Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{a + y : y \in E\}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N, \ J \in \mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

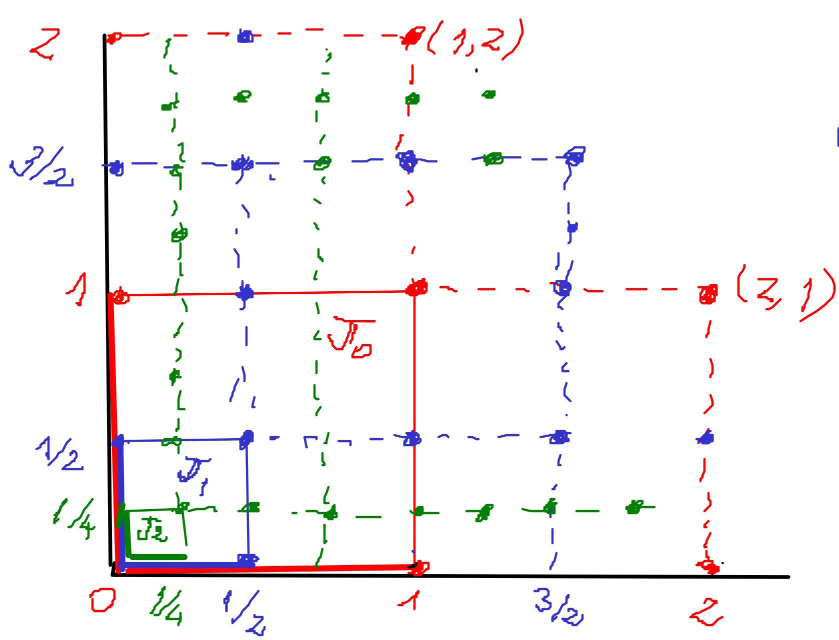
$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n}\right[^N \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}_n := \{a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N\}$$

Intervalos diádicos

Un intervalo diádico es un conjunto de la forma

$$J = a + \mathbb{J}_n \ \text{ con } a \in \mathbb{A}_n \text{, donde } n \in \mathbb{N}_0$$

Se dice que n es el orden del intervalo diádico J



$(1,2) \in \mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$

$(3/2, 1) \in \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$

$(1/4, 3/2) \in \mathbb{A}_2$

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a\in\mathbb{A}_n} (a+\mathbb{J}_n)$
- Para $n,m \in \mathbb{N}_0$ con $n<m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

$G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $A_1 = \{a \in \mathbb{A}_1 : a+\mathbb{J}_1 \subset G\}$, $B_1 = \biguplus_{a\in A_1} (a+\mathbb{J}_1) \subset G$

$n \in \mathbb{N}$, $n>1$, suponemos definidos A_k, B_k para $k=1,2,\dots,n-1$

$A_n = \{a \in \mathbb{A}_n : a+\mathbb{J}_n \subset G \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\}$, $B_n = \bigcup_{a\in A_n} (a+\mathbb{J}_n) \subset G$

$n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m \Rightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$

$$G_0 = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{a\in A_n} (a+\mathbb{J}_n)$$

G_0 unión numerable de intervalos diádicos dos a dos disjuntos

$B_n \subset G \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow G_0 \subset G$ $\qquad x \in G \overset{?}{\Rightarrow} x \in G_0$

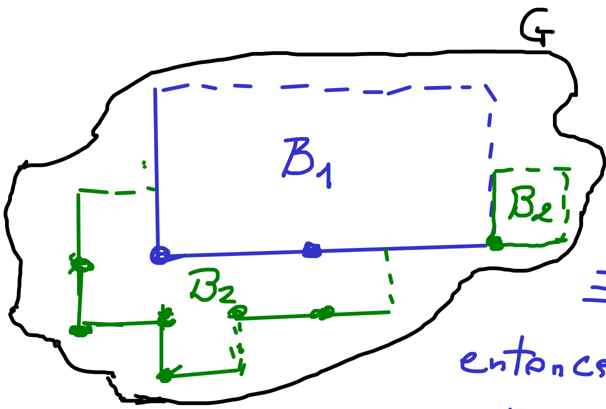
$\|\cdot\|$ norma del máximo en $\mathbb{R}^N$, $\exists\, \delta>0 : z\in\mathbb{R}^N,\ \|z-x\|<\delta \Rightarrow z \in G$

Fijo $n\in\mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}$ $\quad \exists\, a \in \mathbb{A}_n : x \in a+\mathbb{J}_n$

$0 \le x(k)-a(k) < 1/n \ \ \forall k\in\Delta_N \Rightarrow \|x-a\| < 1/2^n < \delta/2$.

