Tema 2

Álgebras de Boole.

2.1 Algebras de Boole.

Definición 2.1 (álgebra de Boole) *Un álgebra de Boole es una seis-upla* $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *donde* A *es un conjunto no vacío,* $\vee$ *y* $\wedge$ *son operaciones binarias,* * *es una operación monaria y* $\mathbf{0}$ *y* $\mathbf{1}$ *son elementos de* A*. Además* $\forall a, b, c \in A$ *se cumple:*

A0) Asociatividad	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
A1) Conmutatividad	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge c$
A2) Distributividad	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
A3) Complementación	$a \vee a^* = \mathbf{1}$	$a \wedge a^* = \mathbf{0}$
A4) Identidad	$a \vee \mathbf{0} = a$	$a \wedge \mathbf{1} = a$

La definición más elegante y económica es la siguiente:

Definición 2.2 (Huntington) *Un álgebra de Boole es una seis-upla* $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *donde* A *es un conjunto no vacío,* $\wedge$ *y* $\vee$ *son operaciones binarias,* * *es una operación monaria y* 0 *y* 1 *son elementos de* A*. Además* $\forall a, b, c \in A$ *se cumple:*

A1) Conmutatividad	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge c$
A2) Distributividad	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
A3) Complementación	$a \vee a^* = \mathbf{1}$	$a \wedge a^* = \mathbf{0}$
A4) Identidad	$a \vee \mathbf{0} = a$	$a \wedge \mathbf{1} = a$

Obsérvese que en las álgebras de Boole si elegimos un axioma y cambiamos la $\vee$ por $\wedge$, la $\wedge$ por $\vee$, el $\mathbf{0}$ por el $\mathbf{1}$ y el $\mathbf{1}$ por el $\mathbf{0}$, se obtiene otro axioma. Esta es la base del **principio de dualidad**. Veamos algunos ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplos 2.1

1. *Si en el conjunto* $B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *definimos*

	*
0	**1**
1	**0**

$\vee$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

$\wedge$	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

   Entonces $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$*, con estas operaciones es un álgebra de Boole con dos elementos llamada* ***álgebra de Boole de los valores de verdad****. En este caso se interpreta* ž0 *como falso y* $\mathbf{1}$ *como verdadero. De hecho, es el álgebra de Boole más simple (a excepción del álgebra de Boole con un elemento). Representaremos a este álgebra de Boole como* $\mathbb{B}$*.*

2. *Puesto que el producto cartesiano de álgebras de Boole es fácil ver que es un un álgebra de Boole, siempre que las operaciones se definan componente a componente, tenemos, para cada número natural* n *el álgebra de Boole*

$$\mathbb{B}^n = (\{0,1\}^n, \vee, \wedge, \square^*, (1, 1, \cdots, 1), (0, 0, \cdots, 0))$$

que tiene 2^n elementos. En este caso, las operaciones del álgebra de Boole vienen dadas por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots x_n)^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

A esta álgebra de Boole se la conoce con el nombre de ***n-cubo*** *o* ***hipercubo*** *de dimensión n. En el caso particular de $n = 4$ se llama* ***teseracto****.*

3. *Dado un conjunto X, la 6-upla $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \square^c, \emptyset, X)$ es el álgebra de Boole de las partes de un conjunto X.*

4. *Dado un número natural n, $(\mathsf{D}(n), mcm, mcd, \frac{n}{\square}, 1, n)$ es un álgebra de Boole siempre que n sea producto de primos distintos. Por ejemplo, $\mathsf{D}(6)$ o $\mathsf{D}(30)$ son álgebras de Boole, $\mathsf{D}(4)$ y $\mathsf{D}(12)$ no lo son.*

5. *(Funciones booleanas) Consideremos las aplicaciones de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}^m$, que representaremos por*

$$\mathcal{F}_{n,m} = Ap(\{0,1\}^n, \{0,1\}^m)$$

gráficamente, significa que los vértices del n-cubo se aplican en los vértices del m-cubo. Al conjunto de estas funciones (llamadas funciones booleanas), podemos dotarla de estructura de álgebra de Boole, de la siguiente manera.

$$f, g : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^m$$

$$\begin{gathered}(f \vee g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ (f \wedge g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^*\\ \mathbf{0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)\\ \mathbf{1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1)\end{gathered}$$

6. *(Funciones booleanas elementales) Como caso particular del anterior cuando $m = 1$ consideremos las aplicaciones de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, que representaremos por*

$$\mathcal{F}_n = Ap(\{0,1\}^n, \{0,1\})$$

gráficamente, significa que los vértices del n-cubo se aplican en $\{0,1\}$ que podemos interpretar gráficamente como elegir unos cuantos vértices del n-cubo (los que se aplican en el 1). Estas funciones se conocen como puertas lógicas con n entradas y juegan un papel capital en el estudio de las aplicaciones de las álgebras de Boole.

Lema 2.1 (dominación) *Si A es un álgebra de Boole,*

$$a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad y \quad a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

para todo $a \in A$.

Demostración:

$$a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1} \wedge (a \vee \mathbf{1}) = (a \vee a^*) \wedge (a \vee \mathbf{1}) = a \vee (a^* \wedge \mathbf{1}) = a \vee a^* = \mathbf{1}$$

en este caso se dice que el **1** domina o absorbe. Aplicando la dualidad puede demostrarse el segundo resultado. □

Lema 2.2 (absorción) *Si A es un álgebra de Boole,*

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad y \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

para todo $a, b \in A$.

Demostración:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee \mathbf{0}) \wedge (a \vee b) = a \vee (\mathbf{0} \wedge b) = a \vee \mathbf{0} = a$$

□

Lema 2.3 (idempotencia) *Si A es un álgebra de Boole,*

$$a \wedge a = a \quad y \quad a \vee a = a$$

para todo $a \in A$.

Demostración:

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee \mathbf{0}) = a$$

por dualidad, se cumplirá

$$a \vee a = a$$

$\square$

Lema 2.4 (asociatividad) *Si A es un álgebra de Boole,*

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad y \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

para todo $a, b, c \in A$.

Teorema 2.5 (ley cancelativa)
Sea $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ es un álgebra de Boole, y sean $a, b, c \in A$. Si $a \vee c = b \vee c$ y $a \wedge c = b \wedge c$, entonces $a = b$.

Demostración:
$a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$ $\square$

Propiedades 2.6 *Si $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ es un álgebra de Boole. Para todo $a, b, c \in A$ se cumple:*

1. *Las propiedades de complemento las verifica un único elemento. Es decir, el complemento es único.*
2. $0^* = 1$ *y* $1^* = 0$
3. $(a^*)^* = a$
4. *Si $a^* = b^*$ entonces $a = b$*
5. *Leyes de De Morgan.* $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \quad ; \quad (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

Lema 2.7 *Sea $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un álgebra de Boole, entonces $\forall a, b \in A$ las condiciones:*

1. $a \vee b = b$.
2. $a \wedge b = a$.
3. $a^* \vee b = \mathbf{1}$.
4. $a \wedge b^* = \mathbf{0}$.

son equivalentes.

Demostración:
$1 \Rightarrow 2)$ $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$
$2 \Rightarrow 3)$ $a^* \vee b = (a \wedge b)^* \vee b = (a^* \vee b^*) \vee b = a^* \vee (b^* \vee b) = a^* \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$
$3 \Rightarrow 4)$ $a \wedge b^* = (a^* \vee b)^* = \mathbf{1}^* = \mathbf{0}$
$4 \Rightarrow 1)$ $a \vee b = (a \vee b) \wedge \mathbf{1} = (a \vee b) \wedge (b^* \vee b) = (a \wedge b^*) \vee b = \mathbf{0} \vee b = b$

$\square$

Definición 2.3 (orden) *Sea $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un álgebra de Boole. En A definimos la relación R*

$$aRb \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} a \vee b = b$$

Teorema 2.8 *Sea $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un álgebra de Boole, entonces R es una relación de orden tal que*

$$a \vee b = \sup_R \{a, b\} \ y \ a \wedge b = \inf_R \{a, b\}.$$

Demostración:

1. Veamos en primer lugar que (A, R) es un conjunto ordenado. Para esto, comprobemos que la relación R es reflexiva, antisimétrica y transitiva en A.

   Reflexiva. Puesto que $\vee$ es idempotente $a \vee a = a$ se tiene que aRa para cualquier $a \in A$.

   Antisimétrica. Supongamos que aRb y bRa. Esto implica que $a \vee b = b$ y que $b \vee a = a$. Puesto que $\vee$ es conmutativa deducimos que $a = b$.

   Transitiva. Supongamos ahora que aRb y que bRc, es decir, $a \vee b = b$ y $b \vee c = c$. Entonces:

   $$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$$

   luego aRc.

   Desde ahora en adelante la relación R la notaremos $\leq$.

2. Comprobemos ahora que dados $a, b \in A$ se verifica que $\sup_{\leq}\{a, b\} = a \vee b$.

   Puesto que $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ se tiene que $a \leq a \vee b$. De la misma forma se comprueba que $b \leq a \vee b$.

