JULIÁN GARRIDO ARANDA.

4) Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definido por:

$$f_n(x) = \frac{2n x^2}{1+n^2x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$

b) Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty)$, pero no en $[0, \delta]$

a) Para $x=0 \rightarrow f_n(0) = \frac{2n \cdot 0}{1+n^2 \cdot 0} = \frac{0}{1} = 0.$

Luego $\{f_n(0)\} = \{0, 0, 0, \ldots, 0\}. \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ podemos reescribir la sucesión de la siguiente forma:

$$f_n(x) = \frac{2n \cdot x^2}{1+n^2x^4} = \frac{2 \cdot n \cdot x^2}{n x^2\left(\frac{1}{nx^2} + nx^2\right)} = \frac{2}{\frac{1}{nx^2} + nx^2}$$

Así se aprecia claramente que:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Obtenemos así que $\{f_n(x)\} \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$

Si def. $\varphi(x) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$ $\Big\} \to \{f_n(x)\} \to \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$

Siendo $\mathbb{R}_0^+$ el C_p (campo de convergencia puntual) de $\{f_n\}$

b) Sea $n \in \mathbb{N} \to f_n$ es derivable en $\mathbb{R}^+_0$ con

$$f'_n(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 4 \cdot n^2x^3(2nx^2)}{(1+n^2x^4)^2} =$$

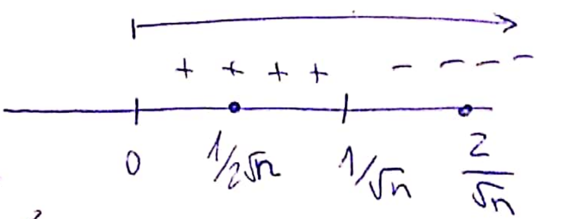
$$= \frac{4nx + 4n^3x^5 - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{4nx \cdot (1 + n^2x^4 - 2n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2} =$$

$$= \frac{4nx \cdot (1 - n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}.$$

$$f'_n(x) = 0 \iff \begin{cases} 4nx = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ \text{ó} \\ 1 - n^2x^4 = 0 \Rightarrow 1 = n^2x^4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{n}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{2n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1 + n^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \dfrac{2}{1} = 2. \end{cases}$$

Dom. $f_n(x)$.



$$f'_n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \cancel{\frac{2n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{1 + n^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{\frac{2n}{4n}}{1+\frac{n^2}{16n^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{16}} > 0}$$

$$= \frac{4n\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \left(1 - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4\right)}{\left(1+n^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)^2}; \quad f'_n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) > 0 \iff 4n\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \left(1 - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4\right) > 0$$

$$\iff 2 \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{2n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^2}{16n^2} > 0 \iff 2\frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8}\frac{n}{\sqrt{n}} > 0 \iff 2 > \frac{1}{8}.$$

$$f'_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \cancel{\frac{2n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{8}{}} =$$

$$= \frac{4n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - n^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4\right)}{\left(1 + n^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4\right)^2}, \quad f'_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) < 0 \iff 4n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - n^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4\right) < 0 \iff$$

$$\iff 8\frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{128n}{\sqrt{n}} < 0 \iff 8 < 128. \checkmark$$

JULIÁN GARRIDO ARANA.

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow f'n(x) \geq 0 \Rightarrow f_n \text{ es creciente en } (0, \frac{1}{\sqrt{n}}) \\ \frac{1}{\sqrt{n}} < x < +\infty \Rightarrow f'(n)(x) \leq 0 \Rightarrow f_n \text{ es decreciente en } (\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{máx}\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}^+_0\} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2.$$

Definimos x_n.

Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ entonces $\exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ $\begin{cases} x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} & n \geq m \\ x_n = 0 & n < m. \end{cases}$

Así $x_n \in [0, \delta]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\to \{f_n(x_n)\} \not\to 0$ Luego $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Ahora: $n \geq m \to \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ y sabemos que f_n es decreciente en $(\delta, +\infty)$, Luego.

$$0 \leq f_n(x) < f_n(\delta) = \delta_n. \quad \text{Como } \{f_n(\delta)\} \to 0$$

(conv. puntual).

