La expresión $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, siendo α y β proposiciones se abrevia escribiendo $\alpha \leftrightarrow \beta$. Con esto obtenemos una nueva conectiva binaria que notamos "$\leftrightarrow$".

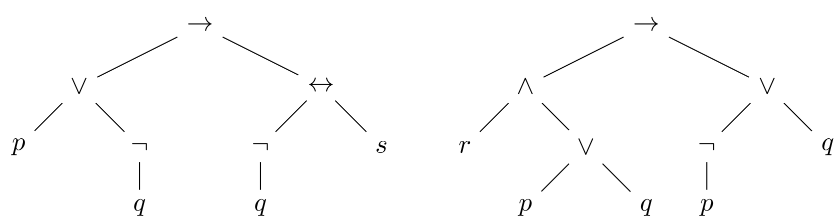
El lenguaje natural es demasiado rico y ambigüo como para poder expresar los razonamientos lógicos.

4.1.2 Elementos del lenguaje proposicional:

Después de leer los apuntes de las dos estructuras en árbol que aparecen esta es la que usaremos

Observación:

La estructura de árbol es muy útil para representar las fórmulas. Así, una fórmula sería un árbol que en las hojas tiene las fórmulas atómicas que intervienen y en el resto de los nodos las conectivas. Por ejemplo, las fórmulas $p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$ y $r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)$ pueden ser representadas como los árboles:



4.2 Semántica de la lógica proposicional

4.2.1 Interpretaciones o valoraciones

El concepto fundamental es el de interpretación, valoración o mundo posible.

Definición 4.1 (valoración, mundo posible) *Dado un lenguaje proposicional construido sobre el conjunto X, una valoración (mundo posible) es una aplicación $v : X \to \mathbb{Z}_2$.*

Una valoración lo que hace es asignar un valor de verdad a cada una de las proposiciones atómicas. Si v es una valoración y a es una fórmula atómica para la que $v(a) = 0$, diremos que *a es falsa en el mundo v*. Por el contrario, si $v(a) = 1$, diremos que *a es verdadera en el mundo v*.

Una vez que hemos asignado un valor de verdad a las proposiciones atómicas, lo extendemos a todas las fórmulas del lenguaje mediante las siguientes reglas.

Dado un lenguaje proposicional cuyo conjunto de fórmulas atómicas es X, y dada una valoración $v : X \to \mathbb{Z}_2$, extendemos la aplicación v al conjunto $\texttt{Form}(X)$ siguiendo las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
&\alpha \vee \beta = \alpha + \beta + \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \to \beta = 1 + \alpha + \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \leftrightarrow \beta = 1 + \alpha + \beta \\
&\neg\alpha = 1 + \alpha
\end{aligned}$$

De esta forma expresando el valor de verdad de una proposición utilizando el 1, la suma y el producto obtenemos su polinomio de Gegalkine.

Observación:

1. La escritura *Gegalkine* proviene de una transcripción del alfabeto cirílico. Por tal motivo en la literatura podemos encontrarlo también como polinomio de Zhegalkine.
2. Aunque formalmente es incorrecto, para el cálculo del polinomio de Gegalkine identificaremos cada fórmula proposicional con la correspondiente variable del polinomio de Gegalkine. Teniendo en cuenta esto, podríamos haber escrito
   $a \wedge b \rightarrow \neg a = 1 + a \wedge b + (a \wedge b)(\neg a) = 1 + a \cdot b + (a \cdot b) \cdot (1 + a) = 1 + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b \cdot a = 1 + a^2 \cdot b = 1 + a \cdot b$
   En cualquier caso, nosotros usaremos esta escritura.

Ejemplo 4.1

Vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de la fórmula $\alpha = \neg(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)$. Para esto, vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de las subfórmulas $\neg(a \rightarrow b)$ y $\neg a \rightarrow \neg b$.

Comenzamos con la primera:

$$\begin{aligned} \neg(a \rightarrow b) &= 1 + a \rightarrow b \\ &= 1 + 1 + a + ab \\ &= a + ab \end{aligned}$$

Y ahora

$$\begin{aligned} \neg a \rightarrow \neg b &= 1 + \neg a + (\neg a)(\neg b) \\ &= 1 + 1 + a + (1 + a)(1 + b) \\ &= a + 1 + a + b + ab \\ &= 1 + b + ab \end{aligned}$$

Y con esto,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \neg(a \rightarrow b) + \neg(a \rightarrow b)(\neg a \rightarrow \neg b) \\ &= 1 + a + ab + (a + ab)(1 + b + ab) \\ &= 1 + a + ab + a + ab + ab + ab + ab + ab \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, el polinomio de Gegalkine es el polinomio constante 1. Esto significa que bajo cualquier interpretación de las proposiciones atómicas el valor de verdad de la fórmula α es 1. A las fórmulas que verifican esta propiedad las llamaremos *tautologías*.

4.2.2 Tabla de verdad para una fórmula

Podemos entonces crear una tabla con los 2^n mundos posibles. Esta tabla se conoce como *tabla de verdad* de la fórmula α. Puesto que los valores de verdad se calculan siguiendo las reglas, la tabla de las cinco conectivas sería.

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\neg\alpha$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

En ella se han recogido todas las posibilidades para los valores de verdad de una fórmula en la que sólo aparece una conectiva. A partir de esta tabla se pueden calcular los valores de verdad de una fórmula cualquiera para todas las interpretaciones posibles del conjunto de fórmulas atómicas que intervengan, es decir, la tabla de verdad de esa fórmula.

Ejemplo 4.2

1. *Consideremos la fórmula $\alpha = \neg(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)$*

   Vamos a obtener su tabla de verdad. Para eso, vamos a partir de todas las posibles interpretaciones que podemos dar a las proposiciones atómicas que intervienen en la fórmula α, y las vamos a ir extendiendo a las distintas subfórmulas de α.

   El conjunto de subfórmulas es $\{a,\ b,\ a \rightarrow b,\ \neg(a \rightarrow b),\ \neg a,\ \neg b,\ \neg a \rightarrow \neg b,\ \neg(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)\}$, en el que vemos que hay dos atómicas, lo que nos dice que tenemos un total de cuatro posibles interpretaciones.

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0	1	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	0	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	1	**1**

Y podemos ver como la fórmula α se interpreta como verdadera en cualquier caso, algo que ya habíamos comprobado al calcular su polinomio de Gegalkine.

2. *Vamos a tomar la fórmula $\beta = a \wedge b \to \neg a$. Sabemos que su polinomio de Gegalkine es $a \wedge b \to \neg a = 1 + ab + ab(1 + a) = 1 + ab + ab + ab = 1 + ab$. Vamos a calcular la tabla de verdad de esta fórmula, y vamos a añadirle una columna a la derecha en la que evaluaremos el polinomio de Gegalkine $1 + ab$, y comprobaremos como esta columna coincide con los valores de verdad de β.*

a	b	$a \wedge b$	$\neg a$	$a \wedge b \to \neg a$	$1 + ab$
0	0	0	1	1	$1 + 0 \cdot 0 = \mathbf{1}$
0	1	0	1	1	$1 + 0 \cdot 1 = \mathbf{1}$
1	0	0	0	1	$1 + 1 \cdot 0 = \mathbf{1}$
1	1	1	0	0	$1 + 1 \cdot 1 = \mathbf{0}$

3. *Sea ahora la fórmula: $\varphi = (a \wedge b \to c) \wedge (\neg(a \wedge b) \to d)$*

   Vamos a calcular su tabla de verdad. Puesto que intervienen cuatro fórmulas atómicas, la tabla de verdad tiene $2^4 = 16$ filas.

a	b	c	d	$a \wedge b$	$a \wedge b \to c$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg(a \wedge b) \to d$	φ
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1

   Su polinomio de Gegalkine sería
   $(a \wedge b \to c) \wedge (\neg(a \wedge b) \to d) = (1 + ab + abc)(1 + 1 + ab + (1 + ab)d) = (1 + ab + abc)(ab + d + abd) = ab + d + abd + ab + abd + abd + abc + abcd + abcd = d + abd + abc$

4.2.3 Clasificación de fórmulas

El término **tautología** para referirse a las proposiciones que son ciertas en todos los mundos posibles fue utilizado por primera vez por **Ludwig Josef Johann Wittgenstein**.

Veamos algunos ejemplos de proposiciones y su clasificación según su valor de verdad.

Ejemplo 4.3

- *La fórmula* $a \to (b \to a)$ *es una tautología. Para comprobarlo, hallemos su polinomio de Gegalkine y construyamos su tabla de verdad:*
  $a \to (b \to a) = 1 + a + a(b \to a) = 1 + a + a(1 + b + ab) = 1 + a + a + ab + ab = 1$

a	b	$b \to a$	$a \to (b \to a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

  y vemos que la fórmula es cierta en los cuatro mundos posibles.

  La fórmula también es satisfacible, pues hay un mundo (en este caso todos) en que la fórmula es verdadera.

- *La fórmula* $a \vee \neg b \to \neg c \wedge (b \to a)$ *es satisfacible. Esto podemos comprobarlo si consideramos, por ejemplo, el mundo* $a = b = 1$ *y* $c = 0$ *pues en tal caso se tiene que*

$$1 \vee \neg 1 \to \neg 0 \wedge (1 \to 1) = 1 \vee 0 \to 1 \wedge 1 = 1 \to 1 = 1$$

  También es refutable, pues en el mundo $a = b = c = 1$ *la fórmula es falsa.*

$$1 \vee \neg 1 \to \neg 1 \wedge (1 \to 1) = 1 \vee 0 \to 0 \wedge 1 = 1 \to 0 = 0$$

  La fórmula es entonces contingente.

a	b	c	$a \vee \neg b$	$b \to a$	$\neg c \wedge (b \to a)$	$a \vee \neg b \to \neg c \wedge (b \to a)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

- *La fórmula* $(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b)$ *es una contradicción, pues su polinomio de Gegalkine y su tabla de verdad tabla de verdad son*

$$(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b) = (1 + a + a(1 + b))ab = (1 + a + a + ab)ab = (1 + ab)ab = ab + ab = 0$$

a	b	$\neg b$	$a \to \neg b$	$a \wedge b$	$(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

A continuación vamos a enumerar algunas fórmulas que son tautologías. Tanto α, β como γ representan fórmulas cualesquiera de un lenguaje proposicional (no necesariamente fórmulas atómicas). Mediante una tabla de verdad, o con el polinomio de Gegalkine podemos comprobarlo.

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ **Ley de silogismo**
2. $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ **Ley de silogismo**
3. $\alpha \to \alpha$ **Ley de identidad**
4. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ **Ley del "a fortiori"**
5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ **Ley de conmutación de premisas**
6. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ **Ley de Peirce**
7. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ **Ley de doble negación**
8. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ **Ley débil de doble negación**
9. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ **Ley de Duns Scoto**
10. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ **Ley de Duns Scoto**
11. $\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)$ **Ley débil de Duns Scoto**
12. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ **Ley débil de Duns Scoto**
13. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ **Ley de Clavius**
14. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ **Ley débil de Clavius**
15. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ **Ley de reducción al absurdo**
16. $(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ **Ley débil de reducción al absurdo**
17. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ **Ley de contraposición fuerte o "ponendo ponens"**
18. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ **Ley de contraposición débil o "tollendo tollens"**
19. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ **Ley de contraposición "ponendo tollens"**
20. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ **Ley de contraposición "tollendo ponens"**
21. $\alpha \vee \neg\alpha$ **Ley de tercio excluso**
22. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ **Ley de no contradicción**
23. $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
24. $\alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$
25. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
26. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
27. $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$
28. $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
29. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
30. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
31. $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma \to \beta))$
32. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$
33. $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
34. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
35. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$
36. $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$

4.3 Equivalencia lógica

Enumeramos a continuación una serie de equivalencias lógicas de las que dispondreis en la chuleta oficial pero que es conveniente memorizarlas.

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha & \equiv & \neg\neg\alpha \\
\alpha \to \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{array}
$$

4.4 Consecuencia lógica.

4.4.1 Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles

Definición 4.2 *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional. Se dice que Γ es* satisfacible *si existe un mundo en que todas son verdaderas. Es decir, existe v tal que $v(\gamma_1) = v(\gamma_2) = \cdots = v(\gamma_n) = 1$.*

Si $\Gamma = \emptyset$ entonces Γ es satisfacible.

Un conjunto de fórmulas es insatisfacible si no es satisfacible.