   Si $a \leq u$ y $b \leq u$ (es decir, $a \vee u = u$ y $b \vee u = u$).

   Entonces:

   $$(a \vee b) \vee u = a \vee (b \vee u) = a \vee u = u$$

   de donde se deduce que $a \vee b \leq u$.

3. Por último, veamos que $\inf_{\leq}\{a, b\} = a \wedge b$.

   $(a \wedge b) \vee a = a$ luego $a \wedge b \leq a$.

   De la misma forma se comprueba que $a \wedge b \leq b$.

   Si $u \leq a$ y $u \leq b$ (es decir, $u \vee a = a$ y $u \vee b = b$) se tiene que:

   $$u \vee (a \wedge b) = (u \vee a) \wedge (u \vee b) = a \wedge b$$

   luego $u \leq a \wedge b$.

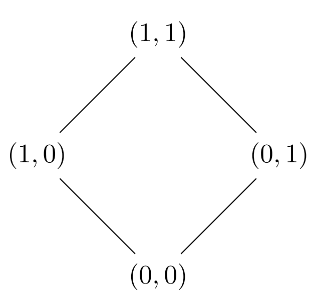
$\square$

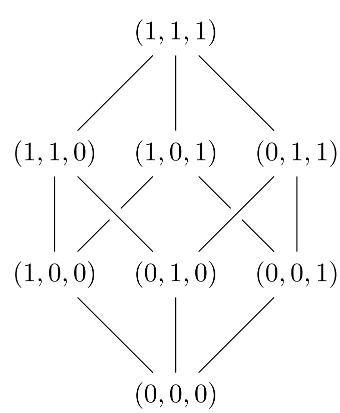
Ejemplos 2.2

1. *$B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ es un álgebra de Boole y su orden es $\mathbf{0} \leq \mathbf{1}$.*

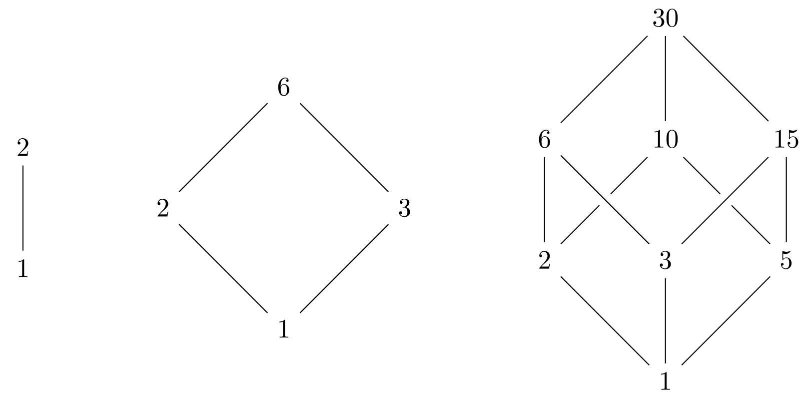
2. *Dado un conjunto A, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene como orden la inclusión de conjuntos.*

3. *Los diagramas de Hasse de $\mathbb{B}^2$ y $\mathbb{B}^3$.*





4. *El orden de las álgebras de Boole* $\mathsf{D}(n)$ *es la divisibilidad por tanto los diagramas de Hasse de* $\mathsf{D}(2)$, $\mathsf{D}(6)$ *y* $\mathsf{D}(30)$ *serían:*



Propiedades 2.9 *Si* $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *es un álgebra de Boole. Para todo* $a, b, c \in A$ *se cumple:*

1. $\mathbf{0} \leq a \leq \mathbf{1}$.
2. *Isotonía. Si* $a \leq b$, *entonces* $a \vee c \leq b \vee c$ *y* $a \wedge c \leq b \wedge c$
3. $a \leq b \Leftrightarrow b^* \leq a^* \Leftrightarrow a \wedge b^* = 0$
4. $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

2.2 Átomos de un álgebra

Dada un álgebra de Boole A, notaremos por $A^+ = A - \{0\}$

Definición 2.4 (átomo) *Un elemento positivo* $a \in A^+$ *es un átomo de un álgebra de Boole, si es minimal dentro de los positivos, esto es*

$$\forall x \in A^+ (x \leq a \Rightarrow x = a)$$

Notaremos $At(A)$ al conjunto de los átomos del álgebra de Boole A. Hay álgebras de Boole que no tienen átomos pero todos los ejemplos con los que nos vamos a encontrar son álgebras de Boole que si tienen átomos y además para cada elemento no nulo hay al menos un átomo por debajo del elemento. Un átomo de una subálgebra puede no ser átomo del álgebra, pero un átomo de un álgebra será tambien átomo en cualquiera de sus subálgebras.

Análogamente definimos los coátomos como los elementos maximales de $A - \{\mathbf{1}\}$. Es fácil ver que los coátomos son los complementos de los átomos.

Ejemplos 2.3

1. *Si* X *es un conjunto, los átomos del álgebra de Boole* $\mathcal{P}(X)$ *son los subconjuntos unitarios.*
2. *Los átomos del álgebra de Boole* $\mathbb{B}^n$ *son aquellos que tienen todas las coordenadas nulas salvo una.*
3. *En el álgebra de Boole* $D(30)$ *los átomos son los divisores primos de* 30, *es decir,* $\{2, 3, 5\}$.
4. *En el álgebra de dos elementos* $\{0, 1\}$ *el átomo será el* $\{1\}$
5. *Dada el álgebra de Boole* $\mathbb{B}^3$ *el conjunto* $A = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,0,0)\}$ *es una subálgebra de Boole con átomos* $At(A) = \{(1,0,0), (0,1,1)\}$ *y sin embargo* $At(\mathbb{B}^3) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *por lo que* $(0,1,1)$ *es un átomo de* A *que no lo es de* $\mathbb{B}^3$

Definición 2.5 (álgebra de Boole atómica) *Un álgebra de Boole es atómica si para todo elemento positivo, existe un átomo menor o igual que él.*

Teorema 2.10 *Toda álgebra de Boole finita es atómica*

A continuación pasaremos a dar una caracterización de los átomos

Teorema 2.11 *En toda álgebra de Boole A son equivalentes:*

1. $a \in At(A)$
2. $\forall x \in A\ a \leq x$ *ó* $a \leq x^*$
3. $0 < a$ *y* $\forall x, y \in A\ (a \leq x \vee y \Leftrightarrow a \leq x$ *ó* $a \leq y)$

Teorema 2.12 *Sea A un álgebra de Boole finita y $x \in A$, entonces* $x = \bigvee\{a \in At(A) : a \leq x\}$

Teorema 2.13 *Sea A un álgebra de Boole finita y $x \in A$, entonces* $x = \bigwedge\{c \in coAt(A) : x \leq c\}$

Corolario 2.14 *Toda álgebra de Boole finita es isomorfa al álgebra de Boole de partes de sus átomos.*

$$A \cong \mathcal{P}(At(A))$$

Como consecuencia, las posibles álgebras de Boole que existan, sólo pueden tener como número de elementos

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Podríamos preguntarnos, cuántas álgebras de Boole con 2^n elementos existen. La respuesta la obtenemos en el siguiente teorema

Teorema 2.15 *Si dos álgebras de Boole finitas tienen el mismo número de elementos, entonces son isomorfas*

$$|A| = 2^n \ \Rightarrow A \cong \mathcal{P}(At(A)) \ \Rightarrow \ |At(A)| = n$$

de la misma manera

$$|B| = 2^n \ \Rightarrow B \cong \mathcal{P}(At(B)) \ \Rightarrow \ |At(B)| = n$$

como los conjunto $At(A)$ y $At(B)$ tienen el mismo número de elementos, entonces se puede establecer una biyección entre ellos

$$At(A) \cong At(B)$$

que se puede extender a las partes de estos conjuntos (que además es un morfismo, porque respeta la unión y la intersección)

$$\mathcal{P}(At(A)) \cong \mathcal{P}(At(B))$$

pero al ser la isomorfía transitiva, nos quedaría

$$A \cong B$$

2.3 Funciones booleanas (elementales).

Las puertas lógicas como hemos visto en los ejemplos son un caso particular de funciones booleanas.

