Capítulo 1

Teorema Fundamental del Cálculo

Sumario

El objetivo de esta lección es estudiar la importante conexión entre los tres conceptos básicos del análisis: continuidad, derivación e integración. Demostraremos que las integrales indefinidas son absolutamente continuas y concluiremos que las funciones absolutamente continuas son precisamente éstas, es decir, aquellas que se pueden reconstruir a partir de la integral de su derivada. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.0.1. Teorema de derivación de Lebesgue.

El objetivo de esta sección es probar que toda funcón monótona es derivable cp.d. y para ello seguimos, en parte, el esquema dado en [**?**]. Comenzamos con un interesante resultado,

Lema 1.0.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces f es continua casi por doquier en $[a, b]$.*

Demostración. Sea $D := \{x \in [a, b];\ f \text{ no es continua en } x\}$. Veamos que D es de medida nula. En efecto, sea $x \in [a, b]$, por ser creciente, existen los límites por la izquierda y por la derecha de f en x, que notaremos respectivamente por $f(x-)$ y $f(x+)$. Obviamente $D = \{x \in [a, b];\ f(x-) < f(x+)\}$ (cf. [**?**, Teorema 3.20]). Considérese la aplicación $r : D \to \mathbb{Q}$ que a cada $x \in D$ le asocia un número racional del intervalo $]f(x-), f(x+)[$. Dicha aplicación es claramente inyectiva, luego D es numerable y por tanto de medida nula. ∎

Contnuamos con algunos resultados un tanto técnicos.

Lema 1.0.2. *Sea F un subconjunto no vacío del intervalo de números reales $[c, d]$. Sea $\mathcal{F}$ un recubrimiento de F por subíntervalos abiertos contenidos en $[c, d]$. Entonces existen $I_1, I_2, \cdots, I_m \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tales que*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k) > \frac{\lambda(F)}{4}.$$

Demostración. Por ser $\cup_{I\in\mathcal{F}} I$ un conjunto abierto, en virtud de la Proposición **??**, podemos encontrar una familia numerable de intervalos de la forma $[a_n, b_n[$, disjuntos dos a dos y tales que

$$\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n[= \cup_{I\in\mathcal{F}} I. \tag{1.0.1}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que, para cada I, existe (único) n tal que $I \subseteq [a_n, b_n[$. En caso contrario, tomemos el subconjunto $J \subseteq \mathbb{N}$ satisfaciendo que $I \subseteq \cup_{n\in J}[a_n, b_n[$ y tal que $n \notin J$ implica que $I \cap [a_n, b_n] = \emptyset$. Tomamos $\alpha = Inf\{a_n; n \in J\}$ y $\beta = Sup\{b_n; n \in J\}$. Por ser I es un intervalo abierto, $I \subseteq]\alpha, \beta[$, por lo que puedo sustituir todos los intervalos $[a_n, b_n[$ con $n \in J$ por el intervalo $[\alpha, \beta[$.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $a_n < a'_n < b'_n < b_n$ tales que $b'_n - a'_n > \frac{b_n - a_n}{2}$. Teniendo en cuenta la igualdad (1.0.1), para cada $x \in [a'_n, b'_n] \subseteq \cup_{I\in\mathcal{F}} I$ podemos tomar $I_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in I_x \subseteq [a_n, b_n[$. Es claro que el conjunto $\{I_x;\ x \in [a'_n, b'_n]\}$ es un recubrimiento por abiertos de $[a'_n, b'_n]$ y por tanto, de la compacidad de $[a'_n, b'_n]$, se deduce la existencia de un número finito de éstos, $I_1, I_2, \cdots, I_p$, que recubren al intervalo $[a'_n, b'_n]$.

Podemos suponer que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, I_j no está contenido en la unión del resto, ya que en caso contrario suprimimos I_j. Así, para cada j, existe $x_j \in I_j \backslash \cup_{k\neq j} I_k$. Reordenando, si hiciera falta, obtenemos $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$. Nótese que $I_1 \cap I_3 = \emptyset$. En efecto, ya que si suponemos que existe $z \in I_1 \cap I_3$, y $x_2 \leq z$, entonces por ser I_1 un intervalo, x_2 pertenece al intervalo de extremos x_1 y z contenido en I_1. Si por el contrario, suponemos que $z < x_2$, entonces, usando que x_2 está en un intervalo de de extremos z y x_3, deducimos igualmente que $x_2 \in I_3$. Ambas afirmaciones contradicen el hecho de que $x_2 \in I_2 \backslash (I_1 \cup I_3$. Análogamente se puede demostrar que

$$I_{2j-1} \cap I_{2i-1} = \emptyset = I_{2j} \cap I_{2i} \quad \forall j \neq i. \tag{1.0.2}$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda(I_k) = \sum_{k=1, k \text{ par}}^{p} \lambda(I_k) + \sum_{k=1, k \text{ impar}}^{p} \lambda(I_k),$$

y por tanto, ó bien

$$\sum_{k=1, k \text{ par}}^{p} \lambda(I_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \lambda(I_k),$$

ó bien

$$\sum_{k=1, k \text{ impar}}^{p} \lambda(I_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \lambda(I_k).$$

