Capítulo 1

Regla de Barrow. Técnicas de integración en una variable

Sumario

El objetivo de esta lección es el de desarrollar técnicas que nos permitan el cálculo de la integral de una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$. Presentamos la herramienta más definitiva en este sentido: La Regla de Barrow. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.1. Regla de Barrow.

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. El siguiente resultado es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función f definida en un intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$. Como consecuencia del teorema del Valor Medio (véase [**?**, Teorema 6.20], , G está determinada de manera única, salvo una constante aditiva.

Comenzamos con una curiosa propiedad que es clave en la prueba de la Regla de Barrow.

Proposición 1.1.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable que admite una primitiva G. Entonces G es absolutamente continua.*

Demostración. Para esta demostración, adaptaremos la demostracíón dada en [**?**, Lemma1].

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada n, definimos $c_n = \frac{n\varepsilon}{b-a}$ y

$$E_n := \{x \in [a, b];\ c_{n-1} \leq |f(x)| < c_n\}.$$

Puesto que f es medible, los conjuntos E_n son medibles, disjuntos dos a dos y recubren al intervalo $[a, b]$. En consecuencia, $b - a = \lambda([a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$, y

$$c_{n-1}\lambda(E_n) \leq \int_{E_n} |f(x)|\ dx \leq c_n\lambda(E_n),$$

y por tanto,

$$0 \leq c_n\lambda(E_n) - \int_{E_n} |f(x)|\ dx \leq \frac{\varepsilon\lambda(E_n)}{b-a}.$$

Por las propiedades de la integral (véase Proposición **??**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)|\ dx + \frac{\varepsilon\lambda(E_n)}{b-a} = \int_{\cup_n E_n} |f(x)|\ dx + = \int_a^b |f(x)|\ dx + \varepsilon.$$

En virtud de la Proposición **??**. (3), para cada n, existe un abierto G_n tal que $E_n \subseteq G_n$ y $\lambda(G_n \cap E_n^c) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Definimos la función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante la ley, $H(a) = 0$ y

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda(G_n \cap [a, x])$$

siempre que $x \in]a, b]$. Es claro que H es una función creciente.

Sea $x_0 = Sup\{x \in [a, b];\ |G(x) - G(a)| \leq H(x)\}$. Supongamos que $x_0 < b$. Sea k tal que $x_0 \in E_k$. Sea y $0 < \rho$ tal que $|f(x_0)| + \rho < c_k$. Sea $C = \{x \in [x_0, b];\ |f(x)| > c_k - \frac{\rho}{2}\}$. Si C es no vacío, veamos que $x_0 \neq Inf(C)$. En efecto, nótese que si $c \in C$, entonces el conjunto $f[x_0, c]$, por el Teorema del valor intermedio para las derivadas (véase [**?**, Teorema 6.21 (v)]), es un intervalo, de longitud mayor que $\frac{\rho}{2}$. Por tanto si $x \in [x_0, Inf(C)[$ entonces $|f(x)| \leq c_k - \frac{\rho}{2} < c_k$. En cualquier caso, sea C vacío o no, existe $x' \in]x_0, b]$ tal que si $x \in [x_0, x']$ entonces $|f(x)| \leq c_k - \frac{\rho}{2} < c_k$.

Por otra parte, puesto que $x_0 \in E_n \subseteq G_n$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq G_n$. Tómemos $x_1 \in [x_0, x'] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

En consecuencia, por el Teorema del valor medio (véase [**?**, Teorema 6.20],

$$|G(x_1) - G(x_0)| < c_k(x_1 - x_0).$$

Por otra parte, la continuidad de G nos asegura que $|G(x_0) - G(a)| \leq H(x_0)$, y por tanto,

$$|G(x_1) - G(a)| \leq |G(x_1) - G(x_0)| + |G(x_0) - G(a)| \leq c_k(x_1 - x_0) + H(x_0).$$

