Análisis Matemático II

Tema 3: Construcción de la medida de Lebesgue

16, 22 y 23 de marzo

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

El conjunto ordenado $[0\,,\,\infty]$

El conjunto $[0\,,\,\infty]$ y su relación de orden

$$[0\,,\,\infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0,\infty]$$

De esta forma, $[0\,,\,\infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min\,[0\,,\,\infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max\,[0\,,\,\infty] = \infty$$

El conjunto ordenado $[0\,,\infty]$

El conjunto $[0\,,\infty]$ y su relación de orden

$$[0\,,\infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0,\infty]$$

De esta forma, $[0\,,\infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min\,[0\,,\infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max\,[0\,,\infty] = \infty$$

Supremos e ínfimos

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

De esta forma, $[0, \infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min [0, \infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max [0, \infty] = \infty$$

Supremos e ínfimos

Todo subconjunto no vacío de $[0, \infty]$

tiene supremo e ínfimo

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

De esta forma, $[0, \infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min [0, \infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max [0, \infty] = \infty$$

Supremos e ínfimos

Todo subconjunto no vacío de $[0, \infty]$

tiene supremo e ínfimo

Observación

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

De esta forma, $[0, \infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min [0, \infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max [0, \infty] = \infty$$

Supremos e ínfimos

Todo subconjunto no vacío de $[0, \infty]$

tiene supremo e ínfimo

Observación

Para un conjunto no vacío $A \subset [0, \infty]$ se tiene $\sup A < \infty$ si, y sólo si,

$\infty \notin A$ y A está mayorado en $\mathbb{R}$

El espacio topológico $[0, \infty]$

El espacio topológico $[0,\infty]$

La topología de $[0,\infty]$

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\}$$

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\}$$

$$[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] : x < \beta\}$$

El espacio topológico $[0,\infty]$

La topología de $[0,\infty]$

La topología usual de $[0,\infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha,\beta[=\{x\in[0,\infty]\ :\ \alpha<x<\beta\}$$

$$[0,\beta[=\{x\in[0,\infty]\ :\ x<\beta\}$$

$$]\alpha,\infty]=\{x\in[0,\infty]\ :\ \alpha<x\}\qquad (\text{con } \alpha,\beta\in[0,\infty])$$

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x < \beta\}$$
$$[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, x < \beta\}$$
$$]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x\} \qquad \text{(con } \alpha, \beta \in [0, \infty]\text{)}$$

Propiedades inmediatas

El espacio topológico $[0\,,\infty]$

La topología de $[0\,,\infty]$

La topología usual de $[0\,,\infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha\,,\beta\,[= \big\{x \in [0\,,\infty]\ :\ \alpha < x < \beta\big\}$$

$$[0\,,\beta\,[= \big\{x \in [0\,,\infty]\ :\ x < \beta\big\}$$

$$]\alpha\,,\infty] = \big\{x \in [0\,,\infty]\ :\ \alpha < x\big\} \qquad (\text{con } \alpha,\beta \in [0\,,\infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\big\{\,]x-\varepsilon\,,x+\varepsilon\,[\ :\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \varepsilon < x\big\}$ es base de entornos de cada $x \in \mathbb{R}^+$

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x < \beta\}$$

$$[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, x < \beta\}$$

$$]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x\} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in [0, \infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \, \varepsilon < x \}$ es base de entornos de cada $x \in \mathbb{R}^+$
- $\{ [0, \varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \}$ es base de entornos de 0

El espacio topológico $[0,\infty]$

La topología de $[0,\infty]$

La topología usual de $[0,\infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] \, : \, \alpha < x < \beta\}$$
$$[0,\beta[= \{x \in [0,\infty] \, : \, x < \beta\}$$
$$]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] \, : \, \alpha < x\} \qquad (\text{con } \alpha,\beta \in [0,\infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\{\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \, \varepsilon < x \}$ es base de entornos de cada $x \in \mathbb{R}^+$
- $\{\, [0,\varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \}$ es base de entornos de 0
- $[0,\infty]$ induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que $\mathbb{R}$

