Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2020/21)

Ejercicios 3

$\boxed{1}$ Dada $f : I \to I$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, se define la iterada k-esima, $g(x) = f^k(x)$, como

$$g(x) = \overbrace{f(f(f(...f}^{k-\text{veces}}(x)...))).$$

a) Sea $\alpha \in I$ un punto fijo de f, demuestra que también es un punto fijo de g.

b) Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ verificando alguna de las siguientes condiciones:

(i) $[\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset I$ y $g(x) > x$ si $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$,

(ii) $(\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset I$ y $g(x) < x$ si $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$.

Demuestra que entonces α es inestable para f.

c) Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ con $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset I$ y además se verifica que

$$\begin{cases} \alpha < g(x) < x & \text{si} \quad x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon), \\ x < g(x) < \alpha & \text{si} \quad x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha). \end{cases}$$

Demuestra que α es asintoticamente estable.

$\boxed{2}$ Sea $f \in C^2(I)$ y $\alpha \in I$ un punto fijo interior verificando $f'(\alpha) = -1$. Si llamamos $g(x) = f^2(x)$, demuestra que:

a) $g'(\alpha) = 1$ y $g''(\alpha) = 0$.

b) Si $f \in C^3(I)$ entonces $g'''(\alpha) = -2f'''(\alpha) - 3f''(\alpha)^2$.

c) Combinando los dos apartados anteriores enuncia un criterio de estabilidad para $f \in C^3(I)$ con un punto fijo α verificando que $f'(\alpha) = -1$.

d) Estudia la estabilidad del punto fijo $\alpha = \frac{2}{3}$ para la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n).$$

(propuesto en las transparencias de clase.)

$\boxed{3}$ Una compañia maderera tala el 10 % de un bosque anualmente. Para compensar, cada año se plantan un número fijo de K árboles. No se tienen en cuenta otros condicionantes (crecimiento natural del bosque, plagas, incendios...) Se pide:

a) Escribe la ley de recurrencia que modela el tamaño del bosque.

b) Si el tamaño inicial del bosque es de 10.000 árboles, calcula la solución.

c) Si plantar un árbol tiene un coste de 1 euro, calcula el precio mínimo al que se deben vender los árboles talados para que la explotación sea rentable a largo plazo.

$\boxed{4}$ Demuestra que $\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$ es un 3-ciclo inestable para la función "tienda"(*tent map*) T definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Dada la ED, $x_{n+1} = F(x_n),\ \ n = 0, 1, \ldots$, con $F(x) = \frac{1}{2}x(1-3x^2)$. Prueba que la solución que parte de $x_0 = -1$ es periódica y que existe un único punto de equilibrio para dicha ecuación que es localmente asintóticamente estable.

b) Sea (s_0, s_1) un 2-ciclo para la ED, $x_{n+1} = f(x_n)$. Deduce que entre s_0 y s_1 hay un punto de equilibrio que es atractor.

c) Dada la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$ con $f \in C^1([-2, 2])$ verificando:

- $f(x)$ sólo se anula en $x = -1$
- $f'(x)$ es estrictamente decreciente con $f'(-1) = 0$

Entonces, ¿es $s = -1$ un equilibrio inestable para cualquier valor de $\alpha \neq 0$?

6 Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n\, e^{r(1-x_n)}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

que describe la evolución de una población que se comporta como una simple exponencial cuando el tamaño de la población es bajo y tiene tendencia a disminuir cuando el tamaño es alto. Podemos considerar que la cantidad

$$\lambda = e^{r(1-x_n)}$$

es la tasa reproductiva de la población. Esta ecuación modela el tamaño de una población que está regulada por una enfermedad epidémica cuando el tamaño es grande.

a) Calcula el/los punto/s de equilibrio de la ecuación (1).

b) Determina las condiciones bajo las cuales dichos puntos de equilibrio son localmente asintóticamente estables para $r \neq 0$, 2.

c) Estudia los casos $r = 0$ y $r = 2$.

7 Determina los 2-ciclos y estudia su estabilidad local para los siguientes sistema dinámicos:

a) $x_{n+1} = 3.5x_n(1 - x_n)$.

b) $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

c) $x_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{x_n}$.

8 Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de $x_{n+1} = (x_n)^2 - x_n$.

9 Estudia la estabilidad de los ciclos propios de $x_{n+1} = 1 - (x_n)^2$.

10 Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de $x_{n+1} = f(x_n)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1, \\ \ \ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ \ \ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

11 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 0, \\ bx & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

donde a y b son dos parametros reales, demuestra que:

a) $\alpha = 0$ es un punto fijo de f para cualquier valor de los parámetros.

b) Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

c) Si $0 < a < 1$ y $b > 1$ entonces $\alpha = 0$ es inestable.

d) Si $a < 0$ y $b < 0$ y $ab < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

e) ¿Que pasa con $\alpha = 0$ cuando $b = 1$ y $0 < a < 1$?