Análisis Matemático II

Tema 4: Propiedades de la medida de Lebesgue

6, 12, 13, 19 y 20 de abril

Intervalos diádicos

Intervalos diádicos

Notación

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{a + y : y \in E\}$

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{ a + y : y \in E \}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N, \ J \in \mathcal{J} \implies a + J \in \mathcal{J}$

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{ a + y : y \in E \}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N, \ J \in \mathcal{J} \implies a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n} \right[^N \quad \text{y} \quad \mathbb{A}_n = \left\{ a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N \right\}$$

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{ a + y : y \in E \}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N, \ J \in \mathcal{J} \implies a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n} \right[^N \quad \text{y} \quad \mathbb{A}_n = \left\{ a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N \right\}$$

Intervalos diádicos

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{ a + y : y \in E \}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N,\ J \in \mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n} \right[^N \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}_n = \left\{ a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N \right\}$$

Intervalos diádicos

Un intervalo diádico es un conjunto de la forma

$J = a + \mathbb{J}_n$ con $a \in \mathbb{A}_n$, donde $n \in \mathbb{N}_0$

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{a + y : y \in E\}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N,\ J \in \mathcal{J} \implies a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n}\right[^N \quad \text{y} \quad \mathbb{A}_n = \left\{a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N\right\}$$

Intervalos diádicos

Un intervalo diádico es un conjunto de la forma

$J = a + \mathbb{J}_n$ con $a \in \mathbb{A}_n$, donde $n \in \mathbb{N}_0$

Se dice que n es el orden del intervalo diádico J

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} \left(a + \mathbb{J}_n \right)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} \left(a + \mathbb{J}_n \right)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} \left(a + \mathbb{J}_n \right)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que son medibles:

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que son medibles:

- Los abiertos y los cerrados

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que son medibles:

- Los abiertos y los cerrados
- Los conjuntos de tipo G_δ (intersecciones numerables de abiertos)

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que son medibles:

- Los abiertos y los cerrados
- Los conjuntos de tipo G_δ (intersecciones numerables de abiertos)
- Los de tipo F_σ (uniones numerables de cerrados)

Conjuntos de Borel

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

La σ-álgebra de Borel de un espacio topológico Ω es la engendrada por la topología de Ω

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

La σ-álgebra de Borel de un espacio topológico Ω es la engendrada por la topología de Ω

Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

La σ-álgebra de Borel de un espacio topológico Ω es la engendrada por la topología de Ω

Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

Los elementos de $\mathcal{B}$ son los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces:

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces:

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces:

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Por tanto, los homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ preservan los conjuntos de Borel

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \operatorname{ínf}\left\{\lambda(G) \;:\; E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \;:\; E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \;:\; E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\,\left\{\lambda(G)\ :\ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\,\left\{\lambda(G)\ :\ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$ con $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$ con $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

(4) Existe $A \subset \mathbb{R}^N$, conjunto de tipo F_σ, con $A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$ con $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

(4) Existe $A \subset \mathbb{R}^N$, conjunto de tipo F_σ, con $A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$

(5) Existe $B \subset \mathbb{R}^N$, conjunto de tipo G_δ, con $E \subset B$ y $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida tal que

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$,

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida tal que

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$,

entonces: $\quad \mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida tal que

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$,

entonces: $\quad \mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$

En particular, λ es la única medida, definida en $\mathcal{M}$,

que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \;\; \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

$$E \in \mathcal{M}, \ \ x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad x+E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

$$E \in \mathcal{M}, \ \ x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad x+E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

¿ Es única ?

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

$$E \in \mathcal{M}, \ \ x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad x+E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

¿ Es única ?

- Si para $E \in \mathcal{M}$ definimos $\mu(E)$ como el número de elementos de E

  μ es una medida invariante por traslaciones, con $\mu \neq \lambda$

  luego hay que imponer alguna condición adicional

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

$$E \in \mathcal{M}, \ \ x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad x+E \in \mathcal{M}, \ \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

¿ Es única ?

