# TEMA 1 MODELOS MATEMÁTICOS 2020/2021

(1) Depósito de un capital. Un banco ofrece un interés del 7 % anual para depósitos de capital a medio plazo.

$X_n$ = total del capital n-ésimo año.

$X_{n+1} = X_n + r X_n \qquad r = 0'07$

$X_{n+1} = (1+r)X_n = 1'07 X_n$

a) Si $X_0 = 10.000$ ¿$X_4$?

$X_4 = (1+r)^4 X_0 \rightarrow X_4 = 10000\,(1'07)^4 = 13.108$

b) Quiero $X_4 = 25.000$, ¿$X_0$?

$25.000 = X_0 (1'07)^4 \rightarrow X_0 = \dfrac{25.000}{1'07^4} = 19.072'3803$

Otra forma de hacerlo: $\left.\begin{array}{l} 10.000 \longrightarrow 13108 \\ x \longleftarrow 25000 \end{array}\right\} \rightarrow x = 19072'32225$

c) $X_0 = 10.000$ y $X_5 = 12.000$ ¿$r$?

$12000 = 10000\,(1+r)^5 \rightarrow 1'2 = (1+r)^5 \rightarrow 1+r = 1'2^{1/5} = 1'03714$

$\hookrightarrow r = 0'03714$.

$r = 3'7\%$

② La expresión demográfica. Una población sigue un modelo de crecimiento malthusiano con tasa de crecimiento neta $\alpha = 0'16$ es decir si $x_n$ es el número de individuos en el periodo n, entonces $x_{n+1} = 1'16 x_n$

$$x_{n+1} = 1'16\, x_n \rightarrow x_{n+1} = (1'16)^n x_0$$

$$(1'16)^n \rightarrow \infty$$

$$\text{Si } x_0 > 0 \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$$

a) Calcula el num de periodos necesarios para que la población se duplique y cuadruplique.

$$x_n \geq 2 x_0$$

$$(1'16)^n x_0 \geq 2 x_0 \rightarrow (1'16)^n \geq 2$$

porque ln es creciente

$$\ln(1'16^n) \geq \ln(2)$$

$$n \ln(1'16) \geq \ln(2)$$

$$n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1'16)}$$

Parte entera mayor

$$\text{ceiling}(\alpha) = \min_{n \in \mathbb{N}} \{n \geq \alpha\}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \text{Ceiling}\left(\frac{\ln(2)}{\ln(1'16)}\right) = \text{ceiling}(4'67) = 5}$$

$$\text{y } x_n \geq 4 x_0 \rightarrow (1'16)^n x_0 \geq 4 x_0 \rightarrow 1'16^n \geq 4 \rightarrow n \geq \frac{\ln(4)}{\ln(1'16)} = 9'34$$

$$\boxed{n = 10}$$

b) $n_k$ el num de periodos para que la población se multiplique por $2^k$

Demostrar que $\lim_{k \to \infty} \frac{n_k}{k} = \frac{\ln(2)}{\ln(1'16)}$

$$x_{n_k} \geq 2^k x_0 \rightarrow 1'16^{n_k} \geq 2^k$$

$$n_k \ln(1'16) \geq k \ln 2 \rightarrow \frac{n_k}{k} \geq \frac{\ln 2}{\ln 1'16}$$

$$\text{como } n_k \geq \frac{k \ln 2}{\ln 1'16} \Rightarrow n_k \leq \frac{k \ln 2}{\ln 1'16} + 1 \rightarrow \frac{n_k}{k} \leq \frac{\ln 2}{\ln 1'16} + \frac{1}{k}$$

$$\text{Si } x_k < y_k \quad x_k \rightarrow L \leftarrow y_k \qquad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n_k}{k} = \frac{\ln 2}{\ln 1'16}$$

teorema del sandwich.

c) Calcula el tiempo promedio de quintuplicación $n_k$ $\quad X_{n_k} \geq 5^k X_0$

$$1'16^{n_k} \geq 5^k$$

$$n_k \ln(1'16) \geq k \ln 5 \rightarrow \boxed{n_k \geq \frac{k \ln 5}{\ln 1'16}}$$

tiempo promedio de quintuplicación $\dfrac{\ln 5}{\ln 1'16}$

③ La extinción demográfica. Consideramos $x_{n+1} = x_n \cdot r \quad 0 < r < 1$

- $x_0 - x_1$ : número de individuos que se recuperan en un periodo $\quad x_n = r^n x_0$
- $x_2 - x_3$ : num de indiv. que se recuperan en 3 periodos.