Análogamente: $y \in a+\mathbb{J}_n \Rightarrow \|y-a\|<\delta/2 \Rightarrow \|y-x\| \le \|y-a\|+\|a-x\| < \delta$

$\Rightarrow y\in G$ luego $a+\mathbb{J}_n \subset G$



Dos casos:

$a\in A_n \Rightarrow a+\mathbb{J}_n \subset B_n \subset G_0$

$x \in a+\mathbb{J}_n \Rightarrow x \in G_0$.

$a \notin A_n$, $a+\mathbb{J}_n \subset G \Rightarrow (a+\mathbb{J}_n) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right) \neq \emptyset$

$\exists\, k\in\mathbb{N},\ k<n\ \exists\, b\in A_k : (a+\mathbb{J}_n)\cap(b+\mathbb{J}_k) \neq \emptyset$

entonces $a+\mathbb{J}_n \subset b+\mathbb{J}_k$, luego

$x \in a+\mathbb{J}_n \subset b+\mathbb{J}_k \subset B_k \subset G_0$, $x \in G_0$. $\quad G = G_0$

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

1) La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

2) Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces:

3) $$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Portanto, los homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ preservan los conjuntos de Borel

1) $\mathcal{G}$ topología de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$

$\mathcal{J}$ intervalos acotados, $\mathcal{A}$ σ-álgebra engendrada por $\mathcal{J}$

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ es unión numerable de intervalos acotados

luego: $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

Todo intervalo acotado es intersección numerable de abiertos

luego: $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

Por tanto $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ c.q.d.

2) Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ es medible, luego

$\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

3) Sea $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$

$\mathcal{A}$ es una σ-álgebra (comprobación rutinaria)

$G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow \varphi^{-1}(G)$ abierto de E

$\varphi^{-1}(G) = E \cap H$ con H abierto de $\mathbb{R}^N$, $E, H \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi^{-1}(G) \in \mathcal{B}$

$\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \ \forall B \in \mathcal{B}$

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \inf{}'\left\{ \lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Tema anterior:

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) : J_n \in \mathcal{J},\ J_n = J_n^\circ\ \forall n \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

$$\beta = \sup\{ \lambda(G) : E \subset G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N \}$$

$$E \subset G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow \lambda^*(E) \leq \lambda^*(G) = \lambda(G)$$

luego $\lambda^*(E) \leq \beta$ ¿$\beta \leq \lambda^*(E)$?

$\lambda^*(E) = \infty$ evidente

$\lambda^*(E) < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\lambda^*(E) < \lambda^*(E) + \varepsilon$

$\exists \{J_n\}$, $J_n \in \mathcal{J}$, $J_n = J_n^\circ$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$$

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \qquad E \subset G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N$$

$$\beta \leq \lambda(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ $\quad \beta \leq \lambda^*(E)$

luego $\lambda^*(E) = \beta$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$ con $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

(4) Existe $A \subset \mathbb{R}^N$, de tipo F_σ, con $A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$

(5) Existe $B \subset \mathbb{R}^N$, de tipo G_δ, con $E \subset B$ y $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

Probaremos: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ y $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$ $\quad E \in \mathcal{M}$, $E_n = E \cap [-n,n]^N \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda(E_n) \leq \lambda([-n,n]^N) = (2n)^N < \infty$

$$\lambda(E_n) = \inf\{\lambda(G) : E_n \subset G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N\}$$

$\varepsilon > 0 \quad \lambda(E_n) < \lambda(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\exists\, G_n : E_n \subset G_n = G_n^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda(G_n) < \lambda(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N$

$$G \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$$

$\lambda(E_n) + \lambda(G_n \setminus E_n) = \lambda(G_n) < \lambda(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} < \infty$

luego $\lambda(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lambda(G \setminus E) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

luego $\lambda^*(G \setminus E) = \lambda(G \setminus E) < \varepsilon$.