- Si para $E \in \mathcal{M}$ definimos $\mu(E)$ como el número de elementos de E

  μ es una medida invariante por traslaciones, con $\mu \neq \lambda$

  luego hay que imponer alguna condición adicional
- Para $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, la medida $\rho\lambda$ es invariante por traslaciones

  luego hay que imponer alguna normalización

Caracterización mediante la invariancia por traslaciones

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

Caracterización mediante la invariancia por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

Caracterización mediante la invariancia por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0,1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones.

Caracterización mediante la invariancia por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones.

Supongamos que existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mu(G) < \infty$.

Caracterización mediante la invariancia por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones.

Supongamos que existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mu(G) < \infty$.

Entonces existe $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(E) = \rho\,\lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$

Invariancia por isometrías

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0)=0$,

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0) = 0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0) = 0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0)=0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea, es decir:

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0) = 0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea, es decir:

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una tal isometría, entonces:

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0)=0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea, es decir:

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una tal isometría, entonces:

$$E \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad T(E) \in \mathcal{M}, \;\; \lambda\big(T(E)\big) = \lambda(E)$$

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿Qué ocurre para $N = 1$?

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿ Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Llamamos sucesión admisible a toda sucesión $a = \{a_n\}$ en $\mathbb{R}$,

tal que: $0 < a_n < \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entendiendo que $a_0 = 1$

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Llamamos sucesión admisible a toda sucesión $a = \{a_n\}$ en $\mathbb{R}$,

tal que: $0 < a_n < \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entendiendo que $a_0 = 1$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $U_n = \{0,1\}^n$

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿ Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Llamamos sucesión admisible a toda sucesión $a = \{a_n\}$ en $\mathbb{R}$,

tal que: $0 < a_n < \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entendiendo que $a_0 = 1$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $U_n = \{0,1\}^n$

al conjunto de todas las aplicaciones de $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ en $\{0,1\}$,

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿ Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Llamamos sucesión admisible a toda sucesión $a = \{a_n\}$ en $\mathbb{R}$,

tal que: $0 < a_n < \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entendiendo que $a_0 = 1$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $U_n = \{0,1\}^n$

al conjunto de todas las aplicaciones de $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las n-uplas de ceros y unos

Definición de los conjuntos de Cantor

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (con $a_0 = 1$)

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad$ (con $a_0 = 1$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $u \in U_n$ definimos:

$$J(u) = \big[m(u), m(u) + a_n \big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\, \rho_k$$

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ (con $a_0 = 1$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $u \in U_n$ definimos:

$$J(u) = \big[\, m(u) \,,\, m(u) + a_n \,\big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\, \rho_k$$

de modo que $\big\{\, J(u) : u \in U_n \big\}$ es una familia formada por

2^n intervalos compactos, de longitud a_n

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (con $a_0 = 1$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $u \in U_n$ definimos:

$$J(u) = \big[m(u)\,, m(u) + a_n \big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k$$

de modo que $\big\{ J(u) : u \in U_n \big\}$ es una familia formada por 2^n intervalos compactos, de longitud a_n

Definimos: $K_n(a) = \bigcup_{u \in U_n} J(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ (con $a_0 = 1$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $u \in U_n$ definimos:

$$J(u) = \big[\, m(u)\,,\, m(u) + a_n \,\big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k$$

de modo que $\big\{\, J(u) : u \in U_n \big\}$ es una familia formada por 2^n intervalos compactos, de longitud a_n

Definimos: $$K_n(a) = \bigcup_{u \in U_n} J(u) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$$

Decimos que $C(a)$ es el conjunto de Cantor asociado a la sucesión a

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \left[0, a_1\right]$ y $J(1) = \left[1 - a_1, 1\right]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \left[0, a_1\right]$ y $J(1) = \left[1 - a_1, 1\right]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\left[0,1\right] = \left[0, a_1\right] \uplus \left]a_1, 1 - a_1\right[\uplus \left[1 - a_1, 1\right]$$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \left[0, a_1\right]$ y $J(1) = \left[1 - a_1, 1\right]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\left[0, 1\right] = \left[0, a_1\right] \biguplus \left]a_1, 1 - a_1\right[\biguplus \left[1 - a_1, 1\right]$$