Por tanto

$$H(x_0) + c_k(x_1 - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda(G_n \cap [a, x_0]) + c_k(x_1 - x_0) =$$

$$\sum_{n=1, n\neq k}^{\infty} c_n \lambda(G_n \cap [a, x_0]) + c_k \lambda(G_k \cap [a, x_0]) + c_k(x_1 - x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda(G_n \cap [a, x_1]) = H(x_1),$$

esto es,

$$|G(x_1) - G(a)| \leq H(x_1),$$

lo cual contradice la naturaleza de x_0. En consecuencia, $x_0 = b$ y por tanto

$$|G(b) - G(a)| \leq H(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda(G_n \cap [a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda(E_n \cap [a, b]) + \varepsilon \leq \int_a^b |f(x)|\, dx + 2\varepsilon.$$

La arbitrariedad de ε permite concluir que

$$|G(b) - G(a)| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx = F(b) - F(a),$$

donde F es la función $F(x) = \int_a^x |f(t)|\, dx$ que sabemos es absolutamente continua (véase T.F.C. -Teorema **??**-). Basta repetir la argumentación anterior para cada uno de los subíntervalos, para concluir que G es igualmente absolutamente continua. ■

Ya podemos enunciar la llave para el cálculo integral en una variable.

Teorema 1.1.2. *(Regla de Barrow)*
Sea $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva G. Entonces

1. *f es medible.*

2. *Si f es una función no negativa, entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta} G(x) - lim_{x\to\alpha} G(x).$$

En particular, f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, existe el límite de G en α y en β.

3. *Si f es integrable en $]\alpha, \beta[$ entonces existen los límites de G en α y en β y*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta} G(x) - lim_{x\to\alpha} G(x).$$

Demostración. (1) Fijemos $a, b \in]\alpha, \beta[$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $[a, b + \frac{1}{m}] \subseteq]\alpha, \beta[$. Para cada $n \geq m$, definimos $G_n(x) := \frac{G(x+\frac{1}{n})-G(x)}{1/(n)}$ para todo $x \in [a, b]$ y en otro caso, $n < m$, $G_n(x) = 0$ Por hipótesis la sucesión $\{G_n\}$ converge puntualmente a f en $[a, b]$. Puesto que cada elemento de la sucesión $\{G_n\}$ es una función medible, de hecho derivable, por la Proposición **??** y el ejercicio **??**, $f\chi_{[a,b]}$ es medible en $[a, b]$. La arbitrariedad de a y b nos permiten deducir que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ $(a_n < b_n)$ son sendas sucesiones monótonas de elementos del intervalo $]\alpha, \beta[$ convergiendo a α y β respectivamente, f puede verse como el límite puntual de la sucesión de funciones medibles $\{f\chi_{[a_n,b_n]}\}$, luego medible de nuevo por la Proposición **??**.

(2) Si f es no negativa, entonces G es una función creciente, y en consecuencia, por el Corolario **??**, f es locamente integrable. Sean $a, b \in]\alpha, \beta[$. Por la Proposición 1.1.1, G es absolutamente continua y, en virtud del Teorema **??**, $G(x) = F(a) + F(x)$, donde $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, y por tanto,

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad (a, b \in]\alpha, \beta[). \tag{1.1.1}$$

Sea $c \in]\alpha, \beta[$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente en $]\alpha, c]$ convergiendo a α. Es claro, véase (1.1.1), que la sucesión $\{f\chi_{[a_n,c]}\}$ es una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a $f\chi_{]\alpha,c]}$. Igualmente, si tomamos una sucesión creciente $\{b_n\}$ en $[c, \beta[$ convergiendo a β , $f\chi_{[c,b_n]}$ es una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a $f\chi_{[c,\beta[}$. Por ser f no negativa, se tiene que la sucesión $\{f\chi_{[a_n,c]}\}$ es una sucesión creciente, entonces, en virtud de la igualdad (1.1.1) y del T.C.M.p (Teorema **??**), se tiene que

$$G(c) - lim_{x\to\alpha}G(x) = lim_n\{G(c) - G(a_n)\} = lim_n\{\int_{a_n}^c f(x)dx\} =$$

$$lim_n\{\int_{]\alpha,c]} f\chi_{[a_n,c]}\} = \{\int_{]\alpha,c]} lim_n f\chi_{[a_n,c]}\} = \int_\alpha^c f(x)dx,$$

esto es,

$$\int_\alpha^c f(x)dx = G(c) - lim_{x\to\alpha}G(x). \tag{1.1.2}$$

Si ahora aplicamos idéntico razonamiento a la sucesión $\{f\chi_{[c,b_n]}\}$ obtenemos que

$$\int_c^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta}G(x) - G(c). \tag{1.1.3}$$

