Lección 5: Ecuaciones en diferencias

5.1 Introducción

Los economistas suelen observar la evolución temporal de variables económicas, como el producto nacional, el tipo de interés, la oferta monetaria, la producción de petróleo, etc., a intervalos fijos de tiempo que pueden ser de un día, una semana, un mes o un año. Decimos entonces que el tiempo toma valores discretos, es decir, que toma valores enteros. Las variables económicas se datan en el periodo a que se refieren, y las leyes que gobiernan el comportamiento de esas variables se expresan usualmente mediante ecuaciones a las que llamamos ecuaciones en diferencias o relaciones en recurrencia. Por ejemplo, una ecuación de este tipo puede relacionar el producto nacional bruto en un periodo con el producto nacional bruto en otro periodo, o en varios otros.

5.2 Conceptos generales

EL considerar el tiempo como una variable discreta implica que toma valores enteros $t = 0, 1, 2, \ldots$ (también puede tomar valores negativos), donde t representa el número de periodos transcurridos desde el instante inicial. El modelo de cambio de la variable y vendrá descrito por los valores que toma la variable en t, es decir, por una sucesión de valores

$$\{y(0),\, y(1),\, \ldots, y(t), \ldots\}$$

que también se puede representar como

$$\{y_0,\, y_1,\, \ldots, y_n, \ldots\}$$

Definición 5.2.1 *Llamamos* **ecuación en diferencias (e.d.)** *a toda expresión de la forma*

$$F(t,\, y(t),\, y(t+1), \ldots, y(t+n), \ldots) = 0$$

Ejemplo 5.2.1 $y_{t+3} - y_{t+1} = t^2 - 3$ *es una ecuación en diferencias.*

Definición 5.2.2 *Llamamos* **orden** *de una e.d. a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación, es decir,* $t + n - t = n$

Ejemplo 5.2.2 $y_{t+3} - y_{t+1} - 5y_t = t$ *es una e.d. de orden tres, en cambio,* $y_{t+3} - y_{t+1} = t^2 - 3$ *es una e.d. de orden dos.*

Definición 5.2.3 *Llamamos* **solución** *de una e.d. a toda sucesión* $\{y(0), y(1), \ldots, y(t), \ldots\}$ *que la satisfaga*

Ejemplo 5.2.3 $y_t = t$ *es solución de la ecuación* $y_{t+2} + y_t = 2t + 2$ *ya que* $t + 2 + t = 2t + 2$.

Definición 5.2.4 *Llamamos* **solución general** *de una e.d. al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas* **soluciones particulares**.

Ejemplo 5.2.4 $y_{t+1} - y_t = 3$ *es una e.d. de orden uno cuya solución general es* $y_t = 3t + c$. *Si consideramos unas condiciones iniciales, por ejemplo,* $y_0 = 2$, *entonces* $y_0 = 3 \cdot 0 + c = c$, *por tanto* $c = 2$ *y la solución particular es* $y_p(t) = 3t + 2$. *Es decir, la solución es la sucesión* $y_p(t) = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

Nota 5.2.1 *Si tenemos una e.d. de primer orden* $y_t = f(t, y_{t-1})$ *y una condición inicial* y_0, *obtenemos:*

$$y_1 = f(1, y_0),\ y_2 = f(2, y_1),\ y_3 = f(3, y_2), \ldots$$

De ahí el nombre de **relaciones de recurrencia**. *Así, si tenemos, por ejemplo,* $y_{t+1} = a\, y_t$ *y la condición inicial* y_0, *entonces:*

$$y_1 = a\, y_0 \;\Rightarrow\; y_2 = a\, y_1 = a^2\, y_0 \;\Rightarrow\; y_3 = a\, y_2 = a^3\, y_0 \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; y_t = a^t\, y_0$$

En aplicaciones económicas nos interesa fundamentalmente establecer resultados cualitativos sobre las soluciones. Por ejemplo, nos podría interesar el comportamiento de las soluciones cuando t crece mucho o bien ver como variaciones de eventuales parámetros de la e.d. afectan a la solución. Desgraciadamente, esto solo es posible para tipos particulares de ecuaciones como son las ecuaciones en diferencias lineales que pasamos a estudiar.

5.3 Ecuaciones en diferencias lineales. Caso general

Definición 5.3.1 *Llamamos* **ecuación en diferencias lineal de orden** n *a toda expresión de la forma*

$$y(t+n) + a_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y(t+1) + a_n(t)\, y(t) = b(t) \quad \textit{con} \quad a_n(t) \neq 0$$

Ejemplo 5.3.1 $y_{t+3} + t^2\, y_{t+2} - 3\, y_{t+1} + 2^t\, y_t = 3\, t + 1$

Las e.d. lineales se pueden clasificar en:

- Homogéneas si $b(t) = 0$
- Completas si $b(t) \neq 0$
- De coeficientes constantes si $a_i(t) = a_i\ \forall i$
- De coeficientes no constante si $a_i(t) \neq a_i$ para algún i.

Centraremos ahora nuestro estudio en las e.d. lineales homogéneas de grado n

$$y(t+n) + a_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y(t+1) + a_n(t)\, y(t) = 0 \tag{5.1}$$

Enunciamos una serie de de teoremas que nos guían en la búsqueda de la solución general de este tipo de ecuaciones.

