Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2020/21)

Ejercicios

$\boxed{1}$ **Depósito de capital.** Un banco ofrece un interés del 7 % anual para depósitos de capital a medio plazo.

a) Si disponemos de un capital inicial de 10000 euros, ¿cuál es capital del que dispondremos al cabo de 4 años?

b) Si se pretende disponer de 25000 euros dentro de 4 años, ¿cuál debe ser el capital inicial?

c) Supongamos ahora que no conocemos el interés que proporciona el banco. Si inicialmente disponemos de 10000 euros y pasados 5 años tenemos 12000, ¿cuál es el interés anual aplicado?

$\boxed{2}$ **La explosión demográfica.** Una población sigue un modelo de crecimiento malthusiano con tasa de creciminento neta $\alpha = 0.16$, es decir si x_n es el número de individuos en el periodo n, entonces

$$x_{n+1} = 1.16\, x_n.$$

a) Calcula el número de periodos necesarios para que la población se duplique y cuadruplique.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea n_k el número de periodos necesario para que la población se multiplique por 2^k. Demuestra que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.16)}.$$

Se dice por tanto que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1.16)}$ es el *tiempo promedio de duplicación.*

c) Calcula el tiempo promedio de quintuplicación.

$\boxed{3}$ **La extinción demográfica.** Se considera el modelo

$$x_{n+1} = r x_n, \qquad 0 < r < 1. \tag{1}$$

Este modelo puede aparecer por ejemplo cuando x_n representa el número de individuos infectados por un virus en un instante n y $\alpha = 1 - r$ es la probabilidad de que un individuo se cure en un determinado periodo. Al valor α se llama *tasa de extinción.* Dado que para cualquier valor de α todos los individuos se recuperan, es decir, $x_n \to 0$, se intenta cuantificar dicha recuperación con lo que se llama *tiempo medio de recuperación.* Para ello se observa que:

- $x_0 - x_1$ es el número de individuos que se recuperan en un periodo.
- $x_1 - x_2$ es el número de individuos que se recuperan en dos periodos.
- $x_2 - x_3$ es el número de individuos que se recuperan en tres periodos. Y así susesivamente.

El *tiempo medio de recuperación* se define como

$$\frac{1(x_0 - x_1) + 2(x_1 - x_2) + 3(x_2 - x_3) + ...}{x_0} = \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_{n-1} - x_n) \tag{2}$$

a) Calcula el tiempo medio de recuperación.

b) Algo más preciso podría ser considerar los intervalos de otra forma, es decir:

- $x_0 - x_1$ se recuperan aproximadamente en 0.5 periodos.
- $x_1 - x_2$ se recuperan aproximadamente 1.5 periodos.
- $x_2 - x_3$ se recuperan aproximadamente 2.5 periodos. Y así susesivamente.

Teniendo en cuenta esta modificación, ¿cómo afectaría este cambio al valor del tiempo medio de recuperación? Por convenio tomaremos el valor (**??**).

c) Si un grupo de individuos infectados tiene un tiempo de recuperación 38 días, ¿cuál es la probabilidad que tiene un individuo de recuperarse en un día?

d) Con los mismos datos del apartado anterior, ¿cuál es el tiempo promedio de dividirse por 10? (utiliza el ejercicio 1).

4 **Desintegración y degradación** La masa de un material radiactivo que sobrevive tras un periodo de n años se modela por la ley

$$x_{n+1} = r\, x_n, \qquad 0 < r < 1. \tag{3}$$

donde r es la probabilidad de que un átomo sobreviva un determinado periodo. El equivalente al tiempo medio de recuperación aquí se llama *vida media* (τ) mientras que el tiempo promedio de división por 2 se llama *semivida*. ¿Cuál es la relación entre ambos parámetros?

a) Una partícula tiene una probabilidad $\frac{1}{2}$ de destruirse en 7 nanosegundos. Transcurridos 14 nanosegundos ¿cuántas partículas de las originales sobreviven? ¿y tras 14 segundos? ¿Cuál es su vida media?
(Nota: $1s = 10^9 ns$)

b) La vida media del carbono 14 se estima en 5730 años, ¿cuál es la probabilidad de que un átomo se desintegre en los 1000 primeros años?

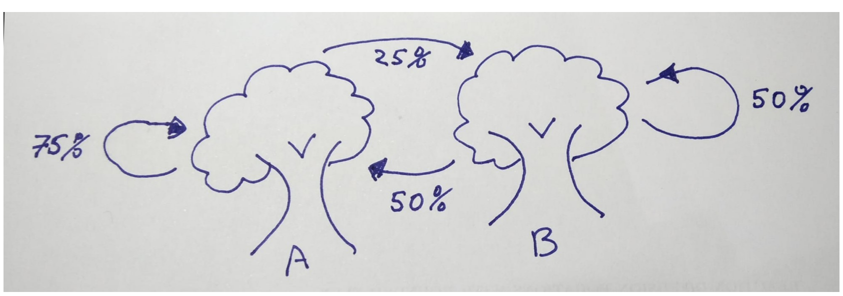
c) Un fármaco se va inyectando en un paciente hasta obtener una concentración en sangre de 0.1 gramos por litro. Si dicho fármaco tiene una vida media de 10 días, calcula la concentración en sangre tras 20 días de suspender el tratamiento.

d) En el ejemplo anterior, supongamos que en lugar de la vida media conocemos la semivida y es de 10 días, ¿cuál sería ahora la concentración tras 20 días?