El espacio topológico $[0,\infty]$

La topología de $[0,\infty]$

La topología usual de $[0,\infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha,\beta[=\{x\in[0,\infty]\,:\,\alpha<x<\beta\}$$

$$[0,\beta[=\{x\in[0,\infty]\,:\,x<\beta\}$$

$$]\alpha,\infty]=\{x\in[0,\infty]\,:\,\alpha<x\}\qquad(\text{con }\alpha,\beta\in[0,\infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\{]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,:\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \varepsilon<x\}$ es base de entornos de cada $x\in\mathbb{R}^+$
- $\{[0,\varepsilon[\,:\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de 0
- $[0,\infty]$ induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que $\mathbb{R}$
- $\{]\alpha,\infty]\,:\,\alpha\in\mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de ∞

El espacio topológico $[0,\infty]$

La topología de $[0,\infty]$

La topología usual de $[0,\infty]$ es la que tiene como abiertos

las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha,\beta[= \{x\in[0,\infty] : \alpha<x<\beta\}$$

$$[0,\beta[= \{x\in[0,\infty] : x<\beta\}$$

$$]\alpha,\infty] = \{x\in[0,\infty] : \alpha<x\} \qquad (\text{con } \alpha,\beta\in[0,\infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\{\,]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\, : \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \varepsilon<x\}$ es base de entornos de cada $x\in\mathbb{R}^+$
- $\{[0,\varepsilon[\, : \varepsilon\in\mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de 0
- $[0,\infty]$ induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que $\mathbb{R}$
- $\{\,]\alpha,\infty] : \alpha\in\mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de ∞
- Si $x_n\in[0,\infty]$ para todo $n\in\mathbb{N}$, se tiene:

$$\{x_n\}\to\infty \iff \forall\alpha\in\mathbb{R}^+\ \exists\, m\in\mathbb{N} : n\geqslant m \Rightarrow \alpha<x_n$$

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

La mejor descripción de ambos

Relación entre el orden y la topología de $[0,\infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f:[0,1]\to[0,\infty]$ definida por:

$$f(t)=\frac{t}{1-t}\quad\forall t\in[0,1[\quad \text{y} \quad f(1)=\infty$$

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f : [0,1] \to [0,\infty]$ definida por:

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[\qquad \text{y} \qquad f(1) = \infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f : [0,1] \to [0,\infty]$ definida por:

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[\quad \text{y} \quad f(1) = \infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Vemos por ejemplo que $[0,\infty]$ es metrizable, compacto y conexo

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f : [0,1] \to [0,\infty]$ definida por:

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[\quad \text{y} \quad f(1) = \infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Vemos por ejemplo que $[0,\infty]$ es metrizable, compacto y conexo

Compatibilidad de la topología con el orden

Relación entre el orden y la topología de $[0,\infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f:[0,1]\to[0,\infty]$ definida por:

$$f(t)=\frac{t}{1-t}\quad \forall t\in[0,1[\qquad \text{y}\qquad f(1)=\infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Vemos por ejemplo que $[0,\infty]$ es metrizable, compacto y conexo

Compatibilidad de la topología con el orden

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$, entonces:

Relación entre el orden y la topología de $[0,\infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f:[0,1]\to[0,\infty]$ definida por:

$$f(t)=\frac{t}{1-t}\quad \forall t\in[0,1[\qquad \text{y} \qquad f(1)=\infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Vemos por ejemplo que $[0,\infty]$ es metrizable, compacto y conexo

Compatibilidad de la topología con el orden

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$, entonces:

$$x_n\leqslant y_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0, \infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0, \infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0, \infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0, \infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$

tiene un límite superior y un límite inferior, dados por:

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$

tiene un límite superior y un límite inferior, dados por:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\Big) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\inf\{x_k : k \geqslant n\}\Big)$$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\}\nearrow x$ donde $x=\sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\}\searrow x$ donde $x=\inf\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$

tiene un límite superior y un límite inferior, dados por:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{x_k : k\geqslant n\}\Big) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\inf\{x_k : k\geqslant n\}\Big)$$

Es claro que $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, y para $x\in[0,\infty]$ se tiene:

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0,\infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$

tiene un límite superior y un límite inferior, dados por:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\Big) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf\{x_k : k \geqslant n\}\Big)$$