Teorema 5.3.1 (Teorema de existencia y unicidad) *Dada la ecuación (5.1) y dados* n *números reales* $k_0,\, k_1,\, \ldots, k_{n-1}$ *existe una única solución que verifica*

$$y(0) = k_0,\, y(1) = k_1,\, \ldots\, y(n-1) = k_{n-1}$$

Demostración (T.C.): Definimos la sucesión $\{y(t)\}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
y(0) &= k_0 \\
y(1) &= k_1 \\
&\vdots \\
y(n-1) &= k_{n-1} \\
y(n) &= -a_1(0)y(n-1) - \cdots - a_n(0)y(0) \\
y(n+1) &= -a_1(1)y(n) - \cdots - a_n(1)y(1) \\
&\vdots \\
y(t) &= -a_1(t-n)y(t-1) - \cdots - a_n(t-n)y(t-n)
\end{aligned}$$

Es decir, $\{y(t)\}$ se define mediante una ley de recurrencia. Además $\{y(t)\}$ es solución de la ecuación y satisface las condiciones iniciales y además es única, ya que si existe otra solución que verifique las condiciones iniciales, entonces coinciden en todos los puntos pues la propia ley de recurrencia determina los valores posteriores de la solución.

Para cada conjunto de condiciones iniciales $\{k_0,\, k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ hay una única solución, pero al variar las condiciones iniciales varía la solución, por tanto una ecuación en diferencias lineal homogénea tiene infinitas soluciones dependiendo de las condiciones iniciales dadas. De ahí, la importancia del siguiente teorema.

Teorema 5.3.2 *Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también solución.*

Demostración (T.C.): Realizamos la demostración para dos soluciones y es fácil generalizar para n. Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ soluciones de (5.1), es decir

$$\begin{aligned} y_1(t+n) + a_1(t)\, y_1(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y_1(t+1) + a_n(t)\, y_1(t) &= 0 \\ y_2(t+n) + a_1(t)\, y_2(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y_2(t+1) + a_n(t)\, y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Consideramos $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ y sustituimos en (5.1) para ver si verifica la ecuación

$$\alpha y_1(t+n) + \beta y_2(t+n) + a_1(t)[\alpha y_1(t+n-1) + \beta y_2(t+n-1)] + \cdots + a_n(t)[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] =$$

$$= \alpha[y_1(t+n) + a_1(t)\, y_1(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y_1(t+1) + a_n(t)\, y_1(t)] +$$

$$\beta[y_2(t+n) + a_1(t)\, y_2(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}(t)\, y_2(t+1) + a_n(t)\, y_2(t)] = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Corolario 5.3.1 *Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n forman un espacio vectorial.*

Teorema 5.3.3 *Dos soluciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de las ecuaciones en diferencias de orden n (5.1) son linealmente independientes si y solo sí los vectores de $\mathbb{R}^n$ que se forman con las condiciones iniciales*

$$(y_1(0),\, y_1(1), \ldots, y_1(n-1)); \quad (y_2(0),\, y_2(1), \ldots, y_2(n-1))$$

son linealmente independientes.

Demostración (T.C.):

($\Rightarrow$) Si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son linealmente independientes, entonces

$$\text{Para } t = 0 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0;\, \beta = 0$$

$$\text{Para}\, t = 1 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(1) + \beta y_2(1) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0;\, \beta = 0$$

$$\vdots$$

$$\text{Para}\, t = n-1 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(n-1) + \beta y_2(n-1) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0;\, \beta = 0$$

Luego

$$\alpha \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(1) \\ \vdots \\ y_1(n-1) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2(1) \\ \vdots \\ y_2(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ es solución de (5.1), pero como $y(t) = 0$ verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0, \ldots,$ $y(0) = 0$ y la ecuación (5.1), aplicando el teorema de existencia y unicidad

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = y(t) = 0$$

($\Leftarrow$) Si $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0$, $\forall t$

$$\text{Para}\, t = 0 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = 0$$

$$\text{Para}\, t = 1 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(1) + \beta y_2(1) = 0$$

$$\vdots$$

$$\text{Para}\, t = n-1 \;\Rightarrow\; \alpha y_1(n-1) + \beta y_2(n-1) = 0$$

Por tanto

$$\alpha \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(1) \\ \vdots \\ y_1(n-1) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2(1) \\ \vdots \\ y_2(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

como son linealmente independientes, entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Teorema 5.3.4 *la dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n es n.*

Demostración (T:C:): Es inmediato si demostramos que las soluciones de (5.1) $\{y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_n(t)\}$ que verifican

$$\begin{aligned}
(y_1(0), \ldots, y_1(n-1)) &= (1,\, 0, \ldots, 0) = \overrightarrow{e}_1 \\
(y_2(0), \ldots, y_2(n-1)) &= (0,\, 1, \ldots, 0) = \overrightarrow{e}_2 \\
&\vdots \\
(y_n(0), \ldots, y_n(n-1)) &= (0,\, 0, \ldots, 1) = \overrightarrow{e}_n
\end{aligned}$$

forman una base de dicho espacio vectorial.

Como $\{\overrightarrow{e}_1,\, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n\}$ son linealmente independientes, entonces $\{y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_n(t)\}$ son linealmente independientes. Ahora solo falta demostrar que forman un sistema generador. Sea $y(t)$ una solución de (5.1) que verifica las condiciones iniciales $y(0) = \alpha_1,\ y(1) = \alpha_2,\ \ldots,\ y(n-1) = \alpha_n$. Veamos que $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t)$ es también solución de (5.1) verificando las mismas condiciones iniciales, por lo que aplicando el teorema de existencia y unicidad $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t)$.