Es decir, un conjunto es satisfacible si existe una iterpretación para la que todas las fórmulas son ciertas. En el caso del conjunto vacío, cualquier interpretación hace ciertas (y falsas) todas las fórmulas. Por tanto, el conjunto vacío es satisfacible.

Se tiene entonces que Γ es insatisfacible si no existe ninguna interpretación I que haga ciertas todas las fórmulas. Si $\Gamma \neq \emptyset$ esto es equivalente a que para cualquier interpretación I existe un elemento $\alpha \in \Gamma$ tal que $I(\alpha) = 0$.

Un conjunto de fórmulas puede ser satisfacible o insatisfacible (pero no tautología, contingente, etc.).

Una fórmula puede ser satisfacible, refutable, tautología, contradicción o contingente.

Si un conjunto Γ tiene un único elemento, es decir, $\Gamma = \{\gamma\}$ entonces Γ es satisfacible si, y sólo si, γ es satisfacible. Y Γ es insatisfacible si, y sólo si, γ es una contradicción.

La siguiente proposición nos dice que estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible se puede hacer estudiando la satisfacibilidad o no de una fórmula.

Teorema 4.1 *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas. Entonces son equivalentes:*

1. *Γ es insatisfacible*
2. *$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ es contradicción.*
3. *Para cualquier valoración v, $\prod_{i=1}^{n} v(\gamma_i) = 0$.*

Notemos que si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ es un conjunto de fórmulas, y una (o más) de las fórmulas γ_i es de la forma $\gamma_i = \gamma_{i1} \wedge \gamma_{i2}$, entonces Γ es insatisfacible si, y sólo si, lo es el conjunto que resulta de sustituir en Γ la fórmula γ_i por las dos fórmulas γ_{i1} y γ_{i2}.

Ejemplo 4.4

1. *El conjunto $\{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ es insatisfacible. Es claro que las tres fórmulas no pueden ser verdaderas a la vez, pues si $\neg a$ y $\neg b$ son ciertas, entonces $a \vee b$ es falsa.*

   Vamos a comprobarlo haciendo la tabla de verdad de las tres fórmulas:

a	b	$a \vee b$	$\neg a$	$\neg b$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

   podemos ver que en ninguna fila los tres últimos elementos valen 1.

   O bien con polinomios de Gegalkine:
   $(a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b = (a+b+ab)(1+a)(1+b) = (a+b+ab+a+ab+ab)(1+b) = (b+ab)(1+b) = b+ab+b+ab = 0$

2. *Sean $\gamma_1 = a \vee \neg b \rightarrow a$, $\gamma_2 = a \leftrightarrow b$ y $\gamma_3 = b \rightarrow (a \leftrightarrow \neg b)$. Entonces el conjunto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ es también insatisfacible. La tabla de verdad de las tres fórmulas es:*

a	b	$a \vee \neg b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$	$b \rightarrow (a \leftrightarrow \neg b)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

y vemos que no hay ninguna valoración para la que las tres fórmulas sean ciertas. Obviamente, si calculáramos la tabla de verdad de $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$ nos quedaría una columna con todo ceros.

a	b	$a \vee \neg b \to a$	$a \leftrightarrow b$	$b \to (a \leftrightarrow \neg b)$	$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

O bien con polinomios de Gegalkine:
$a \vee \neg b \to a = 1 + (a \vee \neg b) + (a \vee \neg b)a = 1 + a + (1 + b) + a(1 + b) + (a + 1 + b + a(1 + b))a = b + ab + a$
$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$
$b \to (a \leftrightarrow \neg b) = 1 + b + b(a \leftrightarrow \neg b) = 1 + b + b(1 + a + (1 + b)) = 1 + b + ab + b = 1 + ab$
y multiplicando
$(a + b + ab)(1 + a + b)(1 + ab) = (a + a + ab + b + ab + b + ab + ab + ab)(1 + ab) = ab(1 + ab) = ab + ab = 0$

4.4.2 Implicación semántica

Ejemplo 4.5 *Vamos a comprobar que $a \vee b, \neg a \vDash b$. Para esto, calculamos la tabla de verdad de las fórmulas $a \vee b$, $\neg a$ y b.*

a	b	$a \vee b$	$\neg a$	b
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1

Y ahora nos fijamos en los mundos en que $a \vee b$ y $\neg a$ sean verdaderas. Esto sólo ocurre en la segunda fila, en el mundo $a = 0$ y $b = 1$. Y en este mundo la proposición b es verdadera. Por tanto, b es consecuencia lógica de $a \vee b$ y $\neg a$.

Con polinomios de Gegalkine. A partir de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + ab = 1 \\ 1 + a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + ab = 1 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 1 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1$$

O bien, viendo que el conjunto $\{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ es insatisfacible multiplicando polinomios de Gegalkine

$$(a + b + ab)(1 + a)(1 + b) = (a + b + ab + a + ab + ab)(1 + b) = (b + ab)(1 + b) = b + b + +ab + ab = 0$$

Ejemplo 4.6
Vamos a probar que

$$\{a \vee b \to c, \neg c\} \vDash \neg b$$

Lo haremos de tres formas diferentes:

- *Ecuaciones polinómicas en $\mathbb{Z}_2$. Igualamos los polinomios de Gegalkine de las hipótesis a 1 y tratamos de concluir que en esos casos el polinomio de Gegalkine de la tesis vale 1. Como $a \vee b \to c = 1 + (a \vee b) + (a \vee b)c = 1 + a + b + ab + ac + bc + abc$*

$$\left.\begin{array}{r} 1 + a + b + ab + ac + bc + abc = 1 \\ 1 + c = 1 \Rightarrow c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + a + b + ab = 1 \Rightarrow 1 + a + (1 + a)b = (1 + a)(1 + b) = 1 \Rightarrow a = b = 0$$

- *Viendo con polinomios de Gegalkine que $\{a \vee b \to c, \neg c, b\}$ es insatisfacible.*

$$(1 + a + b + ab + ac + bc + abc)(1 + c)b = (1 + a + b + ab + ac + bc + abc)b(1 + c) = bc(1 + c) = bc + bc = 0$$

- *Tablas de verdad.*

  De esta forma, podemos optar por construir una tabla de verdad con las fórmulas $a \vee b \to c$, $\neg c$ y $\neg b$, o bien una tabla de verdad con las fórmulas $a \vee b \to c$, $\neg c$ y b.

a	b	c	$a \vee b \to c$	$\neg c$	$\neg b$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0

a	b	c	$a \vee b \to c$	$\neg c$	b
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Si queremos resolverlo analizando la primera tabla, debemos fijarnos en los mundos en que tanto $a \vee b \to c$ *como* $\neg c$ *son verdaderas. Esto ocurre solamente en la primera fila. Y puesto que en ella* $\neg b = 1$*, podemos concluir que* $\neg b$ *es consecuencia lógica de* $\{a \vee b \to c, \neg c\}$*. Lo que ocurra en el resto de las filas de la tabla no nos dice nada acerca de si la implicación es o no cierta.*

Si queremos resolverlo analizando la segunda tabla, debemos ver si hay algún mundo (fila) para el que $a \vee b \to c$*,* $\neg c$ *y* b *sean verdaderas a la vez. Como esto no ocurre, significa que el conjunto* $\{a \vee b \to c, \neg c, b\}$ *es insatisfacible, luego* $a \vee b \to c, \neg c \vDash \neg b$*.*

Ejemplo 4.7 *Vamos a estudiar si*

$$b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b \vDash b \leftrightarrow c \vee d$$

Para esto, vamos a calcular la tabla de verdad de las fórmulas $b \to c \vee a$*,* $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$*,* $d \to a \wedge b$*, y para aquellos mundos en las que las tres fórmulas sean verdaderas, calcularemos el valor de verdad de* $b \leftrightarrow c \vee d$*.*

a	b	c	d	$b \to c \vee a$	$a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$	$d \to a \wedge b$	$b \leftrightarrow c \vee d$
0	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	0	0	0	1	
0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	

Los únicas mundos en los que $b \to c \vee a$*,* $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$ *y* $d \to a \wedge b$ *son ciertas son las filas* 9, 11, 13 *y* 15*. Sólo para esos mundos hemos calculado el valor de verdad de* $b \leftrightarrow c \vee d$*. Lo que ocurra en los* 12 *mundos restantes no influye para nada en que la implicación semántica sea cierta o no.*

Si el valor de verdad de $b \leftrightarrow c \vee d$ *hubiera sido* 1 *en estos cuatro mundos, habríamos obtenido que* $\{b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b\} \vDash b \leftrightarrow c \vee d$*. Pero los mundos de las filas* 11 *y* 13 *nos dice que esto último no es cierto.*

En algunos problemas aparecen mundos en que viven veraces y mendaces (caballeros y escuderos) de forma que los veraces dicen siempre la verdad y los mendaces mienten siempre.
Suponiendo que A es una persona que dice α y llamando $a =$"A es veraz" resulta que $a = \alpha$. En efecto,

- si A es veraz $\alpha = 1$ y $a = 1$
- si A es mendaz $\alpha = 0$ y $a = 0$

Veamos como utilizar esto.

Ejemplo 4.8 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan"*
- *B: "Las ranas no vuelan y A es mendaz"*
- *C: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy mendaz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y los nativos usando polinomios de Gegalkine.

$a = r$

$b = \neg r \wedge \neg a = (1+r)(1+a) = 1 + a + r + ar = 1 + r$ *Por tanto* $r = 0$, $b = 1$, $a = 0$ *y* c *puede ser* 0 *o* 1.

$c = r \leftrightarrow \neg c = 1 + r + 1 + c = r + c \Rightarrow r = 0$

4.4.3 Teorema de la deducción

Ejemplo 4.9

Vamos a demostrar, usando el teorema de la deducción, que si α *y* β *son dos fórmulas de un lenguaje proposicional, entonces* $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ *es una tautología.*

Sabemos que eso es equivalente a que $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Aplicamos el teorema de la deducción, y tenemos que eso es equivalente a que $\alpha \vDash \beta \to \alpha$. *Y nuevamente por el teorema de la deducción nos queda que hemos de comprobar que* $\alpha, \beta \vDash \alpha$.

Y esto último es evidente, pues si tomamos $\alpha = \beta = 1$, *entonces* $\alpha = 1$.

Ejemplo 4.10 *Usando el Teorema de la Deducción prueba que las siguientes fórmulas son tautologías:*

1. $\varphi = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ *(autodistributiva de la implicación)*

$$\begin{aligned} \vDash \varphi \quad & \textit{si, y sólo si,} \quad \vDash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \alpha \to (\beta \to \gamma) \vDash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vDash \alpha \to \gamma \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vDash \gamma \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \{\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha,\ \neg\gamma\} \textit{ es insatisfacible.} \end{aligned}$$

Producto de polinomios de Gegalkine:

$$(1+\alpha+\alpha(1+\beta+\beta\gamma))(1+\alpha+\alpha\beta)\alpha(1+\gamma) = (1+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma)\alpha\beta(1+\gamma) = \alpha\beta\gamma(1+\gamma) = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma = 0$$

Que prueba la insatisfacibilidad. O bien, se trata de demostrar que no pueden valer 1 *simultaneamente.*

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \to (\beta \to \gamma) = 1 \\ \alpha \to \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \neg\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \to \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{\textit{ABSURDO}}$$

2. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ *(ley clásica de reducción al absurdo)*

Ejemplo 4.11 *Sean* φ, ψ, χ, θ, τ *fórmulas de un lenguaje proposicional. Vamos a comprobar que*

$$\alpha = \Big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\Big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

es una tautología.

Lo que vamos a hacer es comprobar que α *es consecuencia lógica de* $\emptyset$ *(es decir,* $\vDash \alpha$*). Y para esto, usaremos el teorema de la deducción y el teorema de la insatisfacibilidad.*

$$\begin{aligned} \models \alpha \quad & \textit{si, y sólo si,} \quad \models \Big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\Big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big) \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau \models \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big) \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi \models \theta \to \varphi \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta \models \varphi \\ & \textit{si, y sólo si,} \quad \{\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\} \textit{ es insatisfacible.} \end{aligned}$$

Ahora se trata de demostrar que no pueden valer 1 *simultaneamente.*

$$\left.\begin{array}{r} \big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau = 1 \\ \tau \to \varphi = 1 \\ \theta = 1 \\ \neg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} \big((\neg\chi \to \neg\theta) \to \chi\big) \to \tau = 1 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} (\neg\chi \to \neg\theta) \to \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \neg\chi \to \neg\theta = 1 \\ \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 1 \to 0 = 1 \\ \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \textbf{\textit{ABSURDO}}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Y con esto podemos concluir que el conjunto

$$\{\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\}$$

es insatisfacible, que es lo que estábamos comprobando.