Llamemos $\mathcal{F}_n$ al subrecubrimiento de $\{I_1, I_2, \cdots, I_p\}$ formado por los elementos de subíndice par en el primer caso ó por los elementos de subíndice impar en el segundo caso. En cualquier caso, los subíntervalos de $\mathcal{F}_n$, en virtud de 1.0.2, son disjuntos dos a dos y por construcción, se tiene que

$$\lambda(F) \leq \lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n[) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) < 2\sum_{n=1}^{+\infty}(b'_n - a'_n) \leq$$

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}\lambda(I_k) \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{I_k\in\mathcal{F}_n}\lambda(I_k).$$

Tomemos N suficientemente grande tal que

$$\lambda(F) \leq 4\sum_{n=1}^{N}\sum_{I_k\in\mathcal{F}_n}\lambda(I_k) \leq 4\sum_{I\in\mathcal{H}}\lambda(I),$$

donde $\mathcal{H} = \cup_{k=1}^{N}\mathcal{F}_k$ es un conjunto finito de elementos de $\mathcal{F}$. Nótese que si dos intervalos I_j e I_k están en el mismo $\mathcal{F}_n$ son disjuntos como ya hemos visto en 1.0.2, pero si esos intervalos están en un $\mathcal{F}_n$ distinto, también están en un intervalo de la forma $[a_n, b_n[$ distinto y por tanto disjuntos entre sí.

■

Limites inferior y superior de una función.

Para expresar nuestro siguiente resultado necesitamos alguna notación adicional. Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in [a, b]$. Sea $L_{h,x_0} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una nueva función asociada a h y definida por

$$L_{h,x_0}(\delta) = Inf\{h(x) : \ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap[a, b]\}.$$

Claramente la función L_{h,x_0} es una función decreciente. En tal caso, definimos

$$\underline{lim}_{x\to x_0}h(x) = lim_{\delta\to 0}L_{h,x_0}(\delta).$$

Sea $M \in \mathbb{R}$. Es claro que si $\underline{lim}_{x\to x_0}h(x) = M$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe δ_0 tal que si $0 < \delta < \delta_0$ $L_{h,x_0}(\delta) > M - \varepsilon$, en particular, para todo $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\cap[a, b]$, $h(x) > M - \varepsilon$. Téngase en cuenta que si el conjunto $\{h(x) : \ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap[a, b]\}$ no esta minorado, $L_{h,x_0}(\delta) = -\infty$.

Análogamente, si $L^{h,x_0} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una nueva función definida por

$$L^{h,x_0}(\delta) = Sup\{h(x) : \ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap[a, b]\}.$$

Claramente la función L^{h,x_0} es una función creciente y definimos

$$\overline{lim}_{x\to x_0}h(x) = lim_{\delta\to 0}L^{h,x_0}(\delta).$$

Es claro, repitiendo el razonamiento anterior, que si $\overline{lim}_{x\to x_0}h(x) = M$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe δ_0 tal que si $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\cap[a, b]$, entonces $h(x) < M + \varepsilon$.

En consecuencia,

$$[\underline{lim}_{x\to x_0}h(x)=\overline{lim}_{x\to x_0}h(x)=M\in\mathbb{R}]\ \Rightarrow\ [lim_{x\to x_0}h(x)=M]. \tag{1.0.3}$$

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Notemos ahora

$$\overline{\mathbf{D}}\mathbf{f}(\mathbf{x_0}):=\overline{lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq\underline{\mathbf{D}}\mathbf{f}(\mathbf{x_0}):=\underline{lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1.0.4}$$

En particular,

$$[f \text{ es derivable en } \ x_0]\Leftrightarrow[\underline{D}f(x_0)=\overline{D}f(x_0)=M\in\mathbb{R}]. \tag{1.0.5}$$

Ya podemos enunciar nuestro siguiente resultado.

Proposición 1.0.3. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función creciente entonces $\underline{D}f(x)$ es finita casi por doquier en $[a,b]$*

Demostración. Por ser f creciente, $\underline{D}f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$. Consideremos el conjunto $F=\{x\in[a,b];\ \underline{D}f(x)=+\infty\}$. Veamos que F es de medida nula. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\lambda(F)>0$. Para cada $x_0\in F$, definimos $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, mediante la fórmula $h(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Sea $M>0$. Por definición de límite inferior, existe δ_0 tal que si $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[$ entonces $h(x)>M$. Tomemos a_x y b_x tales que $x_0-\delta_0<a_x<x_0<b_x<x_0+\delta$. Es claro que existe $t\in[0,1]$ tal que $x_0=ta_x+(1-t)b_x$, en consecuencia, puesto que $b_x-x_0=t(b_x-a_x)$ y $a_x-x_0=(1-t)(a_x-b_x)$,

$$\frac{f(b_x)-f(a_x)}{b_x-a_x}=\frac{f(b_x)-f(x_0)}{b_x-a_x}+\frac{f(x_0)-f(a_x)}{b_x-a_x}=$$

$$t\frac{f(b_x)-f(x_0)}{b_x-x_0}+(1-t)\frac{f(x_0)-f(a_x)}{x_0-a_x}=th(b_x)+(1-t)h(a_x)>tM+(1-t)M=M$$

Puesto que la familia $\mathcal{F}=\{]a_x,b_x[;\ x\in F\}$ recubren a F, en virtud del Lema 1.0.2, existen $I_1,I_2,\cdots,I_m\in\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tales que

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda(I_k)>\frac{\lambda(F)}{4}.$$