Definición 2.6 (Puerta lógica) *Una puerta lógica con n entradas es una función booleana elemental de n variables, es decir, un elemento del álgebra de Boole $\mathcal{F}_n = Ap(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$.*

Podemos preguntarnos ¿cuántas puertas lógicas hay con n entradas?. El conjunto de puertas lógicas con n entradas es el conjunto de todas las aplicaciones posibles de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, es decir

$$\#Ap(\{0,1\}^n, \{0,1\}) = |Ap(\{0,1\}^n, \{0,1\})| = 2^{2^n}.$$

2.3.1 Funciones booleanas de una variable.

$$\{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$

tenemos cuatro aplicaciones

x	f_0^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Estas funciones tienen un nombre más propio que el genérico f_i^1

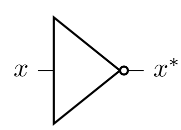
$f_0^1(x) = \mathbf{0}$ (función constante 0)

$f_1^1(x) = x$ (función identidad)

$f_2^1(x) = x^* = \mathbf{NOT}\ x$ (función complemento)

$f_3^1(x) = \mathbf{1}$ (función constante 1)

Desde un punto de vista electrónico sólo tiene interés f_2^1, que es la puerta **NOT** y se representa por



2.3.2 Funciones booleanas de dos variables.

Para $n = 2$ tenemos 16 aplicaciones

(x,y)	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
$(0,0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$(0,1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$(1,0)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$(1,1)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Las cuales reciben los siguientes nombres

$$f_0^2(x,y) = \mathbf{0} \text{ (función constante 0)}$$

$$f_1^2(x,y) = x \wedge y = x \textbf{ AND } y = xy$$

$$f_2^2(x,y) = xy^*$$

$$f_3^2(x,y) = \pi_1(x,y) = x$$

$$f_4^2(x,y) = x^*y$$

$$f_5^2(x,y) = \pi_2(x,y) = y$$

$$f_6^2(x,y) = x \oplus y = x \textbf{ XOR } y$$

$$f_7^2(x,y) = x \vee y = x + y = x \textbf{ OR } y$$

$$f_8^2(x,y) = x^*y^* = x \downarrow y = x \textbf{ NOR } y$$

$$f_9^2(x,y) = x \leftrightarrow y = x \textbf{ XNOR } y$$

$$f_{10}^2(x,y) = \pi_2^*(x,y) = y^*$$

$$f_{11}^2(x,y) = x \leftarrow y$$

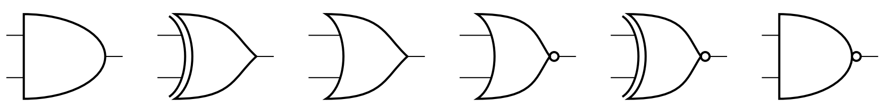
$$f_{12}^2(x,y) = \pi_1^*(x,y) = x^*$$

$$f_{13}^2(x,y) = x \rightarrow y = x^* + y$$

$$f_{14}^2(x,y) = x \uparrow y = x \textbf{ NAND } y$$

$$f_{15}^2(x,y) = \mathbf{1} \text{ (función constante 1)}$$

Por orden de aparición



2.4 Formas de dar una función.

2.4.1 Numerándola.

Podemos dar una función mencionando su número de variables y el número binario que forman sus imágenes leyéndolo de arriba hacia abajo. El número dado r debe cumplir:

$$0 \leq r < 2^{2^n}$$

Ejemplo 2.4 *La función* 116 *de tres variables. Como* $116 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2$ *se escribe como* 01110100 *en binario con* 8 *cifras sería la columna de las imágenes en la tabla.*

La función 13244 *de cuatro variables. Como* $13244 = 2^{13} + 2^{12} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$ *se escribe como* 0011001110111100 *en binario con* 16 *cifras sería la columna de las imágenes en la tabla.*

2.4.2 Tabla.

Las tablas de las funciones antes mencionadas serían:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	l	0	0
1	1	1	0

x	y	z	t	$g(x,y,z,t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

2.4.3 Mapas de Karnaugh.

Los mapas de Karnaugh son una disposición plana en forma de cuadrícula de la tabla de una función booleana que nos ayudará a obtener los implicantes primos y las formas no redundantes de la función. Veamos como ejemplo las funciones de tres y cuatro variables de los apartados anteriores.

z \ xy	00	01	11	10
0		1		
1	1	1		1

zt \ xy	00	01	11	10
00			1	1
01			1	
11	1	1		1
10	1	1		1

2.4.4 Expresiones booleanas.

En lo que sigue, vamos a cambiar la notación que hemos empleado para álgebras de Boole. En lugar de denotar a las operaciones booleanas como $\vee$ y $\wedge$, las denotaremos como $+$ y $\cdot$ (mantenemos la misma notación para el complementario). Hemos de tener cuidado en no confundirlas con las operaciones suma y producto en $\mathbb{Z}_2$. Para el producto no hay problema, pues el producto en el anillo $\mathbb{Z}_2$ coincide con el producto booleano en $\mathbb{B}$, pero para la suma ambas operaciones difieren. En $\mathbb{Z}_2$, el resultado de $1+1$ es 0, mientras que en el álgebra de Boole $\mathbb{B}$, tenemos que $1+1=1$. Por tanto, cuando estemos hablando de la operación $+$, debe quedar claro si nos referimos a la suma booleana o a la suma algebraica.

Para referirnos al producto booleano también emplearemos la yuxtaposición.

Definición 2.7 (expresión booleana, literal) *Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables. Se definen las expresiones booleanas sobre el conjunto X de forma recursiva como sigue:*

1. *Si $x \in X \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ entonces x es una expresión booleana.*

2. *Si e_1, e_2 son expresiones booleanas, entonces también lo son $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$ y e_1^*.*

A las expresiones booleanas que sean variables (elementos de X), o complementos de variables, las denominaremos literales.

Ejemplo 2.5
Si $X = \{x, y, z\}$ son expresiones booleanas x, $x+z$, $(x \cdot y^*)^*$, $\mathbf{1}$.
Son literales, x, z^*, z.

Supongamos que tenemos un conjunto X de n variables, es decir, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada elemento de S le vamos a asignar una función booleana elemental (un elemento de $\mathcal{F}_n$). Concretamente, al elemento x_i le asignamos la función $x_i : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ dada por $x_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i$. De esta forma, a cada expresión booleana sobre el conjunto S le podemos hacer corresponder una función $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Por ejemplo, si $S = \{x, y, z\}$ y consideramos la expresión booleana $x + y^*z$, le corresponde la función booleana

$$\begin{array}{ll} (0,0,0) \mapsto 0 + (1 \cdot 0) = 0, & (0,0,1) \mapsto 0 + (1 \cdot 1) = 1, \\ (0,1,0) \mapsto 0 + (0 \cdot 0) = 0, & (0,1,1) \mapsto 0 + (0 \cdot 1) = 0, \\ (1,0,0) \mapsto 1 + (1 \cdot 0) = 1, & (1,0,1) \mapsto 1 + (1 \cdot 1) = 1, \\ (1,1,0) \mapsto 1 + (0 \cdot 0) = 1, & (1,1,1) \mapsto 1 + (0 \cdot 1) = 1. \end{array}$$

Puesto que cada expresión booleana determina una función booleana, podremos referirnos a las funciones mencionando las expresiones que las representan. Así, la función que acabamos de ver podría definirse como $f(x, y, z) = x + y^*z$. Ahora, para calcular la imagen de un elemento de $\mathbb{B}^3$ basta sustituir en la expresión booleana x, y y z por los valores en los que queremos evaluar, y efectuar las operaciones en el álgebra de Boole $\mathbb{B}$. Por ejemplo

$$f(0,0,1) = 0 + 0^* \cdot 1 = 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1.$$

Definición 2.8 *Dos expresiones booleanas son equivalentes si las correspondientes funciones booleanas son iguales. Si e_1 e e_2 son expresiones booleanas equivalentes emplearemos el símbolo $e_1 = e_2$.*

Ejemplo 2.6 *Las expresiones booleanas x^*y^* y $(x+y)^*$ son equivalentes. También lo son las expresiones $x+y+x^*y^*$ y 1.*

A continuación vamos a dar una tabla de expresiones equivalentes.

Proposición 2.16 *Sean e_1, e_2 y e_3 tres expresiones booleanas en n variables. Entonces:*

1.	$e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$	$e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3) = (e_1 \cdot e_2) \cdot e_3$
2.	$e_1 + e_2 = e_2 + e_1$	$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$
3.	$e_1 + e_1 = e_1$	$e_1 \cdot e_1 = e_1$
4.	$e_1 \cdot (e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3$	$e_1 + (e_2 \cdot e_3) = (e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_3)$
5.	$(e_1 + e_2)^* = e_1^* \cdot e_2^*$	$(e_1 \cdot e_2)^* = e_1^* + e_2^*$
6.	$e_1 + e_1^* = \mathbf{1}$	$e_1 \cdot e_1^* = \mathbf{0}$
7.	$e_1 + \mathbf{1} = \mathbf{1}$	$e_1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
8.	$e_1 + \mathbf{0} = e_1$	$e_1 \cdot \mathbf{1} = e_1$
9.	$\mathbf{1}^* = \mathbf{0}$	$\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$

2.5 Conjunciones fundamentales

En este apartado vamos a estudiar unas funciones booleanas elementales especialmente sencillas que vienen dadas por expresiones booleanas que son infimo (producto, conjunción) de literales.

Dado un elemento de un álgebra de Boole $a \in A$ definimos las potencias de a como:

$$a^i = \begin{cases} a^*, & i = * \\ 1, & i = 0 \\ a, & i = 1 \end{cases}$$

Definición 2.9 (conjunción fundamental o monomio) *Una conjunción (fundamental) en n variables es una expresión booleana de la forma:*

$$\mu = x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{e_n} = x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{e_n}$$

donde $e_i \in \{0, 1, *\}$.

