Ejercicios2.pdf

martagomezs

Modelos Matemáticos I

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 18/19)

Relación de Ejercicios 2

1 Encuentre ecuaciones en diferencias homogéneas cuyas soluciones sean.

a) $2^{n-1} - 5^{n+1}$.

b) $3\cos(\frac{n\pi}{2}) - \sin(\frac{n\pi}{2})$.

c) $(n+2)5^n \sin(\frac{n\pi}{4})$.

d) $(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)7^n$.

e) $1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$.

2 Calcule la solución de la ecuación

$$x_{n+3} - x_n = 0$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$.

3 Un productor fija el precio de su producto haciendo la media de los precios de los dos años anteriores. Si los precios de los dos primeros años son p_0, p_1, calcule el precio a largo plazo.

4 a) Dado un número real α, determine una expresión para la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ que verifica

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n, \quad n \geqslant 0 \\ x_0 &= 1, \quad x_1 = \alpha \end{aligned}$$

b) Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{1+y_n}, \quad n \geqslant 0, \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Demuestre que, para todo $n \geqslant 0$, puede escribirse

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}},$$

donde $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es una de las sucesiones del apartado (a).

c) Utilice el apartado (a), para obtener el comportamiento asintótico de la sucesión $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$.

5 A partir de la solución de una EDL de orden 2 adecuada, determine en función de a el valor del determinante tridiagonal siguiente:

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

6 Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n = 0\,, \qquad n = 0, 1, 2...$$

a) Describa el conjunto Σ de soluciones de la ecuación.

b) Encuentre un espacio vectorial S y un operador lineal $L : S \to S$ tal que $\Sigma = \ker L$.

7 Considere la ecuación en diferencias $y_{n+2} + p_1 y_{n+1} + p_2 y_n = g(n)$, donde $p_1^2 < 4p_2$ y $0 < p_2 < 1$. Demuestre que si $\{y_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ e $\{y_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ son dos soluciones de la ecuación, entonces $y_n^{(1)} - y_n^{(2)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

8 Consideremos la ecuación en diferencias de segundo orden

$$x_{n+2} + p_1\, x_{n+1} + p_0\, x_n = 0. \tag{1}$$

a) Demuestre que todas las soluciones de la ecuación (1) convergen hacia 0 si y sólo si se verifica $|p_1| < 1 + p_0 < 2$.

b) Utilice la condición del apartado anterior para estudiar el comportamiento, en función del parámetro $\mu > 0$, de las soluciones de la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - x_{n+1} + \frac{1-\mu}{\mu}\, x_n = 0.$$

9 La sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0} = \{1, 2, 5, 12, 29, \ldots\}$ es solución de cierta ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

a) Deduzca dicha ecuación en diferencias.

b) Dé una expresión de la solución general de la ecuación en diferencias.

c) Deduzca de forma razonada el valor, si existe, de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

10 Sea $\{x_n\}$ solución de $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$. Se define la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ con $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Encuentre una ecuación de tercer orden $s_{n+3} + A_2 s_{n+2} + A_1 s_{n+1} + A_0 s_n = 0$ que sea satisfecha por $\{s_n\}$ ¿qué relación hay entre las raíces de los dos polinomios característicos?

a) Calcule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

si $x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0, \quad x_0 = x_1 = 1$

b) Encuentre una fórmula para las medias aritméticas de los números de Fibonacci,

$$\bar{f}_n = \frac{(f_0 + f_1 + \ldots + f_n)}{n+1}.$$

Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{f}_n}{f_n}$.

11 Se parte de dos números a y b y se calcula su media aritmética m. A continuación se calcula la media aritmética de b y m, y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \ldots$$

Demuestre que la sucesión resultante es convergente y exprese su límite en función de a y b. ¿Bajo qué condiciones sobre a y b se obtiene una sucesión monótona?

12 Se consideran las funciones de oferta y demanda

$$O(p) = a + b\,p, \quad D(p) = c - d\,p.$$

Se modifica el modelo de la telaraña de acuerdo a la ley (Goodwin, 1941)

$$O(p_n^e) = D(p_n)$$

donde p_n^e es el precio esperado para el año n y viene dado por

$$p_n^e = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2}),$$

con $\rho > 0$ un parámetro (si $\rho = 0$ se vuelve al modelo de la telaraña).

a) Demuestre que p_n cumple una ecuación del tipo

$$p_{n+2} + a_1 p_{n+1} + a_0 p_n = k$$

que tiene como solución constante al precio de equilibrio.

b) Se supone $b = d = 1$. Calcule las soluciones y describa el comportamiento de los precios a largo plazo. ¿Son las predicciones idénticas a las que produciría el modelo simple de la telaraña?

13 Consideremos el modelo de Samuelson modificado

$$\begin{aligned} Y_n &= C_n + I_n \\ C_n &= b\,I_{n-1} \\ I_n &= C_n - k\,C_{n-1} + G, \end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual respectivamente, G es el gasto público, que se supone constante y $0 < b < 1$, $k > 0$. Escriba la ley de recurrencia que cumplen las inversiones anuales I_n y calcule condiciones sobre los parámetros k, b para que haya convergencia.