Convenientemente reordenados (esto es, $x\in I_k, y\in I_{k+j}$ implica $x<y$) escribamos, para cada k, $I_k=]a_k,b_k[$. Puesto que f es creciente,

$$f(b)-f(a)\geq\sum_{k=1}^{m}(f(b_k)-f(a_k))>\sum_{k=1}^{m}M(b_k-a_k)=M\sum_{k=1}^{m}\lambda(I_k)>M\frac{\lambda(F)}{4}.$$

La arbitrariedad de M contradice la finitud de $f(b)-f(a)$. ■

Teniendo en cuenta ahora la Proposición 1.0.3 y la implicación (1.0.3), deducimos que

Corolario 1.0.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función creciente tal que $\underline{D}f = \overline{D}f$ entonces f es derivable casi por doquier en $[a,b]$*

Probemos ahora un último requerimiento técnico.

Lema 1.0.5. *Sean $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una aplicación, $P = \{y_0, y_1, \cdots, y_p\}$ una partición del intervalo $[c,d]$, S un subconjunto no vacío de $\{1, 2, \cdots, p\}$ y $A \in \mathbb{R}_0^+$. Si se cumple una de las siguientes condiciones:*

a) $g(c) \leq g(d)$ *y* $\frac{g(y_j)-g(y_{j-1})}{y_j-y_{j-1}} < -A, \forall j \in S$

b) $g(c) \geq g(d)$ *y* $\frac{g(y_j)-g(y_{j-1})}{y_j-y_{j-1}} > A, \forall j \in S$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{p} |g(y_j) - g(y_{j-1})| > |g(d) - g(c)| + A \sum_{j \in S} (y_j - y_{j-1}).$$

Demostración. Si se cumple la condición $a)$,

$$|g(d) - g(c)| = g(d) - g(c) = \sum_{j=1}^{p} (g(y_j) - g(y_{j-1})) =$$

$$\sum_{j \in S} (g(y_j) - g(y_{j-1})) + \sum_{j \notin S} (g(y_j) - g(y_{j-1})) <$$

$$-A \sum_{j \in S} (y_j - y_{j-1}) + \sum_{j \notin S} (g(y_j) - g(y_{j-1})) \leq -A \sum_{j \in S} (y_j - y_{j-1}) + \sum_{j \notin S} |g(y_j) - g(y_{j-1})|.$$

En consecuencia

$$\sum_{j=1}^{p} |g(y_j) - g(y_{j-1})| = \sum_{j \notin S}^{p} |g(y_j) - g(y_{j-1})| + \sum_{j \in S}^{p} |g(y_j) - g(y_{j-1})| \geq$$

$$\sum_{j \notin S}^{p} |g(y_j) - g(y_{j-1})| \geq |g(d) - g(c)| + A \sum_{j \in S} (y_j - y_{j-1}).$$

En el caso $b)$ basta observar que $h := -g$ verifica la condición $a)$. ∎

¡Por fín!, ya podemos probar el teorema de derivación.

Teorema 1.0.6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces f es derivable casi por doquier en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $D := \{x \in [a,b];\ f \text{ no es continua en } x\}$. En virtud del Lema 1.0.1 D es de medida nula. Por otra parte, en virtud de la Proposición 1.0.3, existe $C \subseteq [a;b]$ tal que $\lambda(C) = 0$ y para todo $x \in [a,b] \backslash C$ tal que $\underline{D}f(x)$ es finita.

Por otra parte,

$$\{x \in [a,b] :\ f \text{ no es derivable en } x\} \subseteq$$

$$\{x \in [a,b]\backslash C: \ f \text{ no es derivable en } x\} \cup C \subseteq \{x \in [a,b]\backslash C; \ \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} \cup C \subseteq$$
$$\{x \in [a,b]\backslash C; \ f \ \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} \cup D \cup C \subseteq$$
$$\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} \{x \in [a,b]\backslash C; \ f \ \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}f(x) < r < s < \overline{D}f(x)\} \cup D \cup C.$$

Veamos que, para cada $r < s \in \mathbb{Q}$, el conjunto

$$E_{r,s} := \{x \in [a,b]\backslash C; \ f \ \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}f(x) < r < s < \overline{D}f(x)\}$$

tiene también medida nula. Supongamos que no es así, esto es, existen $r < s \in \mathbb{Q}$ tales que $E_{r,s}$ es de medida positiva. Sea $g(x) := f(x) - \frac{(r+s)x}{2}$. Nótese que, en virtud de las definiciones 1.0.4,

$$\underline{D}f(x) < r < s < \overline{D}f(x),$$

equivale a que

$$\underline{D}g(x) < -\frac{s-r}{2} < \frac{s-r}{2} < s < \overline{D}g(x),$$

y por tanto el conjunto

$$E_{r,s} := \{x \in [a,b]\backslash C; \ g \ \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}g(x) < -A < A < \overline{D}g(x)\},$$

con $A = \frac{s-r}{2}$.

