Análisis Matemático II

Tema 5: Funciones medibles

26 y 27 de abril

1. Propiedades
2. Aproximación

Noción general de función medible

Noción general de función medible

Funciones medibles

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

$Y\,,\,Z$ espacios topológicos, $f : \Omega \to Y$ medible, $g : Y \to Z$ continua.

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

Y, Z espacios topológicos, $f : \Omega \to Y$ medible, $g : Y \to Z$ continua.

Entonces $g \circ f : \Omega \to Z$ es medible

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

Y, Z espacios topológicos, $f : \Omega \to Y$ medible, $g : Y \to Z$ continua.

Entonces $g \circ f : \Omega \to Z$ es medible

Funciones medibles con valores en $\mathbb{R}^2$

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

Y, Z espacios topológicos, $f : \Omega \to Y$ medible, $g : Y \to Z$ continua.

Entonces $g \circ f : \Omega \to Z$ es medible

Funciones medibles con valores en $\mathbb{R}^2$

Dadas dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Phi(x) = \big(f(x), g(x) \big) \quad \forall x \in \Omega$$

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \to Y$ es una función medible cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

$Y\,,Z$ espacios topológicos, $f : \Omega \to Y$ medible, $g : Y \to Z$ continua.

Entonces $g \circ f : \Omega \to Z$ es medible

Funciones medibles con valores en $\mathbb{R}^2$

Dadas dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Phi(x) = \big(f(x)\,,\,g(x)\big) \quad \forall x \in \Omega$$

Entonces Φ es medible si, y sólo si, lo son f y g.

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\, f\big)(x) = \alpha\, f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\,f\big)(x) = \alpha\,f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\, f\big)(x) = \alpha\, f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles

$\mathcal{L}(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\,f\big)(x) = \alpha\,f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles

$\mathcal{L}(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$

a las que llamamos funciones reales medibles

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\,f\big)(x) = \alpha\,f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles

$\mathcal{L}(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$

a las que llamamos funciones reales medibles

Estabilidad por operaciones algebraicas

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$

es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto: $\big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in \Omega$

Producto por escalares: $\big(\alpha\,f\big)(x) = \alpha\,f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles

$\mathcal{L}(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$

a las que llamamos funciones reales medibles

Estabilidad por operaciones algebraicas

La suma y el producto de funciones reales medibles son medibles

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in \Omega$$

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \ \ \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \;\; \forall x \in \Omega$
- Parte positiva de f: $\quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \;\; \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \;\; \forall x \in \Omega$
- Parte positiva de f: $\quad f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \;\; \forall x \in \Omega$
- Parte negativa de f: $\quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\} \;\; \forall x \in \Omega$

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \ \ \forall x \in \Omega$
- Parte positiva de f: $\quad f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \ \ \forall x \in \Omega$
- Parte negativa de f: $\quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\} \ \ \forall x \in \Omega$

Es claro que: $\quad f = f^+ - f^- \quad$ y $\quad |f| = f^+ + f^-$

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \Omega$
- Parte positiva de f: $\quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$
- Parte negativa de f: $\quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$

Es claro que: $\quad f = f^+ - f^- \quad$ y $\quad |f| = f^+ + f^-$

Estabilidad de las funciones medibles

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- Valor absoluto de f: $\quad |f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \Omega$
- Parte positiva de f: $\quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$
- Parte negativa de f: $\quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$

Es claro que: $\quad f = f^+ - f^- \quad$ y $\quad |f| = f^+ + f^-$

Estabilidad de las funciones medibles

El valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa,

de una función real medible, son medibles

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0, \infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f:\Omega\to[0,\infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f : \Omega \to [0,\infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es medible

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f:\Omega\to[0,\infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es medible

(2) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)<\alpha\}$ es medible

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f:\Omega\to[0,\infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es medible

(2) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)<\alpha\}$ es medible

(3) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)\geqslant\alpha\}$ es medible

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f : \Omega \to [0, \infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es medible

(2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}$ es medible

(3) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\}$ es medible

(4) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}$ es medible

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0,\infty]$

a las que llamaremos funciones medibles positivas

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f:\Omega\to[0,\infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es medible

(2) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)<\alpha\}$ es medible

(3) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)\geqslant\alpha\}$ es medible

(4) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)>\alpha\}$ es medible

(5) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x\in\Omega : f(x)\leqslant\alpha\}$ es medible

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones “analíticas”

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones “analíticas”

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup_{n\to\infty} f_n, \qquad \varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \psi(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0, \infty]$ para todo $x \in \Omega$

entonces $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible positiva

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$

entonces $f : \Omega \to [0,\infty]$ es una función medible positiva

Consecuencia importante para funciones reales medibles

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones “analíticas”