Con esta comprobación (que este conjunto es insatisfacible) hemos demostrado que α *es una tautología.*

Un intento de resolver este ejercicio usando tablas de verdad es tedioso (como son 5 proposiciones básicas la tabla de verdad tiene $2^5 = 32$ *filas y hay también demasiadas subfórmulas que evaluar) así que por su extensión tiene una alta probabilidad de error.*

De todas formas, en el libro del Dr. Jesús García Miranda está resuelto por tablas de verdad.

4.5 Forma clausulada de una fórmula.

Teorema 4.2 *Sea* α *una fórmula que no es tautología. Entonces existe otra fórmula* β*, lógicamente equivalente a* α*, y que está en forma clausulada.*

Algoritmo de la forma clausulada

Vamos a dar un método para transformar una proposición δ en otra que sea lógicamente equivalente y que esté en forma clausulada. Para esto, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Eliminación del bicondicional. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, la sustituimos por $(\alpha_1 \to \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \to \alpha_1)$.

2. Eliminación del condicional. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \to \alpha_2$ la sustituimos por $\neg\alpha_1 \vee \alpha_2$.

3. Interiorización de la negación. Cualquier subfórmula de la forma

    - $\neg\neg\alpha$ la sustituimos por α.
    - $\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ la sustituimos por $\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$.
    - $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ la sustituimos por $\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$.

    Llegados aquí, nos encontraremos una proposición en la que sólo intervienen las conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\neg$. Además, esta última solo actua sobre las fórmulas atómicas.

4. Distribución de la $\vee$ sobre la $\wedge$. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \beta_2)$ la sustituimos por $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_1 \vee \beta_2)$. Y lo mismo, si la subfórmula es de la forma $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge \beta_1$ la sustituimos por $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_1)$.

5. Eliminación de redundancias. Dentro de una cláusula eliminación de literales por idempotencia. Absorción de cláusulas más grandes por las mas chicas.

Ejemplos 4.12

1.

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b \to c \vee (d \wedge a) &\equiv \neg(a \wedge \neg b) \vee c \vee (d \wedge a) \equiv \neg a \vee b \vee c \vee (d \wedge a) \\ &\equiv (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee a) \equiv \neg a \vee b \vee c \vee d \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} c \wedge (a \vee b) \to \neg a \vee b &\equiv \neg(c \wedge (a \vee b)) \vee \neg a \vee b \equiv \neg c \vee \neg(a \vee b) \vee \neg a \vee b \\ &\equiv \neg c \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee b \equiv (\neg c \vee \neg a \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee \neg a \vee b) \\ &\equiv \neg c \vee \neg a \vee b \end{aligned}$$

3. $\neg(a \to b) \to a \wedge \neg(a \wedge b)$

4. $a \wedge (a \vee b \to d) \wedge (d \to \neg a)$

5. $(a \wedge c) \vee b \to d \wedge (d \to \neg a)$

6. $\neg a \to (b \to a) \wedge \neg(a \wedge b)$

7. $(a \wedge \neg(b \to c \vee e)) \vee a$

8. $b \wedge (a \vee b) \to d \wedge \neg(d \to \neg a)$

9. $b \wedge a \to (\neg b \to d \wedge \neg(d \to \neg a))$

10. $\neg(b \to a) \wedge \neg(a \wedge b) \to \neg a \vee b$

Ejemplo 4.13

Queremos hallar la forma clausulada de

$$\alpha = ((a \vee ((b \wedge c) \vee (d \wedge \neg e))) \wedge (\neg b \vee c)) \vee ((a \wedge \neg c) \wedge (c \vee \neg b \vee d))$$

Notemos que no tenemos ninguna conectiva $\to$, ninguna conectiva $\leftrightarrow$, y las veces que aparece la conectiva $\neg$ actúa únicamente sobre fórmulas atómicas. Entonces, hemos de aplicar sólo la propiedad distributiva.

Para esto, buscamos las subfórmulas más pequeñas que sean disyunción de dos o más fórmulas, y alguna de éstas sea una conjunción. Dicho de otra forma, tenemos que encontrar la conectiva $\wedge$ dentro de un paréntesis, y la conectiva $\vee$ fuera de él.

Nos encontramos con la subfórmula $(b \wedge c) \vee (d \wedge \neg e)$. Sustituimos esta sufórmula por

$$(b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e)$$

y nos queda

$$\alpha \equiv ((a \vee ((b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e))) \wedge (\neg b \vee c)) \vee (a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d))$$

La siguiente subfórmula donde encontramos una disyunción de fórmulas, en la que alguna de ellas es una conjunción es en

$$\beta = a \vee ((b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e))$$

Vemos que tiene la forma $a \vee (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_4)$. La sustituimos por $(a \vee \beta_1) \wedge (a \vee \beta_2) \wedge (a \vee \beta_3) \wedge (a \vee \beta_4)$. La fórmula α es entonces equivalente a

$$(((a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e)) \wedge (\neg b \vee c)\big] \vee (a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d))$$

Y ahora, por la asociatividad de $\wedge$ podemos cambiarla por

$$((a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee c)) \vee (a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d))$$

Y nos encontramos ahora con una fórmula que responde a la forma

$$\beta \vee \gamma = (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_4 \wedge \beta_5) \vee (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3)$$

que después de aplicar la distributividad se transforma en la conjunción de 15 fórmulas. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & (a \vee b \vee d \vee a) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee a) \ \wedge \ (a \vee c \vee d \vee a) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee a) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee a) \ \wedge \\ & & \wedge \ (a \vee b \vee d \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee c \vee d \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee \neg c) \ \wedge \\ & & \wedge \ (\neg b \vee c \vee \neg c) \ \wedge (a \vee b \vee d \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \\ & & \wedge \ (a \vee c \vee d \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee c \vee \neg b \vee d) \end{array}$$

Y finalmente, para obtener la forma clausular, eliminamos aquellos términos en los que aparezca $\lambda \vee \lambda^c$, puesto que son tautologías, y los literales repetidos haciendo uso de la equivalencia $\beta \vee \beta \equiv \beta$:

$$(a \vee b \vee d) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee c \vee d) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg c \vee d) \ \wedge$$

$$\wedge \ (a \vee b \vee \neg c \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c \vee d) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c \vee d \vee \neg e) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee d)$$

Y esta ya es una forma clausular. Ahora bien, si tenemos en cuenta la siguiente equivalencia lógica

$$(\beta \vee \gamma) \wedge \beta \equiv \beta$$

podemos simplificarla, ya que

- $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d \vee \neg e) \ \equiv a \vee \neg b \vee c.$
- $(a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \equiv a \vee b \vee d.$

Y por tanto, otra forma clausular de α es:

$$(a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$$

Veamos a continuación otros ejemplos completos de cómo obtener la forma clausular de una fórmula.

Ejemplo 4.14

1. *Sea $\alpha = ((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)) \wedge ((a \to b) \leftrightarrow c)$. Vamos a calcular una forma clausular para α.*

   Tal y como hemos explicado más arriba, realizamos este proceso en varias etapas:

   - *En primer lugar, sustituimos la conectiva $\leftrightarrow$. Nos queda entonces:*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & = & ((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)) \wedge ((a \to b) \leftrightarrow c) \\ & \equiv & \big((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)\big) \wedge \big[\big((a \to b) \to c\big) \wedge \big(c \to (a \to b)\big)\big] \end{array}$$
   - *A continuación sustituimos las conectivas $\to$. El orden en que se haga esto no es importante. Una forma de hacerlo es:*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \big((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)\big) \wedge \big[\big((a \to b) \to c\big) \wedge \big(c \to (a \to b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg c \to b)\big) \wedge \big[\big((\neg a \vee b) \to c\big) \wedge \big(c \to (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg\neg c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \end{array}$$
   - *Eliminamos la doble negación*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg\neg c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \end{array}$$

- *Introducimos las conectivas $\neg$ en los paréntesis y eliminamos de nuevo las dobles negaciones que nos aparezcan.*

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \big(\neg(a\vee\neg b)\vee(c\vee b)\big)\wedge\big[\big(\neg(\neg a\vee b)\vee c\big)\wedge\big(\neg c\vee(\neg a\vee b)\big)\big]\\ &\equiv \big((\neg a\wedge\neg\neg b)\vee(c\vee b)\big)\wedge\big[\big((\neg\neg a\wedge\neg b)\vee c\big)\wedge\big(\neg c\vee(\neg a\vee b)\big)\big]\\ &\equiv \big((\neg a\wedge b)\vee(c\vee b)\big)\wedge\big[\big((a\wedge\neg b)\vee c\big)\wedge\big(\neg c\vee(\neg a\vee b)\big)\big]\end{aligned}$$

  Como podemos ver, únicamente tenemos las conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\neg$, y la conectiva $\neg$ afecta solo a proposiciones atómicas.

- *Distribuimos las conectivas $\vee$ y $\wedge$.*

  Si nos fijamos, nuestra fórmula es ahora conjunción de tres subfórmulas:

  $\alpha_1=(\neg a\wedge b)\vee(c\vee b)$, $\alpha_2=(a\wedge\neg b)\vee c$ *y* $\alpha_3=\neg c\vee(\neg a\vee b)$

  Entonces, hallamos por serparado la forma clausular de cada una de estas subfórmulas:

  - $\alpha_1=(\neg a\wedge b)\vee c\vee b\equiv(\neg a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c\vee b)\equiv(\neg a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c)$

    Esta última fórmula podría simplificarse a $b\vee c$, pero por ahora lo dejamos así.
  - $\alpha_2=(a\wedge\neg b)\vee c\equiv(a\vee c)\wedge(\neg b\vee c)$.
  - $\alpha_3=\neg c\vee(\neg a\vee b)\equiv\neg a\vee b\vee\neg c$.

  Y tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\\ &\equiv (\neg a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(a\vee c)\wedge(\neg b\vee c)\wedge(\neg a\vee b\vee\neg c)\end{aligned}$$

  Y ya tenemos una forma clausular de α.

  Ahora podemos simplificarla si nos valemos de la equivalencia lógica $(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\neg\beta)\equiv\alpha$. Esta equivalencia lógica nos dice, en nuestro caso:

  - $(\neg a\vee b\vee c)\wedge(\neg a\vee b\vee\neg c)\equiv\neg a\vee b$
  - $(\neg b\vee c)\wedge(b\vee c)\equiv c$.

  Luego $\alpha\equiv(\neg a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge c$.

  Y puesto que $(a\vee c)\wedge c\equiv c$ nos queda finalmente:

$$\alpha\equiv(\neg a\vee b)\wedge c$$

2. *Vamos a calcular la forma clausular de:*

$$\alpha=\big[\big((a\to b)\wedge\neg c\big)\to\big(\neg b\leftrightarrow(c\vee a)\big)\big]\vee\big[d\vee\big(\neg c\to(a\wedge b)\big)\big]$$

   En este caso vamos a seguir un orden diferente al del ejemplo anterior.