Al suprimir el intervalo central queda la primera generación: $\left\{J(0), J(1)\right\}$,

2 intervalos compactos disjuntos de longitud a_1

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \big[0\,, a_1\big]$ y $J(1) = \big[1 - a_1\,, 1\big]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\big[0\,,1\big] \;=\; \big[0\,, a_1\big] \;\biguplus\; \big]a_1\,, 1 - a_1\big[\;\biguplus\; \big[1 - a_1\,, 1\big]$$

Al suprimir el intervalo central queda la primera generación: $\big\{J(0), J(1)\big\}$,

2 intervalos compactos disjuntos de longitud a_1

que dan lugar al conjunto $K_1(a) = J(0) \biguplus J(1)$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \left[0, a_1\right]$ y $J(1) = \left[1 - a_1, 1\right]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\left[0,1\right] = \left[0, a_1\right] \biguplus \left]a_1, 1 - a_1\right[\biguplus \left[1 - a_1, 1\right]$$

Al suprimir el intervalo central queda la primera generación: $\left\{J(0), J(1)\right\}$,

2 intervalos compactos disjuntos de longitud a_1

que dan lugar al conjunto $K_1(a) = J(0) \biguplus J(1)$

Para $n \in \mathbb{N}$ suponemos construida la n-ésima generación $\left\{J(u) : u \in U_n\right\}$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \big[0, a_1\big]$ y $J(1) = \big[1 - a_1, 1\big]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\big[0,1\big] = \big[0, a_1\big] \biguplus \big]a_1, 1 - a_1\big[\biguplus \big[1 - a_1, 1\big]$$

Al suprimir el intervalo central queda la primera generación: $\big\{J(0), J(1)\big\}$,

2 intervalos compactos disjuntos de longitud a_1

que dan lugar al conjunto $K_1(a) = J(0) \biguplus J(1)$

Para $n \in \mathbb{N}$ suponemos construida la n-ésima generación $\big\{J(u) : u \in U_n\big\}$

2^n intervalos compactos, dos a dos disjuntos, de longitud a_n

que dan lugar al conjunto $K_n(a) = \biguplus\limits_{u \in U_n} J(u)$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \{(u,0) : u \in U_n\} \biguplus \{(u,1) : u \in U_n\}$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \{(u,0) : u \in U_n\} \biguplus \{(u,1) : u \in U_n\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u) + a_n]$, tenemos:

$J(u,0) = \left[m(u)\,, m(u) + a_{n+1}\right]$ y $J(u,1) = \left[m(u) + \rho_{n+1}\,, m(u) + a_n\right]$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\dots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\dots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \big\{(u,0) : u \in U_n\big\} \biguplus \big\{(u,1) : u \in U_n\big\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$, tenemos:

$$J(u,0) = \big[m(u)\,, m(u)+a_{n+1}\big] \quad \text{y} \quad J(u,1) = \big[m(u)+\rho_{n+1}\,, m(u)+a_n\big]$$

Como $a_{n+1} < \rho_{n+1}$, tenemos tres intervalos consecutivos:

$$J(u) = J(u,0) \biguplus \big]\,m(u)+a_{n+1}\,, m(u)+\rho_{n+1}\big[\biguplus J(u,1)$$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \{(u,0) : u \in U_n\} \uplus \{(u,1) : u \in U_n\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$, tenemos:

$$J(u,0) = \big[m(u), m(u)+a_{n+1}\big] \quad \text{y} \quad J(u,1) = \big[m(u)+\rho_{n+1}, m(u)+a_n\big]$$

Como $a_{n+1} < \rho_{n+1}$, tenemos tres intervalos consecutivos:

$$J(u) = J(u,0) \uplus \, \big]m(u)+a_{n+1}, m(u)+\rho_{n+1}\big[\, \uplus J(u,1)$$