$(2) \Rightarrow (5)$ $\quad E \subset \mathbb{R}^N$ $\quad E$ verificando (2)

$n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/n$ $\exists\, G_n : E \subset G_n = G_n^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda^*(G_n \setminus E) < 1/n$

$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, B de tipo G_δ, $E \subset B$

$\lambda^*(B \setminus E) \leq \lambda^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

$\underline{(5) \Rightarrow (1)}$ $\quad E \subset B \quad B$ de tipo $G_\delta \quad \lambda^*(B \setminus E) = 0$.

$$B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}, \ \lambda^*(B \setminus E) = 0 \Rightarrow B \setminus E \in \mathcal{M}$$

$$E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{M}.$$

$\underline{(1) \Rightarrow (3)}$ $\quad E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

$\varepsilon > 0$ (como ya sabemos que $(1) \Rightarrow (2)$)

$$\mathbb{R}^N \setminus E \subset G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \lambda^*(G \setminus (\mathbb{R}^N \setminus E)) < \varepsilon$$

$$\lambda^*(G \setminus (\mathbb{R}^N \setminus E)) = \lambda^*(G \cap E)$$

$$F = \mathbb{R}^N \setminus G \qquad F = \overline{F} \subset E$$

$$\lambda^*(E \setminus F) = \lambda^*(E \cap G) < \varepsilon$$

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$ $\quad$ Para $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{F_n} \subset E$, $\lambda^*(E \setminus F_n) < 1/n$

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. A de tipo F_σ, $A \subset E$ y

$$\lambda^*(E \setminus A) \leq \lambda^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda^*(E \setminus A) = 0$$

$(4) \Rightarrow (1)$ $\quad A \subset E$, A de tipo F_σ, $\lambda^*(E \setminus A) = 0$.

$$A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}, \ \lambda^*(E \setminus A) = 0 \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{M} \quad E = A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{M}$$

Lo más interesante:

$$E \in \mathcal{M} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tipo } F_\sigma}}{A} \subset E \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tipo } G_\delta}}{B}$$

$$\lambda(E \setminus A) = \lambda(B \setminus E) = 0 \quad \text{luego} \quad \lambda(B \setminus A) = 0$$

$$\lambda(A) = \lambda(E) = \lambda(B)$$

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup\left\{\lambda(K) \; : \; K \text{ compacto}, \;\; K \subset E\right\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$\alpha = \sup\{\lambda(K) : K \text{ compacto}, K \subset E\}$

K compacto, $K \subset E \Rightarrow \lambda(K) \leq \lambda(E)$, luego $\alpha \leq \lambda(E)$

¿$\lambda(E) \leq \alpha$? $\quad 0 \leq \rho < \lambda(E) \leq \infty$, $\rho < \infty$

$\varepsilon > 0$ con $\rho + \varepsilon < \lambda(E)$

$\exists F : \quad F = \overline{F} \subset E$, $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$

$\lambda(F) > \rho$ (porque $\lambda(F) \leq \rho \Rightarrow$
$\lambda(E) = \lambda(F) + \lambda(E \setminus F) \leq \rho + \varepsilon < \lambda(E)$ absurdo)

$n \in \mathbb{N}$, $F_n = F \cap [-n, n]^N$ compacto, $\{F_n\} \nearrow F$

Continuidad creciente: $\{\lambda(F_n)\} \nearrow \lambda(F) > \rho$

$\exists m \in \mathbb{N} : \lambda(F_m) > \rho$, $K = F_m$

K compacto, $K \subset F \subset E$, $\lambda(K) > \rho$

$\alpha \geq \lambda(K) > \rho$

válido para $0 \leq \rho < \lambda(E)$, luego $\alpha \geq \lambda(E)$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

y $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una medida tal que

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$,

entonces: $\quad \mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$

En particular, λ es la única medida, definida en $\mathcal{M}$, que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados

1) $G = G^{\circ} \subset \mathbb{R}^N \qquad G = \biguplus_{n=1}^{\infty} J_n$, J_n intervalo diádico $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) = \lambda(G)$$

2) $K \subset \mathbb{R}^N$, K compacto $\exists\, I$ intervalo abierto acotado, $K \subset I$

