Análisis Matemático II

Tema 6: Integración de funciones positivas

27 de abril, 3 y 4 de mayo

Integral de una función simple positiva

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple positiva,
y consideremos su descomposición canónica:

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple positiva,

y consideremos su descomposición canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_0^+\,, \quad A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}$$

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple positiva, y consideremos su descomposición canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_{A_k} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_0^+, \;\; A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}$$

Para $E \in \mathcal{M}$, se define la integral de s sobre E mediante la igualdad:

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple positiva,

y consideremos su descomposición canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_0^+, \ \ A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}$$

Para $E \in \mathcal{M}$, se define la integral de s sobre E mediante la igualdad:

$$\int_E s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \ \lambda(E \cap A_k)$$

Propiedades que después generalizaremos

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho\, s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces $\varphi(\emptyset) = 0$ y φ es σ-aditiva, luego es una medida

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces $\varphi(\emptyset) = 0$ y φ es σ-aditiva, luego es una medida

Crecimiento

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces $\varphi(\emptyset) = 0$ y φ es σ-aditiva, luego es una medida

Crecimiento

Si s, t son funciones simples positivas y $E \in \mathcal{M}$, entonces:

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces $\varphi(\emptyset) = 0$ y φ es σ-aditiva, luego es una medida

Crecimiento

Si s, t son funciones simples positivas y $E \in \mathcal{M}$, entonces:

$$s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E s \leqslant \int_E t$$

Definición de la integral de una función medible positiva

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t \; = \text{máx} \left\{ \int_E s \; : \; s \in \mathcal{S}^+, \;\; s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \right\}$$

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t = \text{máx} \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+, \quad s(x) \leqslant t(x) \quad \forall x \in E \right\}$$

lo que hace coherente la siguiente definición:

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t = \text{máx} \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+ , \ \ s(x) \leqslant t(x) \ \ \forall x \in E \right\}$$

lo que hace coherente la siguiente definición:

Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t \;=\; \text{máx} \left\{ \int_E s \;:\; s \in \mathcal{S}^+, \quad s(x) \leqslant t(x) \quad \forall x \in E \right\}$$

lo que hace coherente la siguiente definición:

Si $f : \Omega \to [0,\infty]$ es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

se define la integral de f sobre E mediante la igualdad:

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t \;=\; \text{máx}\left\{ \int_E s \;:\; s \in \mathcal{S}^+, \;\; s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \right\}$$

lo que hace coherente la siguiente definición:

Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

se define la integral de f sobre E mediante la igualdad:

$$\int_E f \;=\; \sup\left\{ \int_E s \;:\; s \in \mathcal{S}^+, \;\; s(x) \leqslant f(x) \;\; \forall x \in E \right\}$$

Primeras propiedades de la integral

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \ \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \ \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Localización

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \ \ \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Localización

Si f es una función medible positiva, se tiene:

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \qquad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Localización

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

El primer teorema de convergencia

El primer teorema de convergencia

Teorema de la convergencia monótona

El primer teorema de convergencia

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas,

El primer teorema de convergencia

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas,

y sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces:

El primer teorema de convergencia

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas,

y sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n$$

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Aditividad

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Aditividad

Si f es una función medible positiva, definiendo

$$\varphi(E) = \int_E f \quad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Aditividad

Si f es una función medible positiva, definiendo

$$\varphi(E) = \int_E f \qquad \forall\, E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

se obtiene una función $\varphi : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$,

que es σ-aditiva con $\varphi(\emptyset) = 0$, luego es una medida

Valores extremos de la integral

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_A f = 0 \iff \lambda\Big(\{x \in A : f(x) > 0\}\Big) = 0$$

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_A f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\big(\{x \in A : f(x) > 0\}\big) = 0$$

En particular, si $\lambda(A) = 0$, se tiene: $\displaystyle\int_A f = 0$

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_A f = 0 \iff \lambda\Big(\{x \in A : f(x) > 0\}\Big) = 0$$

En particular, si $\lambda(A) = 0$, se tiene: $\displaystyle\int_A f = 0$

Integrales finitas

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_A f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\Big(\{x \in A : f(x) > 0\}\Big) = 0$$

En particular, si $\lambda(A) = 0$, se tiene: $\displaystyle\int_A f = 0$

Integrales finitas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

verifican que $\displaystyle\int_A f < \infty$, entonces:

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_A f = 0 \iff \lambda\Big(\{x \in A : f(x) > 0\}\Big) = 0$$

En particular, si $\lambda(A) = 0$, se tiene: $\displaystyle\int_A f = 0$

Integrales finitas

Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

verifican que $\displaystyle\int_A f < \infty$, entonces:

$$\lambda\Big(\{x \in A : f(x) = \infty\}\Big) = 0$$

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Ejemplos que ya han aparecido

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, se tiene:

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, se tiene:

- $\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in \Omega \iff f = 0$ c.p.d.

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, se tiene:

- $\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in \Omega \iff f = 0$ c.p.d.
- $\int_\Omega f < \infty \implies f(x) < \infty$ p.c.t. $x \in \Omega \iff f < \infty$ c.p.d.

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in A$, decimos que

la condición P se verificacasi por doquier en A (abreviado c.p.d. en A)

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in A$, decimos que

la condición P se verificacasi por doquier en A (abreviado c.p.d. en A)

Ejemplos que ya han aparecido

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in A$, decimos que

la condición P se verificacasi por doquier en A (abreviado c.p.d. en A)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in A$, decimos que

la condición P se verificacasi por doquier en A (abreviado c.p.d. en A)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

- $\displaystyle\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in A \iff f = 0$ c.p.d. en A

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $A \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in A$,

abreviado p.c.t. $x \in A$,

cuando los puntos $x \in A$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in A$, decimos que

la condición P se verificacasi por doquier en A (abreviado c.p.d. en A)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

- $\displaystyle\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in A \iff f = 0$ c.p.d. en A
- $\displaystyle\int_\Omega f < \infty \implies f(x) < \infty$ p.c.t. $x \in A \iff f < \infty$ c.p.d. en A

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Es claro que $\{\chi_n\} \searrow 0$ pero $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Es claro que $\{\chi_n\} \searrow 0$ pero $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lema de Fatou

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Es claro que $\{\chi_n\} \searrow 0$ pero $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lema de Fatou

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, se tiene:

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Es claro que $\{\chi_n\} \searrow 0$ pero $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lema de Fatou

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \to \infty} f_n \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n$$