Al suprimir el intervalo central, quedan $J(u,0)$ y $J(u,1)$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \{(u,0) : u \in U_n\} \uplus \{(u,1) : u \in U_n\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$, tenemos:

$$J(u,0) = \big[m(u)\,,\, m(u)+a_{n+1}\big] \quad \text{y} \quad J(u,1) = \big[m(u)+\rho_{n+1}\,,\, m(u)+a_n\big]$$

Como $a_{n+1} < \rho_{n+1}$, tenemos tres intervalos consecutivos:

$$J(u) = J(u,0) \uplus \,\big]\, m(u)+a_{n+1}\,,\, m(u)+\rho_{n+1}\big[\, \uplus J(u,1)$$

Al suprimir el intervalo central, quedan $J(u,0)$ y $J(u,1)$

Obtenemos así la $(n+1)$-ésima generación:

$$\{J(u,0) : u \in U_n\} \uplus \{J(u,1) : u \in U_n\} = \{J(v) : v \in U_{n+1}\}$$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \big\{(u,0) : u \in U_n\big\} \biguplus \big\{(u,1) : u \in U_n\big\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$, tenemos:

$$J(u,0) = \big[m(u)\,,\, m(u)+a_{n+1}\big] \quad \text{y} \quad J(u,1) = \big[m(u)+\rho_{n+1}\,,\, m(u)+a_n\big]$$

Como $a_{n+1} < \rho_{n+1}$, tenemos tres intervalos consecutivos:

$$J(u) = J(u,0) \;\biguplus\; \big]\,m(u)+a_{n+1}\,,\, m(u)+\rho_{n+1}\,\big[\;\biguplus\; J(u,1)$$

Al suprimir el intervalo central, quedan $J(u,0)$ y $J(u,1)$

Obtenemos así la $(n+1)$-ésima generación:

$$\big\{\,J(u,0) : u \in U_n\,\big\} \biguplus \big\{\,J(u,1) : u \in U_n\,\big\} = \big\{\,J(v) : v \in U_{n+1}\,\big\}$$

2^{n+1} intervalos compactos, dos a dos disjuntos, de longitud a_{n+1}

que dan lugar al conjunto $K_{n+1}(a) = \biguplus_{v \in U_{n+1}} J(v)$

Medida de los conjuntos de Cantor

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\Big(C(a)\Big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$ es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$ es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$, existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

El conjunto de Cantor más conocido

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n\, a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

El conjunto de Cantor más conocido

El conjunto de Cantor C_0,

asociado a la sucesión admisible $\left\{1/3^n\right\}$,

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

El conjunto de Cantor más conocido

El conjunto de Cantor C_0,

asociado a la sucesión admisible $\big\{1/3^n\big\}$,

se conoce como conjunto ternario de Cantor

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

El conjunto de Cantor más conocido

El conjunto de Cantor C_0,

asociado a la sucesión admisible $\big\{1/3^n\big\}$,

se conoce como conjunto ternario de Cantor

y verifica que $\lambda(C_0) = 0$

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$, es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$

Por tanto, $C(a)$ es equipotente a U, luego no es numerable

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$

Por tanto, $C(a)$ es equipotente a U, luego no es numerable

Caso del conjunto ternario de Cantor

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$

Por tanto, $C(a)$ es equipotente a U, luego no es numerable

Caso del conjunto ternario de Cantor

$$C_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \ : \ c_n \in \{0,2\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Cardinales de algunos conjuntos

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g: X \to Y$ y $h: Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes
- El conjunto $\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g: X \to Y$ y $h: Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes
- El conjunto $\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Topología de los conjuntos de Cantor

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g: X \to Y$ y $h: Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes
- El conjunto $\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Topología de los conjuntos de Cantor

Todos los conjuntos de Cantor son homeomorfos

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva contiene un conjunto no medible

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva contiene un conjunto no medible

Como consecuencia, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva contiene un conjunto no medible

Como consecuencia, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Conjuntos medibles que no son de Borel

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva

contiene un conjunto no medible

Como consecuencia, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Conjuntos medibles que no son de Borel

Se verifica que $\mathcal{M} \neq \mathcal{B}$, es decir,

existen subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ que no son conjuntos de Borel