14 Consideramos el sistema de Samuelson modificado

$$\begin{aligned} Y_n &= \alpha C_n + \beta I_n \\ C_n &= Y_{n-1} \\ I_n &= k(C_n - C_{n-1}) + G, \end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual respectivamente, G es el gasto público, que se supone constante. Los parámetros $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ están ligados a impuestos al consumo y la inversión que se destinan a ayuda exterior (los números $1-\alpha$ y $1-\beta$ representan las partes proporcionales de consumo e inversión destinadas a dicha ayuda). Calcule las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros para que haya convergencia a un único equilibrio.

15 Dados dos números reales x_0, x_1, se construye una sucesión $\{x_n\}$ donde el término general se obtiene restando los dos números anteriores, es decir, $x_2 = x_1 - x_0, x_3 = x_2 - x_1$ y así sucesivamente.

a) Escriba la ecuación en diferencias y de una expresión de la solución general.

Dar valores (8-9)

b) Calcule la solución particular con condiciones iniciales $x_0 = 2, x_1 = 1$ y compruebe que es periódica, calculando el periodo.

No cae

c) Para una ley de recurrencia general a dos pasos $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, con $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre que la existencia de una solución periódica de periodo mínimo $N = 3$ implica que todas las soluciones son periódicas del mismo periodo. ¿Será cierta esta propiedad si $N = 2$?

16 *a*) Encuentre una ecuación en diferencias del tipo

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0\,, \qquad (2)$$

que tenga una solución no nula $\{x_n\}_n$ que cumpla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2\,.$$

b) Encuentre otra ecuación del tipo (2) y que tenga una solución $\{x_n\}_n$ que sea acotada pero no convergente.

17 Dada la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - \alpha(1+\beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 1, \qquad \alpha, \beta > 0$$

a) Determine la solución de equilibrio.

b) Determine condiciones sobre α y β, para que las soluciones de la ecuación converjan a la solución de equilibrio.

c) Determine condiciones sobre α y β, para que las soluciones de la ecuación oscilen en torno a la solución de equilibrio.

18 Calcule las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a y b para que las sumas parciales de las soluciones de la ecuación

$$x_{n+2} + (a-b)x_{n+1} + (a+b)x_n = 0$$

sean convergentes. Represente gráficamente tales condiciones en el plano de parámetros (a, b).

Nota: Las sumas parciales de una sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ se definen como $S_n = x_0 + \ldots + x_n$.

19 En este ejercicio consideramos la ecuación en diferencias *no autónoma*

$$y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n, \qquad n \geq 0. \tag{3}$$

a) Encuentre una solución particular del tipo $y_n^* = A + Bn$.

b) Demuestre que la sucesión $\{y_n\}$ es una solución de (3) si y sólo $z_n = y_n - y_n^*$ resuelve la ecuación homogénea

$$z_{n+2} - z_{n+1} + z_n = 0, \qquad n \geq 0.$$

c) Encuentre la solución $\{y_n\}$ de (3) que cumple $y_0 = 0,\ y_1 = 1/2$.

20 Se considera la ecuación lineal en diferencias de orden tres,

$$4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 1 \tag{4}$$

a) ¿Admite la ecuación (4) algún punto de equilibrio o solución constante?

b) Resuelva (4) dando una expresión del término general de las soluciones reales.

c) Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{1}{3}$, para cualquier $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ solución de la equación (4).

$\boxed{1}$ b) $3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

sé que $3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = Re \; ; \; Re = 0$

$-\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = Im \; ; \; Im = -i \; ; \; \overline{Im} = i$

$p(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 - \lambda i + \lambda i - i^2 = \lambda^2 + 1 \rightarrow \boxed{x_{n+2} + x_n = 0}$

d) $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) 7^n$

$7^n C_1 + C_2 n 7^n + C_3 n^2 7^n \Rightarrow (\lambda - 7)^3 = \lambda^3 - 21\lambda^2 + 147\lambda - 343$

$\boxed{x_{n+3} - 21x_{n+2} + 147x_{n+1} - 343x_n = 0}$ $n \geq 0$

e) $1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$

$1 \cdot 1^n + 3n \cdot 1^n - 5n^2 1^n + 6n^3 1^n \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)^4$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$

$\boxed{x_{n+4} - 4x_{n+3} + 6x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0}$

$\boxed{12}$ Se que $O(p_n^e) = D(p_n)$

$O(p_n^e) = a + b(p_n^e)$

$D(p_n) = c - d(p_n)$

$a + b(p_n^e) = c - d(p_n)$

$a + b(p_{n-1} + \gamma(p_{n-1} - p_{n-2})) = c - d(p_n)$

$$a + bp_{n-1} + b\gamma p_{n-1} - b\gamma p_{n-2} = c - dp_n$$

$$a + bp_{n+1} + b\gamma p_{n+1} - b\gamma p_n = c - dp_{n+2}$$

$$dp_{n+2} + p_{n+1}(b + b\gamma) - b\gamma p_n + a - c = 0$$

$$p_{n+2} + \underbrace{p_{n+1}\left(\frac{b+b\gamma}{d}\right)}_{a_1} - \underbrace{\frac{b}{d}\gamma}_{a_0} p_n + \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = 0.$$

$$p_* + p_*\left(\frac{b+b\gamma}{d}\right) - \frac{b}{d}\gamma\, p_* = \frac{-a+c}{d}$$

$$p_*\left(1 + \frac{b + \cancel{b\gamma} - \cancel{b\gamma}}{d}\right) = \frac{c-a}{d}$$

$$p_*\left(\frac{d+b}{d}\right) = \left(\frac{c-a}{d}\right)$$

$$\boxed{p_* = \frac{c-a}{d+b}}$$

solución

b) $p_{n+2} + (1+\gamma)p_{n+1} - \gamma p_n = \boxed{c-a}$

$$\lambda^2 + (1-\gamma)\lambda - \gamma = 0. \quad \lambda_1 = (-1)\frac{1+\gamma + \sqrt{(1-\gamma)^2 + 4\gamma}}{2}$$

$$\lambda_2 = (-1)\frac{1+\gamma - \sqrt{(1-\gamma)^2 + 4\gamma}}{2}$$

$$p_n = \left(\frac{c-a}{2}\right) + A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n.$$