I abierto $\Rightarrow \mu(I) = \lambda(I)$

$I \setminus K = I \cap (\mathbb{R}^N \setminus K)$ abierto $\Rightarrow \mu(I \setminus K) = \lambda(I \setminus K)$

$$\mu(I \setminus K) + \mu(K) = \mu(I) = \lambda(I) = \lambda(I \setminus K) + \lambda(K)$$

$$\lambda(I \setminus K) + \mu(K) = \lambda(I \setminus K) + \lambda(K)$$

$\lambda(I \setminus K) \leq \lambda(I) < \infty$ luego $\qquad \mu(K) = \lambda(K)$

3) $E \in \mathcal{A}$, $K \subset E \subset G$, K compacto, G abierto

$\mu(E) \leq \mu(G) = \lambda(G)$ luego

$$\mu(E) \leq \inf\{\lambda(G) : E \subset G = G^{\circ} \subset \mathbb{R}^N\} = \lambda(E)$$

$\lambda(K) = \mu(K) \leq \mu(E)$ luego

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ compacto}, K \subset E\} \leq \mu(E)$$

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

1) $$\lambda^*(x+E) = \lambda^*(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

2) $$E \in \mathcal{M}, \ x \in \mathbb{R}^N \implies x+E \in \mathcal{M}, \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

1) $J \in \mathcal{J}$, $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow x + J \in \mathcal{J}$, $\lambda(x+J) = \lambda(J)$
(comprobación inmediata)

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \ J_n \in \mathcal{J} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x+E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (x+J_n)$$

$$\lambda^*(x+E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(x+J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n)$$

válido para todo recubrimiento de E, luego

$$\lambda^*(x+E) \leq \lambda^*(E) \quad ¡\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)!$$

cambio x por $-x$ y E por $x+E$:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(-x+(x+E)) \leq \lambda^*(x+E)$$

$E \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

$$W \cap (x+E) = x + [(-x+W) \cap E]$$

$$W \setminus (x+E) = x + [(-x+W) \setminus E]$$

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(-x+W) \underset{=\!=}{\overset{E \in \mathcal{M}}{}} \lambda^*((-x+W)\cap E) + \lambda^*((-x+W)\setminus E)$$

$$= \lambda^*(W \cap (x+E)) + \lambda^*(W \setminus (x+E))$$

$$x+E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(x+E) = \lambda^*(x+E) = \lambda^*(E) = \lambda(E)$$

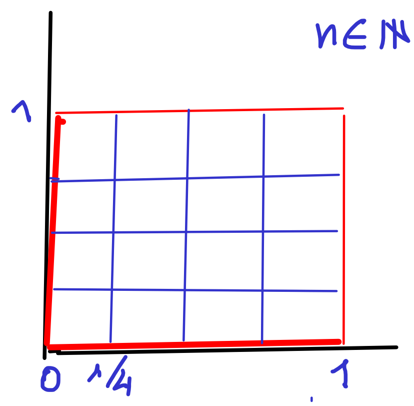
Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$



$n = N = 2 \quad 2^{nN} = 16$

$n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{J}$ es la unión de los 2^{nN} intervalos diádicos de orden n que contiene

$k = 2^{nN} \qquad \mathbb{J} = \biguplus_{j=1}^{k} (a_j + \mathbb{J}_n)$

$$1 = \mu(\mathbb{J}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(a_j + \mathbb{J}_n) = \sum_{j=1}^{k} \mu(\mathbb{J}_n) = k\,\mu(\mathbb{J}_n)$$

$$1 = \lambda(\mathbb{J}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(a_j + \mathbb{J}_n) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(\mathbb{J}_n) = k\,\lambda(\mathbb{J}_n)$$

$$k\,\mu(\mathbb{J}_n) = k\,\lambda(\mathbb{J}_n) \Rightarrow \mu(\mathbb{J}_n) = \lambda(\mathbb{J}_n)$$

$a \in \mathbb{R}^N \qquad \mu(a + \mathbb{J}_n) = \mu(\mathbb{J}_n) = \lambda(\mathbb{J}_n) = \lambda(a + \mathbb{J}_n)$

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo J intervalo diádico J de orden n y para todo $n \in \mathbb{N}$!

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo J

1er Teorema de unicidad: $\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A}=\mathcal{M}$,

sea $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ una medida invariante por traslaciones.