Sea ahora $P = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Teniendo en cuenta que f es creciente, es claro que

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1}) + \frac{s+r}{2}(t_k - t_{k-1})| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(t_k) - f(t_{k-1})) + \frac{s+r}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = f(b) - f(a) + B(b-a),$$

donde $B := \frac{s+r}{2}$. La arbitrariedad de la partición nos permite asegurar que

$$T := Sup\{\sum_{t_k\in P\backslash\{a\}} |g(t_k) - g(t_{k-1})|; \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq f(b) - f(a) + B(b-a).$$

En consecuencia, existe una partición $P_0 = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ tal que

$$T - A\frac{\lambda(E)}{4} < \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|.$$

Nótese que $E_{r,s}\backslash P_0 = \cup_{k=1}^{n} E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[$.

Fijemos k y veamos que, para cada $x \in E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[$, existen a_x y b_x tales que $x_{k-1} < a_x < x < b_x < x_k$ y satisfaciendo que

$$\frac{g(b_x) - g(a_x)}{b_x - a_x} < -A.$$

En efecto, puesto que $\underline{D}g(x) < -A$, existe $y \in]x_{k-1}, x_k[\backslash x$ tal que $\frac{g(y)-g(x)}{y-x} < -A$. Si $y \in]x_{k-1}, x[$, la continuidad de g en x, nos permite encontrar $z \in]x, x_k[$ tal que $\frac{g(y)-g(z)}{y-z} < -A$. Si por contra, $y \in]x, x_k[$, la continuidad de g en x, nos permite encontrar $z \in]x_{k-1}, x[$ tal que $\frac{g(y)-g(z)}{y-z} < -A$. En cualquier caso, tomamos $\{a_x, b_x\} = \{y, z\}$.

Análogamente, usando que $A < \overline{D}g(x)$, encontramos a^x y b^x tales que $x_{k-1} < a^x < x < b^x < x_k$ y satisfaciendo que

$$\frac{g(b^x) - g(a^x)}{b^x - a^x} > A.$$

Si $g(x_k) \geq g(x_{k-1})$, elijo $(a(x), b(x)) = (a_x, b_x)$ y por tanto

$$\frac{g(b(x)) - g(a(x))}{b(x) - a(x)} < -A.$$

Si $g(x_k) < g(x_{k-1})$, elijo $(a(x), b(x)) = (a^x, b^x)$ y por tanto

$$\frac{g(b(x)) - g(a(x))}{b(x) - a(x)} > A.$$

Sea $\mathcal{F} = \{]a(x), b(x)[: \ x \in E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[\}$. Es claro que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto de $E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[$. Tomando $[c, d] = [x_{k-1}, x_k]$ y $F = E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[$ y aplicando el Lema 1.0.2, se tiene que existe una colección finita $\{I_1, I_2, \cdots, I_p\}$ de intervalos disjuntos dos a dos de la familia $\mathcal{F}$ verficando que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda(I_k) > \frac{\lambda(E_{r,s} \cap]x_{k-1}, x_k[)}{4}.$$

Escribamos $I_j =]a_j, b_j[$. Reordenando los intevalos I_j, podemos suponer que

$$x_{k-1} < a_1 < b_1 < \cdots < a_j < b_j < \cdots < a_p < b_p < x_k.$$

Esta secuencia de puntos nos da un partición $P_k = \{y_0, y_1, \cdots, y_{2p}, y_{2p+1}\}$ del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Tomemos $S = \{2, 4, \cdots, 2p\}$ y apliquemos el Lema 1.0.5 al intervalo $[c, d] = [x_{k-1}, x_k]$ y a nuestra función g. Sabemos que para cada $i \in S$, si $g(x_k) \geq g(x_{k-1})$, por la elección de $(a(x), b(x))$, se tiene que

$$\frac{g(y_j) - g(y_{j-1})}{y_j - y_{j-1}} < -A,$$

pero si $g(x_k) < g(x_{k-1})$, se tiene que

$$\frac{g(y_j) - g(y_{j-1})}{y_j - y_{j-1}} > A.$$

Por tanto, en virtud del Lema 1.0.5,

$$\sum_{j=1}^{2p+1} |g(y_j) - g(y_{j-1})| > |g(x_k) - g(x_{k-1}| + A \sum_{j \in S} (y_j - y_{j-1}) >$$

$$|g(x_k) - g(x_{k-1})| + A\sum_{j=1}^{p}(b_j - a_j) = |g(x_k) - g(x_{k-1})| + A\sum_{j=1}^{p}\lambda(I_j) >$$

$$|g(x_k) - g(x_{k-1}| + \frac{A}{4}\lambda(E_{r,s}\cap]x_{k-1}, x_k[). \tag{1.0.6}$$

La arbitrariedad de k, nos permite encontrar un conjunto de particiones $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ cumpliendo la correspondiente desigualdad del tipo 1.0.6. El conjunto $Q = \cup_{k=1}^{n} P_k = \{z_0, z_1, \cdots, z_q\}$ resulta una nueva partición del intervalo $[a, b]$. Sumando todas las desigualdades del tipo 1.0.6, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{q}|g(z_j) - g(z_{j-1}| > \sum_{k=1}^{n}|g(x_k) - g(x_{k-1}| + \frac{A}{4}\sum_{k=1}^{n}\lambda(E_{r,s}\cap]x_{k-1}, x_k[) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}|g(x_k) - g(x_{k-1}| + \frac{A}{4}\lambda(E_{r,s}).$$

Recuérdese que por otra parte, la partición $P_0 = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ es tal que

$$T - A\frac{\lambda(E)}{4} < \sum_{k=1}^{n}|g(x_k) - g(x_{k-1})|,$$

y combinando ambos resultados se obtiene la siguiente contradicción con la construcción de T

$$T - A\frac{\lambda(E)}{4} < \sum_{k=1}^{n}|g(x_k) - g(x_{k-1})| < \sum_{j=0}^{q}|g(z_j) - g(z_{j-1}| - A\frac{\lambda(E)}{4}.$$

∎

Completamos esta sección con dos interesantes consecuencias de nuestro teorema. Veamos primero que no sólo la derivada de una función creciente es derivable, sino que su derivada es integrable.