A largo plazo

$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\lambda_1|^n \to \infty$

$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\lambda_2|^n \to \infty$

divergen.

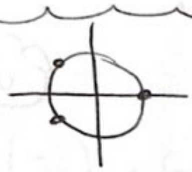
2 $x_{n+3} - x_n = 0$

$x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0 \longrightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ NO!

$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0



$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$|\lambda| = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1$$

$$\theta = \arg(\lambda) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

Solución general de la ecuación en diferencias.

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 1^n \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + C_3 1^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$x_n = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= x_0 = C_1 + C_2 \\ 0 &= x_1 = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 &= x_2 = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} C_1 &= 2/3 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 1/3 \end{aligned}}$$

Solución:

$$\boxed{x_n = 2/3 + 1/3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right)} \quad n \geq 0.$$

$\boxed{9}$

a) $\{x_n\}_{n\geq 0} = \{1, 2, 5, 12, 29\}$ Números de Pell.

$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 2a + b \\ 12 = 5a + 2b \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 2 \end{array}$$

www.oeis.org

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$, $n \geq 0$

$x_2 = 5$, $x_3 = 12$, $x_4 = 29 = 2 \cdot 12 + 5$

b) Polinomio característico.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \end{array}$$

Solución: $x_n = C_1 (1+\sqrt{2})^n + C_2 (1-\sqrt{2})^n$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = x_0 = C_1 + C_2 \\ 2 = x_1 = C_1 (1+\sqrt{2}) + C_2 (1-\sqrt{2}) \end{array}\right\} \boxed{C_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}} \quad \boxed{C_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

Solución:

$$\boxed{x_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4} (1+\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4} (1-\sqrt{2})^n}$$

c) $|\lambda_1| > 1$

$|\lambda_2| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 (1+\sqrt{2})^{n+1} + C_2 (1-\sqrt{2})^{n+1}}{C_1 (1+\sqrt{2})^n + C_2 (1-\sqrt{2})^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_1 (1+\sqrt{2}) + \overbrace{C_2 \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n (1-\sqrt{2})}^{\to 0}}{C_1 + \underbrace{C_2 \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}_{\to 0}} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{C_1} (1+\sqrt{2})}{\cancel{C_1}} = \boxed{1+\sqrt{2} = \lambda_1}$$

3 $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$

$2x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

$p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1/2$

Solución

$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = P_0 = C_1 + C_2 \\ x_1 = P_1 = C_1 - \frac{C_2}{2} \end{array}\right\} \quad C_1 = \dfrac{P_0 + 2P_1}{3}, \quad C_2 = \dfrac{2}{3}(P_0 - P_1)$

$$\boxed{x_n = \frac{P_0 + 2P_1}{3} + \frac{2}{3}(P_0 - P_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

6 $x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n = 0$

a) Σ, $\dim(\Sigma) = 2$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \quad \lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$\{x_{\lambda_1}\} = \left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$

$\{x_{\lambda_2}\} = \left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$

$\Sigma = \left\{ x = x_n : x_n = C_1\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + C_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^n \right\}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

b) $\Sigma = \ker \mathcal{L}$

$\mathcal{L} : S \to S$

$x \mapsto \mathcal{L}(x) = y$

$y_n = x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n$

$x_n \in \ker(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(x_n) = y_n = 0 \Leftrightarrow x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n = 0 \Leftrightarrow x_n \in \Sigma$

4 $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $\{x_n\}$ $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 1, \; x_1 = \alpha$

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Solución general

$$x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$x_0 = 1 \to C_1 + C_2 = 1$

$x_1 = \alpha \to C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha$

$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}(1-2\alpha)$

$C_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}(1-2\alpha)$

$$\boxed{x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}(1-2\alpha)\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}(1-2\alpha)\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

b) $\{y_n\}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_n} & n \geq 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

4 (continuación)

$$\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \frac{1}{1 + \frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} + x_n}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

$$y_0 = \frac{x_0}{x_1} = \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Terminar como el ejercicio 9c

13 $I_n = C_n - K C_{n-1} + G$

$I_n = b I_{n-1} - K b (I_{n-2}) + G$

$I_{n+2} - b I_{n+1} + K b I_n - G = 0$. ED lineal orden 2 completa.