   La fórmula dada es equivalente a

$$\big[\neg\big((a\to b)\wedge\neg c\big)\vee\big(\neg b\leftrightarrow(c\vee a)\big)\big]\vee\big[d\vee\big(\neg c\to(a\wedge b)\big)\big]$$

   que está expresada como disyunción de tres fórmulas:

$$\neg\big((a\to b)\wedge\neg c\big)\qquad\neg b\leftrightarrow(c\vee a)\qquad d\vee\big(\neg c\to(a\wedge b)\big)$$

   Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas por separado.

$$\begin{array}{l|l|l}
\neg\big((a\to b)\wedge\neg c\big) & \neg b\leftrightarrow(c\vee a) & d\vee\big(\neg c\to(a\wedge b)\big)\\
\neg\big((\neg a\vee b)\wedge\neg c\big) & \big(\neg b\to(c\vee a)\big)\wedge\big((c\vee a)\to\neg b\big) & d\vee\big(\neg\neg c\vee(a\wedge b)\big)\\
\neg(\neg a\vee b)\vee\neg\neg c & \big(\neg\neg b\vee(c\vee a)\big)\wedge\big(\neg(c\vee a)\vee\neg b\big) & d\vee\big(c\vee(a\wedge b)\big)\\
(\neg\neg a\wedge\neg b)\vee\neg\neg c & \big(b\vee(c\vee a)\big)\wedge\big((\neg c\wedge\neg a)\vee\neg b\big) & d\vee\big((c\vee a)\wedge(c\vee b)\big)\\
(a\wedge\neg b)\vee c & (a\vee b\vee c)\wedge\big((\neg c\vee\neg b)\wedge(\neg a\vee\neg b)\big) & (d\vee c\vee a)\wedge(d\vee c\vee b)\\
(a\vee c)\wedge(\neg b\vee c) & (a\vee b\vee c)\wedge(\neg a\vee\neg b)\wedge(\neg b\vee\neg c) & (a\vee c\vee d)\wedge(b\vee c\vee d)
\end{array}$$

   Es decir, hemos llegado a que la fórmula inicial es equivalente a una de la forma

$$(C_1\wedge C_2)\vee(C_1'\wedge C_2'\wedge C_3')\vee(C_1''\wedge C_2'')$$

que es equivalente a

$$(C_1 \vee C_1' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_1' \vee C_2'') \wedge (C_1 \vee C_2' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_2' \vee C_2'') \wedge (C_1 \vee C_3' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_3' \vee C_2'') \wedge$$
$$\wedge (C_2 \vee C_1' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_1' \vee C_2'') \wedge (C_2 \vee C_2' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_2' \vee C_2'') \wedge (C_2 \vee C_3' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_3' \vee C_2'')$$

Y ahora $C_1 \vee C_1' \vee C_1' = (a \vee c) \vee (a \vee b \vee c) \vee (a \vee c \vee d) \equiv a \vee b \vee c \vee d$*, también* $C_1 \vee C_1' \vee C_2'' \equiv a \vee b \vee c \vee d$ *mientras que el resto de términos podemos eliminarlos, ya que son tautologías, al contener al mismo tiempo un literal y su negación.*

Y así, podemos concluir que la fórmula α *es equivalente a*

$$a \vee b \vee c \vee d$$

4.6 El problema de la implicación semántica

Hemos definido en secciones precedentes lo que significa

$$\Gamma \vDash \alpha$$

que viene a decirnos cuando un razonamiento es correcto desde el punto de vista lógico. Vamos a desarrollar técnicas que nos permitan dar respuesta a este problema dentro de la lógica proposicional.

Hemos visto que el problema de la implicación semántica lo podemos transformar en un problema de insatisfacibilidad. Más precisamente, la respuesta a los problemas

$$\Gamma \vDash \alpha \qquad \text{y} \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \text{ es insatisfacible}$$

es siempre la misma.

Además, hemos visto dos formas de resolver el problema: con tablas de verdad o con ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.

De momento, vamos a aparcar el tema de la implicación semántica, y vamos a fijarnos únicamente en estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible.

En la sección anterior aprendimos a calcular, dada una fórmula, otra fórmula lógicamente equivalente a ella y que está en forma clausular.

Entonces, a la hora de determinar si un conjunto de fórmulas es insatisfacible o no, podemos sustituir cada fórmula por otra que esté en forma clausular.

Esto lo recogemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Sea* Γ *un conjunto de fórmulas;* Γ' *un conjunto de fórmulas que se obtiene sustituyendo cada fórmula de* Γ *por una forma clausular de esa fórmula, y* Γ'' *el conjunto que resulta de sustituir cada fórmula de* Γ' *por las cláusulas que la forman. Entonces son equivalentes:*

1. Γ *es insatisfacible.*
2. Γ' *es insatisfacible.*
3. Γ'' *es insatisfacible.*

4.6.1 Algoritmo de Davis-Putnam

Con todo esto, podemos describir el algoritmo de Davis-Putnam. Este algoritmo se basa en tres reglas:

1. Sea Σ un conjunto de cláusulas. Supongamos que en Σ hay una **cláusula unit** λ. Entonces

   $$\Sigma \text{ es insatisfacible si, y sólo si, } \Sigma_\lambda \text{ es insatisfacible.}$$

2. Sea Σ un conjunto de cláusulas. Supongamos que en Σ aparece un **literal puro** λ. Es decir, hay al menos una cláusula en la que aparece el literal λ y el literal λ^c no aparece en ninguna. Entonces

$$\Sigma \text{ es insatisfacible si, y sólo si, } \Sigma_\lambda \text{ es insatisfacible.}$$

3. Sea Σ un conjunto de cláusulas, y sea λ un literal que aparece en alguna cláusula de Σ. Entonces:

$$\Sigma \text{ es insatisfacible si, y sólo si, } \Sigma_\lambda \text{ y } \Sigma_{\lambda^c} \text{ son insatisfacibles.}$$

Ejemplo 4.15

1. *Tomamos el conjunto* $\Sigma = \{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$. *Vamos a estudiar si es o no insatisfacible. Lo haremos por el algoritmo de Davis-Putnam.*

   A continuación vamos a escribir el árbol que genera el algoritmo.

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\Big|\ e = 0$$

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\Big|\ b = 1$$

$$\{a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$a = 1 \qquad\qquad a = 0$$

$$\{\neg d,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\} \qquad \{\neg c \vee d,\ c \vee \neg d,\ d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\Big|\ d = 0 \qquad\qquad \Big|\ d = 1$$

$$\{\neg c\} \qquad\qquad \{c\}$$

$$\Big|\ c = 0 \qquad\qquad \Big|\ c = 1$$

$$\{\} \qquad\qquad \{\}$$

   La rama de la derecha no habría sido necesario hacerla, ya que la rama de la izquierda acaba en el conjunto vacío, luego con eso sabemos que Σ *es satisfacible. De todas formas, la rama de la derecha nos da otro mundo en el que todas las cláusulas de* Σ *son verdaderas que sería* $a = e = 0$ *y* $b = c = d = 1$

2. *Vamos a demostrar que la fórmula*

$$(a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

   es una tautología. Esto sabemos que es equivalente a probar:

$$\vDash (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

   por el teorema de la deducción esto se traduce en demostrar que

$$\{a \to (b \to c)\} \vDash \neg(a \to \neg b) \to c$$

   y aplicando otra vez el teorema de la deducción nos queda el problema

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b)\} \vDash c$$

Lo que es equivalente a demostrar que el conjunto

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b), \neg c\}$$

es insatisfacible.

Hallamos la forma clausular de cada una de las fórmulas anteriores:

$$\begin{array}{l|l|l}
a \to (b \to c) & \neg(a \to \neg b) & \neg c \\
\neg a \vee (b \to c) & \neg(\neg a \vee \neg b) & \\
\neg a \vee (\neg b \vee c) & \neg\neg a \wedge \neg\neg b & \\
\neg a \vee \neg b \vee c & a \wedge b &
\end{array}$$

Y entonces lo que nos queda probar es que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible;

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$$

El árbol en este caso sería:

$$\begin{array}{c}
\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\} \\
\Big| \; a = 1 \\
\{\neg b \vee c,\ b,\ \neg c\} \\
\Big| \; b = 1 \\
\{c, \neg c\} \\
\Big| \; c = 1 \\
\{\square\}
\end{array}$$

3. *En el ejemplo 4.11 demostramos que*

$$\vDash \Big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\Big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

haciendo uso de ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$. Vamos a demostrarlo ahora con el algoritmo de Davis-Putnam. En el citado ejemplo vimos, usando el teorema de la deducción y el teorema de la implicación semántica que este problema equivalía a demostrar que el conjunto de fórmulas

$$\Big\{\big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau,\quad \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi)\Big\}$$

es insatisfacible.

Las dos últimas están en forma clausular. En cuanto a $\tau \to \varphi$ su forma clausular es $\neg\tau \vee \varphi$.

Hallemos entonces la forma clausular de $\beta = \big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau$

$$\begin{array}{rcl}
\beta & = & \big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau \\
& \equiv & \neg\big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \neg\big[\neg[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \neg\big[\neg[\neg(\varphi \to \psi) \vee (\neg\chi \to \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \neg\big[\neg[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\chi \vee \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \big[\neg\neg[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \big[[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \big[[(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \big[[(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & \big[[(\varphi \vee \chi \vee \neg\theta) \wedge (\neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
& \equiv & [(\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau) \wedge (\neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau)] \wedge (\neg\chi \vee \tau)
\end{array}$$

Por tanto, hemos de probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \neg\chi \vee \tau,\ \varphi \vee \neg\tau,\ \neg\varphi,\ \theta\}$$

es insatisfacible.

$$\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \neg\chi \vee \tau,\ \varphi \vee \neg\tau,\ \neg\varphi,\ \theta\}$$

$$\Big|\ \varphi = 0$$

$$\{\chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\quad \neg\chi \vee \tau,\quad \neg\tau,\ \theta\}$$

$$\Big|\ \tau = 0$$

$$\{\chi \vee \neg\theta,\quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta,\quad \neg\chi,\ \theta\}$$

$$\Big|\ \chi = 0$$

$$\{\neg\theta,\quad \neg\psi \vee \neg\theta,\ \theta\}$$

$$\Big|\ \theta = 1$$

$$\{\square,\ \neg\psi\}$$

Como el árbol tiene una única rama, y acaba en un conjunto que contiene a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible.

4. *Estudia si es cierto que*

$$(a \to \neg c) \to a,\quad a \to \neg b,\quad \neg(\neg c \wedge \neg b) \vDash (\neg c \to a) \to b$$

Lo primero que hacemos es transformar este problema en un problema de satisfacibilidad o insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas.

Por el teorema de la deducción, este problema es equivalente a

$$(a \to \neg c) \to a,\quad a \to \neg b,\quad \neg(\neg c \wedge \neg b),\quad \neg c \to a \vDash b$$

y a su vez, este es equivalente a comprobar si el siguiente conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \{(a \to \neg c) \to a,\quad a \to \neg b,\quad \neg(\neg c \wedge \neg b),\quad \neg c \to a,\quad \neg b\}$$

es insatisfacible.

Calculamos entonces la forma clausular de cada una de las fórmulas:

$(a \to \neg c) \to a$	$a \to \neg b$	$\neg(\neg c \wedge \neg b)$	$\neg c \to a$	$\neg b$
$(\neg a \vee \neg c) \to a$	$\neg a \vee \neg b$	$c \vee b$	$c \vee a$	
$\neg(\neg a \vee \neg c) \vee a$				
$(a \wedge c) \vee a$				
$(a \vee a) \wedge (c \vee a)$				
a	$\neg a \vee \neg b$	$b \vee c$	$a \vee c$	$\neg b$

Por tanto, nos proponemos estudiar si el conjunto de cláusulas

$$\{a,\ \neg a \vee \neg b,\ b \vee c,\ a \vee c,\ \neg b\}$$

es o no insatisfacible. Aplicamos para ello el algoritmo de Davis-Putnmam.

$$
\begin{array}{c}
\{a,\ \neg a \vee \neg b,\ b \vee c,\ a \vee c,\ \neg b\} \\
\big|\ a = 1 \\
\{\neg b,\ b \vee c,\ \neg b\} \\
\big|\ b = 0 \\
\{c\} \\
\big|\ c = 1 \\
\{\}
\end{array}
$$

Al haber llegado al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas del que partíamos es satisfacible, y por tanto, la respuesta a si

$$(a \to \neg c) \to a,\ a \to \neg b,\ \neg(\neg c \wedge \neg b) \vDash (\neg c \to a) \to b$$

es que no.

Pero además, el algoritmo nos dice que en el mundo $a = c = 1$ y $b = 0$ las hipóteis son ciertas y la tesis falsa.

4.6.2 Método de resolución

Teorema 4.4 *Sean α, β, γ tres fórmulas en un lenguaje proposicional. Entonces*

$$\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma\} \vDash \beta \vee \gamma$$

El concepto de resolvente

Lo primero que necesitamos para aplicar el método de resolución es el concepto de resolvente.

Supongamos que C es una cláusula, y que λ es un literal que aparece en la cláusula C. Como en la sección anterior denotaremos por $C - \lambda$ a la cláusula que resulta de eliminar el literal λ de la cláusula C. Por ejemplo, si $C = a \vee \neg b \vee d$ entonces $C - a = \neg b \vee d$, mientras que $C - \neg b = a \vee d$. Si $C = b$ entonces $C - b = \square$.

