

1 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Sean P y Q polinomios primos entre sí tal que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, el grado de $Q(x)$ mayor que el de $P(x)$ y el coeficiente líder de $Q(x)$ es 1, entonces podemos aplicar las siguientes sustituciones:

- Tipo 1 (denominador con factor simple):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-a)}$$

- Tipo 2 (denominador con factor múltiple):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-a)} + \int \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \int \frac{N}{(x-a)^n}$$

- Tipo 3 (denominador con factor irreducible de grado 2):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$$

- Tipo 4 (denominador con factor múltiple irreducible de grado 2). El grado de $P(x)$ es menor o igual que $2n-1$. Usaremos el método de Hermite:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} = \int \frac{dF}{dx} \left(\frac{F(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}} \right) + \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$$

Donde $F(x)$ es de grado $2n-3$ por determinar.

2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO RACIONALES: CAMBIOS DE VARIABLE

2.1. Funciones trigonométricas

- Sustitución de Weierstrass. Cociente de sumas y productos de senos y cosenos:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = g(t) = 2\arctan(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

- Caso especial $\frac{\sin^n(x)}{\cos^m(x)} dx$:

- n es impar: $x = \arccos(t)$
- m es impar: $x = \arcsen(t)$
- n y m son pares:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

2.2. Funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son las funciones hiperbólicas:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$x = g(t) = \ln(t), \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

2.3. Irracionales en x

Si f es una función cociente de sumas y productos de potencias racionales de x tal que $x^{\frac{p_i}{q_i}}$, entonces

$$x = t^m, \quad m = mcm\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

2.4. Irracionales cuadráticas

- Funciones que son cociente de sumas y productos de x y $\sqrt{x^2-1}$:

Sustituimos por $x = g(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ o por $x = g(t) = ch(t)$ y resolvemos como hemos visto.

- Funciones que son cociente de sumas y productos de x y $\sqrt{1-x^2}$:

Sustituimos $x = g(t) = \sin(t)$ y resolvemos como hemos visto.

- Funciones que son cociente de sumas y productos de x y $\sqrt{1+x^2}$:

Sustituimos por $x = g(t) = tg(t)$ o por $x = g(t) = sh(t)$ y resolvemos como hemos visto.

3 INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones u, v' derivables con $u'v$ y uv' integrables, entonces:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Regla mnemotécnica: Un día vi una vaca vestida de uniforme.