Para que haya convergencia

- Solución constante

$$s - bs + Kbs = G$$

$$s(1 - b + Kb) = G$$

$$1 - b + Kb \neq 0 \Rightarrow s = \frac{G}{1 - b + Kb}$$

- Resuelvo la ec. homogénea.

$$\lambda^2 - \lambda b + Kb = 0$$

$$S_n^{H} = A_1 \lambda_1^n + \lambda_2^n A_2$$

- Solución completa

$$S_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \frac{G}{1 - b + Kb}$$

Converge hacia la solución constante si y solo si $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p(-1) > 0 \\ p(1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{array}$$

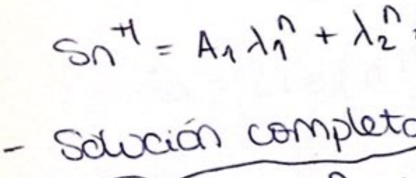
$p(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + Kb$

$p(1) = 1 - b + Kb > 0$

$p(-1) = 1 + b + Kb > 0$

$p(0) = Kb < 1$ condición.

$$\boxed{b < \frac{1}{K}}$$



14

$$Y_n = \alpha(Y_{n-1}) + \beta(k(C_n - C_{n-1}) + 6)$$

$$Y_n = \alpha(\cancel{Y}_{n-1}) + \beta[k(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + 6]$$

$$Y_{n+2} = \alpha Y_{n+1} + \beta[k(Y_{n+1} - Y_n) + 6]$$

$$Y_{n+2} = \alpha Y_{n+1} + \beta k Y_{n+1} - \beta k Y_n + \beta 6$$

$$\boxed{Y_{n+2} - (\alpha + \beta k) Y_{n+1} + \beta k Y_n = \beta 6}$$

calculo la solución cte

$$y - (\alpha + \cancel{\beta k})y + \cancel{\beta k y} = \beta 6$$

$$y(1-\alpha) = \beta 6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\beta 6}{1-\alpha}}$$ solución de equilibrio.

Solución homogénea

$$Y_{n+2} - (\alpha + \beta k) Y_{n+1} + \beta k Y_n = 0$$

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta k)\lambda + \beta k = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p(1) > 0 \\ p(-1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{array}$$

$0 < \alpha < 1$

$$p(1) = 1 - \alpha - \beta k + \beta k = 1 - \alpha > 0$$

$$p(-1) = 1 + \alpha + \beta k + \beta k = 1 + \alpha + 2\beta k > 0$$

$0 < \alpha < 1$
$0 < \beta < 1$

$p(0) = bk > 0$ ¿pero cuando es 1? como $k > 0$

$a_0 < 1$ cuando $bk < 1 \Rightarrow \beta < \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} Y_n = 0 \to \lim_{n \to \infty} Y_n = Y_*$

$$Y_n = Y_{n+2} - (\alpha + \beta) Y_{n+1} + \beta k Y_n + \frac{\beta 6}{1-\alpha}$$

→ si esto converge a 0 entonces converge a un único equilibrio

15

a) $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$

$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$

$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} < \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{array}$

$|\lambda_1| = 1 \quad |\lambda_2| = 1 \quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$

$S_n = A_1 \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + A_2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

b) $x_0 = 2 \Rightarrow 2 = A_1$

$x_1 = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_2$ $\Big\}$ $\boxed{A_2 = 0}$ $\quad 2\pi = n\frac{\pi}{3}$ $\quad n = 6$

$S_n = 2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow$ cada 6 se repite

16 a) $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$

divido todo por x_n

$\frac{x_{n+2}}{x_n} + a\frac{x_{n+1}}{x_n} + b\frac{\cancel{x_n}}{\cancel{x_n}} = 0$

multiplico y divido por x_{n+1}.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} + \alpha\frac{x_{n+1}}{x_n} + b$

$2 \cdot 2 + \alpha 2 + b = 0 \quad \boxed{4 + 2\alpha + b = 0}$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + b$

$p(2) = 4 + 2\alpha + b$

$p'(\lambda) = 2\lambda + \alpha$

$p'(2) = 4 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -4$

si $\alpha = -4$ raíz doble

si $\alpha \neq -4$ raíz simple

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \Rightarrow a^2 - 4b \geq 0$$

$p(2) = 4 + 2a + b = 0$

$b = -4$

b) $x_{n+2} + \alpha x_{n+1} + b x_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + b$; $\lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

acotada ( )

$\lambda = -\dfrac{a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2} i$ son acotadas ¿convergen?

Fórmula Moivre

$S_n = A_1 \cdot |\lambda_1|^n \cos(n\theta) + A_2 |\lambda_2|^n \operatorname{sen}(n\theta)$

$$\boxed{S_n = A_1 \cos(n\theta) + A_2 \operatorname{sen}(n\theta)}$$

Para que converjan

$|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ } $\lim \lambda^n \to 0$

$|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$ } $\lim \lambda^n \to \infty$ (diverge)

$|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$ } $\lim \lambda^n \to$ converge y acotada.