5 **Modelo de estados**

a) Una población de gusanos de seda se distribuye entre dos árboles de morera A y B. Expíricamente se ha observado que cada día estos se van cambiando de árbol de la siguiente forma:

- El 75 % de los gusanos que están en el árbol A en un determinado día permanecen en el al día siguiente mientras que el resto se cambia al árbol B.
- El 50 % de los gusanos que están en el árbol B en un determinado día permanecen en el al día siguiente mientras que el resto se cambia al árbol A.



Se pretende estudiar cómo evoluciona la población de gusanos. Supongamos que al comienzo del estudio había 3400 gusanos en el árbol A y 2600 en B. Sean x_n el número de gusanos que están en el árbol A en el n-ésimo día e y_n el número de gusanos en B. Se tiene que

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.75x_n + 0.5y_n, \\ y_{n+1} = 0.25x_n + 0.5y_n. \end{cases}$$

1) Demuestra que $x_n + y_n = 6000$.
2) Escribe una ecuación en diferencias para x_n y resuélvela.
3) Determina el comportamiento asintótico de la población de gusanos en ambos árboles.

b) Dos países compiten por el abastecimiento de crudo mundial. Se sabe que el país A cuida más a sus clientes y, por tanto, el 90 % de los que un año contratan el abastecimiento con este vuelven a hacerlo al siguiente año. Sin embargo, solo el 70 % de los clientes de B vuelven a concertar de nuevo su abastecimiento con este. Se supone que todos los países tienen que contratar su abastecimiento con alguno de los dos países. Este año la situación política del país A impide que pueda abastecer a ningún país. ¿Cómo evolucionarán a patir de ahí las cuotas de mercado?

6 **Modelo Bertalanffy.** Sea un individuo de biomasa V (la biomasa mide volumen o peso, consideraremos volumen en nuestro caso). La variación de biomasa ΔV es la diferencia entre la masa que se crea CV y la que se degrada DV, es decir $\Delta V = CV - DV$.

Por un lado, la creación de volumen es proporcional al area de absorción A (superficie total de la raíz, de las hojas...) $CV = \beta A$ donde β es una constante de cada individuo relativa a su capacidad de absorción de nutrientes. Por otro lado, la degradación se produce por la muerte celular y viene dada por $DV = rV$ donde de nuevo $0 < r < 1$ es la probabilidad de morir de una célula. Se obtiene entonces:

$$\Delta V = \beta A - rV.$$

Por último, se supone que el individuo mantiene la forma y, si llamamos L a la altura, entonces $A = \alpha_a L^2$ y $V = \alpha_v L^3$ donde α_a y α_v son constantes dependientes de la forma del individuo.

Con todo esto tenemos

$$\alpha_v L_{n+1}^3 - \alpha_v L_n^3 = \beta\alpha_a L_n^2 - r\alpha_v L_n^3,$$

y simplificando

$$L_{n+1}^3 - L_n^3 = \frac{\beta\alpha_a}{\alpha_v} L_n^2 - rL_n^3.$$

No es fácil dar una expresión explícita de las soluciones, pero si tenemos en cuenta la aproximación de Taylor $y^3 - x^3 \sim 3x^2(y - x)$, podemos obtener una aproximación válida para pequeñas variaciones de la altura

$$L_{n+1} - L_n = \frac{\beta\alpha_a}{3\alpha_v} - \frac{r}{3} L_n.$$

Resumiendo: el modelo Bertalanffy es un modelo lineal de la forma

$$L_{n+1} = a + bL_n,$$

donde $a > 0$ es una constante relativa a la capacidad de absorción del individuo y $0 < b < 1$ es una constante relacionada con la degradación celular (realmente $\frac{2}{3} < b < 1$).

a) Supongamos que la altura en metros de un árbol se ajusta a la expresión $L_n = 3.8(1-0.9^n)$ y n es el número de años. Haz una tabla con las alturas del árbol en los 5 primeros años. Calcula $\lim_{n\to\infty} L_n$ e interpreta el resultado. Estima la vida media de las células de dicho árbol.

b) La longitud en cm de las hojas de los árboles de una determinada especie se aproxima por el modelo $L_{n+1} = 3.9 + 0.7L_n$. Una hoja tiene una longitud de 3cm ¿llegará a tener 10cm? ¿y 15? Determina la longitud que se estima que pueden llegar a alcanzar las hojas de cualquier árbol de dicha especie.