Supongamos que existe un abierto $G\subset\mathbb{R}^N$ tal que $\mu(G)<\infty$.

Entonces existe $\rho\in\mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(E)=\rho\lambda(E)\quad\forall E\in\mathcal{A}$

$G=G^\circ\subset\mathbb{R}^N$, $\mu(G)<\infty$, $a\in G$ fijo

$x\in\mathbb{R}^N$ $\quad x-a+G=U_x$ abierto, $x\in U_x$, $\mu(U_x)=\mu(G)<\infty$

$K\subset\mathbb{R}^N$ K compacto $\quad\{U_x : x\in K\}$ recubrimiento por abiertos

$\exists\ F\subset K$, F finito $\quad K\subset\bigcup_{x\in F}U_x$

$$\mu(K)\leq\sum_{x\in F}\mu(U_x)<\infty$$

$J\subset\overline{J}=[0,1]^N$ compacto, $\mu(J)\leq\mu(\overline{J})<\infty$

$\mu(J)=0$, $\quad\mathbb{R}^N=\biguplus_{a\in\mathbb{Z}^N}(a+J)$, $\mu(\mathbb{R}^N)=0$

$\mu(E)=0\ \forall E\in\mathcal{A}$, $\mu(E)=\rho\lambda(E)\ \forall E\in\mathcal{A}$ con $\rho=0$

$\mu(J)\in\mathbb{R}^+$, $\quad\mu_1(E)=\mu(E)/\mu(J)\quad\forall E\in\mathcal{A}$

$\mu_1:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ medida invariante por traslaciones

$\mu_1(J)=1\quad$ Lema: $\mu_1(E)=\lambda(E)\ \forall E\in\mathcal{A}$

$\rho=\mu(J)\in\mathbb{R}^+\quad\mu(E)=\rho\mu_1(E)=\rho\lambda(E)\ \forall E\in\mathcal{A}$

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0) = 0$, entonces T es lineal

$\|\cdot\|$ norma euclídea, d distancia euclídea en $\mathbb{R}^N$

Idea clave: $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ $\quad z = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \|z-x\| = \|z-y\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$

$$\Leftrightarrow d(z,x) = d(z,y) = \frac{1}{2} d(x,y)$$

T isometría: $\quad z = \frac{x+y}{2} \Rightarrow d(z,x) = d(z,y) = \frac{1}{2} d(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(T(z),T(x)) = d(T(z),T(y)) = \frac{1}{2} d(T(x),T(y))$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{T(x)+T(y)}{2}$$

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x)+T(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$y = 0$, $T(0) = 0$, $\quad T\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{T(x)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{T(x+y)}{2} = T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x)+T(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

A partir de aquí no es difícil probar que

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

luego T es lineal

Invariancia por isometrías

La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea, es decir:

Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una tal isometría, entonces:

$$E \in \mathcal{M} \implies T(E) \in \mathcal{M}, \ \lambda\big(T(E)\big) = \lambda(E)$$

<u>Sólo una idea</u>

$S(x) = T(x) - T(0) \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ S isometría $S(0) = 0$

$T(x) = S(x) + T(0) \ \forall x \in \mathbb{R}^N$

λ invariante por traslaciones $\therefore$ basta trabajar con S

es decir, podemos suponer que $T(0) = 0$

Entonces T lineal, luego es biyectiva, luego es un homeomorfismo

Para $B \in \mathcal{B}$, $T(B) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

$$\mu(B) = \lambda(T(B)) \ \forall B \in \mathcal{B}$$

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida (fácil de comprobar)

invariante por traslaciones:

$$B \in \mathcal{B}, \ x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mu(x+B) = \lambda\big(T(x+B)\big) = \lambda\big(T(x) + T(B)\big) =$$
$$= \lambda\big(T(B)\big) = \mu(B)$$

Se puede usar el segundo teorema de unicidad y se comprueba que de hecho $\mu = \lambda$ en $\mathcal{B}$:

$$\lambda\big(T(B)\big) = \lambda(B) \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Para $E \in \mathcal{M}$, se "aproxima" E por conjuntos de Borel

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿ Qué ocurre para $N = 1$?