17

a) $x - \alpha(1+\beta)x + \alpha\beta x = 1$

$x(1-\alpha(1+\beta)+\alpha\beta) = 1$

$x(1-\alpha-\cancel{\alpha\beta}+\cancel{\alpha\beta}) = 1$

$x = \frac{1}{1-\alpha}$ $\alpha \neq 1$

b) $\lim x_n = 0 \iff \begin{cases} p(1) > 0 \\ p(-1) > 0 \\ p(0)\ 1 \end{cases}$

como $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$

$p(1) = 1-\alpha(1+\beta)+\cancel{\alpha\beta} = 1-\alpha = 1-\alpha$

$p(-1) = 1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta = 1+2\alpha\beta+\alpha > 0$

$\alpha\beta < 1 \rightarrow \alpha < \frac{1}{\beta}$

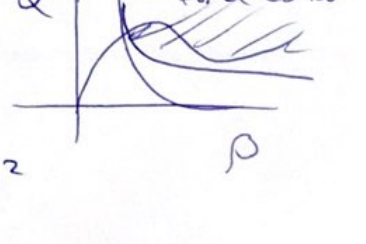
c) Teoría

x_n oscila alrededor de x^* $\iff$ x_f^{+1} oscilante alrededor de $\emptyset$ (se mantiene en la circunf. ud.)

Para que oscilen necesito soluciones complejas y de mod 1

$|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ $\{\alpha_1, \alpha_2\} \neq 1$

$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha(1+\beta)\lambda + \alpha\beta \rightarrow \sqrt{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow \alpha\beta = 1$



Complejas $\Rightarrow \alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta \leq 0$

$\alpha(1+\beta)^2 - 4\beta < 0$ $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$

$\alpha(1+\beta)^2 < 4\beta$

Modelos Matemáticos I – 2º Curso – Curso 2018/19

Grado en Informática y Matemáticas (UGR)

Primera prueba parcial con soluciones. Temas 1 y 2

1. (5 puntos) El *efecto Allee* se produce en poblaciones que se extinguen si el tamaño inicial de la población es demasiado pequeño, pero sobreviven si el tamaño inicial es suficientemente grande. Uno de los modelos matemáticos que ha sido propuesto para modelar el crecimiento de una población sujeta al *efecto Allee* es

$$x_{n+1} = \frac{r\,x_n^2}{x_n^2 + A}, \quad n \geqslant 0, \quad x_0 > 0, \tag{1}$$

donde r y A son constantes positivas que dependen de la población estudiada.

a) (0,5 puntos) A partir de la ecuación anterior, construya un sistema dinámico discreto (SDD).

b) (1 punto) Calcule el/los punto/s de equilibrio del SDD en téminos de los parámetros r y A.

c) (2 puntos) Estudie la estabilidad del/de los punto/s de equilibrio en términos de r y A.

d) (0,5 puntos) Realice un gráfico cobweb que describa el comportamiento del SDD anterior.

e) (0,5 puntos) ¿Depende el crecimiento de la población de la cantidad inicial de individuos?

f) (0,5 puntos) ¿Diría que el modelo anterior describe el *efecto Allee*?

Solución

a) Definimos la función

$$f(x) = \frac{r\,x^2}{x^2 + A}, \tag{2}$$

que es una función real de variable real de clase infinito en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, y, puesto que los parámetros r y A son estrictamente positivos, aplica números positivos en positivos. Así tomaremos $\{\mathbb{R}_0^+, f\}$ como nuestro SDD.

b) Calcularemos las soluciones de la ecuación $f(x) = x$, esto es,

$$x = \frac{r\,x^2}{x^2 + A} \quad \Rightarrow \quad x^3 - rx^2 + Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - rx + A) = 0$$

luego las soluciones a la ecuación anterior son:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4A}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4A}}{2}.$$

Observemos que los puntos de equilibrio deben ser números reales contenidos en el intervalo $I = \mathbb{R}_0^+$, luego debemos imponer $r^2 \geqslant 4\,A$.

Esto es, tenemos tres casos:

- **Caso 1** si $r^2 < 4\,A$, sólo hay un punto de equilibrio $\alpha_0 = 0$;
- **Caso 2** si $r^2 = 4\,A$, hay dos puntos de equilibrio $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 := \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{r}{2}$;
- **Caso 3** si $r^2 > 4\,A$, hay tres puntos de equilibrio $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = \frac{r-\sqrt{r^2-4A}}{2}$ y $\alpha_3 = \frac{r+\sqrt{r^2-4A}}{2}$.

En todos los casos, los puntos de equilibrio están en $I = \mathbb{R}_0^+$.

c) Estudiemos la estabilidad. La derivada de la función $f(x)$ viene dada por

$$f'(x) = \frac{2\,r\,A\,x}{(x^2 + A)^2},$$

luego $f'(0) = 0$, y $f'(x) > 0$ para $x > 0$, luego la función $f(x)$ es estrictamente creciente para números estrictamente positivos.

Caso 1 Si $r^2 < 4\,A$, se verifica que $\alpha_0 = 0$ es el único punto fijo, y $f'(0) = 0$, luego es localmente asintóticamente estable.

Caso 2 De nuevo, $\alpha_0 = 0$ es un punto l.a.e. pues $f'(0) = 0$. Ahora $r^2 = 4\,A$, y hay otro punto fijo $\alpha_1 = \frac{r}{2}$. Sustituyendo

$$|f'(\alpha_1)| = |f'(r/2)| = \frac{2\,r\,A\,(r/2)}{((r/2)^2 + A)^2} = \frac{16\,A\,r^2}{(r^2 + 4\,A)^2} = \frac{4\,r^4}{4\,r^4} = 1,$$

luego debemos estudiar la derivada segunda en el punto α_1. Observemos que

$$f''(x) = \frac{2\,r\,A(A - 3\,x^2)}{(x^2 + A)^3},$$

que será nula o no en $\alpha_1 = \frac{r}{2}$ evaluando sólo el término $(A - 3\,x^2)$. En este caso,

$$A - 3\,(r/2)^2 = A - 3\,\frac{r^2}{4} = A - 3\,\frac{4\,A}{4} = -2\,A \neq 0,$$

y así, $\alpha_1 = \frac{r}{2}$ es inestable. Veremos más adelante que es semiestable.