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$

entonces $f : \Omega \to [0,\infty]$ es una función medible positiva

Consecuencia importante para funciones reales medibles

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles,

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones “analíticas”

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \;\; \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$

entonces $f : \Omega \to [0,\infty]$ es una función medible positiva

Consecuencia importante para funciones reales medibles

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$,

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones "analíticas"

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,

también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $h = \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \ \ \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \varphi(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,, \qquad \psi(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \to f(x) \in [0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$

entonces $f : \Omega \to [0,\infty]$ es una función medible positiva

Consecuencia importante para funciones reales medibles

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$,

entonces f es medible

Funciones características

Funciones características

Función característica de un conjunto

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible

si, y sólo si, B es un conjunto medible

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}\,, \quad \chi_B(x) = 1 \;\; \forall x \in B\,, \quad \chi_B(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible

si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

- Si $W \in \mathcal{P}(R^N) \setminus \mathcal{M}$ y $f(x) = 2\chi_W(x) - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N$, entonces

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible

si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

- Si $W \in \mathcal{P}(R^N) \setminus \mathcal{M}$ y $f(x) = 2\chi_W(x) - 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$, entonces
  $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ no es medible pero $|f|$ sí lo es

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \ \ \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible

si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

- Si $W \in \mathcal{P}(R^N) \setminus \mathcal{M}$ y $f(x) = 2\chi_W(x) - 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$, entonces

  $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ no es medible pero $|f|$ sí lo es
- Tomando $B = \mathbb{Q}^N$, la función χ_B es medible,

Funciones características

Función característica de un conjunto

La función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \;\; \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible

si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

- Si $W \in \mathcal{P}(R^N) \setminus \mathcal{M}$ y $f(x) = 2\chi_W(x) - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N$, entonces
  $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ no es medible pero $|f|$ sí lo es
- Tomando $B = \mathbb{Q}^N$, la función χ_B es medible,
  pero no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}^N$

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Entonces $A_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_p$ y se tiene:

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Entonces $A_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_p$ y se tiene:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad (*)$$

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Entonces $A_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_p$ y se tiene:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad (*)$$

Por tanto s es una función simple positiva

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos función simple positiva a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Entonces $A_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_p$ y se tiene:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad (*)$$

Por tanto s es una función simple positiva

y diremos que $(*)$ es la descomposición canónica de s

Aproximación por funciones simples

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona cuando es creciente o decreciente

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in \Omega,\; \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in \Omega,\; \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona cuando es creciente o decreciente

Si $\{f_n\}$ es monótona, tiene un límite puntual: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona cuando es creciente o decreciente

Si $\{f_n\}$ es monótona, tiene un límite puntual: $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$

Escribimos $\{f_n\} \nearrow f$ si $\{f_n\}$ es creciente, y $\{f_n\} \searrow f$ si es decreciente

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona cuando es creciente o decreciente

Si $\{f_n\}$ es monótona, tiene un límite puntual: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in \Omega$

Escribimos $\{f_n\} \nearrow f$ si $\{f_n\}$ es creciente, y $\{f_n\} \searrow f$ si es decreciente

Teorema de aproximación de Lebesgue

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- creciente cuando $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- decreciente cuando $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona cuando es creciente o decreciente

Si $\{f_n\}$ es monótona, tiene un límite puntual: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \forall x \in \Omega$

Escribimos $\{f_n\} \nearrow f$ si $\{f_n\}$ es creciente, y $\{f_n\} \searrow f$ si es decreciente

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual

de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$,

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$,

entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$, entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω.

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$,

entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas

que converge uniformemente a f en Ω.

Visión constructiva de las funciones medibles positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$, entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω.

Visión constructiva de las funciones medibles positivas

Una función de Ω en $[0, \infty]$ es medible si, y sólo si, es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$,

entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas

que converge uniformemente a f en Ω.

Visión constructiva de las funciones medibles positivas

Una función de Ω en $[0, \infty]$ es medible si, y sólo si,

es el límite puntual de una sucesión creciente

de funciones simples positivas

Operaciones algebraicas con funciones medibles positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$,

entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas

que converge uniformemente a f en Ω.

Visión constructiva de las funciones medibles positivas

Una función de Ω en $[0, \infty]$ es medible si, y sólo si,

es el límite puntual de una sucesión creciente

de funciones simples positivas

Operaciones algebraicas con funciones medibles positivas

Si f y g son funciones medibles positivas,

entonces $f + g$ y $f\,g$ también lo son