μ es una conjunción (monomio) fundamental con elementos de X. El número de conjunciones fundamentales en n variables distintas es obviamente 3^n.

Definición 2.10 (Mintérminos) *Una conjunción elemental (mintérmino) en n variables es una expresión booleana de la forma:*

$$m = x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{e_n} = x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{e_n}$$

donde $e_i \in \{1, *\}$.

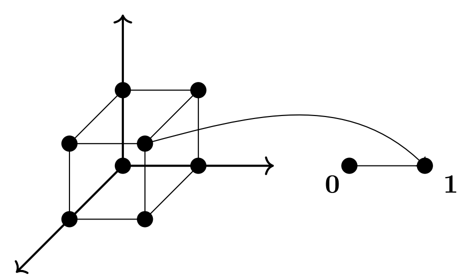
Ahora sólo podrá aparecer una variable x_i o su complemento x_i^*. El número de mintérminos en n variables es 2^n.

La importancia de las definiciones anteriores, se verá posteriormente cuando demostremos que los elementos del álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$ son las uniones (supremos, disyunciones) finitas de mintérminos o monomios elementales.

2.5.1 Interpretación geométrica de las funciones conjunción.

Consideremos las funciones conjunción de tres variables. Hay $3^3 = 27$ conjunciones.

3 *literales*	$x^*y^*z^*, x^*y^*z, x^*yz^*, x^*yz, xy^*z^*, xy^*z, xyz^*, xyz$
2 *literales*	$x^*y^*, x^*y, xy^*, xy, x^*z^*, x^*z, xz^*, xz, y^*z^*, y^*z, yz^*, yz$
1 *literal*	x^*, x, y^*, y, z^*, z
0 *literales*	$\mathbf{1}$



En general para funciones de n variables se cumple:

Si consideramos la función booleana definida por un mintérmino esta función aplica un vértice del n-cubo en el 1 y el resto en el 0.
En el caso de las conjunciones en que falta una variable aplican 2 vértices contiguos (**arista**) en el 1 y el resto en el 0,
si faltan 2 variables aplican 4 vértices contiguos (cara) en el 1,
...
si faltan r variables aplican 2^r vértices contiguos (hipercara de dimensión r) en el 1.

El número de conjunciones hipercaras de dimensión r es $\binom{n}{n-r}2^{n-r}$

Otro hecho relevante a tener en cuenta para conjunciones es que $\mu_1 < \mu_2$ si, y sólo si, μ_2 se obtiene a partir de μ_1 suprimiendo literales.

2.6 Mapas de Karnaugh de funciones conjunción.

Vamos a representar algunas conjunciones fundamentales en el caso de funciones de tres y cuatro variables.

Mapas de Karnaugh de funciones de tres variables.

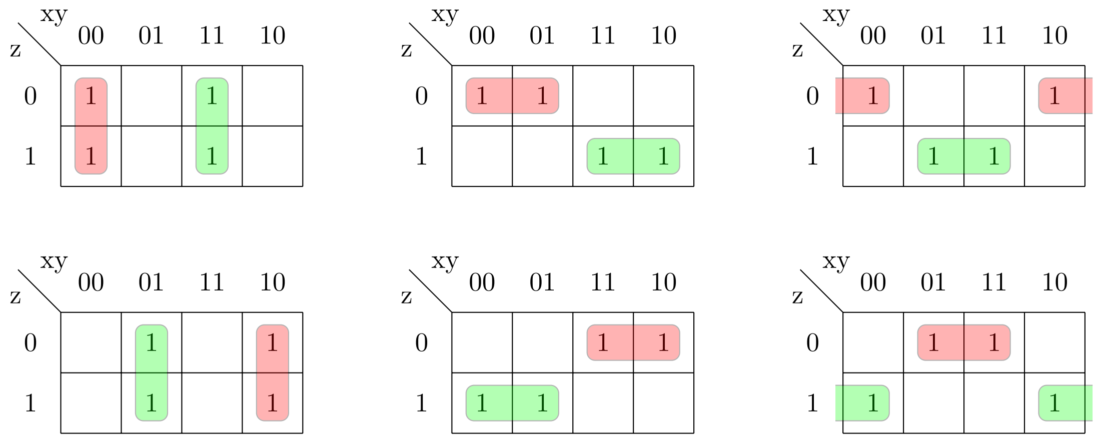
Representación de las conjunciones **cara** x, x^*, y, y^*, z, z^*

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

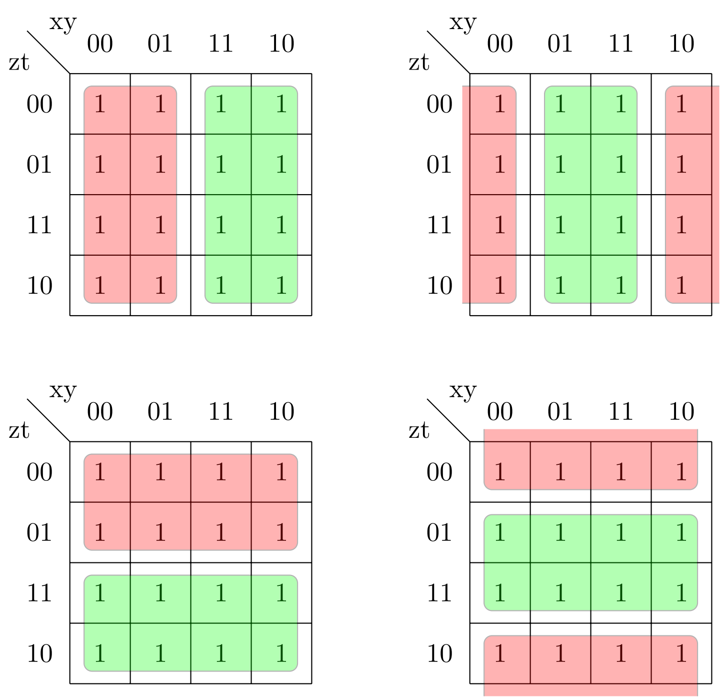
z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Representación de las conjunciones **arista** $xy, x^*y^*, xz, x^*z^*, yz, y^*z^*, x^*y, xy^*, x^*z, xz^*, y^*z, yz^*$.

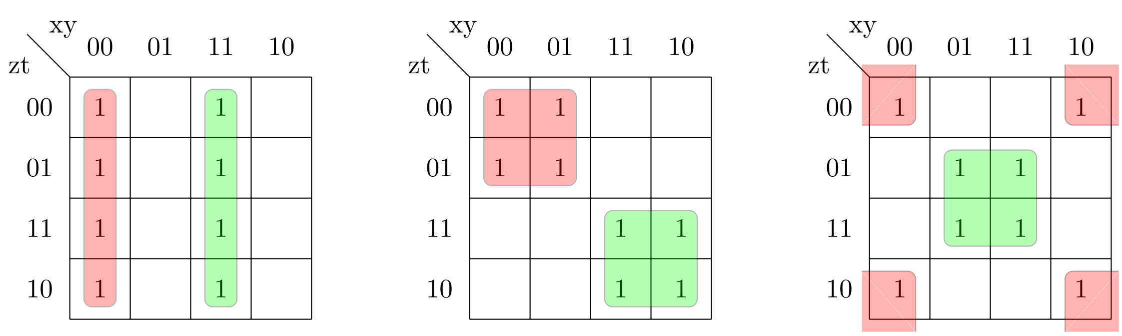


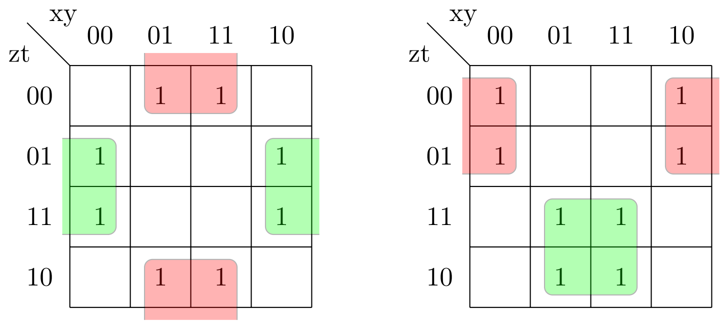
Mapas de Karnaugh de funciones de cuatro variables.

Representación de las conjunciones cubo $x, x^*, y, y^*, z, z^*, t, t^*$.