Definición 4.3 *Sean C_1 y C_2 dos cláusulas. Supongamos que λ es un literal tal que aparece en la cláusula C_1 y λ^c aparece en C_2. Una cláusula que sea equivalente a $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda^c)$ es lo que se denomina una* resolvente *de C_1 y C_2.*

Observación:

En la definición de resolvente hay dos casos especiales:

1. La fórmula $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda)$ es una tautología (por ejemplo, si $C_1 = a \vee b \vee \neg c$ y $C_2 = \neg a \vee c \vee d$). En este caso, consideraremos excepcionalmente a la fórmula $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda)$ una resolvente, aún cuando no sea una cláusula (en el ejemplo, la resolvente sería $b \vee c \vee \neg c \vee d$ o $a \vee \neg a \vee b \vee d$). No obstante, en este caso, esta resolvente no aporta nada al método de resolución. Lo que **nunca** puede hacerse es obtener como resolvente $b \vee d$ (algunos llaman a esto *resolver a la doble*).
2. $C_1 = \lambda$ y $C_2 = \lambda^c$. En este caso, la resolvente es $\square$.

El teorema 4.4 nos dice que si C_1 y C_2 son cláusulas y R una resolvente suya, entonces $\{C_1, C_2\} \vDash R$.

Ejemplo 4.16

1. *Si tenemos las cláusulas $C_1 = \neg a \vee b$ y $C_2 = a$ entonces una resolvente de C_1 y C_2 es b. Nótese que $C_1 \equiv a \to b$, luego al obtener esta resolvente lo que estamos afirmando es que*

   $$\{a, a \to b\} \vDash b$$

   un hecho conocido como "modus ponens".

2. *Supongamos que* $C_1 = a \vee \neg c \vee d$ *y* $C_2 = b \vee c \vee d$. *Entonces* $C_1 - \neg c = a \vee d$ *y* $C_2 - c = b \vee d$, *luego* $(C_1 - \neg c) \vee (C_2 - c) = (a \vee d) \vee (b \vee d) \equiv a \vee b \vee d$.

Definición 4.4 *Sea* Γ *un conjunto de cláusulas, y* C *una cláusula. Una* deducción (por resolución) *de* C *a partir de* Γ *es una sucesión de cláusulas* $C_1, C_1, \cdots, C_n$ *donde:*

- $C_n = C$.
- $C_i \in \Gamma$ *o* C_i *es una resolvente de dos cláusulas del conjunto* $\{C_1, \cdots, C_{i-1}\}$

Ejemplo 4.17 *Sea* $\Gamma = \{\neg a \vee b,\ \neg c \vee \neg d,\ b \vee \neg c,\ \neg b \vee c,\ a \vee b,\ a \vee c\}$. *Vamos a dar una deducción de la cláusula* $\neg d$. *Tomamos:*

- $C_1 = \neg a \vee b$ *que pertenece a* Γ.
- $C_2 = a \vee c$ *que pertenece a* Γ.
- $C_3 = b \vee c$ *que es una resolvente de* C_1 *y* C_2.
- $C_4 = \neg b \vee c$ *que pertenece a* Γ.
- $C_5 = c$, *que es una resolvente de* C_3 *y* C_4.
- $C_6 = \neg c \vee \neg d$ *que pertenece a* Γ.
- $C_7 = \neg d$ *que es una resolvente de* C_5 *y* C_6.

Tenemos entonces que $\Gamma \vDash \neg d$.

Si C_1 y C_2 son dos cláusulas, el hecho de que R es una resolvente de C_1 y C_2 lo representaremos:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
C_1 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

Siguiendo este criterio, la deducción que acabamos de hacer la podemos escribir como sigue:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\neg a \vee b \arrow[d] & a \vee c \arrow[dl] \\
b \vee c \arrow[d] & \neg b \vee c \arrow[dl] \\
c \arrow[d] & \neg c \vee d \arrow[dl] \\
\neg d &
\end{tikzcd}$$

Estamos ya en condiciones de dar el teorema fundamental de esta sección:

Teorema 4.5 (Principio de resolución) *Sea* Γ *un conjunto de cláusulas. Entonces* Γ *es insatisfacible si, y sólo si, hay una deducción por resolución de la cláusula vacía.*

Ejemplo 4.18

1. *Vamos a demostrar que la fórmula*

$$(a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

es una tautología. Esto sabemos que es equivalente a probar:

$$\vDash (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

aplicando el teorema de la deducción dos veces el problema se transforma en

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b)\} \vDash c$$

o equivalentemente, en demostrar que el conjunto

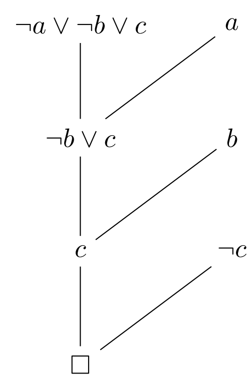
$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b), \neg c\}$$

es insatisfacible.

En el ejemplo 4.15 calculamos la forma clausular de estas fórmulas. Lo que nos queda entonces es probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ \ a,\ \ b,\ \ \neg c\}$$

es insatisfacible. Para eso buscamos una deducción de la cláusula vacía.



Al llegar a la cláusula vacía deducimos que el conjunto de cláusulas es insatisfacible, y por tanto la fórmula α es una tautología.

2. *Ya hemos demostrado de varias formas que la fórmula*

$$((((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi) \to \tau) \to ((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi))$$

es una tautología. Ahora vamos a hacerlo utilizando el Principio de Resolución.

En primer lugar necesitamos transformar el problema en otro equivalente que consiste en decidir si un conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

Como esto ya se ha hecho en la sección del algoritmo de Davis-Putnam (ver ejemplo 4.15), copiamos el resultado: hemos de probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\quad \neg\chi \vee \tau,\quad \varphi \vee \neg\tau,\quad \neg\varphi,\quad \theta\}$$

es insatisfacible.

Tratamos entonces de deducir la cláusula vacía.

$$\begin{tikzcd}
\varphi \lor \chi \lor \neg\theta \lor \tau \arrow[d, dash] & \neg\chi \lor \tau \arrow[dl, dash] \\
\varphi \lor \neg\theta \lor \tau \arrow[d, dash] & \varphi \lor \neg\tau \arrow[dl, dash] \\
\varphi \lor \neg\theta \arrow[d, dash] & \neg\varphi \arrow[dl, dash] \\
\neg\theta \arrow[d, dash] & \theta \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Al haber obtenido la cláusula vacía, concluimos que la fórmula inicial es una tautología.

3. *Estudiemos si es verdad que*

$$\{q \to p \lor r\} \vDash (p \to q) \to (p \to ((r \to q) \to r))$$

En primer lugar, aplicamos el teorema de la deducción 3 veces, y el problema se transforma en estudiar si

$$\{q \to p \lor r,\ p \to q,\ p,\ r \to q\} \vDash r$$

Y ahora, vamos a resolver esto de varias formas diferentes, tal y como hemos ido viendo a lo largo del tema.

- *Ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.*
  Supongamos que tenemos un mundo en el que todas las premisas son ciertas y calculando polinomios de Gegalkine:

$$\left.\begin{aligned} q \to p \lor r &= 1 \\ p \to q &= 1 \\ r \to q &= 1 \\ p &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 + q + qr + pq + pqr &= 1 \\ 1 + p + pq &= 1 \\ 1 + r + qr &= 1 \\ p &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= 1 \\ q &= 1 \\ 1 + r + qr &= 1 \\ p &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= 1 \\ q &= 1 \\ 1 &= 1 \\ p &= 1 \end{aligned}\right\}$$

  que no determina r. Por tanto, no podemos deducir que $r = 1$ (podría valer cero), luego no es cierto que

$$\{q \to p \lor r\} \vDash (p \to q) \to (p \to ((r \to q) \to r))$$

  En el mundo $p = q = 1$ y $r = 0$ se falsea la consecuencia lógica.

- *Polinomios de Gegalkine. Estudiamos la satisfacibilidad del conjunto:*

$$\{q \to p \lor r,\ p \to q,\ p,\ r \to q,\ \neg r\}$$

  $(1 + q + qr + pq + pqr)(1 + p + pq)p(1 + r + qr)(1 + r) = (1 + q + qr + pq + pqr)pq(1 + r + qr)(1 + r) = pq(1 + r + qr)(1 + r) = pq(1 + r) = pq + pqr \neq 0$

  que prueba que el conjunto es satisfacible (en el mundo $p = q = 1$ y $r = 0$) y la consecuencia lógica es falsa.

- *Otra forma de usar las ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.*
  Estudiamos la satisfacibilidad del conjunto:

$$\{q \to p \lor r,\ p \to q,\ p,\ r \to q,\ \neg r\}$$

  Supongamos que tenemos un mundo en el que todas las proposiciones son ciertas.

$$\left.\begin{array}{r} 1+q+qr+pq+pqr=1 \\ 1+p+pq=1 \\ 1+r+qr=1 \\ p=1 \\ 1+r=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1=1 \\ q=1 \\ 1=1 \\ p=1 \\ r=0 \end{array}\right\} \Rightarrow p=q=1 \text{ y } r=0$$

Luego existe un mundo en el que todas son ciertas. El conjunto es satisfacible y la consecuencia lógica es falsa. En el mundo $p=q=1$ y $r=0$ se falsea la consecuencia lógica.

- *Tablas de verdad.*

  Calculamos la tabla de verdad de las fórmulas $q \to p \vee r$, $p \to q$, p y $r \to q$.

	p	q	r	$p \vee r$	$q \to p \vee r$	$p \to q$	$r \to q$
	0	0	0	0	1	1	1
	0	0	1	1	1	1	0
	0	1	0	0	0	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1	0	0
$\surd$	1	1	0	1	1	1	1
$\surd$	1	1	1	1	1	1	1

  Los únicos mundos en que son verdaderas $q \to p \vee r$, $p \to q$, p y $r \to q$ son los de las lineas 7 y 8. Y en uno de ellos se cumple que r es falsa. Por tanto, r no es consecuencia lógica de $q \to p \vee r$, $p \to q$, p, $r \to q$ y consiguientemente, $(p \to q) \to \big(p \to ((r \to q) \to r\big)$ no es consecuencia lógica de $q \to p \vee r$.

- *Algoritmo de Davis-Putnam*

  En primer lugar calculamos la forma clausular de todas las premisas y la negación de la conclusión. Lo que tenemos entonces es que probar que el conjunto

$$\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$$

  es insatisfacible. Aplicamos el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\begin{array}{c} \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\} \\ \Big|\ p=1 \\ \{q,\ \neg r \vee q,\ \neg r\} \\ \Big|\ q=1 \\ \{\neg r\} \\ \Big|\ r=0 \\ \emptyset \end{array}$$

  Al llegar al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas es satisfacible. Y un mundo en que son ciertas todas las cláusulas es el que cumple que $p=q=1$ y $r=0$.

- *Resolución.*

  Partimos del conjunto de cláusulas que hemos obtenido en el apartado anterior cuando hemos aplicado el algoritmo de Davis-Putnan.

$$\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$$

  y vamos a tratar de encontrar por resolución la cláusula vacía.

$$\begin{array}{ccc}
\neg p \vee q & & p \\
\mid & \diagup & \\
q & & \neg q \vee p \vee r \\
\mid & \diagup & \\
p \vee r & & \neg r \\
\mid & \diagup & \\
p & & \neg p \vee q \\
\mid & \diagup & \\
q & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\neg q \vee p \vee r & & \neg r \\
\mid & \diagup & \\
\neg q \vee p & & \neg r \vee q \\
\mid & \diagup & \\
p \vee \neg r & & \neg p \vee q \\
\mid & \diagup & \\
q \vee \neg r & & p \vee r \\
\mid & \diagup & \\
p \vee q & &
\end{array}$$

Podemos seguir calculando resolventes. En esta ocasión no llegaremos nunca a la cláusula vacía.

Pero cuando nos encontremos con una situación así podemos plantearnos si no llegamos a la cláusula vacía porque no somos capaces de encontrar el camino apropiado o porque no existe ese camino.

En este ejemplo sabemos que no existe ese camino ya que el problema lo hemos resuelto antes por otros métodos. Pero si no tenemos eso. ¿Cuándo paramos?

En este ejemplo, de todas formas, no es muy complicado. Entre las cláusulas que nos han ido apareciendo nos hemos encontrado a p, a q y a $\neg r$. Probamos con una interpretación que haga ciertas a estas cláusulas y comprobamos que todas las cláusulas son ciertas con esa interpretación, luego el conjunto es satisfacible.

En los últimos ejemplos, cuando hemos demostrado por resolución que $\Gamma \vDash \alpha$, lo que hemos hecho ha sido intentar demostrar que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, y para esto hemos calculado la forma clausular de las fórmulas de Γ y de $\neg\alpha$, y a partir de éstas hemos deducido la cláusula vacía. En este caso, se dice que hacemos una *demostración por refutación.* Suponemos lo contrario de lo que queremos demostrar ($\neg\alpha$) y llegamos a una contradicción ($\square$). Pero el método de resolución también nos permite hacer una demostración directa.

