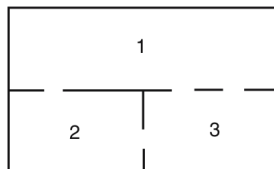


Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 20/21)

Relación de Ejercicios, tema 3

- 1 Un psicólogo lleva a cabo un experimento en el que 88 ratas se colocan de forma aleatoria en los compartimentos numerados 1, 2 y 3, en que ha sido dividida una caja tal y como se muestra en la siguiente figura



Observe que hay cuatro puertas en esta configuración. Cada rata puede estar en tres estados posibles: se encuentra en el compartimento 1, 2 o 3. Supongamos que las ratas se pueden mover de un compartimento a otro o quedarse en el mismo compartimento y que la probabilidad de trasladarse de un compartimento a otro depende de la distribución de puertas que los conectan. Así una rata en el compartimento 1 tiene las probabilidades $P_{11} = 1/4$ de quedarse en el compartimento 1 o $P_{21} = 1/4$, y $P_{31} = 2/4$ de trasladarse, respectivamente, a los compartimentos 2 y 3. Determine la distribución a largo plazo de las ratas.

- 2 Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Se considera el siguiente programa de polinización:

- Las plantas de flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).
- Las plantas de flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).
- Las plantas de flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).

¿Cómo evoluciona a largo plazo la distribución de colores en las plantas?

- 3 En una universidad elitista del pasado se impartían estudios de Medicina, Farmacia y Derecho, y sólo había estudiantes varones (afortunadamente las cosas han cambiado). Durante generaciones los padres enviaban a su hijo primogénito a la misma universidad en que ellos estudiaron. Se ha estudiado la elección de carrera a lo largo del tiempo y se ha comprobado que: el 80 % de los hijos de médicos estudiaron Medicina y el resto estudió Farmacia, el 40 % de los hijos de farmacéuticos estudió Farmacia y el resto se decidió a partes iguales por Medicina o Derecho; y finalmente, los hijos de los abogados eligieron Derecho en un 70 % Medicina en un 20 % y Farmacia en un 10 %. Estudia a largo plazo cuál será la distribución de estudiantes en estas tres carreras.

- 4 El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

- Calcule la matriz de de transición que determina la probabilidad de que el ascensor esté en un piso determinado.
- Determine la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.

- 5 Los 20 niños y niñas de la clase de primero de infantil (3 años) tienen dos toboganes en su aula, que les gustan mucho, uno rojo y otro amarillo. Cada día se montan una sólo vez uno de los toboganes y van cambiando de uno a otro según la siguiente pauta: de los que un día utilizaron el rojo, un tercio pasa al amarillo, y de los que usaron el amarillo, un cuarto cambia al rojo, mientras que los restantes usan de nuevo el mismo tobogán. Describa la evolución de la distribución de los niños en los dos toboganes, y proporcione la distribución asintótica. ¿Qué tobogán les gusta más?

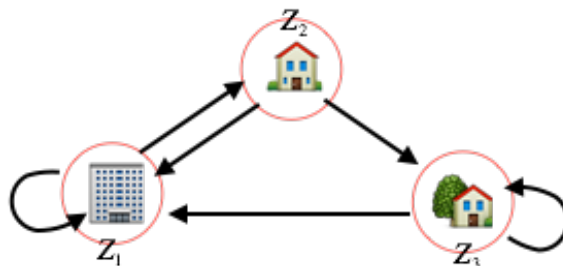
- 6 Supongamos que en el ejercicio 1, las ratas siempre se mueven de un compartimento a otro, por supuesto la probabilidad de trasladarse de un compartimento a otro depende de la distribución de puertas que los conectan. Así una rata en el compartimento 1 tiene las probabilidades $P_{11} = 0$, $P_{21} = 1/3$, y $P_{31} = 2/3$ de trasladarse, respectivamente, a los compartimentos 1,2 y 3. Determine la distribución a largo plazo de las ratas.

- 7 El pájaro de fuego es una especie autóctona de la ínsula Ferosa. La población se distribuye en tres colonias situadas en los vértices A , B y C de un triángulo imaginario. El vértice A es muy inhóspito y solo el 20 % de los pájaros consiguen sobrevivir después de un año, los vértices B y C tienen mejores condiciones y la tasa de supervivencia es del 80 %. Al finalizar el año, el pájaro de fuego que sobrevive debe decidir si permanece en su colonia o emigra. Se ha observado que un 50 % decide permanecer mientras que el resto emigra y se dirige a una de las otras dos colonias con igual probabilidad. Presente un modelo que describa la evolución de esta población de aves.

- 8 Una compañía divide a sus empleados en tres departamentos: Producción, Marketing y Ventas. Anualmente, se produce una reorganización en la distribución de empleados por departamentos, de forma que la mitad de los trabajadores permanecen en el departamento en el que están, mientras que el resto cambia de departamento siguiendo las siguientes directrices: los que dejan el departamento de Producción se distribuyen a partes iguales entre los dos departamentos restantes, los que dejan Marketing van a Ventas y los que dejan Ventas van a Producción.

- Describa el modelo matemático.
- Pruebe que hay un valor propio dominante.
- Calcule la distribución a largo plazo de los empleados por departamento.

- 9 En cierta ciudad se ha realizado un estudio sobre la dinámica anual de los residentes en régimen de alquiler. Para ello, se han considerado tres zonas diferentes A, B y C, y se ha observado que los flujos entre las distintas zonas vienen descritos por el grafo siguiente:



Además de la información del grafo, se estudió el comportamiento de una muestra de 80 inquilinos situados inicialmente en la zona B comprobando que:

- Al cabo de un año 40 se marchaban a la zona A y 40 a la zona C.
- En el segundo año se observó que había 46 en la zona A, 24 en la zona B y 10 en la zona C.