Evidentemente $\alpha_1 y_1(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t)$ es solución de (5.1) por ser combinación lineal de soluciones, además

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 y_1(0) + \cdots + \alpha_n y_n(0) \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1(n-1) + \cdots + \alpha_n y_n(n-1) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_1(n-1) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} y_n(0) \\ \vdots \\ y_n(n-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \overrightarrow{e}_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Conclusión: Por lo tanto si tenemos que $\{y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_n(t)\}$ son soluciones linealmente independientes de (5.1) e $y(t)$ es otra solución de la ecuación, existirán números reales $c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n$ tales que

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + \cdots + c_n\, y_n(t)$$

Por tanto $y(t)$ será la **solución general** de (5.1). La determinación de las soluciones particulares se hará obteniendo los valores de los parámetros bajo ciertas condiciones iniciales.

Una vez llegado a este punto, nos centramos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. Buscamos la solución general de la ecuación homogénea y después de la ecuación completa.

5.4 Solución general de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n

$$y(t+n) + a_1\, y(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}\, y(t+1) + a_n\, y(t) = 0 \tag{5.2}$$

con $a_i \in I\!R$; $\forall i$ y $a_n \neq 0$.

Nota 5.4.1 *Si $a_n = 0$, se hace el cambio $t+1 = z$.*

Definición 5.4.1 *A*

$$P(r) = r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n = 0 \tag{5.3}$$

le llamamos **ecuación característica** *asociada a la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n (5.2)*

Teorema 5.4.1 *Si r_0 es solución de la ecuación característica (5.3), entonces $y(t) = r_0^t$ es solución de (5.2).*

Demostración: Sustituimos $y(t) = r_0^t$ en (5.2)

$$r_0^{t+n} + a_1 r_0^{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} r_0^{t+1} + a_n r_0^t = r_0^t (r_0^n + a_1 r_0^{n-1} + \cdots + a_n) = r_0^t\, P(r_0) = r_0^t \cdot 0 = 0$$

En base a este resultado, lo primero que debemos hacer es resolver la ecuación característica (5.3). Al resolver la ecuación característica pueden ocurrir los siguientes casos:

1. la ecuación característica (5.3) tiene todas sus raíces reales y simples r_1, r_2, $\ldots$, r_n, entonces

$$y_h(t) = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t + \cdots + c_n r_n^t$$

Demostración: Ya sabemos que r_i^t es solución de (5.2), luego toda combinación lineal de soluciones de (5.2) es solución de (5.2).

Ejemplo 5.4.1 *Resolver la ecuación $y_{t+3} - 3y_{t+2} - 4y_{t+1} + 12y_t = 0$. La ecuación característica asociada es $r^3 - 3r^2 - 4r + 12 = 0$ que tiene como raíces $r_1 = 2$, $r_2 = -2$, $r_3 = 3$ y por tanto la solución es*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t + c_2\, (-2)^t + c_3\, 3^t$$

Ejemplo 5.4.2 *Sea Y_t la renta nacional, I_t la inversión total y S_t el ahorro total en el periodo t. Supongamos que el ahorro es proporcional a la renta nacional, es decir, $S_t = \alpha Y_t$ con $\alpha > 0$, y que la inversión es proporcional a la variación de la renta, es decir, $I_t = \beta (Y_t - Y_{t-1})$ siendo $\beta > 0$ y que en equilibrio el ahorro es igual a la inversión. Por tanto*

$$\left.\begin{array}{rcl} S_t & = & \alpha Y_t \\ I_t & = & \beta (Y_t - Y_{t-1}) \\ S_t & = & I_t \end{array}\right\}$$

Supongamos que $\beta > \alpha > 0$. Tenemos que

$$\alpha Y_t = \beta (Y_t - Y_{t-1}) \Rightarrow (\beta - \alpha) Y_t - \beta Y_{t-1} = 0$$

que es una ecuación lineal homogénea de orden uno cuya ecuación característica es

$$(\beta - \alpha) r - \beta = 0 \Rightarrow r = \frac{\beta}{\beta - \alpha} \Rightarrow Y_t = c_1 r^t \Rightarrow Y_t = c_1 \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t$$

Para $t = 0$ tenemos que

$$Y_0 = c_1 \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^0 \Rightarrow c_1 = Y_0$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t \cdot Y_0$$

2. la ecuación característica (5.3) tiene todas sus raíces reales: r_1 con multiplicidad k y $r_{k+1}, \ldots, r_n$ simples, entonces

$$y_h(t) = c_1 r_1^t + c_2\, t r_1^t + \cdots + c_k\, t^{k-1} r_1^t + c_{k+1} r_{k+1}^t + \cdots + c_n r_n^t =$$

$$= r_1^t\, P_{k-1}(t) + c_{k+1} r_{k+1}^t + \cdots + c_n r_n^t$$

Ejemplo 5.4.3 *Resolver la ecuación $y_{t+3} - 4y_{t+2} + 5y_{t+1} - 2y_t = 0$. La ecuación característica es $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 1$ con multiplicidad dos y $r_2 = 2$ con multiplicidad uno, por tanto la solución será*

$$y_h(t) = c_1\, 1^t + c_2\, t\, 1^t + c_3\, 2^t = (c_1 + c_2\, t) 1^t + c_3\, 2^t = (c_1 + c_2\, t) + c_3\, 2^t$$