$$H_0 = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^N : x(n) = 0\}$$

$$J_n = [-n, n]^{N-1} \times \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$H_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad , \quad \lambda(J_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda(H_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) = 0$$

H hiperplano afín arbitrario

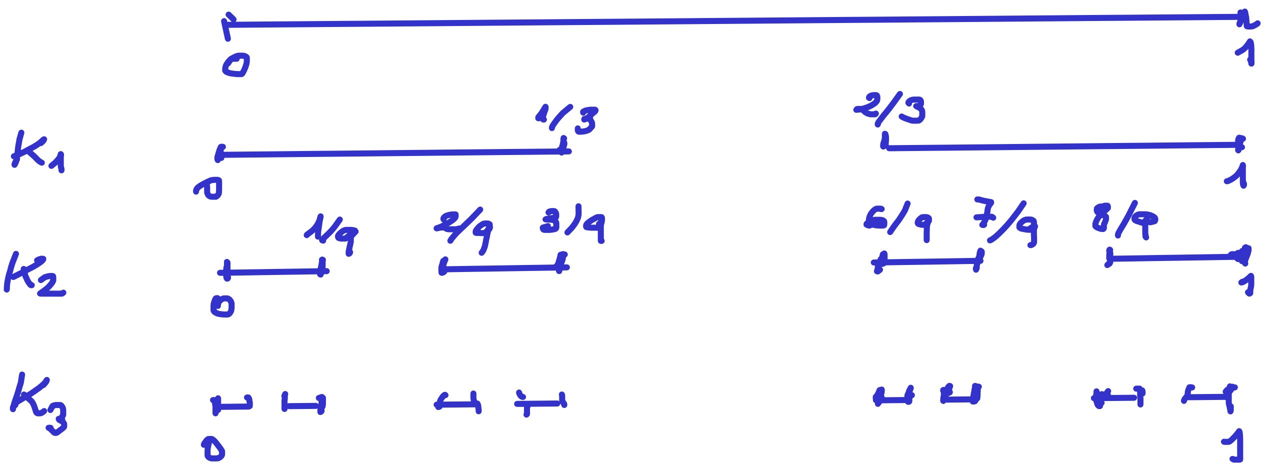
$\exists \; S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ isometría

(traslación y cambio de base ortonormal)

