Aplicación: Estrategias de Pesca

Federico Cabrera Linares e Isabel María Moreno Cuadrado

16 de marzo de 2021

1. Introducción del problema

La dinámica de una población de peces sin agentes externos y adecuadamente normalizada viene descrita por la ecuación en diferencias, no lineal, de primer orden con coeficientes constantes y homogénea:

$$x_{k+1} = \underbrace{1,5x_k}_{crecimiento} - \overbrace{0{,}5x_k^2}^{competencia}$$

A continuación vamos a estudiar y analizar el comportamiento de dicha población en función de la estrategia de pesca que decidamos llevar a cabo, enfocados desde el punto de vista de la sostenibilidad que proporciona cada una. Las posibles estrategias son:

- Pescar una cantidad fija **b** de peces cada año
- Pescar una fracción $r \in (0, 1)$ del total de peces en cada año

2. Desarrollo

2.1. Estrategia 1

Como vamos a pescar una cantidad fija de peces cada año, llamémosla b, la ecuación en diferencias será la siguiente:

$$x_{k+1} = 1,5x_k - 0{,}5x_k^2 - b,$$

Estudiemos cómo se comporta nuestro sistema según b y qué valores son deseables. Para empezar, es obvio que b ha de ser una cantidad positiva, $b > 0$. Observemos que $x_{k+1} = f(x_k)$, con $f(x) = 1{,}5x - 0{,}5x^2 - b$. Calculemos cuáles son los puntos de equilibrio.

$$x = f(x) \Leftrightarrow x = 1{,}5x - 0{,}5x^2 - b \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 0{,}5x - b = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8b}}{2}.$$

Para que haya puntos de equilibrio, necesitamos que $1 - 8b \geq 0 \Leftrightarrow 0{,}125 \geq b > 0$. De no tener puntos de equilibrio no habría posibilidad de que nuestra población se estabilizara y siempre terminaría extinguiéndose, ya que con $b > 0{,}125$, la gráfica de $f(x)$ está siempre por debajo de la bisectriz del primer cuadrante: $f(x) < x \Leftrightarrow 1{,}5x - 0{,}5x^2 - b < x \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 0{,}5x - b < 0$, desigualdad la cual estudiando el signo es fácil de ver que se da. Así, $x_{k+1} = f(x_k) < x_k$, tendiendo a $-\infty$ la población sin importar la inicial x_0.

Llamemos $\alpha_0 = \dfrac{1-\sqrt{1-8b}}{2}$ y $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-8b}}{2}$, $\alpha_0 < \alpha_1$. Otra condición obligada para b es que haga verificar que $\alpha_0 < x_0$. Si la población inicial se encuentra a la izquierda del menor punto fijo, al encontrarnos con una parábola negativa, tenemos que $f(x) < x$ para todo $x < \alpha_0$, y si $x_0 < \alpha_0$, ocurre lo explicado en el párrafo anterior. Entonces:

$$\alpha_0 = \frac{1-\sqrt{1-8b}}{2} < x_0 \Leftrightarrow -2x_0 + 1 < \sqrt{1-8b} \Leftrightarrow b < 0{,}5\left(x_0 - x_0^2\right),$$

solo cuando x_0 sea menor que 0,5 (utilizado en la segunda equivalencia). Si $x_0 \geq 0{,}5$ no hay problema ya que α_0 está acotado por 0,5.

Estudiamos ahora la estabilidad de ambos puntos fijos.

$$f'(x) = 1{,}5 - x \Rightarrow \begin{cases} f'(\alpha_0) = f'\left(\dfrac{1-\sqrt{1-8b}}{2}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} \\ f'(\alpha_1) = f'\left(\dfrac{1+\sqrt{1-8b}}{2}\right) = 1 - \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} \end{cases}$$

El valor de la derivada dependerá de dónde se encuentre b:

- Si $b < 0{,}125$, entonces $|f'(\alpha_1)| < 1$ y $|f'(\alpha_0)| > 1$. Por lo tanto, α_1 es asintóticamente estable, mientras que α_0 es inestable.
- Si $b = 0{,}125$, entonces $\alpha_0 = \alpha_1 = 0{,}5$, $f'(0{,}5) = 1$ y como $f''(x) = -1 < 0$, concluimos que el punto fijo es inestable.