3. la ecuación característica (5.3) tiene raíces complejas simples. Si $r_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ son raíces complejas conjugadas, siendo $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ el módulo y $\theta = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ el argumento correspondiente, entonces la solución asociada a las raíces r_1 y r_2 es

$$y_h(t) = \rho^t \left(A\, cos(\theta\, t) + B\, sen(\theta\, t)\right)$$

Ejemplo 5.4.4 *Resolver la ecuación* $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 4y_{t+1} - 12y_t = 0$*. La ecuación característica es* $r^3 - 3r^2 + 4r - 12 = 0$ *cuyas raíces son* $r_1 = 3$*,* $r_2 = 2i$*,* $r_3 = -2i$*. El módulo es* $\rho = 2$ *y el argumento* $\theta = \frac{\pi}{2}$*. Por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 3^t + 2^t \left(A\, cos(\frac{\pi}{2}\, t) + B\, sen(\frac{\pi}{2}\, t) \right)$$

4. la ecuación característica (5.3) tiene raíces complejas múltiples. Si $r_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ son raíces complejas conjugadas de multiplicidad m, siendo $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ el módulo y $\theta = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ el argumento correspondiente, entonces la solución asociada a las raíces r_1 y r_2 es

$$y_h(t) = \rho^t \left(P_{m-1}(t)\, cos(\theta\, t) + Q_{m-1}(t)\, sen(\theta\, t) \right)$$

donde $P_{m-1}(t)$ y $Q_{m-1}(t)$ son polinomios en t de grado menos o igual que $m - 1$

Ejemplo 5.4.5 *Resolver la ecuación* $y_{t+4} + 2y_{t+2} + y_t = 0$*. La ecuación característica es* $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ *cuyas raíces son* $r_1 = i$*,* $r_2 = i$*,* $r_3 = -i$ *y* $r_4 = -i$*. El módulo es* $\rho = 1$ *y el argumento* $\theta = \frac{\pi}{2}$*. Por tanto*

$$y_h(t) = 1^t \left((At + B)\, cos(\frac{\pi}{2}\, t) + (Ct + D)\, sen(\frac{\pi}{2}\, t) \right)$$

5. Si la ecuación característica tiene raíces que combinan los tipos anteriores, la solución será combinación lineal de las soluciones expuestas en los casos anteriores.

5.5 Solución de la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden n completa

Consideremos la ecuación

$$y(t+n) + a_1\, y(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}\, y(t+1) + a_n\, y(t) = b(t) \tag{5.4}$$

con $a_n \neq 0$ y $b(t) \neq 0$

Teorema 5.5.1 *La solución general de la ecuación completa se obtiene sumando la solución general de la ecuación homogénea con la particular de la completa*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Demostración: Sea $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, sustituyendo en (5.4)

$$(y_h + y_p)(t+n) + a_1\, (y_h + y_p)(t+n-1) + \cdots + a_{n-1}\, (y_h + y_p)(t+1) + a_n\, (y_h + y_p)(t) =$$

$$= [y_h(t+n)+a_1\, y_h(t+n-1)+\cdots+a_{n-1}\, y_h(t+1)+a_n\, y_h(t)]+[y_p(t+n)+a_1\, y_p(t+n-1)+\cdots+a_{n-1}\, y_p(t+1)+a_n\, y_p(t)] =$$

$$= 0 + b(t) = b(t)$$

El problema será ahora encontrar soluciones particulares de la ecuación completa, hay dos métodos para hacerlo: el método de la variación de las constantes y el método de los coeficientes indeterminados. Desarrollaremos este último que aunque es muy restrictivo, pues depende de la forma del término independiente, es bastante práctico.

5.5.1 Método de los coeficientes indeterminados

tipo de $b(t)$	no raiz	raiz de multiplicidad m	y_p
c	1	$-$	k
c	$-$	1	kt^m
$P_n(t)$	1	$-$	$Q_n(t)$
$P_n(t)$	$-$	1	$t^m Q_n(t)$
r^t	r	$-$	kr^t
r^t	$-$	r	$kt^m r^t$
$P_n(t)r^t$	r	$-$	$Q_n(t)r^t$
$P_n(t)r^t$	$-$	r	$t^m Q_n(t)r^t$
$acos(\alpha t) + bsen(\alpha t)$	$cos(\alpha) + isen(\alpha)$	$-$	$Acos(\alpha t) + Bsen(\alpha t))$
$acos(\alpha t) + bsen(\alpha t)$	$-$	$cos(\alpha) + isen(\alpha)$	$t^m(Acos(\alpha t) + Bsen(\alpha t))$
$r^t(acos(\alpha t) + bsen(\alpha t))$	$r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$	$-$	$r^t(Acos(\alpha t) + Bsen(\alpha t))$
$r^t(acos(\alpha t) + bsen(\alpha t))$	$-$	$r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$	$r^t t^m(Acos(\alpha t) + Bsen(\alpha t))$

A continuación desarrollamos este cuadro dando algunos ejemplos prácticos:

1. Si $b(t)$ es constante y $r = 1$ **no** es solución de la ecuación característica, entonces probamos con

$$y_p(t) = k$$

Ejemplo 5.5.1 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 10$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = 2$ *y* $r_2 = 3$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t + c_2\, 3^t$$

Para encontrar la particular de la completa probamos con $y_p(t) = k$ *y sustituimos en la e.d. completa*

$$k - 5k + 6k = 10 \Rightarrow 2k = 10 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow y_p(t) = 5$$

Por tanto

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow y(t) = c_1\, 2^t + c_2\, 3^t + 5$$

2. Si $b(t)$ es constante y $r = 1$ es solución de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces probamos con

$$y_p(t) = k\, t^m$$

Ejemplo 5.5.2 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 4$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = 2$ *y* $r_2 = 1$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t + c_2\, 1^t = c_1\, 2^t + c_2$$

Para encontrar la particular de la completa probamos con $y_p(t) = k\, t$ *y sustituimos en la e.d. completa*

$$k(t+2) - 3k(t+1) + 2kt = 4 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow y_p(t) = -4t$$