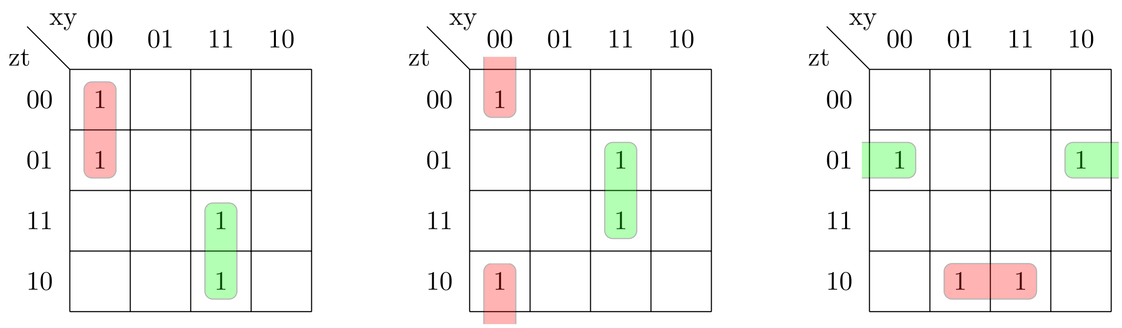


Representación de las conjunciones cara $xy, x^*y^*, xz, x^*z^*, yt, y^*t^*, y^*t, yt^*, yz, y^*z^*$.





Representación de las conjunciones arista $xyz, x^*y^*z^*, xzt, x^*z^*t^*, y^*z^*t, yzt^*$.



Representa las conjunciones que faltan.

2.7 Forma canónica disyuntiva.

Teorema 2.17 *Los mintérminos (conjunciones elementales) son los átomos del álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$.*

Teorema 2.18 (de la forma canónica disyuntiva) *Toda función booleana elemental se puede expresar de forma única como suma (disyunción, supremo) de mintérminos.*

Definición 2.11 (forma disyuntiva) *Una forma disyuntiva es una suma de conjunciones.*

Corolario 2.19 *Toda función booleana elemental se puede expresar como suma de conjunciones.*

Como consecuencia de lo señalado anteriormente anterior sabemos que toda expresión booleana en las variables da lugar a una función booleana elemental y recíprocamente. Como además sabemos que el números de funciones booleanas elementales es finito (2^{2^n}) y el de las expresiones booleanas es infinito deducimos que una función se puede dar mediante “muchas” (en realidad, infinitas) expresiones booleanas.

Si nos limitamos al caso de expresiones booleanas que sean suma de conjunciones (formas disyuntivas) que nos recuerdan a los polinomios del álgebra ordinaria, entonces resulta que el número de sumas de conjuciones es 2^{3^n} (omitimos las simplificaciones por absorción) que dividido por el de funciones elementales 2^{2^n} da un promedio de $2^{3^n-2^n}$ formas disyuntivas para una determinada función. De entre ellas hay una destacada que es la canónica. En el caso de 2 variables resultan en promedio $2^{3^2-2^2} = 32$ formas disyuntivas por cada una de las 16 funciones. Para 3 variables tendríamos $2^{2^3} = 2^8 = 256$ funciones y $2^{3^3} = 2^27$ expresiones disyuntivas por lo que en promedio cada función tendrá $2^{19} = 524288$ formas disyuntivas. Para cuatro variables vemos que el número de formas disyuntivas resulta $2^{65} = 36893488147419103232$ que no está nada mal.

Veamos un algoritmo para encontrar la forma canónica disyuntiva de una función booleana elemental.

Algoritmo de la forma canónica disyuntiva.

- Partimos de una expresión booleana de la función.

- Mediante las leyes de De Morgan y la ley de doble complemento interiorizamos el complemento (*) hasta que sólo afecte a las variables.
- Distribuimos el producto (ínfimo) sobre la suma (supremo) hasta que nos quede una suma de conjunciones fundamentales.
- (Optativo) Simplificamos las expresión por absorción de conjunciones fundamentales.
- Hacemos uso de la igualdad
$$\mu = \mu 1 = \mu(x + x^*) = \mu x + \mu x^*$$
para lograr que todas las variables aparezcan en todos los monomios de la expresión. Partiendo de la forma disyuntiva obtenida seleccionamos un monomio en que falte una variable y lo sustituimos por la suma de dos monomios donde ya faltará una variable menos.
- Cuando todos los monomios sean mintérminos eliminamos repeticiones por idempotencia y obtenemos la forma canónica disyuntiva.

Ejemplos 2.7

1.

$$f(x,y,z) = xy(z^* + y) = xyz^* + xy = xyz^* + xyz + xyz^* = xyz^* + xyz = m_6 + m_7$$

2.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x^* + z)(yz^*)^* = (x^* + z)(y^* + z) = x^*y^* + x^*z + y^*z + z \\ &= x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*y^*z + x^*yz + x^*y^*z + xy^*z + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z + xyz \\ &= x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz \\ &= m_0 + m_2 + m_4 + m_6 + m_7 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (xy + z)^* = (xy)^*z^* = (x^* + y^*)z^* = x^*z^* + y^*z^* = x^*y^*z^* + x^*yz^* + x^*y^*z^* + xy^*z^* \\ &= x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* = m_0 + m_2 + m_4 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= ((xy + z^*t)^* + xyt^*)(x^*z^* + t) = ((xy)^*(z^*t)^* + xyt^*)(x^*z^* + t) = ((x^* + y^*)(z + t^*))(x^*z^* + t) \\ &= (x^*z + x^*t^* + y^*z + y^*t^*)(x^*z^* + t) = x^*zt + x^*z^*t^* + y^*zt + x^*y^*z^*t^* \\ &= x^*zt + x^*z^*t^* + y^*zt = x^*y^*zt + x^*yzt + x^*y^*z^*t^* + x^*yz^*t^* + x^*y^*zt + xy^*zt \\ &= x^*y^*z^*t^* + x^*y^*zt + x^*yz^*t^* + x^*yzt + xy^*zt = m_0 + m_3 + m_4 + m_7 + m_{11} \end{aligned}$$

Método de la tabla

Sean f, g y h las funciones dadas por las tablas:

(x,y,z)	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$	$h(x,y,z)$
$(0,0,0)$	0	1	1
$(0,0,1)$	0	0	1
$(0,1,0)$	0	1	0
$(0,1,1)$	0	0	1
$(1,0,0)$	0	1	1
$(1,0,1)$	0	0	0
$(1,1,0)$	1	1	1
$(1,1,1)$	1	1	1

Para cada fila en que la función vale 1 escribimos el mintérmino asociado y resulta:

$$f(x,y,z) = xy(z^* + y) = m_6 + m_7 = xyz^* + xyz$$

forma canónica de f.

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= (x^*+z)(yz^*)^* = m_0+m_2+m_4+m_6+m_7 \\ &= x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz \end{aligned}$$

forma canónica de g.

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= m_0+m_1+m_3+m_4+m_6+m_7 \\ &= x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz \end{aligned}$$

forma canónica de h.

La forma canónica tiene como inconveniente que una expresión inicialmente sencilla puede llegar a expresarse de una manera mucho más compleja, ya que aparecen todas las variables en cada mintérmino. A veces se introduce una "medida" para poder evaluar la complejidad de las formas disyuntivas y se concluye que la forma ncanónica tiene medida de complejidad máxima. Surge pues la necesidad de hallar una forma disyuntiva que minimice la medida elegida.

2.8 Simplificación.

Ahora bien, estamos interesados en buscar un algoritmo para encontrarla. Lo realizaremos aplicando dos reglas de simplificación:

1. Eliminación de un monomio. Si $f=\mu+R=R$ podemos eliminar μ cosa que es posible si, y sólo si, $\boxed{\mu R=\mu}$
2. Eliminación de un literal en un monomio. Si $f=\mu+R=\mu'+R$ podemos sustituir μ por μ' en la función cuando $\mu<\mu'$, es decir, si μ' se obtiene a partir de μ por eliminación de literales. Esto es posible cuando $\boxed{\mu' f=\mu'}$

Al proceso de aplicar estas reglas a una forma disyuntiva de una función sin alterar la función lo llamamos **simplificación**. Las formas disyuntivas que no admiten simplificación las llamaremos **formas disyuntivas no redundantes, irredundantes o no simplificables**.

Lo importante es que cuando la medida de la complejidad de una forma disyuntiva satisface condiciones "obvias" las formas disyuntivas óptimas (que minimizan la medida) son no redundantes. Entre las no redundantes siempre existirá una (o más) que será la óptima para cualquier medida "razonable". Esto limita el proceso de búsqueda y nos permite hacer un estudio general para cualquier medida que es el estudio de la simplificación de las formas disyuntivas y la obtención de las no redundantes.

Algoritmo de simplificación

Se parte de una forma disyuntiva arbitraria de la función. Se ordenan los monomios y dentro de los monomios se ordenan los literales y aplicamos las siguientes reglas a cada uno de los monomios en el orden dado.

- Se intenta suprimir el monomio correspondiente viendo si es menor que otro de los que intervienen en la forma.
- Si no se suprime el monomio se prueba a suprimir los literales del monomio en el orden dado.
- Cuando no se pueda simplificar más se pasa al monomio siguiente.