Es claro que $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, y para $x \in [0,\infty]$ se tiene:

$$\{x_n\} \to x \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

La suma en $[0, \infty]$

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

Propiedades de la suma

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro

La suma en $[0,\infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x+\infty=\infty+x=\infty \qquad \forall x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro
- No verifica la ley de cancelación: para $x,y,z\in[0,\infty]$,

  de $x+z=y+z$ sólo se deduce que $x=y$ cuando $z\neq\infty$

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro
- No verifica la ley de cancelación: para $x, y, z \in [0, \infty]$, de $x + z = y + z$ sólo se deduce que $x = y$ cuando $z \neq \infty$
- Compatible con el orden: para $x, y, z \in [0, \infty]$ se tiene:

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z$$

lo que permite sumar miembro a miembro dos desigualdades

La suma en $[0,\infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro
- No verifica la ley de cancelación: para $x,y,z \in [0,\infty]$,
  de $x+z=y+z$ sólo se deduce que $x=y$ cuando $z \neq \infty$
- Compatible con el orden: para $x,y,z \in [0,\infty]$ se tiene:
  $$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x+z \leqslant y+z$$
  lo que permite sumar miembro a miembro dos desigualdades
- Continua: si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$,
  entonces: $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

La suma en $[0, \infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro
- No verifica la ley de cancelación: para $x, y, z \in [0, \infty]$,

  de $x + z = y + z$ sólo se deduce que $x = y$ cuando $z \neq \infty$
- Compatible con el orden: para $x, y, z \in [0, \infty]$ se tiene:

  $$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z$$

  lo que permite sumar miembro a miembro dos desigualdades
- Continua: si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0, \infty]$,

  entonces: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

Sumas de series en $[0, \infty]$

Sumas de series en $[0, \infty]$

Existencia de la suma de una serie

Sumas de series en $[0, \infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

Sumas de series en $[0, \infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Sumas de series en $[0, \infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Asociatividad y conmutatividad de las sumas de series

Sumas de series en $[0, \infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Asociatividad y conmutatividad de las sumas de series

Para toda función $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty]$

y toda biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene:

Sumas de series en $[0,\infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Asociatividad y conmutatividad de las sumas de series

Para toda función $\alpha : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$

y toda biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n,m)$$

El producto en $[0, \infty]$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

El producto en $[0,\infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in\,]0,\infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\ \infty = \infty\ x = \infty \quad \forall x \in]0, \infty], \qquad 0\ \infty = \infty\ 0 = 0$$

Propiedades del producto

El producto en $[0,\infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\ \infty = \infty\ x = \infty \quad \forall x \in]0,\infty], \qquad 0\ \infty = \infty\ 0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0, \infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x, y, z, t \in [0, \infty]$ se tiene:

$$x \leqslant y\,, \quad z \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad x\,z \leqslant y\,t$$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0,\infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x, y, z, t \in [0, \infty]$ se tiene:

  $$x \leqslant y\,, \quad z \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad x\,z \leqslant y\,t$$

- Para $x, y \in [0, \infty]$, el producto es continuo en el punto (x, y) si, y sólo si, $\{x, y\} \neq \{0, \infty\}$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0,\infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x,y,z,t \in [0,\infty]$ se tiene:
$$x \leqslant y\,, \quad z \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad x\,z \leqslant y\,t$$
- Para $x,y \in [0,\infty]$, el producto es continuo en el punto (x,y) si, y sólo si, $\{x,y\} \neq \{0,\infty\}$
- Si $x_n, y_n \in [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x,y \in [0,\infty]$, entonces:
$$\{x_n\} \nearrow x\,, \quad \{y_n\} \nearrow y \quad \Longrightarrow \quad \{x_n\,y_n\} \nearrow x\,y$$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0, \infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x, y, z, t \in [0, \infty]$ se tiene:
$$x \leqslant y, \quad z \leqslant t \implies x\,z \leqslant y\,t$$
- Para $x, y \in [0, \infty]$, el producto es continuo
  en el punto (x, y) si, y sólo si, $\{x, y\} \neq \{0, \infty\}$
- Si $x_n, y_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x, y \in [0, \infty]$, entonces:
$$\{x_n\} \nearrow x, \quad \{y_n\} \nearrow y \implies \{x_n\,y_n\} \nearrow x\,y$$
- y en particular: $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,y_n \quad \forall \alpha \in [0, \infty]$