Por tanto

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow y(t) = c_1\, 2^t + c_2 - 4t$$

3. Si $b(t) = r^t$ y r **no** es solución de la ecuación característica, entonces probamos con

$$y_p(t) = k\, r^t$$

Ejemplo 5.5.3 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 3^t$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = 2$ *y* $r_2 = 1$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t + c_2\, 1^t = c_1\, 2^t + c_2$$

Para encontrar la particular de la completa probamos con $y_p(t) = k\, 3^t$ *y sustituimos en la e.d. completa*

$$k3^{t+2} - 3k3^{t+1} + 2k3^t = 3^t \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}\, 3^t$$

Por tanto

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow y(t) = c_1\, 2^t + c_2 + \frac{1}{2}\, 3^t$$

4. Si $b(t) = r^t$ y r es solución de la ecuación característica, entonces probamos con

$$y_p(t) = k\, t^m\, r^t$$

Ejemplo 5.5.4 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 2^t$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = 2$ *y* $r_2 = 1$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t + c_2\, 1^t = c_1\, 2^t + c_2$$

Para encontrar la particular de la completa como $r = 2$ *es raíz de la ecuación característica, probamos con* $y_p(t) = k\, t\, 2^t$. *Sustituimos en la e.d. completa*

$$k(t+2)2^{t+2} - 3k(t+1)2^{t+1} + 2kt2^t = 2^t \Rightarrow 2k2^t = 2^t \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}\, t\, 2^t$$

Por tanto

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow y(t) = c_1\, 2^t + c_2 + \frac{1}{2}\, t\, 2^t$$

5. Si $b(t) = sen(\alpha\, t)$ o $b(t) = cos(\alpha\, t)$ y $r = cos(\alpha) + isen(\alpha)$ **no** es raíz de la ecuación característica, entonces probamos

$$y_p(t) = a\, cos(\alpha\, t) + b\, sen(\alpha\, t)$$

Ejemplo 5.5.5 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} + y_t = sen(\pi\, t)$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = i$ *y* $r_2 = -i$, *por tanto*

$$y_h(t) = A\, cos(\frac{\pi}{2}\, t) + B\, sen(\frac{\pi}{2}\, t)$$

Como $r = cos(\pi) + isen(\pi) = -1$ *no es raíz de la ecuación característica probamos con* $y_p(t) = a\, cos(\pi\, t) + b\, sen(\pi\, t)$, *sustituimos en la ecuación*

$$a\, cos(\pi(t+2)) + b\, sen(\pi(t+2)) + a\, cos(\pi t) + b\, sen(\pi t) = sen(\pi\, t)$$

como $cos(\pi(t+2)) = cos(\pi t + 2\pi) = cos(\pi t)$ *y análogamente pasa con* $sen(\pi(t+2))$, *luego*

$$2a\, cos(\pi t) + 2b\, sen(\pi t) = sen(\pi t) \Rightarrow 2a = 0;\ 2b = 1 \Rightarrow a = 0;\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}\, sen(\pi t)$$

En resumen

$$y(t) = A\, cos(\frac{\pi}{2}\, t) + B\, sen(\frac{\pi}{2}\, t) + \frac{1}{2}\, sen(\pi t)$$

6. Si $b(t) = sen(\alpha\, t)$ o $b(t) = cos(\alpha\, t)$ y $r = cos(\alpha) + isen(\alpha)$ es raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces probamos

$$y_p(t) = a\, t^m\, cos(\alpha\, t) + b\, t^m\, sen(\alpha\, t)$$

Ejemplo 5.5.6 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} + y_t = sen(\frac{\pi}{2}\,t)$. *Las raíces de la ecuación característica son* $r_1 = i$ *y* $r_2 = -i$, *por tanto*

$$y_h(t) = A\,cos(\frac{\pi}{2}\,t) + B\,sen(\frac{\pi}{2}\,t)$$

Como $r = cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2}) = i$ *es raíz de la ecuación característica probamos con* $y_p(t) = a\,t\,cos(\frac{\pi}{2}\,t) + b\,t\,sen(\frac{\pi}{2}\,t)$, *sustituimos en la ecuación*

$$a(t+2)cos(\frac{\pi}{2}(t+2)) + b(t+2)sen(\frac{\pi}{2}(t+2)) + a\,tcos(\frac{\pi}{2}t) + b\,tsen(\frac{\pi}{2}t) = sen(\frac{\pi}{2}t)$$

Como $cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)) = -cos(\frac{\pi}{2}t)$ *y* $sen(\frac{\pi}{2}t + \pi)) = -sen(\frac{\pi}{2}t)$, *luego*

$$-2a\,cos(\frac{\pi}{2}t) - 2b\,sen(\frac{\pi}{2}t) = sen(\frac{\pi}{2}t) \Rightarrow -2a = 0;\ -2b = 1 \Rightarrow a = 0;\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{2}\,t\,sen(\frac{\pi}{2}t)$$

En resumen

$$y(t) = A\,cos(\frac{\pi}{2}\,t) + B\,sen(\frac{\pi}{2}\,t) - \frac{1}{2}\,t\,sen(\frac{\pi}{2}t)$$