Si tenemos un conjunto de fórmulas Γ y calculamos la forma clausular de cada una de ellas, cualquier cláusula que obtengamos por resolución será consecuencia lógica de Γ. Lamentablemente el recíproco no es cierto.

Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 4.19 *Cuatro amigos, Ana, Benjamín, Carmen y Daniel están pensando en ir a visitar a Emilio, que está enfermo.*

Dice Ana: Benjamín, si tú no vas yo tampoco.

Dice Carmen: Ana, si tú no vas no te preocupes, que voy yo.

Dice Daniel: ¡Si va Carmen, yo no voy!

Dice Benjamín: Yo hago lo que haga Carmen.

A partir de esto, ¿quien va a ver a Emilio?

Para resolver esto, vamos a denotar por a al enunciado Ana va a ver a Emilio*, b al enunciado* Benjamín va a ver a Emilio*, c al enunciado* Carmen va a ver a Emilio *y d al enunciado* Daniel va a ver a Emilio.

Entonces:

Lo que dice Ana podemos traducirlo como $\neg b \to \neg a$.

Lo que dice Carmen lo podemos traducir como $\neg a \to c$.

Lo que dice Daniel lo traducimos como $c \to \neg d$.

Lo que dice Benjamín lo traducimos como $b \leftrightarrow c$.

Entonces, lo que tenemos es un conjunto de fórmulas $\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\}$. Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas:

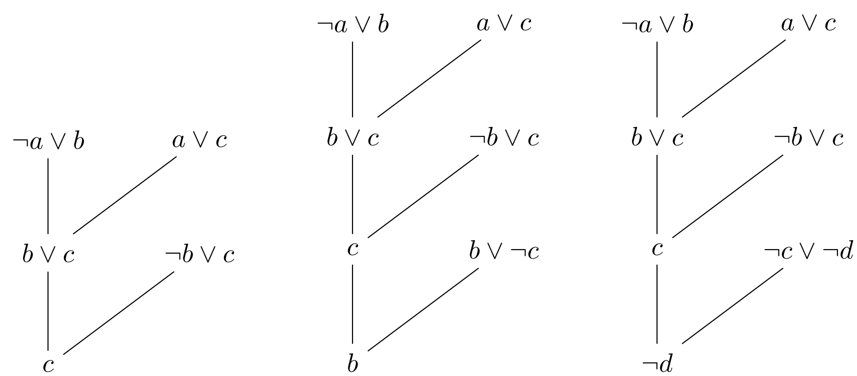
- $\neg b \to \neg a \equiv \neg\neg b \vee \neg a \equiv \neg a \vee b$.

- $\neg a \to c \equiv \neg\neg a \vee c \equiv a \vee c$.
- $c \to \neg d \equiv \neg c \vee \neg d$.
- $b \leftrightarrow c \equiv (b \to c) \wedge (c \to b) \equiv (\neg b \vee c) \wedge (b \vee \neg c)$.

Y tenemos entonces el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c\}$$

Y ahora calculamos resolventes:



Todas las cláusulas que hemos obtenido son consecuencia lógica del conjunto

$$\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\},$$

ya que se han obtenido mediante resolución. Entre estas cláusulas se encuentran b, c y $\neg d$, que significan que Benjamín y Carmen van a visitar a Emilio y que Daniel no va. Por tanto, de los datos que tenemos puede deducirse eso. Sobre Ana no podemos deducir si va o no va.

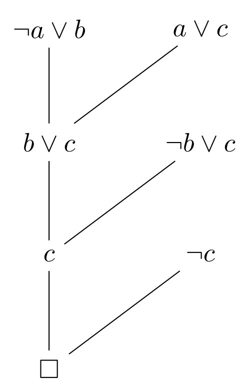
Sin embargo, vamos a probar que

$$\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\} \vDash \neg a \vee b \vee c,$$

es una consecuencia lógica verdadera pero no hay una deducción por resolución de $\neg a \vee b \vee c$ a partir del conjunto

$$\{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c\}$$

En efecto, partiendo del conjunto $\{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ a,\ \neg b,\ \neg c\}$



que prueba que el conjunto es insatisfacible y la consecuencia lógica verdadera. La no existencia de una deducción por resolución directa se basa en que a partir de premisas con dos literales es imposible obtener por resolución conclusiones con tres o más literales.

Estrategias de resolución.

El teorema 4.5 nos dice que un conjunto de cláusulas es insatisfacible si, y sólo si, podemos deducir por resolución la cláusula vacía. Por tanto si mediante resolución logramos la cláusula vacía sabemos que el conjunto es insatisfacible. Pero, ¿qué ocurre si no encontramos la cláusula vacía? Esto puede ocurrir por dos motivos. El primero que no se pueda deducir la cláusula vacía, y el segundo que sí se pueda pero no hayamos dado con el camino correcto.

Vamos entonces a estudiar algunas estrategias para calcular resolventes.

1) Estrategia de saturación.

Esto, en realidad no es una estrategia. Se trata de calcular resolventes. Paramos, bien cuando encontremos la cláusula vacía, bien cuando no se puedan calcular más resolventes.

Puesto que el número posible de cláusulas para un conjunto de n fórmulas atómicas es 3^n, este método siempre acaba, pero puede ser muy largo.

Para seguir un cierto orden, partimos de nuestro conjunto de cláusulas, que llamaremos Σ_0.

En una primera etapa calculamos todas las resolventes que podemos hacer con estas cláusulas, y las añadimos al conjunto. Tenemos así un nuevo conjunto Σ_1.

En la siguiente etapa calculamos todas las resolventes que podemos hacer con las cláusulas de Σ_1. Al nuevo conjunto lo llamamos Σ_2.

De esta forma, vamos obteniendo una sucesión de conjuntos de cláusulas $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ que en algún momento tiene que estabilizarse. Si llegamos a ese momento sin haber obtenido la cláusula vacía el conjunto Σ es satisfacible. Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplos 4.20

1. *Partimos del conjunto de cláusulas* $\Sigma_0 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$. *Vamos a llamar a estas cláusulas* C_1, C_2, C_3, C_4 *y* C_5.

   Formamos el conjunto Σ_1. *Para ello, calculamos todas las posibles resolventes con cláusulas de* Σ_0. *No contamos los casos en que obtengamos una tautología (por ejemplo,* C_1 *con* C_2. *En tal caso, las cláusulas que obtenemos son:*

   q, *que es resolvente de* C_1 *y* C_3. *La llamaremos* C_6.
   $\neg q \vee p$, *que es resolvente de* C_2 *y* C_5. *La llamaremos* C_7.

   Y ya no podemos obtener más resolventes. Por tanto,

   $$\Sigma_1 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p\}$$

   Vamos a calcular Σ_2. *Para esto, calculamos todas las posibles resolventes con las cláusulas de* Σ_1. *Únicamente hemos de mirar aquellas que obtengamos a partir de* C_6 *ó* C_7 *con cualquiera de las cláusulas de* Σ_1. *Las cláusulas que obtenemos son:*

   $p \vee r$, *que es resolvente de* C_6 *y* C_2. *La llamaremos* C_8.
   p, *que es resolvente de* C_7 *y* C_1. *Pero esta ya la teníamos. Es* C_3. *También se obtiene* p *como resolvente de* C_6 *y* C_7.
   $p \vee \neg r$, *que se obtiene como resolvente de* C_7 *y* C_4. *La llamaremos* C_9.

   Tenemos entonces:

   $$\Sigma_2 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p,\ p \vee r,\ p \vee \neg r\}$$

   Calculamos Σ_3.

   $q \vee r$ *es resolvente de* C_8 *y* C_1. *La llamaremos* C_{10}.
   $p \vee q$ *es resolvente de* C_8 *y* C_4. *La llamaremos* C_{11}.
   El resto de resolventes que se pueden obtener ya han aparecido antes.

El conjunto Σ_3 *es:*

$$\Sigma_3 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p,\ p \vee r,\ p \vee \neg r,\ q \vee r,\ p \vee q\}$$

Y podemos comprobar que ya no pueden obtenerse más resolventes. Como entre las resolventes obtenidas no está la cláusula vacía, el conjunto es satisfacible.

2. *Partimos del conjunto de cláusulas* $\Sigma_0 = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg b \vee c,\ \neg b,\ b \vee \neg c\}$. *Vamos a llamar a estas cláusulas* C_1, C_2, C_3, C_4 *y* C_5.

   Formamos el conjunto Σ_1. *Para ello, calculamos todas las posibles resolventes con cláusulas de* Σ_0. *No contamos los casos en que obtengamos una tautología. En tal caso, las cláusulas que obtenemos son:*

   $b \vee c$, *que es resolvente de* C_1 *y* C_2. *La llamaremos* C_6.

   $\neg a \vee c$, *que es resolvente de* C_1 *y* C_3. *La llamaremos* C_7.

   $\neg a$, *que es resolvente de* C_1 *y* C_4. *La llamaremos* C_8.

   $a \vee b$, *que es resolvente de* C_2 *y* C_5. *La llamaremos* C_9.

   $\neg c$, *que es resolvente de* C_4 *y* C_5. *La llamaremos* C_{10}.

   Y ya no podemos obtener más resolventes. Por tanto,

$$\Sigma_1 = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg b \vee c,\ \neg b,\ b \vee \neg c,\ b \vee c,\ \neg a \vee c,\ \neg a,\ a \vee b,\ \neg c\}$$

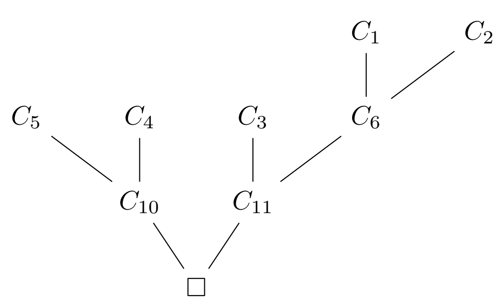
   Vamos a calcular Σ_2. *Para esto, calculamos todas las posibles resolventes con las cláusulas de* Σ_1. *Únicamente hemos de mirar aquellas que obtengamos a partir de* C_6 *hasta* C_{10} *con cualquiera de las cláusulas de* Σ_1 *que las preceden. Las cláusulas que obtenemos son:*

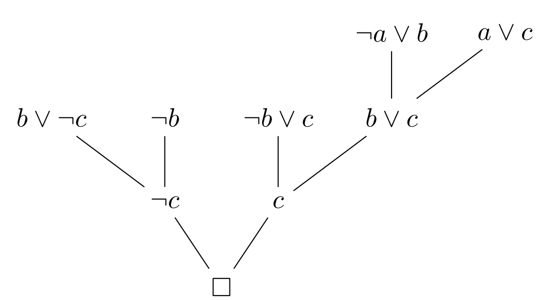
   c, *que es resolvente de* C_6 *y* C_3. *La llamaremos* C_{11}.

   Y ahora podemos continuar para conseguir Σ_2. *O concluir que cuándo estemos calculando* Σ_3 *tendremos que hallar la resolvente de* $C_{10} = \neg c$ *y* $C_{11} = c$ *que será* $\square$ *y por tanto el conjunto de partida es insatisfacible. Además siguiendo el rastro hacia atrás obtenemos una deducción de la cláusula vacía.*

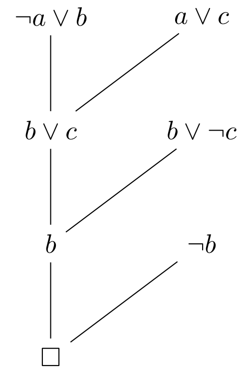
   La deduccion sería: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_{10}, C_{11}, $\square$

   Con diagrama de árbol





   Si no nos gusta esta, sabiendo que existen, podemos buscar otra:



3. *Partimos del conjunto de cláusulas* $\Sigma_0 = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c\}$. *Vamos a llamar a estas cláusulas* C_1, C_2, C_3, C_4 *y* C_5.

   Formamos el conjunto Σ_1. *Para ello, calculamos todas las posibles resolventes con cláusulas de* Σ_0. *No contamos los casos en que obtengamos una tautología. En tal caso, las cláusulas que obtenemos son:*

   $b \vee c$, *que es resolvente de* C_1 *y* C_2. *La llamaremos* C_6.
   $\neg a \vee c$, *que es resolvente de* C_1 *y* C_4. *La llamaremos* C_7.
   $a \vee b$, *que es resolvente de* C_2 *y* C_5. *La llamaremos* C_8.
   $b \vee \neg d$, *que es resolvente de* C_3 *y* C_5. *La llamaremos* C_9.