tal que $S(H) = H_0$

$$\lambda(H) = \lambda(S(H)) = \lambda(H_0) = 0$$

El conjunto ternario de Cantor



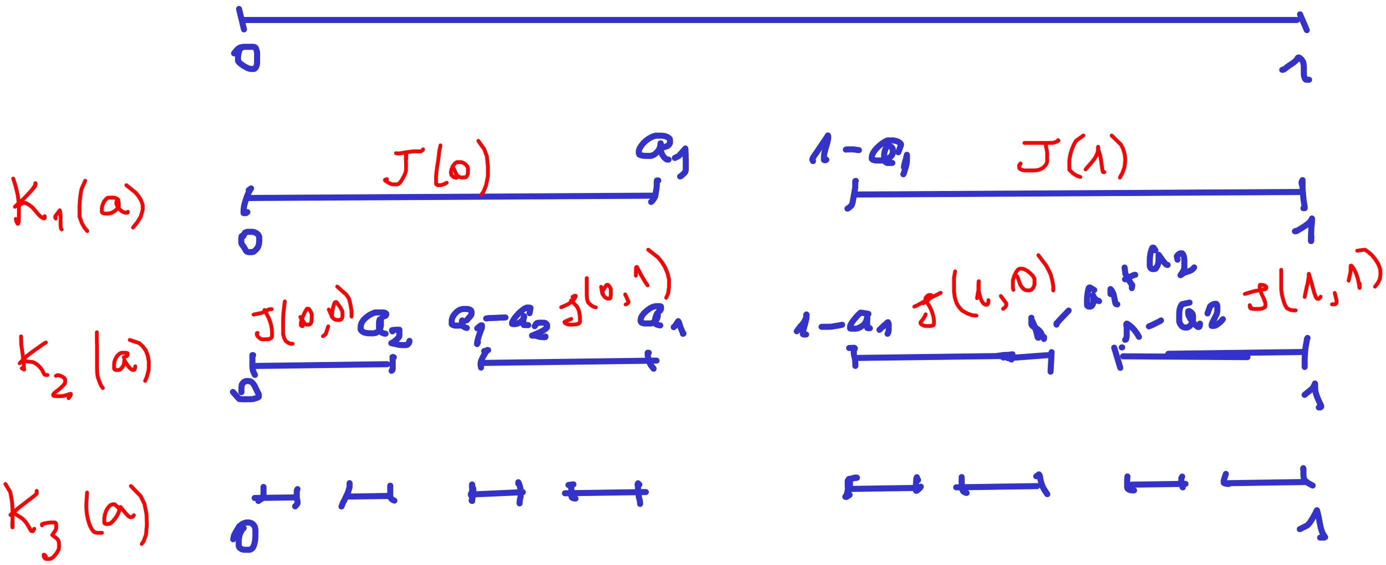
y así sucesivamente

"lo que queda al final del proceso" es el conjunto ternario de Cantor:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{o bien} \quad \{K_n\} \searrow C$$

Conjuntos de Cantor más generales

$a = \{a_n\}$



$$C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$$

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$ es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$, existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

$K_n(a)$ compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $C(a)$ compacto.

I intervalo abierto, $I \subset C(a)$

$n \in \mathbb{N}$, $I \subset K_n(a) = \biguplus_{u \in \mathcal{U}_n} J(u)$

$\{J(u) : u \in \mathcal{U}_n\}$ componentes conexas de $K_n(a)$

$\exists\, u \in \mathcal{U}_n : I \subset J(u)$, $\lambda(I) \le \lambda(J(u)) = a_n$

$\lambda(I) \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\} \to 0$, $\lambda(I) = 0$

luego $I = \emptyset$. $C(a)$ tiene interior vacío

$K_n(a) = \biguplus_{u \in \mathcal{U}_n} J(u)$, $\lambda(J(u)) = a_n \ \forall u \in \mathcal{U}_n$

$\lambda(K_n(a)) = \sum_{u \in \mathcal{U}_n} \lambda(J(u)) = 2^n a_n$

$\{K_n(a)\} \searrow C(a)$, $\lambda(K_1(a)) = 2a_1 < \infty$

Continuidad decreciente de λ : $\lambda(C(a)) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$

$0 \leq \rho < 1$, $a_n = \frac{\rho}{2^n} + \frac{1-\rho}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$a_0 = 1$, $a_n = \frac{\rho}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1-\rho}{3 \cdot 3^{n-1}} < \frac{\rho}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1-\rho}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{1}{2} a_{n-1}$

$a = \{a_n\}$ admissible , $C_\rho = C(a)$

$$\lambda(C_\rho) = \lim_{n \to \infty} \left(\rho + \frac{2^n (1-\rho)}{3^n} \right) = \rho .$$

$\rho = 0 \qquad a_n = \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Algunas consecuencias

1) • $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
2) • Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
3) • Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes
4) • El conjunto $\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

1) a sucesión admisible

$T_a : \mathbb{U} \to C(a)$ biyectiva

$T_a : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ inyectiva.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f : \mathbb{R} \to]0,1[$ biyectiva

$$x \in]0,1[\Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(x)}{2^n}$$

con $c_n(x) \in \{0,1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} : c_n(x) = 0\}$ infinito

$g(x) = \{c_n(x)\}$ $\forall x \in]0,1[$ $\quad g :]0,1[\to \mathbb{U}$ inyectiva

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ inyectiva

---

2) Evidente $C(a) \sim \mathbb{U} \sim \mathbb{R}$ ($\sim$ equipotente)

---

3) $\phi : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ $\qquad u, v \in \mathbb{U}$, $n \in \mathbb{N}$

$\phi(u,v)(2n-1) = u(n)$, $\phi(u,v)(2n) = v(n)$

ϕ biyectiva. $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \sim \mathbb{U}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{U} \times \mathbb{U} \sim \mathbb{U} \sim \mathbb{R}$

Inducción: $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

luego $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}^p \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^q$

---

4) $E \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda(E) = 0$, $E \sim \mathbb{R}^N$

$A \subset E \Rightarrow \lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M}_b$

$\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{M}_b$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \sim \mathcal{P}(E)$ luego

existe $g: \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{M}_b$ inyectiva

$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ $\exists\, h: \mathcal{M}_b \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ inyectiva

