

# Análisis Matemático II

## Tema 7: Integración de funciones reales

4 de mayo

1 Funciones integrables

2 Teorema de la convergencia dominada

# Versión definitiva de la integral

## Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$  es **integrable** en un conjunto medible  $E \subset \Omega$  cuando:  $\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que  $\int_E f^+ < \infty$  y  $\int_E f^- < \infty$

y se define la **integral** de  $f$  sobre  $E$  como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

- Cuando  $f \geq 0$ , esta integral coincide con la que conocíamos
- $f$  es integrable en  $E$  si y sólo si lo es  $f|_E$ , y las integrales coinciden

## Observaciones inmediatas sobre de integral

### Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$  es integrable en un conjunto medible  $E \subset \Omega$   
si, y sólo si,  $\chi_E f$  es integrable en  $\Omega$ , en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_{\Omega} \chi_E f$$

### El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por  $\mathcal{L}_1(\Omega)$  al conjunto de las funciones integrables en  $\Omega$ , es decir,

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) : \int_{\Omega} |f| < \infty \right\}$$

Los elementos de  $\mathcal{L}_1(\Omega)$  son las **funciones integrables**

## Propiedades clave de la integral

### Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo:  $I(f) = \int_{\Omega} f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ ,

se obtiene una aplicación lineal  $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

### Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geq 0 \quad \implies \quad \int_{\Omega} h \geq 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leq g \quad \implies \quad \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$
- $\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

Se dice que la integral es un **funcional lineal positivo** en  $\mathcal{L}_1(\Omega)$

## Relación de la integral con la convergencia puntual

### La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n$  la función característica de  $[-n, n]^N$ . Entonces:  
 $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\{f_n\}$  converge puntualmente en  $\mathbb{R}^N$   
 a la función  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$   
 pero  $f$  no es integrable en  $\mathbb{R}^N$

### En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $A_n = \left] 0, \frac{1}{n} \right[^N$  y  $f_n = n^N \chi_{A_n} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ .

Ahora  $\{f_n\}$  converge puntualmente a cero en  $\mathbb{R}^N$

$$\text{pero } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n = 1$$

## El segundo teorema de convergencia

### Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones reales medibles,  
que converge puntualmente en  $\Omega$  a una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supongamos que existe una función integrable  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces  $f$  es integrable y se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| = 0, \quad \text{de donde:} \quad \int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n$$