Caso 3 Finalmente, supongamos que $r^2 > 4\,A$. De nuevo, $\alpha_0 = 0$ es l.a.e. Tenemos que estudiar la estabilidad de los otros puntos de equilibrio $\alpha_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4A}}{2}$ y $\alpha_3 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4A}}{2}$.
Evaluemos la derivada en los puntos de equilibrio α_i, $i = 2, 3$.

$$\begin{aligned} |f'(\alpha_i)| &= \frac{2\,r\,A\,\alpha_i}{(\alpha_i^2 + A)^2} = \frac{16rA(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})}{((r \pm \sqrt{r^2 - 4A})^2 + 4A)^2} = \frac{16rA(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})}{(r^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - 4A} + r^2 - 4A + 4A)^2} \\ &= \frac{16rA(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})}{(2r^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - 4A})^2} = \frac{4A(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})}{r(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})^2} = \frac{4A}{r(r \pm \sqrt{r^2 - 4A})}. \end{aligned}$$

De este modo, bajo la condición $r^2 > 4A$, es fácil ver que

$$|f'(\alpha_2)| = \frac{4A}{r(r - \sqrt{r^2 - 4A})} > 1, \quad |f'(\alpha_3)| = \frac{4A}{r(r + \sqrt{r^2 - 4A})} < \frac{4A}{r^2} < 1,$$

y así α_2 es inestable y α_3 es l.a.e.

Estudiaremos[1] el comportamiento de la sucesión $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$

Caso 1 Veamos que el punto $\alpha_0 = 0$ es globalmente asintóticamente estable en este caso. Para ello estudiamos la sucesión $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$, para $x_0 > 0$ dado, y veamos la posición de x_1 respecto a x_0. Para ello, puesto que

$$0 < x_1 = f(x_0) = \frac{r\,x_0^2}{x_0^2 + A} = x_0 \left[\frac{r\,x_0}{x_0^2 + A}\right],$$

si demostramos que lo que hay en el corchete (que es positivo) es menor que 1, se tendría $x_1 < x_0$. Observemos que

$$\frac{r\,x_0}{x_0^2 + A} < 1 \iff r\,x_0 < x_0^2 + A \iff 0 < x_0^2 - r\,x_0 + A$$

Es fácil ver que este último polinomio no tiene raíces reales ($r^2 < 4\,A$), luego siempre es positivo, y de este modo, $0 < x_1 < x_0$. Por inducción se puede demostrar que si

$$0 < x_0 \implies 0 < x_{n+1} < x_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Así la sucesión $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ es estrictamente decreciente para cualquier $x_0 > 0$ inicial y acotada inferiormente, luego converge hacia el punto fijo $\alpha_0 = 0$.

Podemos afirmar que en este caso, $\alpha_0 = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Caso 2 (Recordemos $r^2 = 4A$) De nuevo, $\alpha_0 = 0$ es un punto l.a.e. y $\alpha_1 = \frac{r}{2}$ es inestable. Veamos que es semiestable.

[1]Esta parte se considera adicional, y no es esencial para obtener la máxima nota en este apartado.

Tomemos un punto inicial $x_0 > 0$ arbitrario. Queremos conocer la posición de x_1 respecto a x_0. Para ello, como antes,

$$0 < x_1 = f(x_0) = \frac{r\,x_0^2}{x_0^2 + (r^2/4)} = x_0\left[\frac{4\,r\,x_0}{4\,x_0^2 + r^2}\right].$$

si demostramos que lo que hay en el corchete (que es positivo) es menor que 1, se tendría $x_1 < x_0$. Observemos que

$$\frac{4\,r\,x_0}{4\,x_0^2 + r^2} < 1 \iff 4\,r\,x_0 < 4\,x_0^2 + r^2 \iff 0 < 4\,x_0^2 - 4\,r\,x_0 + r^2 \iff 0 < 4\left(x_0 - \frac{r}{2}\right)^2$$

que siempre es estricamente positivo, con lo que $0 < x_1 < x_0$. Por inducción se puede demostrar que si $0 < x_0$, entonces $0 < x_{n+1} < x_n$, $n \geqslant 0$. Así la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es estrictamente decreciente para cualquier $x_0 > 0$ inicial.

Si elegimos $x_0 > \alpha_1 = r/2$, entonces por ser f estrictamente creciente, $x_1 = f(x_0) > f(r/2) = r/2$, y por inducción

$$x_n > x_{n+1} > \frac{r}{2}, \qquad n \geqslant 0,$$

luego $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es estrictamente decreciente, acotada inferiormente, y convergerá al punto fijo $r/2$.

Si tomamos $x_0 < r/2 = \alpha_1$, de la misma forma la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es estrictamente decreciente, pero ahora

$$0 < x_{n+1} < x_n < r/2, \qquad n \geqslant 0,$$

luego convergerá al otro punto fijo $\alpha_0 = 0$.