- Describa el modelo en diferencias, $P_{n+1} = M P_n$, $n = 0, 1, \dots$, donde M es la matriz de transición y $P_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$ es el vector cuyas componentes representan el número de inquilinos en cada zona en el n -ésimo recuento.
- ¿Define el modelo una cadena de Markov? ¿Admite valor propio dominante la matriz M ? Justifica las respuestas.
- Describa el comportamiento, a largo plazo, de la población de inquilinos considerada indicando el porcentaje de inquilinos en cada zona.

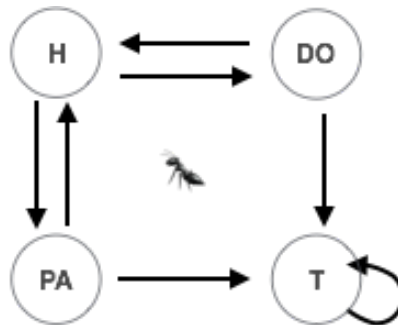
- 10 Un equipo europeo de biólogos se encuentra realizando unas investigaciones relacionadas con las preferencias que manifiestan los orangutanes del parque natural de Gunung Leuser, en Sumatra, a la hora de confeccionar los nidos en que pasarán la noche en las copas de los árboles. Para ello han elegido una comunidad concreta formada por 40 de estos primates y se han centrado en tres especies de árboles diferentes, a las que haremos mención aquí como A, B y C. Los científicos han propuesto el siguiente modelo matemático para reproducir de modo aproximado la variabilidad sobre la elección diaria que los orangutanes hacen de la especie de árbol en el que construirán su cama:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 0,6A_n + 0,2C_n, \\ B_{n+1} &= 0,4A_n + 0,5B_n, \\ C_{n+1} &= 0,5B_n + 0,8C_n. \end{aligned}$$

Indique las afirmaciones que sean correctas.

- El 20 % de los orangutanes que un día construyen su nido en un árbol de la especie A, cambian a un árbol de la especie C al día siguiente.
- El modelo anterior viene descrito por una matriz de estados.
- La matriz que describe el modelo anterior admite un valor propio dominante.
- A largo plazo, la población de orangutanes se distribuye entre las tres especies de árboles según los porcentajes aproximados 26,3 % (para la especie A), 21 % (para la especie B) y 52,6 % (para la especie C).

- 11** Para beber agua un animal puede ir a un lago, a un río o a una alberca. Se sabe que si toma agua en el río al día siguiente no vuelve al río, y la probabilidad de que beba agua en el lago o en la alberca es la misma. Si bebe agua en el lago, al día siguiente siempre va al río, y si bebe en la alberca, al día siguiente repite en la alberca o bebe en el lago con igual probabilidad.
- Describa con un grafo el problema anterior.
 - Estudie la distribución asintótica de la probabilidad de que el animal beba agua en cada uno de los tres sitios.
- 12** Un estudiante despistado del Grado en Matemáticas sabe que cuando anda sin destino fijo va hacia su derecha o a su izquierda con distintas probabilidades, digamos p y q , pero nunca se queda en el mismo sitio. Cuando sale de la cafetería de la Facultad de Ciencias puede ir hacia la derecha, sale de la Facultad y siempre se encuentra con alguien a quien saluda. Después puede seguir a la derecha, con lo que llega a su casa y se queda allí (a ver quién vuelve a la Facultad con el frío que hace), o a su izquierda, y vuelve a la cafetería. Si cuando sale de la cafetería va a su izquierda, entonces se detiene a leer los anuncios del panel del hall y puede ir de nuevo a la derecha o a la izquierda. Si continúa hacia la izquierda otra vez, termina en la sala de estudio, de donde no sale pues recuerda que lo que debe hacer es estudiar para los exámenes finales.
- Describa con un grafo las aventuras de nuestro compañero.
 - Formule el problema en términos de un sistema de ecuaciones en diferencias.
 - Estudie las propiedades principales de la matriz de transición del sistema de ecuaciones en diferencias dado en b).
 - Describa el comportamiento, a largo plazo, de dicho estudiante.
- 13** Tras estudiar durante varios días el comportamiento de las hormigas en la cocina de cierta casa, se observó que los lugares favoritos en su recorrido desde su hormiguero (H) eran el armario donde se guardan algunos productos azucarados (PA) y el lugar donde se depositan los desechos orgánicos (DO). También se observó que durante su recorrido pasaban por cierto lugar fijo de la cocina (T). Así pues, con objeto de resolver el problema con las hormigas en la cocina, en dicha zona se colocó un producto químico letal de forma que las hormigas que entran en esa zona mueren. El movimiento de las hormigas en la cocina viene descrito por el grafo siguiente:



Suponiendo que:

- Desde el hormiguero, las hormigas se distribuyen a partes iguales entre la zona PA y la zona DO.
 - El 75 % de las hormigas que están en las zonas PA o DO son atraídas a la zona trampa (T).
- Escriba el sistema de ecuaciones en diferencias que modela esta situación. ¿Define una cadena de Markov?
 - ¿Es la matriz de estados ergódica? ¿Admite valor propio dominante? Razone que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1$ siendo T_n la probabilidad de caer en la trampa en el n -ésimo día.
 - Aunque acabamos de echar insecticida en toda la casa, no encontramos el hormiguero, así que podemos suponer que inicialmente todas las hormigas parten del hormiguero, ¿cuántos días serán necesarios para que el 90 % o más de las hormigas vivas se dirijan a la zona trampa (en cuyo caso damos por resuelto el problema)?