El producto en $[0,\infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0,\infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x,y,z,t \in [0,\infty]$ se tiene:
  $$x \leqslant y\,, \quad z \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad x\,z \leqslant y\,t$$
- Para $x,y \in [0,\infty]$, el producto es continuo
  en el punto (x,y) si, y sólo si, $\{x,y\} \neq \{0,\infty\}$
- Si $x_n, y_n \in [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x,y \in [0,\infty]$, entonces:
  $$\{x_n\} \nearrow x\,, \quad \{y_n\} \nearrow y \qquad \Longrightarrow \qquad \{x_n\,y_n\} \nearrow x\,y$$
- y en particular: $\displaystyle \alpha \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,y_n \quad \forall \alpha \in [0,\infty]$

Medida elemental de los intervalos acotados

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada, es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada, es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

y $\mathcal{J}$ será el conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

y $\mathcal{J}$ será el conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$

La medida elemental de los intervalos acotados

es la función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $M(\emptyset) = 0$ y

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

y $\mathcal{J}$ será el conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$

La medida elemental de los intervalos acotados

es la función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $M(\emptyset) = 0$ y

$$M(I) = \prod_{k=1}^{N} \Big(\sup \pi_k(I) - \inf \pi_k(I) \Big) \qquad \forall I \in \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

y $\mathcal{J}$ será el conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$

La medida elemental de los intervalos acotados

es la función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $M(\emptyset) = 0$ y

$$M(I) = \prod_{k=1}^{N} \Big(\sup \pi_k(I) - \inf \pi_k(I) \Big) \qquad \forall I \in \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$$

Para $I \in \mathcal{J}$ se dice que $M(I)$ es la medida elemental de I

Definición de la medida de Lebesgue

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) \, : \, I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$, es decir,

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$, es decir,

la función $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por: $\quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$, es decir,

la función $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por: $\lambda(E) = \lambda^*(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$

Para cada $E \in \mathcal{M}$ se dice que $\lambda(E)$ es la medida de E

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

En particular λ^* es finitamente subaditiva, esto es:

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

En particular λ^* es finitamente subaditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \ \ \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(E_k)$$

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

En particular λ^* es finitamente subaditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \ \ \forall k \in \Delta_n \ \Longrightarrow \ \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(E_k)$$

Por tanto: $\lambda^*(E \cup F) \leqslant \lambda^*(E) + \lambda^*(F) \quad \forall\, E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(E) = 0$$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E \in \mathcal{M}, \; \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Para $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ escribimos $C = A \uplus B$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Para $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ escribimos $C = A \uplus B$

para indicar que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Para $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ escribimos $C = A \uplus B$

para indicar que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $k \in \Delta_n$, escribimos $A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$

para indicar que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ y $A_k \cap A_j = \emptyset$ para $k \neq j$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Para $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ escribimos $C = A \uplus B$

para indicar que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $k \in \Delta_n$, escribimos $A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$

para indicar que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ y $A_k \cap A_j = \emptyset$ para $k \neq j$

Si $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, escribimos $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$

para indicar que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ \Rightarrow \ E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;\; \Rightarrow \;\; E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica:

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \implies \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Se alude a esta propiedad diciendo que λ es σ-aditiva

Consecuencias del teorema anterior (I)

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \;\; E_k \in \mathcal{M} \;\; \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \;\; \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$
- $E, F \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{M}$

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N},\ \ E_k \in \mathcal{M}\ \ \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M},\ \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M}\ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$
- $E, F \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{M}$

Abstracción de estas propiedades

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$
- $E, F \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{M}$

Abstracción de estas propiedades

Una σ-álgebra en un conjunto no vacío Ω

es una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

estable por uniones numerables y complementos, con $\Omega \in \mathcal{A}$

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$
- $E, F \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{M}$

Abstracción de estas propiedades

Una σ-álgebra en un conjunto no vacío Ω

es una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

estable por uniones numerables y complementos, con $\Omega \in \mathcal{A}$

Entonces $\mathcal{A}$ es estable por intersecciones numerables y diferencias

Consecuencias del teorema anterior (II)

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

- finitamente aditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \; \forall k \in \Delta_n \,, \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

- finitamente aditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \ \forall k \in \Delta_n \,, \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

- creciente: $E, F \in \mathcal{M} \,, \quad E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leqslant \lambda(F)$

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

- finitamente aditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \ \forall k \in \Delta_n \,, \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

- creciente: $E, F \in \mathcal{M} \,, \quad E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leqslant \lambda(F)$
- σ-subaditiva: $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

- finitamente aditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \;\forall k \in \Delta_n\,, \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