Caso 3 Finalmente, supongamos que $r^2 > 4\,A$. Al igual que en los casos anteriores, vamos a ver la posición de x_1 con respecto a $x_0 > 0$ dado. De nuevo

$$0 < x_1 = f(x_0) = \frac{r\,x_0^2}{x_0^2 + A} = x_0\left[\frac{r\,x_0}{x_0^2 + A}\right],$$

y estudiaremos lo que hay dentro del corchete. Observemos que

$$\frac{r\,x_0}{x_0^2 + A} < 1 \iff r\,x_0 < x_0^2 + A \iff 0 < x_0^2 - r\,x_0 + A$$
$$\iff 0 < \left(x - \frac{r - \sqrt{r^2 - 4A}}{2}\right)\left(x - \frac{r + \sqrt{r^2 - 4A}}{2}\right).$$

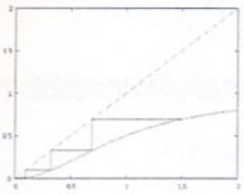
De este modo:

Si $x_0 < \alpha_2$ o $x_0 > \alpha_3$ entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es estrictamente decreciente ya que el término del corchete es menor estricto que 1. Si $x_0 < \alpha_2$, la sucesión es de términos positivos, decrece y está acotada inferiormente, luego converge a $\alpha_0 = 0$. Si $\alpha_3 < x_0$, de nuevo la sucesión decrece, pero ahora está acotada inferiormente por α_3, luego convergerá a α_3.

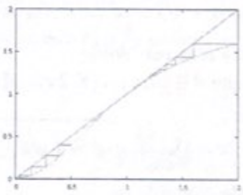
Por último, si $\alpha_2 < x_0 < \alpha_3$, entonces el término del corchete es mayor que 1, luego la sucesión es estrictamente creciente y acotada por α_3, luego converge a α_3.

Así α_0 es l.a.e., α_2 es inestable, y α_3 es l.a.e., y además atrae todas las órbitas que empiezan en $x_0 > \alpha_3$.

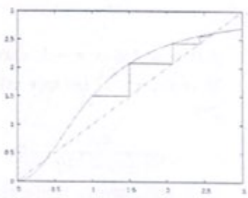
c) Se presentan tres gráficos, cada uno correspondiente a cada uno de los casos:



Caso 1: $r^2 < 4\,A$



Caso 2: $r^2 = 4\,A$



Caso 3: $r^2 > 4\,A$

d) Según se ha demostrado anteriormente, el comportamiento depende de la cantidad inicial de individuos:

- **Caso 1** ($r^2 < 4A$): Todas las órbitas decrecen al punto fijo $\alpha_0 = 0$.
- **Caso 2** ($r^2 = 4A$): Si $0 < x_0 < \alpha_1 = r/2$, entonces su órbita decrece al punto fijo $\alpha_0 = 0$. Por el contrario, si el punto inicial verifica $r/2 = \alpha_1 < x_0$, de nuevo las órbitas decrecen, pero ahora al punto fijo $\alpha_1 = r/2$.
- **Caso 3** ($r^2 > 4A$): De nuevo, si $0 < x_0 < \alpha_2$, entonces todas las órbitas decrecen al punto fijo $\alpha_0 = 0$. Si el punto inicial cumple $\alpha_2 < x_0 < \alpha_3$, las órbitas crecen hacia α_3, y si $\alpha_3 < x_0$, las órbitas decrecen al punto fijo α_3.

e) Si describe el efecto Allee, ya que en todos los casos hay un umbral bajo el cual todas las órbitas convergen al punto de equilibrio $\alpha_0 = 0$.

2. (5 puntos) Los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n \equiv T_n(\alpha)$ pueden definirse mediante la ***relación de recurrencia a tres términos***

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \alpha, \quad T_{n+1} = 2\,\alpha\,T_n - T_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

donde $\alpha \in [-1, 1]$.

a) (0,5 puntos) Demuestre por inducción que T_n es un polinomio en α de grado exacto n.

b) (2 puntos) Supongamos que $\alpha = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Proporcione una expresión explícita de T_n.

c) (0,5 puntos) Determine el comportamiento asintótico de T_n.

d) (2 puntos) Consideremos ahora la perturbación de la relación (3) dada por

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \alpha, \quad T_{n+1} = 2\,\alpha T_n - T_{n-1} + K, \quad n \geqslant 1, \tag{4}$$

donde $\alpha = \cos\theta \in [-1, 1]$ y $K \neq 0$.
Determine de nuevo la expresión la explícita de T_n en términos de los parámetros α y K, y su comportamiento a largo plazo.