Cantor Bernstein : $\mathcal{M}_b \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva contiene un conjunto no medible

Como consecuencia, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\setminus\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

$A \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda^*(A) > 0$, $A_n = [-n,n]^N \cap A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$, $\exists\, m \in \mathbb{N} : \lambda^*(A_m) > 0$

$B = A_m$, $B \subset A$, $\lambda^*(B) > 0$, $B \subset A$, B acotado

Basta encontrar $W \subset B$ con $W \notin \mathcal{M}$

$\mathbb{Q}^N$ subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$

$\mathcal{H} = \mathbb{R}^N / \mathbb{Q}^N$ grupo cociente, $q : \mathbb{R}^N \to \mathcal{H}$ aplicación cociente

La clase de equivalencia de cada $x \in \mathbb{R}^N$ es $q(x) = x + \mathbb{Q}^N$

$q(B) \subset \mathcal{H}$ Axioma de elección:

en cada clase de equivalencia $h \in q(B)$ elegimos $\phi(h) \in h \cap B$

$\phi : q(B) \to B$, $\quad q(\phi(h)) = h \quad \forall h \in q(B)$

$$W = \phi(q(B))$$

1) $x \in B \Rightarrow x - \phi(q(x)) = r \in \mathbb{Q}^N \Rightarrow x = r + \phi(q(x)) \in r + W$

$$B \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^N} (r + W)$$

2) $r, s \in \mathbb{Q}^N$, $(r+W) \cap (s+W) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in W : r + w_1 = s + w_2$

$w_1 - w_2 = s - r \in \mathbb{Q}^N \Rightarrow w_1 = w_2 \Rightarrow r = s$

$r, s \in \mathbb{Q}^N$, $r \neq s \Rightarrow (r+W) \cap (s+W) = \emptyset$

$\{r_n\}$ sucesión acotada, $r_n \in \mathbb{Q}^N \ \forall n \in \mathbb{N}$

$r_n \neq r_m \ (n \neq m)$. Ejemplo: $r_n = (1/n, 0, \dots, 0) \ \forall n \in \mathbb{N}$

Suponiendo $W \in \mathcal{M}_0$ llegaremos a una contradicción

$W \in \mathcal{M}_0 \Rightarrow r + W \in \mathcal{M}_0, \ \lambda(r+W) = \lambda(W) \ \forall r \in \mathbb{Q}^N$

$$C = \biguplus_{n=1}^{\infty} (r_n + W)$$

$$C \in \mathcal{M} \qquad \lambda(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(r_n + W) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(W) = \infty \cdot \lambda(W)$$

$\{r_n\}$ acotada, $W \subset B$ acotado $\Rightarrow C$ acotado

$$\lambda(C) < \infty \quad \text{luego} \quad \lambda(W) = 0$$

$$B \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^N} (r + W) \qquad \lambda(r+W) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}^N$$

$\mathbb{Q}^N$ numerable

$\Rightarrow \lambda^*(B) = 0$ contradicción.

Conjuntos medibles que no son de Borel

Se verifica que $\mathcal{M} \neq \mathcal{B}$, es decir,

existen subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ que no son conjuntos de Borel

C conjunto de Cantor con $\lambda(C) > 0$

C_0 conjunto ternario de Cantor, $\lambda(C_0) = 0$

$\tilde{C} = C \times [0,1]^{N-1} \subset \mathbb{R}^N \qquad \lambda(\tilde{C}) = \lambda(C) > 0$

$\tilde{C}_0 = C_0 \times [0,1]^{N-1} \subset \mathbb{R}^N \qquad \lambda(\tilde{C}_0) = \lambda(C_0) = 0$

C homeomorfo a $C_0 \Rightarrow \tilde{C}$ homeomorfo a $\tilde{C}_0$

$\Phi : \tilde{C} \to \tilde{C}_0$ homeomorfismo

$\lambda(\tilde{C}) > 0 \quad \exists\, W \subset \tilde{C} : W \notin \mathcal{M}$

$E = \Phi(W) \subset \tilde{C}_0$, $\lambda^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

Si $E \in \mathcal{B}$ usaríamos la estabilidad de los conjuntos de Borel:

$E \in \mathcal{B} \Rightarrow W = \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ imposible

luego $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$.