Aplicando ahora la Proposición **??**.(6), deducimos que

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta}G(x) - G(c) + G(c) - lim_{x\to\alpha}G(x),$$

esto es,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta}G(x) - im_{x\to\alpha}G(x). \tag{1.1.4}$$

Teniendo en cuenta ahora la Proposición **??**.(5), si f es integrable en $]\alpha,\beta[$ entonces f es integrable en $]\alpha,c]$ (luego, por (1.1.2), existe $lim_{x\to\alpha}G(x)$) y f es integrable en $[c,\beta[$ (luego, por (1.1.3), existe $lim_{x\to\beta}G(x)$). Así pues, si $f\in L(]\alpha,\beta[)$ entonces ambos límites existen. Recíprocamente , si ambos límites existen, en virtud de la igualdad (1.1.4), $f\in L(]\alpha,\beta[)$.

(3) Si f es integrable en $]\alpha,\beta[$ entonces también lo es la función $f\chi_I$ para cualquier intervalo $I\subseteq]\alpha,\beta[$. Además, es claro que $|f\chi_I|\leq|f\chi_J|$ siempre que $I\subseteq J\subseteq]\alpha,\beta[$. Se pueden ahora repetir los argumentos dados en el apartado anterior cambiando el T.C. M.p por el T.C.D. (nótese que $|f\chi_{[a_n,c]}|\leq|f\chi_{]\alpha,c]}|\in L(]\alpha,c])$ permite obtener la igualdad (1.1.2)), para concluir que existe el límite de G en α y en β y en virtud de la Proposición **??**.(5), de nuevo

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^c f(x)dx+\int_c^\beta f(x)dx=lim_{x\to\beta}G(x)-lim_{x\to\alpha}G(x).$$

∎

En ocasiones escrbiremos $G(x)]_\alpha^\beta$ en lugar de $lim_{x\to\beta}G(x)-lim_{x\to\alpha}G(x)$.

Ejemplo 1.1.3. La condición de ser no negativa en 2) es esencial: La función $f:[\pi,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ admite primitiva (por tratarse de una función continua)y **pese a que dicha primitiva tiene límites en π y,$+\infty$, sin embargo f No es integrable en** $[\pi,+\infty[$. En efecto, es claro que

$$\int_\pi^{n\pi}|\frac{sen(x)}{x}|dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\frac{sen(x)}{x}|dx\geq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|sen(x)|dx=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$

de donde se deduce que $\int_\pi^{+\infty}|\frac{sen(x)}{x}|dx=+\infty$, luego f no integrable en $[\pi,+\infty[$.

Por otra parte, como consecuencia del T.F.C., la función f (por tratarse de una función continua) f admite una primitiva G. Comprobemos que el límite en $+\infty$ de G existe. Nótese que $cos(x).\frac{1}{x}$ es una primitiva de $-\frac{sen(x)}{x}-\frac{cos(x)}{x^2}$. En particular, usando el T.F.C. se prueba que, para cada $b>\pi$,

$$\frac{cos(b)}{b}-1/\pi=-\int_\pi^b(\frac{sen(x)}{x}+\frac{cos(x)}{x^2})\ dx,$$

esto es,

$$G(b)-G(\pi)=\int_\pi^b\frac{sen(x)}{x}dx=-\frac{cos(b)}{b}+1/\pi-\int_\pi^b\frac{cos(x)}{x^2}dx.$$

Por tanto, dado que $1/x^2$ es una función integrable en $[\pi,+\infty[$ (calcúlense los límites de su función primitiva y aplíquese la Regla de Barrow (Teorema 1.1.2)), también la función $\frac{cos(x)}{x^2}$ es integrable en $[\pi,+\infty[$. Tomando límites, se tiene que

$$lim_{b\to+\infty}G(b)-G(\pi)=lim_{b\to+\infty}(\int_\pi^b\frac{sen(x)}{x}dx)=+1/\pi-\int_\pi^{+\infty}\frac{cos(x)}{x^2}dx\in\mathbb{R}.$$ ∎