Solución

a) Directamente de las condiciones iniciales en (3), tenemos que el grado en α de T_0 es cero, y el grado de T_1 es uno. Supongamos, por hipótesis de inducción, que el grado de T_m es m para $0 \leqslant m \leqslant n$. Usando la relación recurrente, se tiene:

$$\text{grado}(T_{n+1}) = \text{máx}\{\text{grado}(T_n) + 1, \text{grado}(T_{n-1})\} = n + 1,$$

como queríamos demostrar.

b) Resolvamos la ecuación lineal en diferencias de segundo orden:

$$T_{n+2} - 2\,\alpha\,T_{n+1} + T_n = 0.$$

Obsevemos que las soluciones del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\alpha + 1$ son

$$\lambda = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = \alpha \pm \sqrt{1 - \alpha^2}\, i,$$

cuando $\alpha \in (-1, 1)$, esto es,

$$\lambda_* = \alpha + \sqrt{1 - \alpha^2}\, i, \qquad \bar{\lambda}_* = \alpha - \sqrt{1 - \alpha^2}\, i,$$

y si $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$, entonces $\lambda_* = \alpha$ es raíz doble.
Si $\alpha \in (-1, 1)$ (lo que equivale a que $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$), el módulo de este número complejo viene dado por

$$r = |\lambda_*| = \sqrt{\alpha^2 + \left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right)^2} = 1,$$

y su argumento, teniendo en cuenta que $\alpha = \cos\theta$,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \theta.$$

De este modo, usando la fórmula de Moivre,

$$T_n = c_1 \cos(n\,\theta) + c_2 \sin(n\,\theta), \quad n \geqslant 0.$$

Calculemos las constantes usando los valores inciales:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, \\ T_1 &= \alpha = \cos\theta + c_2 \sin\theta \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \cos\theta$.
De este modo,

$$T_n = \cos(n\,\theta), \quad n \geqslant 0, \quad \theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi). \tag{5}$$

Supongamos ahora que $\alpha = -1$ o $\alpha = 1$. En estos dos casos, α es una raíz doble, y la expresión de T_n es ahora

$$T_n = (d_1 + d_2\,n)\alpha^n, \qquad n \geq 0.$$

- Si $\alpha = 1$, ajustando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 = d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1, \\ T_1 &= \alpha = 1 = d_1 + d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0, \end{aligned}$$

  luego $T_n = 1, n \geqslant 0$, con lo que la sucesión es constante.
- Finalmente, si $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 = d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1, \\ T_1 &= \alpha = -1 = -(d_1 + d_2) \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0, \end{aligned}$$

  y así $T_n = (-1)^n, n \geqslant 0$.

Observemos que si $\alpha = 1$, entonces $\cos\theta = 1$, luego $\theta = 0$, y si $\alpha = -1$, se tiene $\theta = \pi$. Estos dos valores pueden ser incluidos en (5), y la fórmula es válida $\forall \theta \in [0, 2\pi)$.

c) Si n crece, T_n oscila pues es un coseno, y está acotado entre los valores -1 y 1.

d) Ahora debemos resolver una ecuación completa, con término independiente constante. Recordemos que una solución de la ecuación completa se obtiene sumando la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la completa. La solución de la ecuación homogénea se ha obtenido en los apartados anteriores, debemos buscar una solución particular.
Como el término independiente es una constante, buscamos una solución constante T_*^p:

$$T_*^p - 2\,\alpha\,T_*^p + T_*^p = K \quad \Rightarrow \quad (2 - 2\,\alpha)T_*^p = K.$$

Por tanto, si $\alpha \neq 1$, la solución particular es la constante

$$T_*^p = \frac{K}{2(1-\alpha)},$$

la solución a la ecuación completa será

$$T_n = \widehat{c}_1 \cos(n\,\theta) + \widehat{c}_2 \sin(n\theta) + \frac{K}{2(1-\cos\theta)},$$

y ajustando los términos iniciales,

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 = \widehat{c}_1 \cos 0 + \widehat{c}_2 \sin 0 + \frac{K}{2(1-\cos\theta)} \quad \Rightarrow \quad \widehat{c}_1 = 1 - \frac{K}{2(1-\cos\theta)}, \\ T_1 &= \cos\theta = \cos\theta + \widehat{c}_2 \sin\theta + \frac{K}{2(1-\cos\theta)} \quad \Rightarrow \quad \widehat{c}_2 = -\frac{K}{2(1-\cos\theta)\sin\theta}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$T_n = \left[1 - \frac{K}{2(1-\cos\theta)}\right]\cos(n\,\theta) - \left[\frac{K}{2(1-\cos\theta)\sin\theta}\right]\sin(n\theta) + \frac{K}{2(1-\cos\theta)}.$$

Finalmente, supongamos que $\alpha = \cos\theta = 1$. En este caso no hay soluciones particulares constantes, y además, según se ha visto en aprtados anteriores, $\alpha = 1$ es una raíz doble del polinomio característico, luego debemos tomar una solución particular de la forma $T_n^p = \widetilde{c}_1\, n^2$. Ajustamos la constante sustituyendo en la propia ecuación:

$$\widetilde{c}_1(n+2)^2 - 2\,\widetilde{c}_1(n+1)^2 + \widetilde{c}_1\, n^2 = K,$$

de donde

$$\widetilde{c}_1 = K/2,$$

y así $T_n^p = \frac{K}{2}n^2$.

De este modo, la solución a la ecuación completa será

$$T_n = \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2\, n + \frac{K}{2}\, n^2,$$

y ajustando los términos iniciales,

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 = \widehat{d}_1 \qquad \Rightarrow \quad \widehat{d}_1 = 1, \\ T_1 &= \alpha = 1 = \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \frac{K}{2} \qquad \Rightarrow \quad \widehat{d}_2 = -\frac{K}{2}. \end{aligned}$$

En este caso,

$$T_n = 1 - \frac{K}{2}\, n + \frac{K}{2}\, n^2.$$

Granada, a 9 de abril de 2019

Tiempo: Dos horas