Ergodicidad en modelos de estados 1.

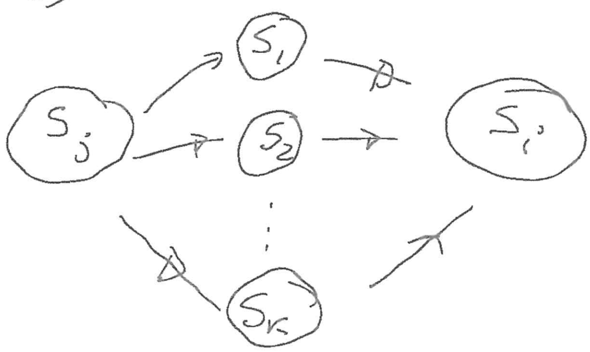
La matriz iterada.

Sea A matriz de estados

$$A = (a_{ij})$$

donde $a_{ij} = P\{j \to i\}$.

Si pensamos ir de de j a i en dos pasos



$$a_{j1}\, a_{1i} + a_{j2}\, a_{2i} + \cdots$$

$$\left(a_{1i}\ \ a_{2i}\ \cdots\right) \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

luego

$$P\left\{ j \xrightarrow[2\text{ pasos}]{} i \right\} = \left[A^2\right]_{ij}$$

En general

$$P\left\{ j \xrightarrow[h \text{ pasos}]{} i \right\} = \left[A^h \right]_{ij}$$

Lema 9 Si A es una matriz de estados $\forall h \in \mathbb{N}$ A^h es una matriz de estados.

Dem Si $z \in \Delta$ $Az \in \Delta \cdots A^h z \in \Delta$

Luego si e_i es un elemento de la base canónica

$$A^h e_i \in \Delta$$

y A^h es de estados.

Sea una matriz A de entradas positivas es decir

$$[A]_{ij} \geq 0 \quad i,j$$

se dice ergódica si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $[A^p]_{ij} > 0$.

El índice p tiene que ser fijo independiente de i,j.

Si una matriz es de estados y ergódica entonces la iterada: A^p es de estados completamente conectados.

Teorema 10

Sea A matriz de estados ergódica entonces $\lambda = 1$ es un valor propio dominante y el correspondiente vector propio puede tomarse en $u_* \in \mathring{\Delta}$

Dem

$$A^h \to \lambda = 1$$
$$A^h \to u_* \text{ vector de } A^h$$

$$A^h(Au_*) = A(A^h u_*) = Au_*$$

Luego $Au_* = u_*$ y es geométricamente simple.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^k$ y $x_n = A^n x_0$

$$A^{nh} x_0 \to c\,u^*$$
$$A^{nh+1} x_0 \to c\,u^*$$
$$\vdots$$
$$A^{nh+h-1} \to c\,u^*$$

<u>Ejercicio</u> Sea $h \in \mathbb{N}$ y x_n una sucesión tal que $\forall i \in 0, 1, \dots, h-1$

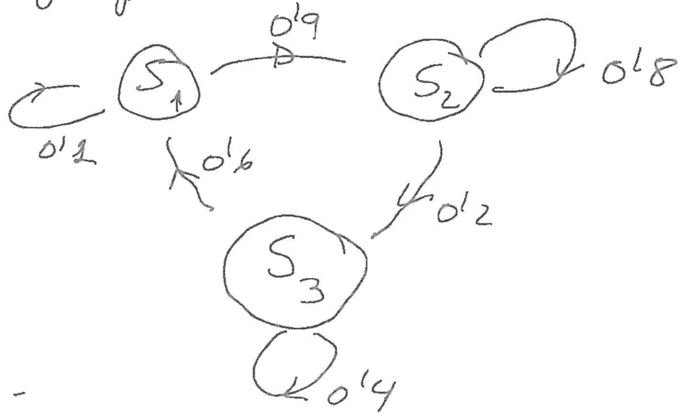
las parciales x_{nh+i} son convergentes

y tienen el mismo límite, entonces

x_n es convergente.

Nota: Al valor u_∞ se llama también distribución estable.

Ejemplo



¿Es el valor propio $\lambda = 1$ dominante?

Si partimos de 70 individuos en S_1, 42 en S_2 y 56 en S_3, ¿cómo será la distribución límite.

Ejemplo

100 dispositivos son puestos en un circuito circular para transmitir un pulso eléctrico. Cada ciclo de un reloj el sistema da la orden de transmitir el pulso de un dispositivo al dispositivo siguiente y este lo hará con probabilidad 1/3. Es de notar que si el pulso está en el dispositivo 100, este pulso pasara al dispositivo 1 con igual probabilidad. Si el dispositivo no genera pulso el sistema volverá a transmitir la señal al mismo pulso y por supuesto este transmitirá la señal con probabilidad 1/3, y así sucesivamente.

Si activamos la señal del dispositivo 1 en el 1er ciclo de reloj.

Calcula la probabilidad de que el pulso esté en cada uno de los dispositivos en los primeros pulsos de reloj.

¿Cuál es la probabilidad de que el pulso este en el dispositivo 100 tras muchos ciclos de reloj?