Ocurre a menudo que si intentamos evaluar algunas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua f, para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada(o tener límite) en los puntos α y β. Por tanto, algunas veces, conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

La primera técnica, consecuencia inmediata de la Regla de Barrow (Teorema 1.1.2.(2)), es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 1.1.4. *(teorema de integración por partes)*

Sean $F, G :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables y tales que $F'G$ y FG' son integrables en $]\alpha, \beta[$. Entonces

$$\int_\alpha^\beta F(x).G'(x)dx = lim_{x\to\beta}F(x).G(x) - lim_{x\to\alpha}F(x)G(x) - \int_\alpha^\beta F'(x).G(x)dx.$$

Una segunda opción viene dada por el siguiente resltado.

Corolario 1.1.5. *(teorema del cambio de variable) Sean $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y $g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $]a, b[$ con $g'(x) \neq 0$ para todo x. Sea $]\alpha, \beta[= g(]a, b[)$. Si $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, la función $f \circ g.g'$ es una integrable en $]a, b[$. En tal caso,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{lim_{x\to\alpha}g^{-1}(x)}^{lim_{x\to\beta}g^{-1}(x)} f(g(t)).g'(t)dt. \tag{1.1.5}$$

Demostración. Supongamos que $g'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$. Definimos $\mu : \mathcal{M}_{]\alpha,\beta[} \rightarrow [0, +\infty]$ mediante la ley $\mu(F) = \int_{g^{-1}(F)} g'\ d\lambda$ (nótese que $g^{-1} \in C^1(]\alpha, \beta[)$ -véase [?][Corolario 6.24]), luego, en virtud del Corolario **??**, la aplicación μ está bien definida). Sean $\{F_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Dado que la sucesión creciente de funciones $\{g'\chi_{\cup_{k=1}^n g^{-1}(F_k)}\}$ converge puntualmente a la función $\{g'\chi_{\cup_n g^{-1}(F_n)}\}$, por el T.C.M. para funciones medibes no negativas (Teorema **??**) y la Proposición **??**.(5), , se tiene que

$$\mu(\cup_n F_n) = \int_{g^{-1}(\cup_n F_n)} g'\ d\lambda = \int_{\cup_n g^{-1}(F_n)} g'\ d\lambda = \int_{]a,b[} g'\chi_{\cup_n g^{-1}(F_n)}\ d\lambda =$$

$$lim_n\{\int_{]a,b[} g'\chi_{\cup_{k=1}^n g^{-1}(F_k)}\ d\lambda\} = lim_n\{\int_{\cup_{k=1}^n g^{-1}(F_k)} g'\ d\lambda\} =$$

$$lim_n\{\sum_{k=1}^n \int_{g^{-1}(F_k)} g'\ d\lambda\} = lim_n\{\sum_{k=1}^n \mu(F_k)\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(F_n).$$

Veamos que μ es una medida que, de hecho, sobre los intervalos coincide con el volumen de los intervalos. En efecto, supongamos que $[c, d]$ es un intervalo contenido en $]\alpha, \beta[$ y en tal caso, en virtud de la Regla de Barrow (Teorema 1.1.2),

$$\mu([c, d]) = \int_{g^{-1}([c,d])} g' \, d\lambda = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} g'(x) \, dx = d - c.$$

Aplicando El Lema **??**, deducimos que $\mu(F) = \lambda(F)$ para todo $F \in \mathcal{M}_{]\alpha,\beta[}$.

Supongamos primeramente que $f = \chi_E$, donde $E \in \mathcal{M}_{]\alpha,\beta[}$. Es claro que, puesto que $g'\chi_{g^{-1}(E)} = \chi_E \circ g.g'$, podemos escribir

$$\int_\alpha^\beta \chi_E(x)dx = \lambda(E) = \mu(E) = \int_{g^{-1}(E)} g' \, d\lambda = \int_a^b g'\chi_{g^{-1}(E)}(x)dx = \int_a^b (\chi_E \circ g).g'(x)dx.$$

Si f es simple, esto es, $f(]\alpha, \beta[) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, y escribimos $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$, donde $A_k = \{x \in]\alpha, \beta[; \; f(x) = \alpha_k\}$, entonces