7. Si $b(t) = P_n(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que n, entonces probamos

$$y_p(t) = Q_n(t)$$

Ejemplo 5.5.7 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t$. *Las raíz de la ecuación característica es* $r = 2$ *con multiplicidad dos, por tanto*

$$y_h(t) = c_1\,2^t + c_2\,t\,2^t$$

Como $b(t)$ *es un polinomio de primer grado, probamos con un polinomio del mismo grado* $y_p(t) = a\,t + b$. *Sustituimos en la ecuación completa*

$$a(t+2) + b - 4[(a(t+1) + b] + 4(at + b) = 3t \Rightarrow at - 2a + b = 3t \Rightarrow$$

$$a = 3;\ 2a + b = 0 \Rightarrow a = 3;\ b = 6 \Rightarrow y_p(t) = 3t + 6$$

$$y(t) = c_1\,2^t + c_2\,t\,2^t + 3t + 6$$

8. Si $b(t) = P_n(t) \cdot r^t$ donde $P_n(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que n. Si r **no** es raíz de la ecuación característica, entonces probamos

$$y_p(t) = Q_n(t) \cdot r^t$$

Ejemplo 5.5.8 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+1} - 2y_t = t\,3^t$. *Las raíz de la ecuación característica es* $r = 2$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\,2^t$$

Como $r = 3$ *no es raíz de la ecuación característica, entonces probamos con* $y_p(t) = (at+b)\cdot 3^t$. *Sustituimos en la ecuación*

$$[a(t+1)+b]\cdot 3^{t+1} - 2(at+b)\cdot 3^t = t\cdot 3^t \;\Rightarrow$$

$$at + (3a+b) = t \;\Rightarrow\; a = 1;\; 3a+b = 0 \;\Rightarrow\; a = 1;\; b = -3 \;\Rightarrow\; y_p(t) = (t-3)\cdot 3^t$$

En resumen

$$y(t) = c_1\,2^t + (t-3)\cdot 3^t$$

9. Si $b(t) = P_n(t)\cdot r^t$ donde $P_n(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que n. Si r es raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces probamos

$$y_p(t) = Q_n(t)\cdot t^m\cdot r^t$$

Ejemplo 5.5.9 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+1} - 2y_t = 4t\,2^t$. *Las raíz de la ecuación característica es* $r = 2$, *por tanto*

$$y_h(t) = c_1\,2^t$$

Como $r = 2$ *es raíz de la ecuación característica, entonces probamos con* $y_p(t) = (at+b)\,t\cdot 2^t = (at^2+bt)\cdot 2^t$. *Sustituimos en la ecuación*

$$[a(t+1)^2 + b(t+1)]\cdot 2^{t+1} - 2(at^2+bt)\cdot 2^t = 4t\cdot 2^t \;\Rightarrow\; 4at + 2a + 2b = 4t \;\Rightarrow$$

$$4a = 4;\; 2a+2b = 0 \;\Rightarrow\; a = 1;\; b = -1 \;\Rightarrow\; y_p(t) = (t^2 - t)\cdot 2^t$$

En resumen

$$y(t) = c_1\,2^t + (t^2 - t)\cdot 2^t$$

10. Si $b(t) = r^t\,sen(\alpha t)$ o $b(t) = r^t\,cos(\alpha t)$ y $r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ **no** es raíz de la ecuación característica, entonces probamos

$$y_p(t) = r^t\,(a\,cos(\alpha t) + b\,sen(\alpha t))$$

Ejemplo 5.5.10 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+1} - 2y_t = 3^t\, sen(\pi t)$*. Las raíz de la ecuación característica es* $r = 2$*, por tanto*

$$y_h(t) = c_1\, 2^t$$

Como $r(cos(\alpha) + isen(\alpha)) = 3(cos(\pi) + isen(\pi)) = 3 + 3i$ *no es raíz de la ecuación característica, entonces probamos* $y_p(t) = 3^t\,(a\,cos(\pi t) + b\,sen(\pi t))$*, sustituimos en la ecuación completa*

$$3^{t+1}\,(a\,cos(\pi(t+1)) + b\,sen(\pi(t+1))) - 2\cdot 3^t\,(a\,cos(\pi t) + b\,sen(\pi t)) = 3^t\,sen(\pi t)$$

como $cos(\pi(t+1)) = cos(\pi t + \pi) = -cos(\pi t)$ *y análogamente pasa con el* $sen(\pi(t+1))$*, tenemos que*

$$3^t\,(-3a\,cos(\pi t) - 3b\,sen(\pi t)) - 2\cdot 3^t\,(a\,cos(\pi t) + b\,sen(\pi t)) = 3^t\,sen(\pi t)$$

simplificando

$$-5a\,cos(\pi t) - 5b\,sen(\pi t) = sen(\pi t)\ \Rightarrow\ -5a = 0;\ -5b = 1\ \Rightarrow\ a = 0;\ b = -\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ y_p(t) = -\frac{1}{5}\,3^t\,sen(\pi t)$$

En resumen

$$y(t) = c_1\,2^t - \frac{1}{5}\,3^t\,sen(\pi t)$$

11. Si $b(t) = r^t\,sen(\alpha t)$ o $b(t) = r^t\,cos(\alpha t)$ y $r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ es raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces probamos

$$y_p(t) = r^t\,t^m\,\,(a\,cos(\alpha t) + b\,sen(\alpha t))$$

Ejemplo 5.5.11 *Resolver la e.d. completa* $y_{t+2} + 4y_t = 2^t\,sen(\frac{\pi}{2}t)$*. Las raíces de la ecuación característica son* $r_{1,2} = \pm 2i$ *con* $\rho = 2$ *y* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *por tanto*

$$y_h(t) = 2^t\,\left(A\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

Como $r(cos(\alpha)+isen(\alpha)) = 2(cos(\frac{\pi}{2})+isen\frac{\pi}{2}) = 2i$ *que es raíz de la ecuación característica de multiplicidad uno, de ahí que probemos con* $y_p(t) = 2^t\,t\,(a\,cos(\frac{\pi}{2}t) + b\,sen(\frac{\pi}{2}t))$*, sustituimos en la ecuación completa*

$$2^{t+2}(t+2)\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right)\right) + 4\cdot 2^t\,t\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = 2^t\,sen(\frac{\pi}{2}t)$$