Convenimos que si $a < b$ entonces escribiremos normalmente $\int_a^b f(x)dx$ en lugar de $\int_{[a,b]} f\ d\lambda$. Entenderemos que $\int_a^b f(x)dx = 0$ y que $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Por otra parte, la Proposición **??**.(6) nos permite afirmar que si $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

o si quiere, teniendo en cuenta los convenios, que

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0. \tag{1.0.7}$$

Corolario 1.0.7. *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces F' es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b F' \leq F(b) - F(a).$$

Demostración. Para $x > b$, definimos $F(x) = F(b)$ y consideramos, para cada n, la función $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F_n(x) = n[F(x+\frac{1}{n}) - F(x)]$. Por ell Lema 1.0.7, F, y por tanto cada F_n, es continua salvo en un conjunto de medida nula, luego medible (no negativa) y la sucesión $\{F_n\}$ converge c.p.d. a F' en $[a,b]$, luego F' también es medible (no negativa). Teniendo en cuenta el ejercicio II.1. **??** y la igualdad 1.0.7,

$$\int_a^b F_n(x)dx = \frac{\int_a^b F(x+\frac{1}{n})dx - \int_a^b F(x)dx}{1/(n)} =$$

$$n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^b F(x)dx\right) = n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)\ dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx\right) \leq$$

$$n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(b)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(a)dx\right) = F(b) - F(a).$$

Aplicando ahora el Lema de Fatou, se tiene que

$$\int_a^b F' \leq \underline{lim}_n \int_a^n F_n \leq F(b) - F(a).$$

∎

Terminamos con la segunda consecuencia del Teorema de derivación que hace uso de la Proposición **??**.

Corolario 1.0.8. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tales que converge puntualmente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sea, para cada n, la función $G_n(x) = \int_a^x g_n(t)\ dt$. Si $G_n'(x) = g_n(x)$ c.p.d. entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ es derivable con $F'(x) = f(x)$ c.p.d.*

Demostración. Sea $B_n \subseteq [a,b]$ un conjunto de medida nula tal que $G_n'(x) = g_n(x)$ para todo $x \in [a,b] \backslash B_n$. Escribamos $f_1(x) = \int_a^x g_1(t)\ dt$ y $f_n(x) = \int_a^x g_{n+1}(t) - g_n(t)\ dt$. Aplicando el Teorema **??** a la sucesión $\{g_n\}$, se tiene que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt = lim \int_a^x g_n(t)\ dt = lim_n \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Es claro que las funciones F y f_n son crecientes (tanto f como $g_{n+1} - g_n$ son funciones no negativas) y por tanto, en virtud del Teorema 1.0.6, existen D y D_n conjuntos de medida nula tales que F y toda función f_n son derivables en $[a,b] \backslash (D \cup \cup_n D_n)$. Sea $B = \cup_n B_n \cup D \cup \cup_n D_n$. Aplicando la Proposición **??**, para cada $x \in [a,b] \backslash B$, se tiene que

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = g_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} g_{n+1}(x) - g_n(x) = lim_n g_n(x) = f(x).$$

∎

1.0.2. Teorema Fundamental del Cálculo

En todo lo que sigue tomaremos α y β tales que $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Se dice que una función $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ es **localmente integrable** en $]\alpha, \beta[$, si f es integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]\alpha, \beta[$. Obviamente toda función continua en $]\alpha, \beta[$ es localmente integrable en $]\alpha, \beta[$. Si $c \in]\alpha, \beta[$ llamaremos **integral indefinida de f con origen en** c a la función $F :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida, para cada $x \in]\alpha, \beta[$, por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Teniendo en cuenta el convenio anterior y la Proposición **??**, si $a, b, c \in]\alpha, \beta[$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.0.8}$$

Con el fin de enunciar en toda su potencia nuestro principal resultado, hacemos una última definición.

Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice **absolutamente continua** si cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si la familia $\{[a_i, b_i]; i = 1, 2, \cdots, n\}$ es un conjunto finito de subíntervalos de $[a, b]$, disjuntos dos a dos con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon.$$

Nótese que si $n = 1$ el concepto no es otro que el de uniformemente continua.