$\exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \to |f_n(x)| < \delta_n$ $\forall x \in [\delta, +\infty)$ y por tanto por el "lema del sandwich" y el criterio de convergencia uniforme, $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty)$.

JULIÁN GARRIDO ARANA.

(5). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $g_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g_n(x) = n.(\cos x)^n . \operatorname{sen} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $p \in \mathbb{R}$ con $0 < p < \pi/2$, probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente en el int. $[p, \pi/2]$, pero no en el int. $[0, p]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$: g_n es derivable en $[0, \pi/2]$ con

$$g'_n(x) = -n^2 (\cos x)^{n-1} . \operatorname{sen}^2 x + n.(\cos x)^{n+1} =$$

$$= n.(\cos x)^{n-1} . \left((\cos x)^2 - n . \operatorname{sen}^2 x\right).$$

$g'_n(x)$ se anula $\iff \begin{cases} n.(\cos x)^{n-1} \text{ es } 0 \\ \text{ó} \\ (\cos x)^2 - n . \operatorname{sen}^2 x \text{ es } 0. \end{cases}$

$n.(\cos x)^{n-1} = 0 \iff \cos x = 0 \iff \underline{x = \frac{\pi}{2}}$

$(\cos x)^2 - n.(\operatorname{sen} x)^2 = 0 \iff \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = n \iff tg(x) = \sqrt{n} \iff$

$\iff \underline{x = \text{arc.tan}(\sqrt{n}).}$

	0		$\arctan(\sqrt{n})$		$\pi/2$
		$+ + +$		$- - -$	

$0 < x < \arctan(\sqrt{n}) \to g'_n(x) \geq 0 \Rightarrow g_n$ es creciente en $[0, \arctan(\sqrt{n}))$

$\arctan(\sqrt{n}) < x < \frac{\pi}{2} \to g'_n(x) \leq 0 \Rightarrow g_n$ es decreciente en $(\arctan(\sqrt{n}), \pi/2)$.

JULIÁN GARRIDO ARANA.

máx $\{g_n(x) : x \in [0, \pi/2]\} = g_n(\arctan(\sqrt{n})) : \alpha$

Sea $p \in [0, \pi/2]$ $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \to$

$\to \arctan(\sqrt{n}) < p$ $\to$ Definimos x_n $\begin{cases} x_n = \arctan\sqrt{n} \text{ para } n \geq m \\ x_n = 0 \quad n < m. \end{cases}$

Entonces $x_n \in [0, p]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. y $\{g_n(x_n)\} \not\to 0$.

Luego $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0, p]$.

Si ahora para $n \geq m$, tenemos otra vez

$\arctan(\sqrt{n}) < p$ y g_n decreciente en $[p, \pi/2[$.

Estudiando la convergencia puntual de g_n.

Si $x = 0$ $\{g_n\} \to 0$, Si $x = \pi/2$. $\{g_n\} \to 0$ y

Si $x \in (0, \pi/2)$, como "$(\cos x)^n$" ~~crece~~ es un infinito de orden superior a "n" entonces

$\{g_n\} \to 0$. Tenemos que $\{g_n\} \to 0$ $\forall x \in [0, \pi/2]$

Así: $0 < g_n(x) \leq g_n(p) = P_n$ $(\{g_n(p)\} \to 0)$.

Entonces $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m$ $|g_n(x)| \leq P_n$ $\forall x \in [0, \pi/2]$

y por el criterio de convergencia uniforme $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[p, \pi/2]$

Índice de comentarios

2.1 Esto se podía hacer mejor ¿no?

3.1 No es 2 sino 1,
pero da igual

3.2 Correcto

4.1 Error: tg = sen/cos
no al revés

5.1 Esto es falso, el error al despejar te invalida todo el razonamiento

5.2 Otra vez el mismo problema