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_\alpha^\beta \chi_{A_k}(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b (\chi_{A_k} \circ g).g'(x)dx =$$

$$\int_a^b (\sum_{k=1}^n \alpha_k(\chi_{A_k} \circ g).g'(x)dx = \int_a^b (f \circ g).g'(x)dx.$$

Finalmente si f es medible no negativa, aplicamos el Corolario **??** para encontrar una sucesión $\{s_n\}$ creciente de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f, y tal que $\int_\alpha^\beta f \, d\lambda = lim\{\int_\alpha^\beta s_n \, d\lambda\}$. Teniendo en cuenta que $\{(s_n \circ g).g'\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles no negativas que converge puntualmente a $(f \circ g).g'$, se deduce, usando el Teorema **??** que

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_n\{\int_a^b (s_n \circ g).g'(x)dx\} =$$

$$\int_a^b lim_n\{(s_n \circ g).g'\}(x)dx = \int_a^b f \circ g.g'(x)dx = \int_{lim_{x\to\alpha} g^{-1}(x)}^{lim_{x\to\beta} g^{-1}(x)} f(g(t)).g'(t)dt.$$

En el supuesto de que $g'(x) < 0$, definimos $\mu : \mathcal{M}_{]\alpha,\beta[} \to [0, +\infty]$ mediante la ley $\mu(F) = \int_{g^{-1}(F)} (-g') \, d\lambda$. Teniendo en cuenta que $g^{-1}([c, d]) = [g^{-1}(d), g^{-1}(c)]$, podemos probar que μ es de nuevo una medida que coincide con la medida de Legesgue y, con un procedimiento similar, llegar a la igualdad propuesta (1.1.5).

Así pues en cualquier caso, si f es medible no negativa, probamos

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b (f \circ g).|g'|(x)dx.$$

En particular, para cualquier función medible f se tiene que

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx = \int_a^b (|f \circ g|.|g'|)(x)dx.$$

De donde se deduce que, f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, $f(\circ g).g'$ es integrable en $]a, b[$ y en caso afirmativo tomando $f = f^+ - f^-$, deducimos que

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{lim_{x\to\alpha} g^{-1}(x)}^{lim_{x\to\beta} g^{-1}(x)} f(g(t)).g'(t)dt.$$

$\blacksquare$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t = a, t = b$ por los correspondientes $x = g(a), x = g(b)$.

Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, podemos probar que la función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t\ dt.$$

es derivable de hecho, es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1) = 0$
- $F(xy) = F(x) + F(y)$
- $F(e) = 1$.

Esto es, la función F no es otra cosa que la función logaritmo neperiano.

1.2. Técnicas de integración

En esta sección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales.

Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única"dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional y sean $P, Q, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes funciones polinómicas tales que, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, para cada $x \in [a, b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

1) P y Q son dos polinomios primos entre sí.

2) El polinomio $Q(x)$ es de mayor grado que $P(x)$.

3) El coeficiente líder del polinomio $Q(x)$ es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de f se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

Proposición 1.2.1.

1) *Descomposición en factores irreducibles*

Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$,

donde p y q son números enteros no negativos,$a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q, c_1, c_2, ..., c_q$ son números reales, donde $a_1 < a_2 < ... < a_p$ son las raíces reales del polinomio Q y para cada $k \in \{1, 2, ..., p\}$, n_p es el orden de multiplicidad de la raíz a_k; y finalmente $m_1, m_2, ..., m_q$ son números naturales.

La descomposición anterior en factores es única y

$$n_1 + n_2 + ... + n_p + 2(m_1 + m_2 + ... + m_q)$$

es el grado del polinomio.