- creciente: $E, F \in \mathcal{M}\,, \quad E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leqslant \lambda(F)$
- σ-subaditiva: $E_n \in \mathcal{M} \;\forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$
- finitamente subaditiva:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \;\forall k \in \Delta_n\,, \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\quad \{A_n\} \nearrow A \quad$ donde $\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \nearrow \lambda(E)$$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \nearrow \lambda(E)$$

También es decrecientemente continua, en el siguiente sentido:

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \nearrow \lambda(E)$$

También es decrecientemente continua, en el siguiente sentido:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{E_n\} \searrow E\,, \ \ \lambda(E_1) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \searrow \lambda(E)$$

Abstracción de los resultados anteriores

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Todas las consecuencias obtenidas para la medida de Lebesgue

son válidas para cualquier medida

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Todas las consecuencias obtenidas para la medida de Lebesgue

son válidas para cualquier medida

Ejemplo, muy sencillo, de medida en cualquier conjunto $\Omega \neq \emptyset$

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Todas las consecuencias obtenidas para la medida de Lebesgue

son válidas para cualquier medida

Ejemplo, muy sencillo, de medida en cualquier conjunto $\Omega \neq \emptyset$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ sea $\mu(E)$ el número de elementos de E,

entendiendo que $\mu(E) = \infty$ cuando el conjunto E es infinito

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Todas las consecuencias obtenidas para la medida de Lebesgue

son válidas para cualquier medida

Ejemplo, muy sencillo, de medida en cualquier conjunto $\Omega \neq \emptyset$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ sea $\mu(E)$ el número de elementos de E,

entendiendo que $\mu(E) = \infty$ cuando el conjunto E es infinito

Entonces $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ es una medida: el número de elementos en Ω

Intervalos acotados y figuras elementales

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \ \ H_k \in \mathcal{J} \ \ \forall k \in \Delta_n$$

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \ \ H_k \in \mathcal{J} \ \ \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; I_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; I_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; I_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$

Estabilidad de las figuras elementales

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \ \ H_k \in \mathcal{J} \ \ \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \ \ I_k \in \mathcal{J} \ \ \forall k \in \Delta_n$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$

Estabilidad de las figuras elementales

La familia $\mathcal{E}$ de las figuras elementales es estable por

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; I_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$

Estabilidad de las figuras elementales

La familia $\mathcal{E}$ de las figuras elementales es estable por

intersecciones finitas, diferencias y uniones finitas

Medida elemental de los intervalos acotados

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,, \;\; n \in \mathbb{N}\,, \;\; I_j \in \mathcal{J} \;\; \forall\, j \in \Delta_n\,, \;\; I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,,\quad I_j \in \mathcal{J}\quad \forall\, j \in \Delta_n\,,\quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad I_j \in \mathcal{J} \quad \forall j \in \Delta_n\,, \quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$

verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I_j \in \mathcal{J} \ \ \forall j \in \Delta_n, \quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$

verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$

que es finitamente aditiva, es decir,

$$n \in \mathbb{N}, \quad A_k \in \mathcal{E} \ \ \forall k \in \Delta_n, \quad A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k)$$

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I_j \in \mathcal{J} \quad \forall\, j \in \Delta_n\,, \quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$

verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$

que es finitamente aditiva, es decir,

$$n \in \mathbb{N}, \quad A_k \in \mathcal{E} \quad \forall\, k \in \Delta_n\,, \quad A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k)$$

La propiedad clave de la función M

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad I_j \in \mathcal{J} \quad \forall j \in \Delta_n\,, \quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$

verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$

que es finitamente aditiva, es decir,

$$n \in \mathbb{N}\,, \quad A_k \in \mathcal{E} \quad \forall k \in \Delta_n\,, \quad A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k)$$

La propiedad clave de la función M

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad I_k \in \mathcal{J} \quad \forall k \in \Delta_n\,, \quad I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \Longrightarrow \quad M(I) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(I_k)$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^{\circ}\,, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon\,, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^{\circ}\,, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon\,, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \ : \ J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ , \quad M(I) < M(K) + \varepsilon , \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \ : \ J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \ : \ J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue extiende a la elemental de los intervalos acotados:

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \ : \ J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue extiende a la elemental de los intervalos acotados:

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{M} \qquad \text{y} \qquad \lambda(I) = M(I) \ \ \forall I \in \mathcal{J}$$