Con este estudio concluimos que nos interesará ir buscando la cantidad máxima posible $b = 0{,}125$, siempre y cuando la población no la restringa. El gran inconveniente es que hay muy poco margen para cambios en el entorno. Cuanto más abusemos de b y más nos acerquemos a α_0, más probabilidad hay de que una perturbación haga saltar a la población a la izquierda de este y se dirija a la extinción.

2.2. Estrategia 2

Como vamos a pescar una cantidad de peces cada año en función del total de peces, podemos deducir que en este caso la ecuación en diferencias será la siguiente

$$x_{k+1} = 1{,}5x_k - 0{,}5x_k^2 - rx_k \qquad r \in (0,1)$$

Donde el término rx_k indica indica esa cantidad variable.

- Primero vamos a calcular los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias

  $$x_{k+1} = (1,5-r)x_k - 0{,}5x_k^2 \qquad r \in (0,1)$$

  Para ello vamos a imponer que se verifique $\alpha = (1{,}5 - r)\alpha - 0{,}5\alpha^2 \Leftrightarrow 0 = (0{,}5 - r)\alpha - 0{,}5\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1 - 2r$.

- Calculamos la derivada de f(x) siendo $f(x) = (1,5 - r)x - 0{,}5x^2$ tenemos entonces que $f'(x) = (1,5 - r) - x$, evaluamos la derivada en cada punto de equilibrio

  $f'(0) = 1{,}5 - r$ y $f'(1 - 2r) = 0{,}5 + r$

- A continuación vamos a estudiar la estabilidad en dichos puntos. Para ello, vamos a apoyarnos en los teoremas y resultados vistos en clase, y en las derivadas calculadas en el apartado anterior.

  Empecemos analizando la estabilidad en $\alpha_1 = 0$,

  - Para $\alpha = 0$ es Localmente Asintóticamente Estable $\Leftarrow |f'(0)| < 1 \Leftrightarrow |1{,}5 - r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1{,}5 - r < 1 \Leftrightarrow 0{,}5 < r < 2{,}5$. Recordamos que teníamos una restricción para $r \in (0, 1)$. Y en base a ella, podemos entonces concretar que.
    - Si $0 < r < 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 0$ es inestable**
    - Si $0{,}5 < r < 1 \Rightarrow \alpha = 0$ es Localmente Asintóticamente Estable
  - Para $\alpha = 1 - 2r$ es Localmente Asintóticamente Estable $\Leftarrow |f'(1 - 2r)| < 1 \Leftrightarrow |0{,}5 + r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 0{,}5 + r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 0{,}5$. Teniendo siempre en consideración el rango de r concretamos
    - Si $0 < r < 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 1 - 2r$ es Localmente Asintóticamente Estable
    - Si $r > 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 1 - 2r$ es inestable

    Si $0{,}5 = r \Rightarrow$ Solo tenemos un punto de equilibrio $\alpha = 0 \Rightarrow |f'(0)| = 1{,}5 - r = 1$ y tenemos que $f''(x) = -1 \Rightarrow$ inestable

$$rx_k = r(1 - 2r) = r - 2r^2$$

Podemos ver donde se maximiza la expresión anterior; esto es, cuando r = 0.25 se alcanza el valor $rx_k = 0{,}125$

3. Conclusión

Como vemos, en las dos estrategias se llega a la misma cantidad máxima de pesca: 0,125. La gran diferencia es que en la primera estrategia, forzar siempre la máxima cantidad de pesca hace dirigirse a una inestabilidad que puede llevar a la extinción de la población con cualquier perturbación. Con la segunda estrategia, si hubiera una reducción de población, también habría reducción de caza, dejando margen para recuperarse.