tiempo medio de recuperación: $\dfrac{1(x_0 - x_1) + 2(x_1 - x_2) + 3(x_2 - x_3) + \cdots}{x_0}$

$$= \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x_{n-1} - x_n)$$

a) Calcula el tiempo medio de recuperación

$$\frac{1}{\cancel{x_0}} \sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1} - r^n)\cancel{x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1} - r^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-r) r^{n-1} =$$

$$= (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \rightarrow$$ Para calcular esto:

$$p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$p'(r)^* = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

$$= (1-r) \frac{1}{(1-r)^2} = \frac{1}{1-r}$$

02/03/2021

b) • $x_0 - x_1 \to 0'5$ periodos

• $x_1 - x_2 \to 1'5$ periodos

• $x_2 - x_3 \to 2'5$ periodos

$$\tilde{t}_m = 0'5(x_0 - x_1) + 1'5(x_1 - x_2) + 2'5(x_2 - x_3)$$

$$= \frac{1}{x_0}\left(0'5 x_0(1-r) + 1'5 x_0(r - r^2) + 2'5 x_0(r^2 - r^3)\right) =$$

$$= (1-r)\left[0'5 + 1'5r + 2'5r^2\right] =$$

| | |
|---|---|
| $0'5$ | $1 - 0'5$ |
| $1'5r$ | $2r - 0'5r$ |
| $2'5r^2$ | $3r^2 - 0'5r^2$ |

sabemos que $\frac{1}{(1-r)^2} - 0'5\frac{1}{1-r}$

$$= (1-r)\left(\frac{1}{(1-r)^2} - 0'5\frac{1}{1-r}\right) = \boxed{\frac{1}{1-r} - 0'5}$$ → la diferencia es medio periodo.

c) $t_m = 38$ días, ¿prob de un individuo de recuperarse en un día?

$$\alpha = \frac{1}{38} \qquad r = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{38} = \boxed{\frac{37}{38}}$$

d) utilizando $r = \frac{37}{38}$ $\qquad x_{n_k} < \frac{1}{10^k} x_0$ $\qquad \begin{cases} \frac{n_k}{k} \to ? \\ k \to \infty \end{cases}$

tomando logaritmos

$$\to x_0 r^{n_k} < \frac{1}{10^k} x_0 \to n_k \cdot \ln(r) < -k\ln(10) \to$$

$$\to n_k < \frac{-\ln(10)}{\ln(r)} k \Rightarrow \frac{n_k}{k} \to \frac{-\ln(10)}{\ln(r)} = \frac{-\ln(10)}{\ln\left(\frac{37}{38}\right)} = 86'3$$

$$y \ n_k < \frac{\ln(10)}{\ln(r)} k$$ creo que esto es como el ejercicio 2b.

(4) Desintegración y degradación. Ley: $x_{n+1} = r\, x_n \quad 0 < r < 1.$

vida media $\tau = \dfrac{1}{1-r}$

$n_k$ es el nº de periodo $\qquad x_{n_k} < \dfrac{1}{2^k} x_0$

$$x_{n_k} = \cancel{x_0} r^{n_k} < \frac{1}{2^k} \cancel{x_0} \rightarrow r^{n_k} < \frac{1}{2^k} = 2^{-k}$$

$$\rightarrow n_k \cdot \ln(r) < -k \ln(2)$$

$$\rightarrow n_k < -k \frac{\ln 2}{\ln r} \rightarrow \frac{n_k}{k} \longrightarrow -\frac{\ln 2}{\ln r}$$

y la semivida $= -\dfrac{\ln 2}{\ln r}$

a) Partícula: prob $\frac{1}{2}$ de destruirse en 7 ~~segs~~ nanosegs. Tras 14 nanosegundos, ¿cuántas partículas sobreviven? ¿y tras 14 segs? ¿vida media?

$$\frac{-\ln 2}{\ln r} = 7 \cdot 10^{-9}$$

$r$ = prob de vivir 1 seg.

no estoy segura de nada de este ejercicio.

$$r = \exp\left(\frac{-\ln 2}{7 \cdot 10^{-9}}\right) \Rightarrow r^7 \text{ es lo que buscamos}$$

$$\boxed{r^7} = \left(\exp\left(\frac{-\ln 2}{7 \cdot 10^{-9}}\right)\right)^7 = \exp\left(\frac{-\ln 2}{7 \cdot 10^{-9}} \cdot 7\right) = \boxed{\exp\left(\frac{-\ln 2}{10^{-9}}\right)}$$

⑤ a)
¿ $x_n + y_n = 6.000$?

1) tomamos $S_n = x_n + y_n$

que. $S_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (0'75x_n + 0'5y_n) + (0'25x_n + 0'5y_n) =$

$= x_n + y_n = S_n$

Entonces $S_{n+1} = S_n$ es siempre constante. $S_n = x_0 + y_0 = 6.000$

2) Por otro lado tenemos que $x_{n+1} = 0'75x_n + 0'5y_n$

y utilizando que $y_n = 6000 - x_n$

obtenemos:

$x_{n+1} = 0'75x_n + 0'5(6000 - x_n) = 0'75x_n + 3000 - 0'5x_n = 0'25x_n + 3000$

Tenemos entonces $\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 0'25x_n + 3000 \\ x_0 = 3.400 \end{array} \right\}$

Busco solución constante $x_n = \alpha$ : $\alpha = 0'25\alpha + 3000 \rightarrow \alpha = \frac{3000}{0'75} = 4000$.

Entonces $x_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol. homogénea}}}{4000} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte}}}{c}\,(0'25)^n$

$3400 = 4000 + c \rightarrow \alpha = 3400 - 4000 = -600$

$\boxed{x_n = 4000 - 600(0'25)^n}$

y $\boxed{y_n = 6000 - x_n = 6000 - 4000 + 600(0'25)^n = 2000 + 600(0'25)^n}$

3) Si $n \to \infty$, $x_n \to 4000$

y si $n \to \infty$, $y_n \to 2000$

Escaneado con CamScanner