2) *Descomposición en fracciones simples*

Si el polinomio $Q(x)$ se descompone en la forma dada en (1.) y $P(x)$ es un polinomio primo con $Q(x)$ de grado menor que el de $Q(x)$, la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse de forma única como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A^{11}}{x-a_1} + \frac{A^{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A^{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \\ & + \frac{A^{21}}{x-a_2} + \frac{A^{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A^{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + ... + \\ & \frac{A^{p1}}{x-a_p} + \frac{A^{p2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A^{pn_1}}{(x-a_p)^{n_p}} + ... + \\ & \frac{B^{11}x + C^{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B^{12}x + C^{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \frac{B^{1m_1}x + C^{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \\ & \frac{B^{21}x + C^{21}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B^{22}x + C^{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \frac{B^{2m_2}x + C^{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}} + ... + \\ & \frac{B^{q1}x + C^{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B^{q2}x + C^{q2}}{[(x^2+b_qx+c_q)^2} + \frac{B^{qm_q}x + C^{qm_q}}{[(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}}, \end{aligned}$$

donde A_{ij} $(1 \leq i \leq p, (1 \leq j \leq n_p)$ y $(B^{ij}$, C_{ij} $(1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq m_q$ y

$a_1, a_2, ..., a_p, B_1, B_2, ..., B_q, c_1, c_2, ..., c_q$ C^{ij} son números reales. Se tiene además que $A^{kn_k} \neq 0$ para $k \in \{1, 2, ..., p\}$ y $(B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0$ para $j \in \{1, 2, ..., q\}$.

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$. Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A.log(\frac{b-c}{a-c}).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx.$$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-2x+1}dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + cx + d},$$

para todo $x \in [a, b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2} \int_a^b \frac{2x + c}{x^2 + cx + d} dx + (C - cB/2) \int_a^b \frac{dx}{x^2 + cx + d}.$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio de variable $u = x^2 + cx + d$, con lo que nos queda

$$\int_{a^2+ac+d}^{b^2+bc+d} \frac{du}{u} = log \frac{b^2 + bc + d}{a^2 + ac + d}.$$

La segunda integral se puede resolver escribiendo $x^2 + cx + d = (x - r)^2 + b^2$ para hacer el cambio de variable $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s} \int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b - r}{s}) - arc\ tg(\frac{a - r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x - 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2 + cx + d)^n},$$

para todo $x \in [a, b]$, donde $c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n - 1$.

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex + f}{x^2 + cx + d} + [\frac{F(x)}{(x^2 + cx + d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2 + cx + d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex + f}{x^2 + cx + d} dx + \frac{F(b)}{(b^2 + cb + d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2 + ca + d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+4}dx.$$

Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello, sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue I será un intervalo del tipo $[a, b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función continua. Para calcular la integral de f usaremos sistemáticamente el cambio de variable $x = g(t)$, donde g es una función biyectiva de un cierto intervalo J sobre I y de clase $\mathcal{C}^1$ en J. Si notamos por $h(t) = f \circ g(t).g'(t)$, para todo $t \in J$, transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función h en el intervalo J. Si h es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo K y una nueva función φ tal que $t = \varphi(u)$, donde φ es una función biyectiva de K sobre J y de clase $\mathcal{C}^1$ en K. Si notamos por $k(u) = h \circ \varphi(u).\varphi'(u)$, para todo $u \in k$, transformaremos la integral de la función h en la integral de la función k en el intervalo K, y vuelta a empezar.

1. Funciones trigonométricas

   Sea f una función que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable

   $$x = g(t) = 2arctg(t).$$

   La función g que aparece es una función racional. De hecho,

   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y} \quad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcúlese $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

   Podemos destacar algunos casos particulares en

   $$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)}dx \qquad a, b \in I$$

a) Si n es impar, se hace el cambio $x = arccos(t)$, siempre que $I \subseteq [0, \pi]$.

b) Si m es impar, se hace el cambio $x = arcsen(t)$, siempre que $I \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$.

c) Si n y m son pares se usan las fórmulas

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

Sea f una función f que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = g(t) = log(t)$. La función h que aparece es de nuevo una función racional.

Ejercicio: Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

3. Irracionales en x

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de potencias racionales de x. Si $f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})$, entonces hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

4. Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{x^2 - 1}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [1, +\infty[$ ó $I \subseteq]-\infty, 1]$, hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = \frac{1}{cost}$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = ch(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1-x^2}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [-1,1]$ hacemos el cambio de variable $x = g(t) = sen(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1+x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = tg(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = sh(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^{4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Nota

Las funciones $f(x)$ que son cociente de sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto, si hacemos un primer cambio $u = x + b/2a$ y posteriormente

a) si $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b^2-4ac}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2-1}$

b) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2+1}$.

c) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{-a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$ resulta una integral del tipo $\sqrt{1-t^2}$

1.3. Criterios de integrabilidad

De igual manera que es sumamente complicado calcular la suma de ciertas series y por tanto, en tantos casos sólo podemos saber si una determinada serie es convergente, ocurre con la integral de ciertas funciones. En esta sección daremos algunos criterios de integrabilidad para una cierta función.

