Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2020/21)

Ejercicios 2

1 Se considera la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \frac{1}{2+x}$$

a) Demuestra que el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = F(x_n)$ posee un único punto de equilibrio que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

b) Estudia la estabilidad de dicho punto de equilibrio.

c) Describe la solución del sistema dinámico discreto $x_{n+1} = F(x_n)$ que tiene por valor inicial $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

d) Utiliza los apartados anteriores para determinar el valor de la *fracción continua*

$$c = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}.$$

2 La *ecuación logística de Pielou* es una ecuación en diferencias no lineal de la forma

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}$$

con $\alpha > 1$ y $\beta > 0$, que se utiliza en modelos de dinámica de poblaciones.

a) Demuestra que posee un punto de equilibrio positivo.

b) Tomemos $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, demuestra que el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable.

c) Demuestra que el cambio de variable

$$x_n = \frac{1}{z_n}$$

transforma dicha ecuación en una ecuación lineal de primer orden.

d) A partir del resultado anterior determina el comportamiento asintótico local de las soluciones de la ecuación logística de Pielou.

3 *a*) Una población se rige por el modelo discreto: $p_{n+1} = 10 p_n e^{-p_n},\ n \geq 0$. Prueba que los equilibrios del modelo son inestables.

b) Para conseguir un equilibrio poblacional localmente asintóticamente estable (**a.e.**), se propone vender una fracción α $(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo dando lugar al modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha) p_n e^{-(1-\alpha)p_n}$$

i) Encuentra el intervalo abierto (de amplitud máxima) donde elegir α para que esté asegurada la estabilidad asintótica local del equilibrio positivo.

ii) Calcula el valor de α para el que la población de equilibrio alcanza su valor máximo y es localmente **a.e.**

4 Demuestra que el punto fijo del Teorema de Banach es asintóticamente estable.

5 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase 2, el método de Newton para resolver $g(x) = 0$ se describe como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Si α es una raíz de $g(x) = 0$, simple ($g'(\alpha) \neq 0$) demuestra que el método es convergente para cualquier dato inicial cerca de la raíz.

6 Estudia la estabilidad de los puntos fijos de

$$x_{n+1} = e^{-x_n}.$$

7 Sea $f : I \to I$ una función continua y $\alpha \in I$ un punto fijo tal que existe $\varepsilon > 0$ verificando alguna de las siguientes condiciones:

a) $[\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset I$ y además $f(x) > x$ si $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$.

b) $(\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset I$ y además $f(x) < x$ si $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$.

Demuestra que α es inestable.

8 Sea $f \in C^2(I)$ y $\alpha \in I$ un punto fijo interior donde se verifica:

- $f'(\alpha) = 1$,
- $f''(\alpha) \neq 0$,

demuestra que α es inestable. (Indicación: usa el ejercicio anterior).

9 Sea $f : I \to I$ una función continua y $\alpha \in I$ tal que existe $\varepsilon > 0$ verificando $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset I$ y además

$$\begin{cases} \alpha < f(x) < x & \text{si} \quad x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \\ x < f(x) < \alpha & \text{si} \quad x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha.) \end{cases}$$

Demuestra que α es un atractor local. Utiliza este resultado para estudiar la estabilidad de los puntos fijos de:

a) $x_{n+1} = \operatorname{sen}(x_n)$.

b) $x_{n+1} = f(x_n)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0.25x + 1.5 & \text{si } x \leq 2, \\ \sqrt{2x} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

10 Sea $f \in C^3(I)$ y $\alpha \in I$ un punto fijo interior donde se verifica:

- $f'(\alpha) = 1$,
- $f''(\alpha) = 0$,
- $f'''(\alpha) < 0$.

Demuestra que f está en las condiciones del ejercicio anterior y por tanto α es asintóticamente estable. Usa este resultado para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio de

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n + 3x_n^2 - x_n^3.$$

11 Utiliza un análogo al ejercicio 8 para demostrar que si $f \in C^3(I)$ y $\alpha \in I$ es un punto fijo interior que verifica:

- $f'(\alpha) = 1$,
- $f''(\alpha) = 0$,
- $f'''(\alpha) > 0$,

entonces es inestable. Busca un ejemplo de aplicación.

12 En cierto mercado, los precios de determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña pero se ha observado que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por:

$$O(p) = p^2, \; D(p) = 3 - 2p.$$

Describe cómo se comportarán los precios en este caso.