Ejemplo 2.8 *Aplicando el algoritmo al ejemplo*

$$h(x,y,z) = x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$$

resulta

Forma disyuntiva	*Conjunción*	*Operación*
$x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$	$x^*y^*z^*$	*sup* x^*
$y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$	x^*y^*z	*sup* y^*
$y^*z^* + x^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$	x^*yz	*sup* x^*yz
$y^*z^* + x^*z + xy^*z^* + xyz^* + xyz$	xy^*z^*	*sup* xy^*z^*
$y^*z^* + x^*z + xyz^* + xyz$	xyz^*	*sup* y
$y^*z^* + x^*z + xz^* + xyz$	xyz	*sup* x
$y^*z^* + x^*z + xz^* + yz$		
La segunda pasada no simplifica		

obtenemos la forma no redundante

$$h(x,y,z) = y^*z^* + x^*z + xz^* + yz$$

Pero si partimos de la misma función escribiendo los monomios y los factores en otro orden

$$h(x,y,z) = x^*y^*z^* + zx^*y^* + yx^*z + xyz + z^*xy + xy^*z^*$$

resulta

Forma disyuntiva	*Conjunción*	*Operación*
$x^*y^*z^* + zx^*y^* + yx^*z + xyz + z^*xy + xy^*z^*$	$x^*y^*z^*$	*sup* x^*
$y^*z^* + zx^*y^* + yx^*z + xyz + z^*xy + xy^*z^*$	zx^*y^*	*sup* z
$y^*z^* + x^*y^* + yx^*z + xyz + z^*xy + xy^*z^*$	yx^*z	*sup* y
$y^*z^* + x^*y^* + x^*z + xyz + z^*xy + xy^*z^*$	xyz	*sup* x
$y^*z^* + x^*y^* + x^*z + yz + z^*xy + xy^*z^*$	z^*xy	*sup* z^*
$y^*z^* + x^*y^* + x^*z + yz + xy + xy^*z^*$	xy^*z^*	*sup* xy^*z^*
$y^*z^* + x^*y^* + x^*z + yz + xy$		
Empieza la segunda pasada		
$y^*z^* + x^*y^* + x^*z + yz + xy$	x^*y^*	*sup* x^*y^*
$y^*z^* + x^*z + yz + xy$	yz	*sup* yz
$y^*z^* + x^*z + xy$		

obtenemos la forma no redundante

$$h(x,y,z) = y^*z^* + x^*z + xy$$

que es distinta de la anterior.

Definición 2.12 (implicante) *Un implicante de una función es un monomio fundamental que es menor o igual que la función.*

Los monomios que aparecen en una forma no redundante tienen la particularidad de que al quitar un literal resulta un monomio que no es un implicante de la función. Es decir, son implicantes lo más grandes posibles. Esto da lugar a la definición que sigue.

Definición 2.13 (implicante primo, simple o maximal) *Un implicante primo de una función es un implicante de la función en el que al suprimir un literal deja de ser implicante.*

Como consecuencia de esto todos los implicantes que aparecen en una forma disyuntiva no redundante son implicantes primos.

2.9 Forma reducida.

Está claro que a partir de ahora la manera de proceder será la de encontrar todos los implicantes primos y a partir de ellos ver cuantas formas no redundantes podemos formar y de entre ellas elegir las óptimas para la medida que estemos considerando.

Teorema 2.20 *La suma de todos los implicantes primos de una función es una forma disyuntiva de la función.*

Definición 2.14 (forma reducida) *Llamamos forma disyuntiva reducida de una función a la suma de sus implicantes maximales.*

Nuestro objetivo es, por tanto, dado un elemento encontrar todos sus implicantes primos para obtener la forma canónica reducida. Esto puede hacerse gráficamente, con mapas de Karnaugh pero este método requiere cierta práctica en su utilización y es totalmente inadecuado a partir de un número no muy elevado de variables. Afortunadamente, existen otros métodos distintos a los gráficos como por ejemplo el

Algoritmo de Quine para la obtención de los implicantes primos.

Se parte de la forma canónica disyuntiva (suma de mintérminos). Presenta la ventaja de poderse aplicar a cualquier número de generadores y ser programable. Como contrapartida, es pesado de llevar a cabo.

- Se clasifican los mintérminos según el número de variables que aparecen complementadas.
- En cada paso intentamos encontrar dos monomios en grupos adyacentes que difieran en un literal solamente (todas las variables excepto una con igual exponente) y que dan lugar a otro monomio sin el literal considerado, es decir, a partir de $x\mu$ y $x^*\mu$ generamos μ, siendo x cualquier variable. La disposición hace que sólo se compare cada monomio con todos los del grupo siguiente de todas las formas posibles. Los que se agrupan se marcan con un aspa y a los que dan lugar se ponen en otra tabla. De esta forma los monomios en los que faltan una variable estarán en la tabla segunda.
- A continuación tenemos que comparar los monomios de la segunda tabla entre sí. Obteniendo la tabla siguiente con monomios en los que faltan dos variables y agrupados por numero de variables complementadas.
- Al finalizar los monomios que no estén marcados no pueden ser menores que otros y por tanto estos serán los implicantes maximales o primos.

Hagamos algunos ejemplos

Ejemplos 2.9

1. $f(x,y,z) = x^*y^*z^* + x^*yz^* + x^*yz + xyz^* + xyz$
   agrupamos según el número de variables complementadas

$\times$	$x^*y^*z^*$		x^*z^*		y
$\times$	x^*yz^*	$\times$	x^*y		
$\times$	x^*yz	$\times$	yz^*		
$\times$	xyz^*	$\times$	yz		
$\times$	xyz	$\times$	xy		

   Al final aparecen sin marcar una arista (hipercara de dimensión 1, es decir, monomio en el que falta una variable)

$$x^*z^*$$

   y una cara (hipercara de dimensión 2, es decir, monomio en el que faltan dos variables)

$$y$$

   La forma reducida de la función f será:

$$f(x,y,z) = x^*z^* + y$$

2. $g(x,y,z) = x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz$
   agrupamos según el número de variables complementadas

$\times$	$x^*y^*z^*$	$\times$	x^*z^*		z^*
$\times$	x^*yz^*	$\times$	y^*z^*		
$\times$	xy^*z^*	$\times$	yz^*		
$\times$	xyz^*	$\times$	xz^*		
$\times$	xyz		xy		

   Al final aparecen sin marcar una arista (hipercara de dimensión 1, es decir, monomio en el que falta una variable)

$$xy$$

   y una cara (hipercara de dimensión 2, es decir, monomio en el que faltan dos variables)

$$z^*$$

   La forma reducida de la función g será:

$$g(x,y,z) = xy + z^*$$

3. $h(x,y,z) = x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$
agrupamos según el número de variables complementadas

$\times$	$x^*y^*z^*$		x^*y^*
$\times$	x^*y^*z		y^*z^*
$\times$	xy^*z^*		x^*z
$\times$	x^*yz		xz^*
$\times$	xyz^*		yz
$\times$	xyz		xy

Al final aparecen sin marcar seis aristas (hipercaras de dimensión 1, es decir, monomios en los que faltan una variable)

$$x^*y^* \ , \ y^*z^* \ , \ x^*z \ , \ xz^* \ , \ yz \ , \ xy$$

La forma reducida de la función h será:

$$h(x,y,z) = x^*y^* + y^*z^* + x^*z + xz^* + yz + xy$$

4. $k(x,y,z,t) = x^*y^*z^*t^* + x^*y^*zt^* + xy^*z^*t^* + x^*y^*zt + x^*yzt^* + xy^*z^*t + xyz^*t^* + x^*yzt + xyz^*t + xyzt^* + xyzt$
agrupamos según el número de variables complementadas

$\times$	$x^*y^*z^*t^*$		$x^*y^*t^*$		x^*z
$\times$	$x^*y^*zt^*$		$y^*z^*t^*$		xz^*
$\times$	$xy^*z^*t^*$	$\times$	x^*y^*z		yz
$\times$	x^*y^*zt	$\times$	x^*zt^*		xy
$\times$	x^*yzt^*	$\times$	xy^*z^*		
$\times$	xy^*z^*t	$\times$	xz^*t^*		
$\times$	xyz^*t^*	$\times$	x^*zt		
$\times$	x^*yzt	$\times$	x^*yz		
$\times$	xyz^*t	$\times$	yzt^*		
$\times$	$xyzt^*$	$\times$	xz^*t		
$\times$	$xyzt$	$\times$	xyz^*		
		$\times$	xyt^*		
		$\times$	yzt		
		$\times$	xyt		
		$\times$	xyz		

Al final nos aparecen dos aristas (hipercaras de dimensión 1, monomios en los que faltan una variable)

$$x^*y^*t^* \ , \ y^*z^*t^*$$

y cuatro caras (hipercaras de dimensión 2, es decir, monomios en los que faltan dos variables)

$$x^*z \ , \ xz^* \ , \ yz \ , \ xy$$

La forma reducida de la función k será:

$$k(x,y,z,t) = x^*y^*t^* + y^*z^*t^* + x^*z + xz^* + yz + xy$$

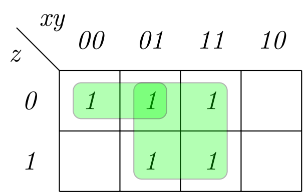
Mapas de Karnaugh

El método para encontrar los implicantes primos mediante los mapas de Karnaugh consiste en buscar "a ojo" agrupaciones de unos contiguos que no estén contenidas en otra agrupación mayor. En tres variables buscaríamos las caras (cuatro unos contiguos), después las aristas (dos unos contiguos) que no estén contenidas en una cara y después los vértices. En cuatro variables buscariamos los cubos (ocho unos contiguos), después las caras (cuatro unos contiguos) que no formen parte de algún cubo, después las aristas (dos unos contiguos) que no estén contenidas en una cara y después los vértices.