Teorema 1.0.9. *(fundamental del Cálculo) (**T.F.C.**)*

Sea f una función localmente integrable en $]\alpha, \beta[$. Toda integral indefinida F de f con origen en un punto de $]\alpha, \beta[$ es

1. *absolutamente continua en $[a, b]$, para todo $a, b \in]\alpha, \beta[$.*
2. *derivable con $F' = f$ c.p.d. en $]\alpha, \beta[$. De hecho, si f es continua en $b \in]\alpha, \beta[$ entonces F es derivable en b y $F'(b) = f(b)$*

Demostración. Fijemos $a \in]\alpha, \beta[$ y sea $F :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida, para cada $x \in]\alpha, \beta[$, por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

(1)Sean $c, d \in]\alpha, \beta[$ $\varepsilon > 0$. En virtud de la Proposición **??**, existe $\delta > 0$ tal que si $F \subseteq [c, d]$ con $\lambda(F) < \delta$ entonces $\int_F |f(x)|\, dx < \varepsilon$. Sea ahora $\{[a_i, b_i]; i = 1, 2, \cdots, n\}$ un conjunto finito de subíntervalos de $[c, d]$, disjuntos dos a dos con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ y sea $G = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Es claro que $\lambda(G) \leq \delta$ y por tanto, tendiendo en cuenta la igualdad (1.0.8), se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n |\int_{a_i}^{b_i} f(x)\ dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\ dx = \int_G |f(x)\ dx < \varepsilon.$$

(2) En virtud, de la Proposición **??**, podemos escribir $]\alpha,\beta[=\cup_n[a_n,b_n[$, con a_n,b_n convenientes números reales tales que los intervalos $[a_n,b_n]$ son disjuntos dos a dos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe n tal que $a=a_n$. En efecto, si $a\neq a_m$ para todo m, entonces $a\in]a_n,b_n[$ para algún n, y, en tal caso, escribimos $[a_n,b_n[=[a_n,a[\cup[a,b_n[$. Para cada n, llamemos $G_n:[a_n,b_n]\to\mathbb{R}$ a la función definida por

$$G_n(x)=\int_a^x f^+.$$

Es claro que para cada $x,y\in[a_n,b_n]$ con $x<y$, se tiene, en virtud de la igualdad (1.0.8), que

$$G_n(x)=\int_a^x f^+\leq\int_a^x f^+ +\int_x^y f^+ =\int_a^y f^+ = G_n(y).$$

En cualquier caso G_n es creciente, luego, en virtud del Teorema 1.0.6, existe $C_n\subseteq[a_n,b_n]$, tal que $\lambda(C_n)=0$ y G_n es una función derivable en $[a_n,b_n]\backslash C_n$. Sea ahora $H_n:[a_n,b_n[\to\mathbb{R}$, definida por $H_n(x)=\int_a^x f^-$. Razonando de forma análoga, se puede probar que existe $D_n\subseteq[a_n,b_n]$, tal que $\lambda(D_n)=0$ y H_n es una función derivable en $[a_n,b_n]\backslash D_n$. Llamemos

$$C=\cup_n C_n\cup\cup_n D_n\cup\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{b_n;\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Sea ahora $x\in]\alpha,\beta[\backslash C$y sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in]a_n,b_n[\backslash(C_n\cup D_n)$. Es claro que $F/[a_n,b_n]=G_n-H_n$ y por tanto F es derivable en x. La arbitrariedad de x nos permite concluir que F es derivable al menos en $]\alpha,\beta[\cap C^c$, con $\lambda(C)=0$.

Veamos ahora que $F'=f$ c.p.d. Lo haremos en primer lugar para una función $f=\chi_E$ donde E es un conjunto medible contenido en $]\alpha,\beta[$. Sea $x_0\in]\alpha,\beta[\cap C^c$.

Supongamos inicialmente que $E=I=[c,d[\subseteq]\alpha,\beta[$. Supongamos que $x_0\in I$ y tomemos $t_0>0$ tal que $[x_0,x_0+t_0[\subseteq I$. Es claro, teniendo en cuenta la igualdad (1.0.8), que si $0<t<t_0$ entonces

$$\frac{F(x_0+t)-F(x_0)}{t}=\frac{\int_{x_0}^{x_0+t}\chi_I(x)dx}{t}=1=\chi_I(x_0).$$

Nótese que si $x_0\in I^c$, entonces existe $t_0>0$ tal que $[x_0,x_0+t_0[\subseteq I^c\cap]\alpha,\beta[$. En consecuencia,

$$\frac{F(x_0+t)-F(x_0)}{t}=\frac{\int_{x_0}^{x_0+t}\chi_I(x)dx}{t}=0=\chi_I(x_0).$$

En cualquier caso, dado que F es derivable en x_0, podemos concluir que $F'(x_0)=\chi_I(x_0)$. Es claro que si h es una suma finita de funciones de este tipo, se tiene igualmente que si $F(x)=\int_a^x h(t)\ dt$, entonces $F'(x_0)=h(x_0)$. Supongamos ahora que $E=G$ es un abierto de $\mathbb{R}$. En virtud de la Proposición **??**, existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_n\}$ de $\mathbb{R}$, disjuntos entre sí y tal que $G=\cup_{n=1}^\infty Q_n$. Consideremos ahora, para cada n, la función $g_n=\sum_{k=1}^n\chi_{Q_k}$. En virtud de lo ya observado, es claro que la sucesión $\{g_n\}$ está en las condiciones del Corolario 1.0.8 y converge a χ_G, luego si $F(x)=\int_a^x\chi_G$ entonces $F'=\chi_G$ c.p.d. Sea ahora $E=A$ un conjunto G_δ. Escribamos $A=\cap_n G_n$ con G_n abiertos tales que $G_{n+1}\subseteq G_n$. Es claro que la sucesión $\{\chi_{G_1}-\chi_{G_n}\}$ converge puntualmente a la función $\chi_{G_1}-\chi_A$ y está en la condiciones del Corolario 1.0.8. En consecuencia la funcion $F(x) = \int_a^x \chi_A = -\int_a^x(\chi_{G_1} - \chi_A) + \int_a^x \chi_{G_1}$ verifica, tomando $g_n = \chi_{G_1} - \chi_{G_n}$, argumentando como antes, teniendo en cuenta el caso de E abierto, que $F' = -\chi_{G_1} + \chi_A + \chi_{G_1} = \chi_A$ c.p.d.

