Análisis Matemático II

Tema 7: Integración de funciones reales

4 de mayo

Versión definitiva de la integral

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

y se define la integral de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

y se define la integral de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

- Cuando $f \geqslant 0$, esta integral coincide con la que conocíamos

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

y se define la integral de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

- Cuando $f \geqslant 0$, esta integral coincide con la que conocíamos
- f es integrable en E si y sólo si lo es $f\big|_E$, y las integrales coinciden

Observaciones inmediatas sobre de integral

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f$$

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E \, f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E \, f$$

El conjunto de las funciones integrables

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E\, f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E\, f$$

El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de las funciones integrables en Ω, es decir,

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E\, f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E\, f$$

El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de las funciones integrables en Ω, es decir,

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E\, f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E\, f$$

El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de las funciones integrables en Ω, es decir,

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

Los elementos de $\mathcal{L}_1(\Omega)$ son las funciones integrables

Propiedades clave de la integral

Propiedades clave de la integral

Linealidad

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $$I(f) = \int_\Omega f \quad \forall\, f \in \mathcal{L}_1(\Omega)\,,$$

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \displaystyle\int_\Omega f \quad \forall\, f \in \mathcal{L}_1(\Omega)\,,$

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega)\,, \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \ \geqslant 0$$

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \geqslant 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \displaystyle\int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \geqslant 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$
- $\left| \displaystyle\int_\Omega f \right| \leqslant \displaystyle\int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \geqslant 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$
- $\left| \int_\Omega f \right| \leqslant \int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

Se dice que la integral es un funcional lineal positivo en $\mathcal{L}_1(\Omega)$

Relación de la integral con la convergencia puntual

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,n]^N$. Entonces:

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,n]^N$. Entonces:

$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,n]^N$. Entonces: $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$ a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,n]^N$. Entonces:

$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$

a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n, n]^N$. Entonces:
$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$
a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$
pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,\,n]^N$. Entonces: $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$ a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left]0, \dfrac{1}{n}\right[^N$ y $f_n = n^N \chi_{A_n} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$.

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,, n]^N$. Entonces:

$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$

a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left]0, \dfrac{1}{n}\right[^N$ y $f_n = n^N \chi_{A_n} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$.

Ahora $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}^N$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,n]^N$. Entonces:

$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$

a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left]0, \dfrac{1}{n}\right[^N$ y $f_n = n^N \chi_{A_n} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$.

Ahora $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}^N$

pero $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \; = 1$

El segundo teorema de convergencia

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Supongamos que existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$\big| f_n(x) \big| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Supongamos que existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$\big| f_n(x) \big| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0, \quad \text{de donde:} \quad \int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$