Capítulo 1

Regla de Barrow. Técnicas de integración en una variable

1.1. Criterios de integrabilidad

De igual manera que es sumamente complicado calcular la suma de ciertas series y por tanto, en tantos casos sólo podemos saber si una determinada serie es convergente, ocurre con la integral de ciertas funciones. En esta sección daremos algunos criterios de integrabilidad para una cierta función.

Entre los distintos criterios distinguiremos el método de comparación. Antes, recordemos algunos resultados a tener en cuenta en el estudio de la integrabilidad.

1. Si $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}_0^+$ es una función que admite una primitiva G, entonces la Regla de Barrow nos dice que es integrable en $]\alpha, \beta[$ si existen los límites en α y β de G.

2. Por definición de la integral, si $f, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles tales que g es integrable en $]\alpha, \beta[$ y $|f| \leq g$ entonces f es también integrable en $]\alpha, \beta[$.

3. Teniendo en cuenta la Proposición **??**.(5), si $c \in]\alpha, \beta[$ entonces f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, f es integrable en $]\alpha, c]$ y f es integrable en $[c, \beta[$. En tal caso

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

   Este tercera observación nos permite dividir el problema en dos.

4. Si f es locamente integrable en $[a, b[$ con $b \in \mathbb{R}$ y existe $c \in [a, b[$ tal que f está acotada en $[c, b[$ (en particular si f tiene límite en b) entonces f es integrable en $[a, b[$.

Veamos ahora el criterio de comparación. Nosotros nos centramos en intervalos de la forma $[a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$. En el caso de intervalos de la forma $]\alpha, a]$, el procedimiento es análogo.

Proposición 1.1.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a, \beta[\to \mathbb{R}$ dos funciones localmente integrables tales que*

1. *$g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, \beta[$ y*

2. *$lim_{x \to \beta} |\frac{f(x)}{g(x)}| = L$.*

Entonces

1. *Si $L \in \mathbb{R}^+$, entonces f es integrable en $[a, \beta[$ si, y sólo si, g es integrable en $[a, \beta[$.*

2. *Si $L = 0$ y g es integrable en $[a, \beta[$ entonces f es integrable en $[a, \beta[$.*

3. *Si $L = +\infty$ y f es integrable en $[a, \beta[$ entonces g es integrable en $[a, \beta[$.*

Demostración. (1) Tomo $\varepsilon = L/2$. Sea $c \in [a, \beta[$ tal que $L/2 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 3L/2$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$(L/2) \int_c^\beta |g(x)| d(x)] \leq \int_c^\beta |f(x)| d(x) \leq (3L/2) \int_c^\beta |g(x)| d(x),$$

que f y g son integrables en $[a, c]$ y aplicar la Proposición **??**.(6). que nos asegura que

$$\int_a^\beta |f(x)| d(x) = \int_a^c |f(x)| d(x) + \int_c^\beta |f(x)| d(x)$$

y

$$\int_a^\beta |g(x)| d(x) = \int_a^c |g(x)| d(x) + \int_c^\beta |g(x)| d(x).$$

La conclusión final se deriva de la Proposición **??**.(5) teniendo en cuenta que las funciones f y g son integrables en $[a, c]$.

(2) Sea $c \in [a, \beta[$ tal que $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 1$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$\int_c^\beta |f(x)| d(x) \leq \int_c^\beta |g(x)| d(x)$$

y aplicar las Proposiciones **??**.(6). y **??**.(5).

(3) Sea $c \in [a, \beta[$ tal que $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \geq 1$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$\int_c^\beta |g(x)| d(x) \leq \int_c^\beta |f(x)| d(x)$$

y aplicar de nuevo las Proposiciones **??**.(6). y **??**.(5).

∎

Es aconsejable que la función g que usamos en la comparación sea lo más sencilla posible (sería conveniente una función que sepamos integrar). En todo caso, necesitamos del conocimiento de la integrabilidad del máximo posible de funciones. Con esta idea, estudiamos primeramente la función potencial:

Consideremos la función $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^a$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$0 < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	todo valor de a
Si	$0 = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > -1$
Si	$0 < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	x^a	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < -1$
Si	$0 = \alpha, \beta = +\infty$	entonces	x^a	no es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	ningún valor de a

Demostración. Baste observar que en virtud de la Regla de Barrow (Teorema **??**)

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1}]_{\alpha}^{\beta} & si\ a \neq -1 \\ ln(x)]_{\alpha}^{\beta} & si\ a = -1 \end{cases}$$

∎

Y en segundo lugar la función exponencial.

Consideremos la función $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{ax}$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$-\infty < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	todo valor de a
Si	$-\infty = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > 0$
Si	$-\infty < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < 0$
Si	$\alpha = -\infty, \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	no es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	ningún valor de a