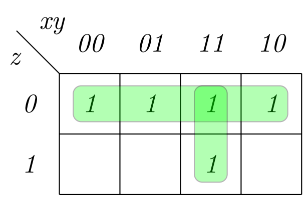
Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 2.10

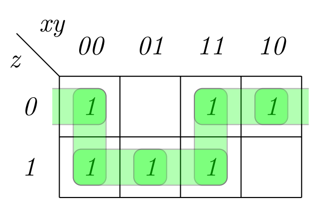
1. $f(x, y, z) = x^*y^*z^* + x^*yz^* + x^*yz + xyz^* + xyz = m_0 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7$



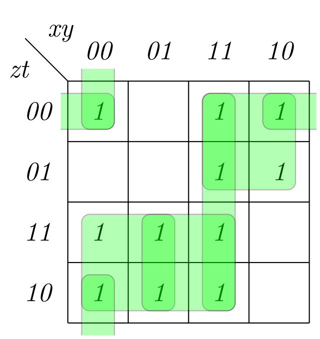
2. $g(x, y, z) = x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz = m_0 + m_2 + m_4 + m_6 + m_7$



3. $h(x, y, z) = x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz = m_0 + m_1 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7$



4. $k(x, y, z, t) = m_0 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$



Método de los consensos

Se parte de cualquier forma disyuntiva de la función y está basado en la siguiente igualdad del álgebra de Boole

$$\boxed{x\mu_1 + x^*\mu_2 = x\mu_1 + x^*\mu_2 + \mu_1\mu_2} \qquad \text{con } x \text{ cualquier variable}$$

al monomio $\mu_1\mu_2$ se le llama consenso en x de los monomios $x\mu_1$ y $x^*\mu_2$.

Partiendo de cualquier forma disyuntiva se van añadiendo los consensos en todas las variables de todas las parejas de monomios posibles (incluidos los que van apareciendo) y simplificando por absorción (monomios incluidos en otros) cuando no aparecen más consensos y se han hecho todas las absorciones se obtiene la forma normal reducida que es la suma de todos los implicantes maximales.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 2.11

1.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^*y^*z^* + x^*yz^* + x^*yz + xyz^* + xyz \\
&= x^*y^*z^* + x^*yz^* + x^*yz + xyz^* + xyz + x^*z^* \\
&= x^*yz + xyz^* + xyz + x^*z^* \\
&= x^*yz + xyz^* + xyz + x^*z^* + yz \\
&= xyz^* + x^*z^* + yz \\
&= xyz^* + x^*z^* + yz + yz^* \\
&= x^*z^* + yz + yz^* \\
&= x^*z^* + yz + yz^* + x^*y \\
&= x^*z^* + yz + yz^* + x^*y + y \\
&= x^*z^* + y
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz \\
&= x^*y^*z^* + x^*yz^* + xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*z^* \\
&= xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*z^* \\
&= xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*z^* + xz^* \\
&= xyz + x^*z^* + xz^* \\
&= xyz + x^*z^* + xz^* + xy \\
&= x^*z^* + xz^* + xy \\
&= x^*z^* + xz^* + xy + z^* \\
&= xy + z^*
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
h(x,y,z) &= x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz \\
&= x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*y^* \\
&= x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*y^* \\
&= x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz + x^*y^* + yz \\
&= xy^*z^* + xyz^* + x^*y^* + yz \\
&= xy^*z^* + xyz^* + x^*y^* + yz + xz^* \\
&= x^*y^* + yz + xz^* \\
&= x^*y^* + yz + xz^* + x^*z \\
&= x^*y^* + yz + xz^* + x^*z + y^*z^* \\
&= x^*y^* + yz + xz^* + x^*z + y^*z^* + xy
\end{aligned}$$

4. *En este ejemplo daremos los pasos de dos en dos es decir obtención de un consenso y absorción por parte de dicho consenso.*

$$\begin{aligned}
k(x,y,z,t) &= x^*y^*z^*t^* + x^*y^*zt^* + xy^*z^*t^* + x^*y^*zt + x^*yzt^* + xy^*z^*t + xyz^*t^* + x^*yzt + xyz^*t + xyzt^* + xyzt \\
&= xy^*z^*t^* + x^*y^*zt + x^*yzt^* + xy^*z^*t + xyz^*t^* + x^*yzt + xyz^*t + xyzt^* + xyzt + x^*y^*t^* \\
&= x^*y^*zt + x^*yzt^* + xyz^*t^* + x^*yzt + xyz^*t + xyzt^* + xyzt + x^*y^*t^* + xy^*z^* \\
&= x^*yzt^* + xyz^*t^* + xyz^*t + xyzt^* + xyzt + x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt \\
&= xyz^*t^* + xyz^*t + xyzt + x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* \\
&= xyzt + x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* + xyz^* \\
&= x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* + xyz^* + yzt \\
&= x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* + xyz^* + yzt + y^*z^*t^* \\
&= x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* + xyz^* + yzt + y^*z^*t^* + x^*y^*z \\
&= x^*y^*t^* + xy^*z^* + x^*zt + yzt^* + xyz^* + yzt + y^*z^*t^* + x^*y^*z + x^*zt^* \\
&= x^*y^*t^* + x^*zt + yzt^* + yzt + y^*z^*t^* + x^*y^*z + x^*zt^* + xz^* \\
&= x^*y^*t^* + x^*zt + yzt^* + yzt + y^*z^*t^* + x^*y^*z + x^*zt^* + xz^* + x^*yz \\
&= x^*y^*t^* + yzt^* + yzt + y^*z^*t^* + xz^* + x^*z \\
&= x^*y^*t^* + y^*z^*t^* + xz^* + x^*z + yz \\
&= x^*y^*t^* + y^*z^*t^* + xz^* + x^*z + yz + xy
\end{aligned}$$

Método de la forma canónica conjuntiva o producto de maxtérminos.

Se halla la forma canónica conjuntiva. Se distribuye el producto sobre la suma y se realizan todas las absorciones con lo que se obtiene la forma canónica reducida.

Sean f, g y h las funciones dadas por las tablas

(x,y,z)	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$	$h(x,y,z)$
$(0,0,0)$	1	1	1
$(0,0,1)$	0	0	1
$(0,1,0)$	1	1	0
$(0,1,1)$	1	0	1
$(1,0,0)$	0	1	1
$(1,0,1)$	0	0	0
$(1,1,0)$	1	1	1
$(1,1,1)$	1	1	1

Para cada fila en que la función f vale 0 escribimos el maxtérmino asociado y resulta:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= m_0 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7 = M_1M_4M_5 \\
&= (x+y+z^*)(x^*+y+z)(x^*+y+z^*) \\
&= (xy + xz + x^*y + y + yz + x^*z^* + yz^*)(x^*+y+z^*) \\
&= (xz + y + x^*z^*)(x^*+y+z^*) \\
&= xyz + x^*y + y + yz^* + x^*z^* + x^*yz^* + x^*z^* \\
&= y + x^*z^*
\end{aligned}$$

forma disyuntiva reducida de f. Los implicantes maximales de f son y y x^*z^*.

Para cada fila en que la función g vale 0 escribimos el maxtérmino asociado y resulta:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= m_0+m_2+m_4+m_6+m_7 = M_1M_3M_5 \\ &= (x+y+z^*)(x+y^*+z^*)(x^*+y+z^*) \\ &= (x+xy^*+xz^*+xy+yz^*+xz^*+y^*z^*+z^*)(x^*+y+z^*) \\ &= (x+z^*)(x^*+y+z^*) \\ &= xy+xz^*+x^*z^*+yz^*+z^* \\ &= xy+z^* \end{aligned}$$

forma disyuntiva reducida de g. Los implicantes primos de g son xy y z^*.

Para cada fila en que la función h vale 0 escribimos el maxtérmino asociado y resulta:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= m_0+m_1+m_3+m_4+m_6+m_7 = M_2M_5 \\ &= (x+y^*+z)(x^*+y+z^*) \\ &= xy+xz^*+x^*y^*+y^*z^*+x^*z+yz \end{aligned}$$

forma disyuntiva reducida de h. Los implicantes primos de h son xy, xz^*, x^*y^*, y^*z^*, x^*z y yz.