   Y ya no podemos obtener más resolventes. Por tanto,

   $$\Sigma_1 = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ b \vee c,\ \neg a \vee c,\ a \vee b,\ b \vee \neg d\}$$

   Vamos a calcular Σ_2. *Para esto, calculamos todas las posibles resolventes con las cláusulas de* Σ_1. *Únicamente hemos de mirar aquellas que obtengamos a partir de* C_6 *hasta* C_9 *con cualquiera de las cláusulas de* Σ_1. *Las cláusulas que obtenemos son:*

   c, *que es resolvente de* C_6 *y* C_4. *La llamaremos* C_{10}.
   b, *que es resolvente de* C_6 *y* C_5. *La llamaremos* C_{11}.

   Y ya no podemos obtener más resolventes. Por tanto,

   $$\Sigma_2 = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ b \vee c,\ \neg a \vee c,\ a \vee b,\ b \vee \neg d,\ c,\ b\}$$

   Vamos a calcular Σ_3. *Para esto, calculamos todas las posibles resolventes con las cláusulas de* Σ_2. *Únicamente hemos de mirar aquellas que obtengamos a partir de* C_{10} *o* C_{11} *con cualquiera de las cláusulas de* Σ_2.

   Ya no obtenemos más cláusulas. Como entre las resolventes obtenidas no está la cláusula vacía, el conjunto es satisfacible.

2) Resolución lineal.

Una deducción por resolución de una cláusula es lineal *lineal* si es una sucesión de pasos de resolución que cumple que en cada paso de resolución que no sea el primero se utiliza la resolvente del paso anterior. Esto da lugar a un árbol con una estructura muy peculiar.

En los ejemplos que hemos hecho de resolución observamos que en todos ellos (salvo el segundo de los ejemplos 4.20) cada resolvente que hemos obtenido (a excepción de la primera) provenía de hacer una resolvente con una cláusula obtenida en el paso inmediatamente anterior junto con otra cláusula. Esto daba lugar a que en la representación que hacíamos de las resolventes, todas aparecieran formando una línea.

Vamos a ver algún ejemplo.

Ejemplo 4.21

Sea $\Sigma = \{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$. *Llamemos* C_1, C_2, C_3, C_4 *y* C_5 *a las cláusulas de* Σ *en el mismo orden que las hemos escrito.*

Vamos a ver que Σ *es un conjunto insatisfacible. Para esto, vamos a dar una deducción de la cláusula vacía.*

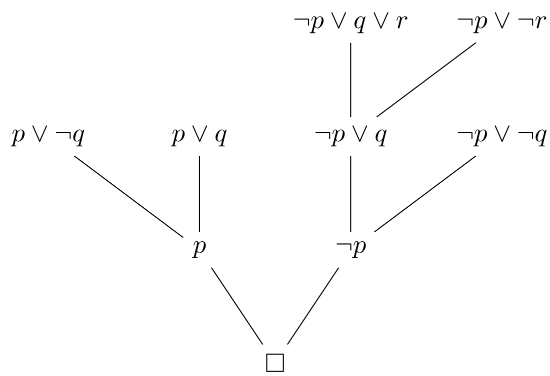
$C_6 = p$ resolvente de C_1 y C_2.

$C_7 = \neg p \vee q$ resolvente de C_3 y C_5.

$C_8 = \neg p$ resolvente de C_7 y C_4.

$C_9 = \square$ resolvente de C_8 y C_6.

Y podemos ver como no es lineal, pues al obtener C_7 no se ha usado la cláusula obtenida en el paso anterior (C_6). Vamos a representar esta deducción de forma gráfica.



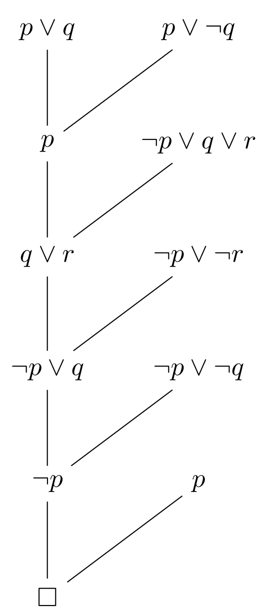
Y vemos como hay dos ramas que se unen para llegar a la cláusula vacía.

La estrategia de resolución lineal es una estrategia completa. Esto significa que si un conjunto de cláusulas es insatisfacible, entonces hay una deducción lineal de la cláusula vacía.

En el ejemplo último que hemos hecho, hemos visto una deducción no lineal de la cláusula vacía. Por lo que acabamos de decir, debe haber también una deducción lineal de la cláusula vacía. Veámosla.

Ejemplo 4.22

A partir del conjunto $\Sigma = \{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$ vamos a dar una deducción lineal de la cláusula vacía.



Es decir, que siempre que tengamos una deducción de la cláusula vacía podemos obtener una deducción lineal de la cláusula vacía.

3) Estrategias input.

Dado un conjunto de cláusulas Σ, una deducción a partir de Σ (por resolución) es *input* si al menos una de las dos cláusulas que se usan para calcular cada una de las resolventes pertenece al conjunto Σ.

Ejemplo 4.23

Vamos a analizar las deducciones que hemos hecho en los ejemplos anteriores.

1. *En el ejemplo 4.17 tomamos el conjunto* $\{\neg a \vee b,\ \neg c \vee \neg d,\ b \vee \neg c,\ \neg b \vee c,\ a \vee b,\ a \vee c\}$ *e hicimos una deducción de la cláusula* $\neg d$*. Esta deducción es una deducción input, ya que:*

   La primera resolvente ($b \vee c$) *se obtuvo a partir de las cláusulas* $\neg a \vee b$ *y* $a \vee c$*, ambas pertenecientes al conjunto* Γ*. Obviamente, en cualquier deducción por resolución la primera resolvente tiene que hacerse con elementos del conjunto inicial.*

   La segunda resolvente (c) *se obtuvo a partir de las cláusulas* $b \vee c$ *y* $\neg b \vee c$*. Esta última pertenecía a* Γ*.*

   La tercera resolvente ($\neg d$ *se obtuvo a partir de las cláusulas* c *y* $\neg c \vee \neg d$*, y esta última pertenecía a* Γ*.*

2. *Nos vamos ahora al ejemplo 4.18.*

   - *Ahí hicimos una deducción de la cláusula vacía a partir del conjunto* $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$*. Esta deducción era una deducción input, como puede comprobarse fácilmente.*
   - *A partir de* $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ *se hizo una deducción de la cláusula vacía. Esta deducción también es input.*
   - *Del conjunto* $\Sigma = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$ *hicimos dos deducciones. La primera es input. La segunda no lo es. El motivo es que la última resolvente,* $p \vee q$*, se obtiene de las cláusulas* $q \vee \neg r$ *y* $p \vee r$*, y ninguna de las dos pertenece a* Σ*.*

3. *En el ejemplo 4.21 dimos una deducción no lineal de la cláusula vacía. Esta deducción tampoco es input, pues la cláusula vacía se obtiene como resolvente de las cláusulas* p *y* $\neg p$*, y ninguna de estas pertenece al conjunto inicial de cláusulas.*

La ventaja de las deducciones input es que nos acota el número de posibles resolventes. Sin embargo, esta estrategia no es completa. Para comprobarlo, podemos fijarnos, por ejemplo, en el conjunto de cláusulas $\Sigma = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$, que analizamos en los ejemplos 4.21 y 4.22. Este conjunto es insatisfacible, pues de él dedujimos la cláusula vacía. Sin embargo no hay ninguna deducción input de la cláusula vacía. Una razón podría ser que todas las cláusulas de Σ tienen dos o más literales, luego si hacemos una resolvente con una de estas cláusulas, ésta tendrá al menos un literal.

Sin embargo, hay una situación en que la estrategia input sí es completa. Vamos a pasar a describirla. Para ello, previamente damos algunos conceptos.

Definición 4.5 *Dado un lenguaje proposicional construido sobre el conjunto* X*:*

1. *Un literal es positivo si es una fórmula atómica (es decir, si pertenece a* X*).*
2. *Un literal es negativo si es el negado de una fórmula atómica.*
3. *Una cláusula es* negativa *si todos los literales que aparecen en ella son literales negativos.*
4. *Una cláusula es* cláusula de Horn *si tiene exactamente un literal positivo.*
5. *Un conjunto de cláusulas es un* conjunto de Horn *si tiene exactamente una cláusula negativa, y el resto de las cláusulas son cláusulas de Horn.*

Ejemplo 4.24

1. *Toda fórmula atómica es una cláusula de Horn.*
2. *La cláusula vacía es una cláusula negativa (todos sus literales son negativos).*
3. *Las cláusulas* $\neg a \vee \neg b \vee c$*,* a*,* b *son cláusulas de Horn. Cada una de ellas tiene exactamente un literal positivo. Para la primera cláusula es* c*, para la segunda cláusula es* a *y para la tercera cláusula es* b*.*

4. *El conjunto* $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$ *es un conjunto de Horn, ya que tiene una cláusula negativa* ($\neg c$)*, y el resto son cláusulas de Horn.*

5. *El conjunto* $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ *no es un conjunto de Horn, pues, por ejemplo, la primera cláusula tiene tres literales positivos.*

6. *El conjunto* $\{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$ *no es un conjunto de Horn.*

La importancia de los conjuntos de Horn viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.6 *Sea* Σ *un conjunto de cláusulas de un lenguaje proposicional que es un conjunto de Horn. Entonces* Σ *es insatisfacible si, y sólo si, existe una deducción lineal-input de la cláusula vacía que se inicia en la cláusula negativa.*

Observación:

1. No es lo mismo un conjunto formado por cláusulas de Horn que un conjunto de Horn. En el primero no hay cláusulas negativas, mientras que en el segundo hay una cláusula negativa. Además, todo conjunto formado por cláusulas de Horn es satisfacible (basta tomar la interpretación que asigna el valor de verdad 1 a todas las fórmulas atómicas).

2. El teorema no afirma que todo conjunto de Horn sea insatisfacible, sino que para los conjuntos de Horn que sean insatisfacibles se puede encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía. Por tanto, cuando tengamos un conjunto de Horn, únicamente intentaremos deducciones lineales-input.

3. La resolvente de una cláusula de Horn y una cláusula negativa vuelve a ser una cláusula negativa. Por tanto, todas las resolventes que se obtienen en una deducción lineal-input con inicio la cláusula negativa son cláusulas negativas.

4. Para que nos dé la cláusula vacía como resolvente de una cláusula negativa y una cláusula de Horn, la única posibilidad es que ambas cláusulas tengan sólo un literal. Por tanto, para que un conjunto de Horn sea insatisfacible es necesario (pero no suficiente) que haya al menos una cláusula que sea una fórmula atómica.

5. Hay conjuntos de cláusulas para los que hay una deducción lineal-input de la cláusula vacía pero que no son conjuntos de Horn. Un ejemplo de esta afirmación es el conjunto $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$.

Vamos a ver algunos ejemplos más:

Ejemplo 4.25

1. *Supongamos que tenemos el conjunto de cláusulas*

$$\Sigma = \{\neg q \vee p,\ \neg r \vee \neg s \vee q,\ r,\ \neg p,\ \neg r \vee s\}$$

Vamos a demostrar que es insatisfacible. Para esto, comprobamos en primer lugar que es un conjunto de Horn.

El conjunto Σ *tiene exactamente una cláusula negativa* ($\neg p$) *y el resto de las cláusulas tienen todas un literal positivo.*

Al ser un conjunto de Horn probamos con una resolución lineal. Y empezamos por la cláusula negativa.

$$\begin{tikzcd}
\neg p \arrow[d, no head] & \neg q \vee p \arrow[dl, no head] \\
\neg q \arrow[d, no head] & \neg r \vee \neg s \vee q \arrow[dl, no head] \\
\neg r \vee \neg s \arrow[d, no head] & \neg r \vee s \arrow[dl, no head] \\
\neg r \arrow[d, no head] & r \arrow[dl, no head] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Vemos como todas las resolventes que hemos obtenido son cláusulas negativas, y como para la última resolvente (cláusula vacía) hemos tenido que hacer uso de la cláusula r, que es una fórmula atómica.

2. *Supongamos que sabemos lo siguiente:*

   Si apruebo, me dan beca.
   Si estudio y me ayuda mi amigo Pepe, apruebo.
   Si me dan beca, me voy de fiesta.