Si $E = Z$ un conjunto de medida nula, entonces $F(x) = \int_a^x \chi_Z = 0$ y por tanto $F' = \chi_Z$ c.p.d. Así pues, si E es un conjunto medible arbitario, escribamos, en virtud de la Proposición**??**.(4), $\chi_E = \chi_A - \chi_Z$ con A conjunto G_δ y Z un conjunto de medida nula y apliquemos lo anterior. El paso a funciones simples es obvio y el paso a funciones medibles no negativas es consecuencia del Corolario **??** y del Corolario 1.0.8. Finalmente, para una f integrable arbitraria, basta escribir $f = f^+ - f^-$ y aplicar lo ya obtenido para ambas funciones.

Supongamos ahora que f es continua en un punto $b \in]\alpha, \beta[$ y veamos que F es derivable en b con $F'(b) = f(b)$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de dicho intervalo distintos de b y convergiendo a dicho punto. Obsérvese que, en virtud de la igualdad (1.0.8), para cada n,

$$F(t_n) - F(b) = \int_b^{t_n} f(x)dx. \tag{1.0.9}$$

Fijemos $\varepsilon > \mathbf{0}$.Dado que f es continua en b, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in]b-\delta, b+\delta[\subseteq]\alpha, \beta[$, entonces $f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon$. Tomo m tal que $t_n \in]b - \delta, b + \delta[$ **para todo** $\mathbf{n \geq m}$**.** Fijo $n \geq m$. Puesto que todas funciones son integrables en el intervalo I_n de extremos t_n y b, puedo aplicar la Proposición **??**.(2), para obtener que

$$\int_{I_n} (f(b) - \varepsilon)dx < \int_{I_n} f(x)dx < \int_{I_n} (f(b) + \varepsilon)dx,$$

esto es,

$$|t_n - b|(f(b) - \varepsilon) < \int_{I_n} f(x)dx < |t_n - b|(f(b) + \varepsilon),$$

y por tanto, teniendo en cuenta la igualdad (1.0.9),

$$f(b) - \varepsilon < \frac{F(t_n) - F(b)}{t_n - b} < f(b) + \varepsilon,$$

o si se quiere,

$$|\frac{\mathbf{F(t_n) - F(b)}}{\mathbf{t_n - b}} - \mathbf{f(b)}| < \varepsilon.$$

■

1.0.3. Funciones absolutamente continuas.

En esta sección completamos los argumentos que esgrimiremos en la demostración de la Regla de Barrow y concluiremos que las funciones absolutamente continuas son precisamente aquellas que se pueden reconstruir a partir de la integral de su derivada. Para desarrollar esta sección hemos adaptado una parte importante de los resultados obtenidos en [**?**, chapter 6, Section: The fundamental Theorem of Calculus].

Fijemos algo de notación y veamos primeramente que la derivada de una función absolutamente continua es integrable y preserva los conjuntos de medida nula.

Nota 1.0.10. Sea $[a,b]$ un intervalo de números reales, $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=n\}$ una partición de dicho intervalo y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Definimos,

$$V(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1}|.$$

Definimos la variación total de f en $[a,b]$,

$$V_a^b f = sup\{V(f,P);\ P \text{ partición de } [a,b].$$

Es claro que, para cada $c\in]a,b[$,

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f.$$

En efecto, si $P=\{a=x_<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=n\}$ es una partición arbitraria y $c\in[x_{k-1},x_k]$. Sea $P_1=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}\le c\}$ y $P_2=\{c<x_k<\cdots<x_n\}$, entonces, puesto que,

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le|f(c)-f(x_{k-1})|+|f(x_k)-f(c)|,$$

se tiene que

$$V(f,P)\le V(f|_{[a,c]},P_1)+V(f|_{[c,b]},P_2)\le V_a^c f+V_c^b f,$$

luego tomando supremos en P, probamos que

$$V_a^b f\le V_a^c f+V_c^b f.$$

Sea $\varepsilon>0$ y sea P_1 y P_2 sendas particiones de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente tales que $V_a^c f-\varepsilon+V_c^b f-\varepsilon\le V(f|_{[a,c]},P_1)+V(f|_{[c,b]},P_2)=V(f,P_1\cup P_2)\le V_a^b f$. La arbitrariedad de ε nos permite probar la otra desigualdad. ∎

Proposición 1.0.11. *Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a,b]$. Entonces*

1. *F es derivable c.p.d en $[a,b]$ y $F'\in L([a,b])$.*
2. *$\lambda(F(A))=0$ siempre que $A\subseteq[a,b]$ con $\lambda(A)=0$.*