Como $cos\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ *y* $sen\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$*, tenemos que*

$$(4t+8)\left(-a\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - b\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + 4t\left(a\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + b\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Operando

$$-8a\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-8b\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Rightarrow -8a=0;\;-8b=-1\Rightarrow a=0\;b=-\frac{1}{8}\Rightarrow$$

$$y_p(t)=2^t\cdot t\left(-\frac{1}{8}\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

En resumen

$$y(t)=2^t\left(A\,cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+B\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)-2^t\cdot t\left(\frac{1}{8}\,sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

12. Si $b(t)$ es una combinación lineal de los casos anteriores, entonces se toma $y_p(t)$ como una combinación lineal de las expresiones correspondientes a ensayar.

Ejemplo 5.5.12 *Resolver la ecuación en e.d. completa $y_{t+2}-4y_t=2+2^t+3^t$. Las raíces de la ecuación característica son $r=2$ y $r=-2$, por tanto*

$$y_h(t)=c_1\,2^t+c_2\,(-2)^t$$

Para la solución particular consideramos $y_p(t)=a+b\,t\,2^t+c\,3^t$, sustituimos en la ecuación y tenemos

$$a+b(t+2)2^{t+2}+c\,3^{t+2}-4(a+b\,t\,2^t+c\,3^t)=2+2^t+3^t\;\Rightarrow$$

$$-3a+8b\,2^t+5c\,3^t=2+2^t+3^t\;\Rightarrow\;-3a=2;\;8b=1;\;5c=1\;\Rightarrow\;a=-\frac{2}{3};\;b=\frac{1}{8};\;c=\frac{1}{5}$$

Por tanto

$$y_p(t)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\,t\,2^t+\frac{1}{5}\,3^t$$

En resumen

$$y(t)=c_1\,2^t+c_2\,(-2)^t-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\,t\,2^t+\frac{1}{5}\,3^t$$

5.6 Equilibrio y estabilidad

Supongamos que una economía evoluciona según una cierta ecuación en diferencias o según un sistema de ecuaciones en diferencias. Si se impone el número adecuado de condiciones iniciales, hay una única solución del sistema. Si se cambian las condiciones iniciales, la solución cambia. Una cuestión importante es saber si unos cambios pequeños en las condiciones iniciales tendrá una gran influencia en el comportamiento de la solución para valores grande de t o al contrario el efecto se disipará cuando t tiende a infinito. En este último caso, se dice que el **sistema es estable**. Por otra parte, si cambios pequeños de las condiciones iniciales conllevan diferencias significativas en el comportamiento de la solución a largo plazo, se dice que el **sistema es inestable**.

Estudiaremos, en particular, las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden.

Consideremos la e. d. lineal de primer orden con coeficientes constantes

$$y_{t+1} - a y_t = b; \quad a,\, b \in I\!R$$

Su ecuación característica es $r - a = 0$ lo que implica que $r = a$ es la raíz y por tanto $y_h(t) = c_1\, a^t$. Para obtener la solución de la ecuación completa debemos distinguir dos casos $a \neq 1$ y $a = 1$.

- Si $a = 1$, entonces probamos con $y_p(t) = c$, sustituyendo en la ecuación obtenemos que $c = \dfrac{b}{1-a}$ y por tanto
$$y_t = c_1\, a^t + \frac{b}{1-a}$$
- Si $a = 1$, entonces $y_h(t) = c_1\, 1^t = c_1$ y por otro lado debemos probar con $y_p(t) = ct$, sustituyendo en la ecuación obtenemos $c = b$ y por tanto
$$y_t = c_1 + b\, t$$

Si consideramos conocida la condición inicial $y(0) = y_0$, tendríamos que

$$\text{Si } a \neq 1;\ t = 0;\Rightarrow\ y_0 = c_1\, a^0 + \frac{b}{1-a}\ \Rightarrow\ c_1 = y_0 - \frac{b}{1-a}$$

$$\text{Si } a = 1;\ t = 0;\Rightarrow\ y_0 = c_1 + b\cdot 0\ \Rightarrow\ c_1 = y_0$$

Por lo tanto, conocida la condición inicial y_0 podemos escribir que

$$\begin{cases} y(t) = \left(y_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) a^t + \dfrac{b}{1-a} & \text{si} \quad a \neq 1 \\ y(t) = y_0 + b\, t & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

Si, para $a \neq 1$, consideramos el caso de que $y_0 = \dfrac{b}{1-a}$, entonces $y(t) = \dfrac{b}{1-a}$, $\forall t$, es decir $y(t)$ permanecerá constante en ese valor. Decimos entonces que $y^* = \dfrac{b}{1-a}$ se le llama **punto de equilibrio o punto estacionario** (también se le llama estado de equilibrio o estado estacionario).

En general, para buscar el punto de equilibrio de una ecuación, se sustituye $y(t) = y^*$, $\forall t$ en la mencionada ecuación, así

$$y^* - a\, y^* = b\ \Rightarrow\ y^* = \frac{b}{1-a}$$

Decimos que un punto de equilibrio es **estable** cuando la solución converge hacía el estado de equilibrio cuando t tiende a infinito.