   Entonces, me dice Pepe que si lo invito a comer, me ayuda. Lo que hago en ese momento es ponerme a estudiar, y quedar con Pepe para invitarlo a comer. ¿Conseguiré irme de fiesta?

   Vamos a ponerle nombre a los distintos enunciados que aparecen aquí.

   - *Llamaremos a al enunciado* apruebo.
   - *Llamaremos b al enunciado* me dan beca.
   - *Llamaremos e al enunciado* estudio.
   - *Llamaremos f al enunciado* me voy de fiesta.
   - *Llamaremos i al enunciado* invito a Pepe a comer.
   - *Llamaremos p al enunciado* Pepe me ayuda.

   En tal caso, lo que tenemos es:

   - Si apruebo, me dan beca*, que lo podemos escribir como $a \to b$.*
   - Si estudio y me ayuda mi amigo Pepe, apruebo*, que lo representamos como $e \wedge p \to a$.*
   - Si me dan beca me voy de fiesta*, que se corresponde con la fórmula $b \to f$.*
   - Si me invitas a comer, te ayudo*, que lo escribimos como $i \to p$.*

   Entonces, lo que tenemos que ver es si

$$\{a \to b,\ e \wedge p \to a,\ b \to f,\ i \to p,\ e,\ i\} \vDash f$$

   o lo que es lo mismo, si el conjunto

$$\{a \to b,\ e \wedge p \to a,\ b \to f,\ i \to p,\ e,\ i,\ \neg f\}$$

   es insatisfacible.

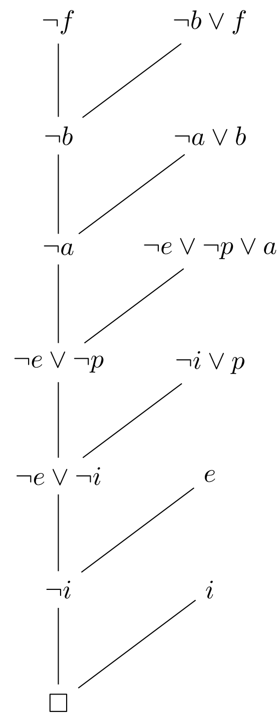
   Calculamos la forma clausular de las cuatro primeras fórmulas de este conjunto (el resto están en forma clausular).

$$\begin{array}{cccc}
a \to b & e \wedge p \to a & b \to f & i \to p \\
\neg a \vee b & \neg(e \wedge p) \vee a & \neg b \vee f & \neg i \vee p \\
 & \neg e \vee \neg p \vee a & &
\end{array}$$

Luego lo que tenemos que ver es si el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{\neg a \vee b,\ \neg e \vee \neg p \vee a,\ \neg b \vee f,\ \neg i \vee p,\ e,\ i,\ \neg f\}$$

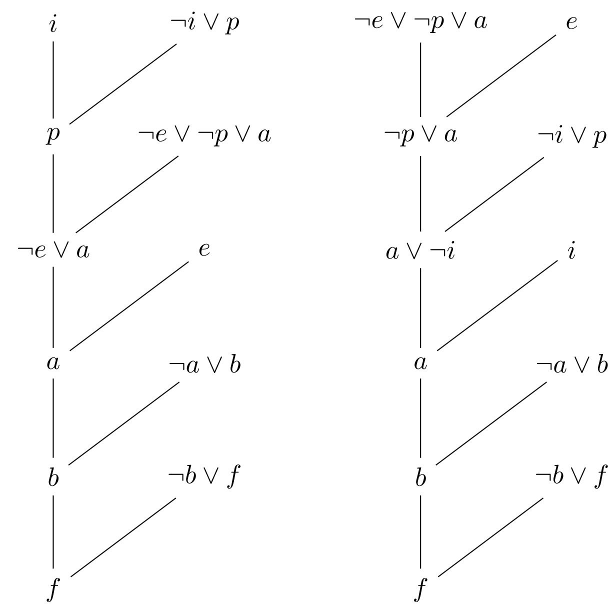
es insatisfacible. Puesto que este conjunto es un conjunto de Horn, intentamos una resolución lineal-input comenzando por la cláusula negativa ($\neg f$).



Ahora vamos a seguir la deducción que hemos hecho. Nos preguntamos si iré de fiesta.

> *En primer lugar, suponemos que no iré de fiesta ($\neg f$).*
>
> *Puesto que si me dan beca me voy de fiesta, deducimos que no me pueden dar beca, ya que si me la dieran me iría de fiesta (es decir, deducimos $\neg b$, que es una resolvente de $\neg f$ y $\neg b \vee f$).*
>
> *Otro enunciado es que si apruebo me dan beca. Por tanto, deducimos que no apruebo ($\neg a$).*
>
> *Ahora bien, aprobaba si estudiaba y me ayudaba Pepe, luego, o no estudio, o no me ayuda Pepe ($\neg e \vee \neg p$).*
>
> *Y como Pepe me ayudaba si lo invitaba a comer, entonces, o no estudio, o no lo invito a comer.*
>
> *Pero habíamos dicho que me ponía a estudiar, luego la única posibilidad es que no lo invite a comer ($\neg i$)*
>
> *Y también había decidido invitarlo a comer. Aquí está la contradicción ($\square$), que viene de suponer que no me voy de fiesta.*

En este caso, también podríamos haber hecho una demostración directa:



Y seguimos los pasos de la deducción:

Puesto que si invito a Pepe él me ayuda, y decido invitarlo, deducimos que él me ayuda (p).

Si estudio y me ayuda, apruebo. Como sabemos que me va a ayudar, entonces basta con que estudie para que apruebe ($\neg e \vee a$).

Puesto que estudio, entonces apruebo (a).

Si apruebo, me dan beca. Luego me dan beca (b).

Si me dan beca, me voy de fiesta. Por tanto, me voy de fiesta (f).

Si nuestro conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn, entonces podemos probar con una deducción lineal-input con inicio en la cláusula negativa. Pero cuando el conjunto no sea de Horn, no sabemos si esta estrategia nos va a dar la solución. Sin embargo, hay conjuntos que no son conjuntos de Horn, pero que podrían transformarse en conjuntos de Horn con algunas modificaciones, de forma que el primer conjunto es insatisfacible si, y sólo si, lo es el segundo.

Vamos a ver algún ejemplo.

Ejemplo 4.26

Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ d\}$.

Este conjunto no es un conjunto de Horn. Por tanto, para ver si es satisfacible o insatisfacible no nos bastaría con estudiar la resolución lineal-input. Sin embargo, si definimos las fórmulas $b' = \neg b$ *y* $c' = \neg c$ *el conjunto nos queda:*

$$\Sigma' = \{\neg a \vee \neg b',\ a \vee \neg c',\ c' \vee \neg d,\ b' \vee \neg c',\ \neg b' \vee c',\ d\}$$

Y este conjunto es de Horn, y es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ*. Por tanto, podemos probar por una estrategia lineal-input con inicio en la cláusula* $\neg a \vee \neg b'$*, que sería lo mismo que comenzar por* $\neg a \vee b$*.*

Vamos a poner la deducción de $\square$ *a partir del conjunto* Σ*, y la misma a partir del conjunto* Σ'*.*

$$\begin{tikzcd}
\neg a \vee b \arrow[d, dash] & a \vee c \arrow[dl, dash] \\
b \vee c \arrow[d, dash] & \neg b \vee c \arrow[dl, dash] \\
c \arrow[d, dash] & \neg c \vee \neg d \arrow[dl, dash] \\
\neg d \arrow[d, dash] & d \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\neg a \vee \neg b' \arrow[d, dash] & a \vee \neg c' \arrow[dl, dash] \\
\neg b' \vee \neg c' \arrow[d, dash] & b' \vee \neg c' \arrow[dl, dash] \\
\neg c' \arrow[d, dash] & c' \vee \neg d \arrow[dl, dash] \\
\neg d \arrow[d, dash] & d \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Cuando tenemos un conjunto de Horn, a la cláusula negativa se le suele denominar *cláusula objetivo.* A las cláusulas de Horn que constan de sólo un literal (es decir, fórmulas atómicas) se les denomina *hechos*, mientras que a a las cláusulas de Horn con más de un literal se las llama *reglas.* El ejemplo 4.25 que hemos hecho nos justifica esta nomenclatura.

Lo que nos planteamos ahora es, dado un conjunto de cláusulas Σ, ver si puede transformarse en un conjunto de Horn. Para esto, necesitamos sustituir algunos literales que aparecen en las cláusulas de Σ por sus complementarios. El problema es, saber si es posible y en caso afirmativo elegir los literales que vamos a sustituir.

Para proceder de forma ordenada, elegiremos una cláusula que después de la transformación será la cláusula negativa, y vamos sustituyendo los literales que nos hagan falta para que esta cláusula sea negativa, y el resto sean cláusulas de Horn. Si conseguimos que el conjunto se transforme en un conjunto de Horn ya lo tenemos. Si no es posible, probamos con otra cláusula como cláusula negativa.

Vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo 4.27

1. *Comenzamos por el conjunto $\Sigma = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ d\}$, que ya sabemos que se puede transformar en un conjunto de Horn. Elegimos una cláusula y vemos si esta podría ser la cláusula negativa.*

   (a) *Comenzamos por la cláusula $\neg c \vee \neg d$. Si queremos que esta cláusula sea la cláusula negativa, los literales c y d deben quedar como están. Escribimos el conjunto Σ, pero fijando estos literales. Para distinguirlos del resto, los pondremos en negrita.*

   $$\{\neg a \vee b,\ a \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \neg b \vee \mathbf{c},\ b \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Ahora, la cláusula $a \vee \mathbf{c}$ tiene que ser cláusula de Horn. Puesto que el literal c no podemos sustituirlo, hemos de sustituir a por $\neg a'$. Tendríamos entonces:

   $$\{\mathbf{a}' \vee b,\ \neg\mathbf{a}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \neg b \vee \mathbf{c},\ b \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Para que $\mathbf{a}' \vee b$ sea cláusula de Horn, hay que sustituir b por $\neg b'$, con lo que tenemos:

   $$\{\mathbf{a}' \vee \neg\mathbf{b}',\ \neg\mathbf{a}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \mathbf{b}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{b}' \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Y ya no podemos hacer más sustituciones. El conjunto que nos ha resultado no es un conjunto de Horn.

   (b) *Probamos ahora con la cláusula $\neg a \vee b$. En este caso, el literal a se queda como está, y el literal b lo sustituimos por $\neg b'$. Tenemos el conjunto:*

   $$\{\neg\mathbf{a} \vee \neg\mathbf{b}',\ \mathbf{a} \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \mathbf{b}' \vee c,\ \neg\mathbf{b}' \vee \neg c,\ d\}$$

   Para que $\mathbf{a} \vee c$ sea cláusula de Horn, hay que sustituir c por $\neg c'$.

   $$\{\neg\mathbf{a} \vee \neg\mathbf{b}',\ \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{c}',\ \mathbf{c}' \vee \neg d,\ \mathbf{b}' \vee \neg\mathbf{c}',\ \neg\mathbf{b}' \vee \mathbf{c}',\ d\}$$

   Y el conjunto que tenemos es un conjunto de Horn.

2. *Vamos a ver si el conjunto* $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ *se puede transformar en un conjunto de Horn.*

   (a) *Probamos con* $\varphi\vee\chi\vee\neg\theta\vee\tau$ *como cláusula negativa. Para eso sustituimos* φ*,* χ *y* τ*, mientras que dejamos igual a* θ*.*

   $$\{\neg\varphi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \neg\psi \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \chi' \vee \neg\tau',\ \ \neg\varphi' \vee \tau',\ \ \varphi',\ \ \theta\}$$

   Y si nos fijamos en la segunda cláusula, sustituyendo ψ *por* $\neg\psi'$ *obtenemos un conjunto de Horn.*

   $$\{\neg\varphi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \psi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \chi' \vee \neg\tau',\ \ \neg\varphi' \vee \tau',\ \ \varphi',\ \ \theta\}$$

Ejemplo 4.28 *Como ejercicio, vamos a ver que el conjunto*

$$\{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$$

no puede transformarse en un conjunto de Horn.

Si observamos las cláusulas $p \vee q$ *y* $\neg p \vee \neg q$ *concluimos que o* p *o* q *hay que cambiarlas pero no las dos a la vez. Teniendo en cuenta lo anterior si nos fijamos en* $\neg p \vee q \vee r$*, resulta que si cambiamos* p *no logramos nada y si cambiamos* q *no podemos cambiar* r*, por tanto hay que cambiar solamente* q *que es incompatible con la cláusula* $p \vee \neg q$*.*