Demostración.
(1) Sea $\delta>0$ correspondiente a $\varepsilon=1$ de la continuidad absoluta de F. Consideremos una partición $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ con diámetro menor que δ. Es claro que, para cada i, $V_{x_{i-1}}^{x_i}f\le 1$. Definimos $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ mediante la ley $G(x)=V_a^x F$ para todo $x\in[a,b]$. Es claro que está bien definida ya que, vía la observación anterior, sabemos que si $x<y$, entonces

$$0\le G(x)\le G(x)+V_x^y F=V_a^y F=G(y)\le G(b)=V_a^b F=\sum_{i=1}^{n}V_{x_{i-1}}^{x_i}f\le n.$$

Definimos $H=G-F$. Si $x<y$, entonces

$$H(y)-H(x)=G(y)-G(x)-[F(y)-F(x)]\ge V_x^y-[F(y)-F(x)]\ge 0.$$

Por tanto H y G son funciones crecientes, luego el Teorema 1.0.6 nos asegura que son derivables c.p.d. y, por el Corolario 1.0.7, sabemos que sus derivadas son integrables en $[a,b]$. En consecuecia, $F = G - H$ es derivable c.p.d. y su derivada, $F' = H' - G'$, es integrable.

(2) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ asociado a ε por la definición. Puesto que $\lambda(A) = 0$, podemos encontrar una familia numerable de subíntervalos $\{]a_n, b_n[;\ n \in \mathbb{N}\}$ de $[a,b]$ disjuntos dos a dos y tales que recubren al conjunto A, satisfaciendo que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \delta$.. Elegimos $c_n, d_n \in [a_n, b_n]$ tales que $F([a_n, b_n]) = [F(c_n), F(d_n)]$. Entonces los intervalos de la forma $[F(c_n), F(d_n)]$ cubren al conjunto A y verifican que $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n - c_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$ y por tanto, para todo n, $\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| \leq \varepsilon$. En consecuencia, $\lambda(F(A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |F(d_n) - F(c_n)| \leq \varepsilon$.

■

Terminamos esta sección probando que las funciones absolutamente continuas con derivada cero c.p.d. son constantes y, como consecuencia, que también las funciones que son primitivas de una función integrable son absolutamente continuas.

Proposición 1.0.12. *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua tal que $F'(x) = 0$ c.p.d entonces F es constante en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $B = \{x \in]a,b[;\ F'(x) = 0$ y $A = [a,b] \backslash B$. Por hipótesis $\lambda(A) = 0$, y por la Proposición 1.0.11.(2), también $\lambda(F(A)) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada n , definimos

$$B_n = \{x \in B;\ F(x+h) - F(x) < \varepsilon|h|;\ h \neq 0, a < x+h < b, |h| < \frac{1}{n}\}.$$

Entonces $\{B_n\}$ es una sucesión creciente de conjuntos tales $B = \cup_n B_n$. En particular $F(B) = \cup_n F(B_n)$. Puesto que $\lambda(B) = b - a$, para cada n existe pues una familia de intervalos $\{I_k^n; k \in \mathbb{N}\}$ que recubre a B_n y tal que $v(I_k^n) < \frac{1}{n}$ para todo k y $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^n) < \frac{3}{2}(b-a)$. Por definición de B_n, si $s,t \in B_n \cap I_k^n$ entonces $|F(s) - F(t)| < \varepsilon v(I_k^n)$. Por tanto,

$$\lambda(F(B_n)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F(B_n \cap I_k^n)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} diam F(B_n \cap I_k^n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon v(I_k^n) < \varepsilon \frac{3}{2}(b-a).$$

En virtud de la Proposición **??**, $\lambda(F(B)) = lim_n \lambda(F(B_n)) \leq \varepsilon \frac{3}{2}(b-a)$, luego la arbitariedad de ε, nos permite asegurar que $\lambda(F(B)) = 0$. Combinando ambos resultados,

$$\lambda(F([a,b]) \leq \lambda(F(A)) + \lambda(F(B)) = 0,$$

y por tanto, teniendo en mente el Teorema del valor intermedio [**?**, Teorema 3.26], el intervalo $F([a,b])$ se reduce a un punto. ■

Como consecuencia , veamos finalmente que las funciones absolutamente continuas son aquellas que se pueden reconstruir a partir de la integral de su derivada.

Teorema 1.0.13. *Sea F una función absolutamente continua en $[a,b]$. Entonces F es derivable c.p.d, F' es integrable en $[a,b]$ y para cada $x \in [a,b]$,*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'.$$

Demostración. En virtud de la Proposición 1.0.11, F es derivable c.p.d y F' es integrable en $[a, b]$. Definimos $H(x) = \int_a^x H'$. En virtud del T.F.C., H es absolutamente continua en $[a, b]$ y $H' = F'$ c.p.d. En consecuencia, $H - F$ es absolutamente continua y su derivada es 0 c.p.d. Por la Proposición 1.0.12, para cada $x \in [a, b]$, se tiene que

$$F(x) - H(x) = F(a) - H(a) = F(a).$$

■

1.0.4. Relación de ejercicios

Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

1. $F(x) = \displaystyle\int_a^x sen^3(t)\ dt.$
2. $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^2} \frac{1}{1 + \sin^6 t + t^2}\ dt$
3. $F(x) = \displaystyle\int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s} ds} 1/(sen^2(t^2) + 1)\ dt$
4. $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + sen^2(t)}\ dt.$
5. $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{1 + t^2 + sen(t)}\ dt$
6. $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{tx}{1 + t^2 + sen(t)}\ dt$