

Análisis Matemático II

Tema 5: Funciones medibles

26 y 27 de abril

1 Propiedades

2 Aproximación

Noción general de función medible

Funciones medibles

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Si Y es un espacio topológico,

$f : \Omega \rightarrow Y$ es una **función medible** cuando:

$$G = G^\circ \subset Y \quad \implies \quad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Ejemplo: toda función continua de Ω en Y es medible

Composición de funciones

Y, Z espacios topológicos, $f : \Omega \rightarrow Y$ medible, $g : Y \rightarrow Z$ continua.

Entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow Z$ es medible

Funciones medibles con valores en \mathbb{R}^2

Dadas dos funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sea $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Phi(x) = (f(x), g(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

Entonces Φ es medible si, y sólo si, lo son f y g .

Funciones reales medibles: operaciones algebraicas

Operaciones algebraicas con funciones

El conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en \mathbb{R} es un anillo conmutativo y un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con las operaciones definidas, para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como sigue.

$$\text{Suma: } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\text{Producto: } (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\text{Producto por escalares: } (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Funciones reales medibles

$\mathcal{L}(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en \mathbb{R} a las que llamamos **funciones reales medibles**

Estabilidad por operaciones algebraicas

La suma y el producto de funciones reales medibles son medibles

Funciones reales medibles: cuestiones relacionadas con el orden

Orden, valor absoluto, parte positiva y parte negativa

Relación de orden entre funciones: para $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

A cada $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ se asocian tres funciones:

- **Valor absoluto** de f : $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \Omega$
- **Parte positiva** de f : $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$
- **Parte negativa** de f : $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in \Omega$

$$\text{Es claro que:} \quad f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Estabilidad de las funciones medibles

El valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa,
de una función real medible, son medibles

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$\mathcal{L}^+(\Omega)$ será el conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $[0, \infty]$ a las que llamaremos **funciones medibles positivas**

Caracterización de las funciones medibles positivas

Para una función $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) f es medible
- (2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}$ es medible
- (3) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}$ es medible
- (4) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}$ es medible
- (5) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \leq \alpha\}$ es medible

Estabilidad de las funciones medibles por operaciones “analíticas”

Supremo, ínfimo, límites superior e inferior y límite puntual

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,
también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:

- $g = \sup \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad g(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in \Omega$
- $h = \inf \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad h(x) = \inf \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in \Omega$
- $\varphi = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \varphi(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\psi = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \psi(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$

En particular, si $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x) \in [0, \infty]$ para todo $x \in \Omega$
entonces $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es una función medible positiva

Consecuencia importante para funciones reales medibles

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles,
que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
entonces f es medible

Funciones características

Función característica de un conjunto

La **función característica** de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ viene dada por:

$$\chi_B : \mathbb{R}^N \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_B(x) = 1 \quad \forall x \in B, \quad \chi_B(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Medibilidad

Para $B \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_B es medible
si, y sólo si, B es un conjunto medible

Ejemplos

- Si $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ y $f(x) = 2\chi_W(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$, entonces $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ no es medible pero $|f|$ sí lo es
- Tomando $B = \mathbb{Q}^N$, la función χ_B es medible,
pero no es continua en ningún punto de \mathbb{R}^N

Funciones simples positivas

Funciones simples positivas

Llamaremos **función simple positiva** a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^m \rho_i \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{y} \quad C_1, \dots, C_m \in \mathcal{M}$$

Entonces s es una función medible positiva, con imagen finita $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$

Descomposición canónica

Si $s : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ es una función medible positiva con imagen finita, escribimos

$$s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$$

y definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ para todo $k \in \Delta_p$.

Entonces $A_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_p$ y se tiene:

$$s = \sum_{k=1}^p \alpha_k \chi_{A_k} \quad (*)$$

Por tanto s es una función simple positiva

y diremos que $(*)$ es la **descomposición canónica** de s

Aproximación por funciones simples

Sucesiones monótonas funciones

Si $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_n\}$ es:

- **creciente** cuando $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$
- **decreciente** cuando $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$
- **monótona** cuando es creciente o decreciente

Si $\{f_n\}$ es monótona, tiene un límite puntual: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$

Escribimos $\{f_n\} \nearrow f$ si $\{f_n\}$ es creciente, y $\{f_n\} \searrow f$ si es decreciente

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual
de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Aproximación uniforme y consecuencias

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$, entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω .

Visión constructiva de las funciones medibles positivas

Una función de Ω en $[0, \infty]$ es medible si, y sólo si, es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Operaciones algebraicas con funciones medibles positivas

Si f y g son funciones medibles positivas, entonces $f+g$ y fg también lo son