2.10 Formas no redundantes.

La forma reducida tiene todos los implicantes primos, por tanto, no se puede simplificar con la regla 2; pero en general, es simplificable con la regla 1. Puede ocurrir que dos o tres implicantes maximales cubran a otro implicante primo; en consecuencia, existen implicantes que no son necesarios para cubrir todos los vértices (mintérminos) de la función. Ante esta situación, podemos preguntarnos ¿cómo podemos obtener formas no simplificables a partir de la reducida? La respuesta nos la da el algoritmo de Petrick que utiliza la cuadrícula de Mac-Cluskey.

2.10.1 Cuadrícula de Mac-Cluskey y algoritmo de Petrick.

A partir de los implicantes maximales de una función vamos a contruir todas las formas disyuntivas irredundantes. Vamos ver el algoritmo mediante ejemplos:
Consideramos la función $h(x,y,z) = f^3_{219}(x,y,z)$ del ejemplo anterior:
Con forma canónica

$$h(x,y,z) = x^*y^*z^* + x^*y^*z + x^*yz + xy^*z^* + xyz^* + xyz$$

y forma reducida

$$h(x,y,z) = xy + xz^* + x^*y^* + y^*z^* + x^*z + yz$$

Formamos una tabla (Cuadrícula de Mac-Cluskey) con tantas columnas como mintérminos aparezcan en la forma canónica disyuntiva y con tantas filas como implicantes primos aparecen en la forma canónica reducida. En nuestro caso la tabla quedaría como sigue,

		m_0	m_1	m_3	m_4	m_6	m_7
A	xy					$\times$	$\times$
B	xz^*				$\times$	$\times$	
C	x^*y^*	$\times$	$\times$				
D	y^*z^*	$\times$			$\times$		
E	x^*z		$\times$	$\times$			
F	yz			$\times$			$\times$

En la tabla se ha puesto de manifiesto la descomposición atómica de los implicantes primos. Si hay columnas con una sola aspa eso quiere decir que hay mintérminos que sólo quedan cubiertos con un implicante. Dicho implicante debe aparecer necesariamente en toda forma irredundante y lo llamaremos esencial o nuclear. En este caso no hay implicantes primos esenciales.

Si hacemos un razonamiento lógico y trabajamos con elementos lingüísticos, los elementos booleanos van a ser frases. Notemos por A, B, C, D, E y F a los implicantes primos.

Un recubrimiento minimal es “coger unos cuantos implicantes de forma que tengamos todos los mintérminos cubiertos y que no se pueda quitar ningún implicante conservando la propiedad anterior”. De esta forma

$$\begin{array}{ll} m_0 \equiv C+D & m_1 \equiv C+E \\ m_3 \equiv E+F & m_4 \equiv B+D \\ m_6 \equiv A+B & m_7 \equiv A+F \end{array}$$

Con lo cual para cubrir todos los vérices necesito

$$(C+D)(C+E)(E+F)(B+D)(A+B)(A+F)$$

que una vez simplificada después de distribuir, queda

$$ABCE + BCF + ACDF + BDEF + ADE$$

tenemos por tanto cinco recubrimientos minimales y por tanto cinco formas disyuntivas irredundantes que son las siguientes:

$$A+B+C+E = xy + xz^* + x^*y^* + x^*z$$

$$B+C+F = xz^* + x^*y^* + yz$$

$$A+C+D+F = xy + x^*y^* + y^*z^* + yz$$

$$B+D+E+F = xz^* + y^*z^* + x^*z + yz$$

$$A+D+E = xy + y^*z^* + x^*z$$

Las formas óptimas o minimales para la longitud son

$$\begin{array}{c} B+C+F = xz^* + x^*y^* + yz \\ A+D+E = xy + y^*z^* + x^*z \end{array}$$

Consideramos la función $k(x,y,z,t) = f^4_{46031}(x,y,z,t)$ dada por la tabla:

(x,y,z,t)	$k(x,y,z,t)$	(x,y,z,t)	$k(x,y,z,t)$
$(0,0,0,0)$	1	$(1,0,0,0)$	1
$(0,0,0,1)$	0	$(1,0,0,1)$	1
$(0,0,1,0)$	1	$(1,0,1,0)$	0
$(0,0,1,1)$	1	$(1,0,1,1)$	0
$(0,1,0,0)$	0	$(1,1,0,0)$	1
$(0,1,0,1)$	0	$(1,1,0,1)$	1
$(0,1,1,0)$	1	$(1,1,1,0)$	1
$(0,1,1,1)$	1	$(1,1,1,1)$	1

Con forma canónica

$$k(x,y,z,t) = x^*y^*z^*t^* + x^*y^*zt^* + xy^*z^*t^* + x^*y^*zt + x^*yzt^* + xy^*z^*t + xyz^*t^* + x^*yzt + xyz^*t + xyzt^* + xyzt$$

y con forma reducida (usando las dos aristas y las cuatro caras implicantes primos)

$$k(x,y,z,t) = y^*z^*t^* + x^*y^*t^* + yz + x^*z + xz^* + xy$$

Formamos una tabla con tantas columnas como mintérminos aparezcan en la forma canónica y con tantas filas como implicantes primos aparecen en la forma reducida. En nuestro caso la tabla quedaría como sigue,

		m_0	m_2	m_3	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
A	xy								$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
B	xz^*						$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
C	x^*z		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$						
D	yz				$\times$	$\times$					$\times$	$\times$
E	$x^*y^*t^*$	$\times$	$\times$									
F	$y^*z^*t^*$	$\times$					$\times$					

En la tabla se ha puesto de manifiesto que cubre cada implicante. Se advierte que los implicantes B y C son esenciales ya que son los únicos que cubre a los mintérminos m_9 y m_3 respectivamente. Esto hará que el algoritmo de Petrick se simplifique mucho usando la ley de absorción del algebra de Boole.

Un recubrimiento minimal es “coger unas cuantas hipercaras que cubran todos los vértices” de tal forma que todas sean necesarias. De esta forma

$$\begin{array}{ll} m_0 \equiv E+F & m_2 \equiv C+E \\ m_3 \equiv C & m_6 \equiv C+D \\ m_7 \equiv C+D & m_8 \equiv B+F \\ m_9 \equiv B & m_{12} \equiv A+B \\ m_{13} \equiv A+B & m_{14} \equiv A+D \\ m_{15} \equiv A+D & \end{array}$$

Con lo cual, nuestra expresión inicial queda como

$$(E+F)(C+E)C(C+D)(B+F)B(A+B)(A+D)$$

que una vez simplificada (la presencia de factores con un solo sumando hace la simplificación más fácil), antes de distribuir, queda

$$(E+F)CB(A+D) = ABCE + BCDE + ABCF + BCDF$$

tenemos por tanto cuatro recubrimientos de esta manera, las formas disyuntivas irredundantes son las siguientes

$$A+B+C+E = xy + xz^* + x^*z + x^*y^*t^*$$

$$B+C+D+E = xz^* + x^*z + yz + x^*y^*t^*$$

$$A+B+C+F = xy + xz^* + x^*z + x^*y^*t^*$$

$$B+C+D+F = xz^* + x^*z + yz + x^*y^*t^*$$

Si volvemos a la cuadrícula se observa que la columna de m_3 y la de m_9 obligan a que en toda forma irredundante hay que elegir siempre los implicantes C y B. Estos implicantes se llaman esenciales o nucleares y nos permiten escribir una cuadrícula simplificada omitiendo los implicantes esenciales y los mintérminos que cubren. Es decir, suprimimos las filas B y C, y las columnas m_2, m_3, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{12} y m_{13}, resultando:

		m_0	m_{14}	m_{15}
A	xy		$\times$	$\times$
D	yz		$\times$	$\times$
E	$x^*y^*t^*$	$\times$		
F	$y^*z^*t^*$	$\times$		

En cualquier forma no redundante aparecerán xz^* y x^*z. Aplicando Petrick

$$\begin{array}{l} m_0 \equiv E+F \\ m_{14} \equiv A+D \\ m_{15} \equiv A+D \end{array}$$

Con lo cual, nuestra expresión inicial queda como

$$(E+F)(A+D)(A+D) = (E+F)(A+D) = EA + ED + FA + FD$$

tenemos por tanto cuatro recubrimientos sin más que añadir a los obtenidos los implicantes esenciales B y C. De esta manera, las formas disyuntivas irredundantes son las siguientes

$$A+B+C+E = xy + xz^* + x^*z + x^*y^*t^*$$

$$B+C+D+E = xz^* + x^*z + yz + x^*y^*t^*$$

$$A+B+C+F = xy + xz^* + x^*z + x^*y^*t^*$$

$$B+C+D+F = xz^* + x^*z + yz + x^*y^*t^*$$

Ejercicio Dada la función $f(x, y, z, t) = (xyzt + x^*y^*z^*t^*)^*$ demuestra que tiene 12 implicantes primos, 58 formas disyuntivas no redundantes y 6 minimales para la longitud, utilizando el mapa de Karnaugh

zt \ xy	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		1
10	1	1	1	1