Entre los distintos criterios distinguiremos el método de comparación. Antes, recordemos algunos resultados a tener en cuenta en el estudio de la integrabilidad.

1. Si $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}_0^+$ es una función que admite una primitiva G, entonces la Regla de Barrow nos dice que es integrable en $]\alpha, \beta[$ si existen los límites en α y β de G.

2. Por definición de la integral, si $f, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles tales que g es integrable en $]\alpha, \beta[$ y $|f| \leq g$ entonces f es también integrable en $]\alpha, \beta[$.

3. Teniendo en cuenta la Proposición **??**.(5), si $c \in]\alpha, \beta[$ entonces f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, f es integrable en $]\alpha, c]$ y f es integrable en $[c, \beta[$. En tal caso

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

   Este tercera observación nos permite dividir el problema en dos.

4. Si f es locamente integrable en $[a, b[$ con $b \in \mathbb{R}$ y existe $c \in [a, b[$ tal que f está acotada en $[c, b[$ (en particular si f tiene límite en b) entonces f es integrable en $[a, b[$.

Veamos ahora el criterio de comparación. Nosotros nos centramos en intervalos de la forma $[a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$. En el caso de intervalos de la forma $]\alpha, a]$, el procedimiento es análogo.

Proposición 1.3.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a, \beta[\to \mathbb{R}$ dos funciones localmente integrables tales que*

1. *$g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, \beta[$ y*

2. *$lim_{x\to\beta}|\frac{f(x)}{g(x)}| = L$.*

Entonces

1. *Si $L \in \mathbb{R}^+$, entonces f es integrable en $[a, \beta[$ si, y sólo si, g es integrable en $[a, \beta[$.*

2. *Si $L = 0$ y g es integrable en $[a, \beta[$ entonces f es integrable en $[a, \beta[$.*

3. *Si $L = +\infty$ y f es integrable en $[a, \beta[$ entonces g es integrable en $[a, \beta[$.*

Demostración. (1) Tomo $\varepsilon = L/2$. Sea $c \in [a, \beta[$ tal que $L/2 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 3L/2$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$(L/2)\int_c^\beta |g(x)|d(x)] \leq \int_c^\beta |f(x)|d(x) \leq (3L/2)\int_c^\beta |g(x)|d(x),$$

que f y g son integrables en $[a,c]$ y aplicar la Proposición **??**.(6). que nos asegura que

$$\int_a^\beta |f(x)|d(x) = \int_a^c |f(x)|d(x) + \int_c^\beta |f(x)|d(x)$$

y

$$\int_a^\beta |g(x)|d(x) = \int_a^c |g(x)|d(x) + \int_c^\beta |g(x)|d(x).$$

La conclusión final se deriva de la Proposición **??**.(5) teniendo en cuenta que las funciones f y g son integrables en $[a,c]$.

(2) Sea $c \in [a,\beta[$ tal que $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 1$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$\int_c^\beta |f(x)|d(x) \leq \int_c^\beta |g(x)|d(x)$$

y aplicar las Proposiciones **??**.(6). y **??**.(5).

(3) Sea $c \in [a,\beta[$ tal que $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \geq 1$ para todo $x \geq c$. Baste observar que

$$\int_c^\beta |g(x)|d(x) \leq \int_c^\beta |f(x)|d(x)$$

y aplicar de nuevo las Proposiciones **??**.(6). y **??**.(5).