Volviendo a la ecuación que estamos estudiando, tendríamos que $y(t) - y^* = k\,a^t$ por tanto el punto de equilibrio sería estable cuando $k\,a^t$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, por lo tanto debemos estudiar el carácter de a^t

- Si $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1$, entonces $a^t \to 0$ cuando $t \to \infty$ y sería estable, pero debemos distinguir dos casos

  1) Si $0 < a < 1$ entonces $y(t)$ **converge** monótonamente hacía el estado de equilibrio.

  2) Si $-1 < a < 0$ entonces $y(t)$ tiene fluctuaciones de amplitud decreciente hacía el estado de equilibrio. Se les llama **oscilaciones amortiguadas**.

- Si $|a| > 1$, entonces $a^t \to \infty$ cuando $t \to \infty$ por lo tanto $y(t)$ se aleja del equilibrio, excepto cuando $y_0 = \dfrac{b}{1-a}$. Debemos distinguir dos casos

  1) Si $a > 1$ entonces $y(t) \to \infty$ o $a^t \to -\infty$ y decimos que $y(t)$ **diverge** del estado de equilibrio.

  2) Si $a < -1$ entonces $y(t)$ tiene fluctuaciones de amplitud creciente alrededor del estado de equilibrio. Se les llama **oscilaciones explosivas**.

Nota 5.6.1 *El carácter de k solo produce un efecto escala, pero no cambia la configuración básica de la trayectoria temporal.*

Por otra parte, la solución particular es constante para el caso $a \neq 1$ por lo cual no afecta a la convergencia o la divergencia, lo que afecta es el nivel respecto del cual se estudia la convergencia o la divergencia.

Para el caso $a = 1$, como $y(t) = y_0 + b\,t$, es claro que no alcanzará nunca el estado de equilibrio.

5.7 Anexo: números complejos

Vamos a ampliar el conjunto de los números reales. Llamamos $i = \sqrt{-1}$, de esta manera se pueden calcular las raíces cuadradas de números negativos

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i; \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}i$$

Definición 5.7.1 *Definimos* **el conjunto de los números complejos** *y lo representamos por $\mathcal{C}$ de la siguiente forma*

$$\mathcal{C} = \{a + bi \,/\, a,\, b \in I\!R\}$$

Así, por ejemplo, si intentamos resolver la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

vemos que no tiene solución en $I\!R$, ahora bien, si consideramos el conjunto $\mathcal{C}$, entonces

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

serían las soluciones de la ecuación.

Nota 5.7.1 *El conjunto de los números complejos contiene al conjunto de los números reales, ya que cualquier número real se puede considerar como un número complejo con $b = 0$.*

Definición 5.7.2 *Los números complejos tales que $a = 0$ se les llama* **imaginarios puros***.*

Definición 5.7.3 *A los números complejos $a + bi$ y $a - bi$ se les llama números* **complejos conjugados.**

5.7.1 Forma polar de un número complejo

Dado un número complejo $a + bi$, se le puede asociar el par ordenado $(a,\, b) \in I\!R^2$ y por lo tanto se puede representar en los ejes cartesianos considerando el eje de abscisas como eje real y el eje de ordenadas como eje imaginario.

Definición 5.7.4 *Dado el número complejo $a+bi$, a $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ le llamamos* **módulo** *y a $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$* **argumento** *de dicho número complejo.*

Definición 5.7.5 *A la expresión $\rho_\theta = \rho(cos(\theta) + i\, sen(\theta))$, le llamamos la expresión en* **forma polar** *del número complejo $a + bi$.*

Ejemplo 5.7.1

- $1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$ *ya que* $\rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ *y* $\theta = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$
- $2i = 2_{\frac{\pi}{2}}$ *ya que* $\rho = \sqrt{2^2} = 2$ *y* $\theta = arctg\left(\frac{2}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $1 - \sqrt{3}i = 2_{-\frac{\pi}{3}}$ *ya que* $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$ *y* $\theta = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

5.7.2 Operaciones básicas con los números complejos

- **Suma de números complejos**

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a+c) \pm (b+d)i$$

Para sumar números complejos se suman sus partes reales y sus partes imaginarias.

Ejemplo 5.7.2 $(2+3i)+(5-4i) = (2+5)+(3-4)i = 7-i$

- **Producto de números complejos**

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Para multiplicar números complejos se multiplican como binomios notando que $i^2 = -1$.

Ejemplo 5.7.3

$$(2+3i)(5-4i) = 2\cdot 5 + 2\cdot(-4i) + (3i)\cdot 5 + (3i)\cdot(-4i) =$$

$$10 - 8i + 15i - 12i^2 = 22 + 5i$$

- **División de números complejos**

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Para dividir números complejos se multiplica y se divide la fracción por el conjugado del denominador.

Ejemplo 5.7.4

$$\frac{2+3i}{5-2i} = \frac{(2+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{4+19i}{29} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}\,i$$

- **Potencia de un número complejo**

$$(a+bi)^n = (\rho_\theta)^n = \rho^n_{n\theta} = \rho^n(cos(n\theta) + i\,sen(n\theta))$$

Para elevar un número complejo a un número natural n, es mejor pasar el número complejo a forma polar y entonces elevar el módulo a n y multiplicar el argumento por n.

Ejemplo 5.7.5

$$(1-\sqrt{3}i)^6 = \left(\sqrt{3}_{-\frac{\pi}{3}}\right) = 2^6_{6(-\frac{\pi}{3})} = 2^6_{-2\pi} = 64_{2\pi} = 64(cos(2\pi) + isen(2\pi)) = 64$$