■

Es aconsejable que la función g que usamos en la comparación sea lo más sencilla posible (sería conveniente una función que sepamos integrar). En todo caso, necesitamos del conocimiento de la integrabilidad del máximo posible de funciones. Con esta idea, estudiamos primeramente la función potencial:

Consideremos la función $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^a$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$0 < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable en	$]\alpha,\beta[$	para	todo valor de a
Si	$0 = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable en	$]\alpha,\beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > -1$
Si	$0 < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	x^a	es integrable en	$]\alpha,\beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < -1$
Si	$0 = \alpha, \beta = +\infty$	entonces	x^a	no es integrable en	$]\alpha,\beta[$	para	ningún valor de a

Demostración. Baste observar que en virtud de la Regla de Barrow (Teorema 1.1.2)

$$\int_\alpha^\beta x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1}]_\alpha^\beta & si\ a \neq -1 \\ ln(x)]_\alpha^\beta & si\ a = -1 \end{cases}$$

■

Y en segundo lugar la función exponencial.

Consideremos la función $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{ax}$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$-\infty < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	todo valor de a
Si	$-\infty = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > 0$
Si	$-\infty < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable en $]\alpha, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < 0$
Si	$\alpha = -\infty, \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	no es integrable en $]\alpha, \beta[$	para	ningún valor de a

1.4. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 arctg(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\ dx,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} sen^2 x\ cos^3 x\ dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx\ \log(senx)\ dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{senx}{cos^2 x}\ dx.$$

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + cosx}., \qquad \int_0^1 \frac{dx}{coshx}.$$

$$\int_2^3 \frac{1 + 2x - x^2}{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2} dx., \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{senx - tgx}.$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}., \qquad \int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}. \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}.$$

2. Pruebe que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

   a) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = arcsen(2/3) - arcsen(7/12), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + ln(\frac{2}{1+e}).$

   b) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \pi/2, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \pi/6.$

   c) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = (3\pi + ln2)/10, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = (\sqrt{3}\pi/12).$

   d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \pi/2, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} sen^2(x) dx = \pi.$

   e) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} sen(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \ (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}).$

   f) $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} |sen(x)|^3 dx = 4/3.$

   g) $\int_0^{\pi/2} sen^2(x) cos^2(x) dx = \pi/16, \quad \int_0^1 (1 - x^{2/3}) x dx = 1/8.$

   h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = ln(1 + \sqrt{2}).$

   i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2 y)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}} \ (y > 0), \quad \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi, \quad \int_0^1 ln(x) dx = -1.$

j) $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2})dy = \frac{2ln(x)}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$.

3. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones:

   a) $\frac{sen(x)}{x}$ en $]0, \pi]$.
   b) $x^a e^{-bx}(a \in \mathbb{R}, b > 0)$ en $\mathbb{R}^+$.
   c) $x/(e^x - 1)$ en $\mathbb{R}^+$.
   d) $x^a ln(x)(a \in \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^+$.
   e) $1/\sqrt{x}\ sen(1/x)$ en $]0, 1[$.
   f) $x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a, b \in \mathbb{R})$ en $]0, 1[$.
   g) $ln(x)ln(1 + x)$ en $]0, 1[$.
   h) $x^a sen(x)(a \in \mathbb{R})$ en $]1, +\infty[$.

4. Justifique, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

   a) $lim \int_0^1 \frac{nxln(x)}{1+n^2x^2}dx = 0$.
   b) $lim \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx = 0$.
   c) $lim \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx = 0$.

5. Calcule $lim_n \int_0^{+\infty} f_n$ para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones de $[0, +\infty[$ en $\mathbb{R}$:

   a) $f_n(x) = \frac{n^{3/2}sen(x)}{1+n^2x^2}$.
   b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}}$.
   c) $f_n(x) = \frac{sen(\frac{x}{n})}{(1+\frac{x}{n})^n}$.

6. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

   a) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}dx\ \forall t \in \mathbb{R}^+$.
   b) $F(t) = \int_0^{\pi} ln(1 + tcosx)dx \quad \forall t \in]-1, 1[$.
   c) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{sen(tx)}{1+x^2}dx\ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

7. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$
es derivable. Utilizar el método de integración por partes en la expresión de F' para obtener $F'(t) = -tF(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $t \longmapsto F(t)e^{t^2/2}$ tiene derivada nula. Por último concluya, usando el Teorema del valor medio, que
$$F(t) = Ce^{-t^2/2},\ \forall t \in \mathbb{R},$$
donde $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$