Análisis Matemático II

Tema 2: Series de funciones

8, 9 y 15 de marzo

Series de funciones

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$$A \neq \emptyset, \qquad \{f_n\} \text{ sucesión de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{ es decir, } \ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \ \ \forall x \in A, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{ es decir, } \ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \ \ \forall x \in A, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

Toda sucesión de funciones $\{g_n\}$ se puede expresar como serie:

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$

Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$

Toda sucesión de funciones $\{g_n\}$ se puede expresar como serie:

$$\{g_n\} = \sum_{n\geqslant 1} (g_n - g_{n-1}) \qquad \text{donde} \qquad g_0 = 0$$

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$$\emptyset \neq C \subset A, \qquad \sum_{n \geqslant 1} f_n \text{ serie de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$$\emptyset \neq C \subset A, \qquad \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ serie de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando

la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$\emptyset \neq C \subset A$, $\quad \sum_{n\geqslant 1} f_n$ serie de funciones de A en $\mathbb{R}$

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando

la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente

Por tanto $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C cuando

la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, para todo $x \in C$

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$$\emptyset \neq C \subset A, \qquad \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ serie de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando

la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente

Por tanto $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C cuando

la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, para todo $x \in C$

Entonces, la suma de la serie en C es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$$\emptyset \neq C \subset A\,, \qquad \sum_{n\geqslant 1} f_n \ \text{ serie de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando

la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente

Por tanto $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C cuando

la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, para todo $x \in C$

Entonces, la suma de la serie en C es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall\, x \in C$$

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme y criterio de Cauchy

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme y criterio de Cauchy

Supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C

y sea $f : C \to \mathbb{R}$ la suma de dicha serie en C

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme y criterio de Cauchy

Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C

y sea $f : C \to \mathbb{R}$ la suma de dicha serie en C

Entonces, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme y criterio de Cauchy

Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C

y sea $f : C \to \mathbb{R}$ la suma de dicha serie en C

Entonces, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, m \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Esto equivale a que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sea uniformemente de Cauchy en C, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, m \in \mathbb{N} \ : \ m \leqslant p < q \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Otras formas de numerar los sumandos

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

$f_n : A \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos:

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

$f_n : A \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{n-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\}$$

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

$f_n : A \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\quad m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{n-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\}$$

$$\sum_{n \geqslant m+1} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n} f_k \right\}$$

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

$f_n : A \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{n-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\}$$

$$\sum_{n \geqslant m+1} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n} f_k \right\}$$

Si convergen puntualmente en un conjunto $C \subset A$,

sus sumas vienen dadas, para todo $x \in C$, por

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{m+n}(x)$$

Convergencia de series con otra numeración

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ que a su vez equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall\, x \in C$$

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

La numeración no afecta a la convergencia uniforme

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

La numeración no afecta a la convergencia uniforme

La convergencia uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum_{n\geqslant m+1} f_n$

Resto y término general de una serie

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall\, x \in C\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si,

$\{R_n\}$ converge uniformemente a cero en C

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si,

$\{R_n\}$ converge uniformemente a cero en C

Condición necesaria para la convergencia uniforme

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si,

$\{R_n\}$ converge uniformemente a cero en C

Condición necesaria para la convergencia uniforme

Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto C, entonces

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si,

$\{R_n\}$ converge uniformemente a cero en C

Condición necesaria para la convergencia uniforme

Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto C, entonces su término general converge uniformemente a cero en C

Convergencia uniforme de series y continuidad

Convergencia uniforme de series y continuidad

Continuidad de la suma de una serie

Convergencia uniforme de series y continuidad

Continuidad de la suma de una serie

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,
sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0

Convergencia uniforme de series y continuidad

Continuidad de la suma de una serie

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,
sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente
en un entorno U del punto x_0,
y sea $f : U \to \mathbb{R}$ su suma, es decir: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in U$

Convergencia uniforme de series y continuidad

Continuidad de la suma de una serie

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente

en un entorno U del punto x_0,

y sea $f : U \to \mathbb{R}$ su suma, es decir: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in U$

Entonces f es continua en el punto x_0

Convergencia uniforme de series y derivación

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J

y definiendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$,

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J

y definiendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$,

se tiene que la función $f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,
para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J

y definiendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$,

se tiene que la función $f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in J$$

Convergencia uniforme de series e integración

Convergencia uniforme de series e integración

Integral de la suma de una serie

Convergencia uniforme de series e integración

Integral de la suma de una serie

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$,

Convergencia uniforme de series e integración

Integral de la suma de una serie

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$,

Si la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, se tiene que

Convergencia uniforme de series e integración

Integral de la suma de una serie

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$,

Si la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, se tiene que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Relación con la convergencia puntual

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Relación con la convergencia puntual

Si la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Relación con la convergencia puntual

Si la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

entonces también converge puntualmente en C y se verifica que

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Relación con la convergencia puntual

Si la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

entonces también converge puntualmente en C y se verifica que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right| \qquad \forall x \in C$$

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que existe una serie convergente $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ de números reales, tal que

$$\left| f_n(x) \right| \leqslant M_n \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que existe una serie convergente $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ de números reales, tal que

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant M_n \qquad \forall x\in C\,, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

Series de potencias

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Llamamos serie de potencias a toda serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en la que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Llamamos serie de potencias a toda serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ en la que,

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

$$f_n(x) = c_n \left(x - a\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Llamamos serie de potencias a toda serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ en la que,

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

$$f_n(x) = c_n \left(x - a\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$

Se dice que tal serie está centrada en el punto $a \in \mathbb{R}$,

y para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_n \in \mathbb{R}$ es su n-ésimo coeficiente

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Llamamos serie de potencias a toda serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en la que,

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

$$f_n(x) = c_n \left(x - a\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$

Se dice que tal serie está centrada en el punto $a \in \mathbb{R}$,

y para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_n \in \mathbb{R}$ es su n-ésimo coeficiente

La anterior serie de potencias de denota por $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

Radio de convergencia de una serie de potencias

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, su límite superior viene dado por

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales,

su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant n\}\right)$$

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales,

su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant n\}\right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales,

su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant n\} \right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant n\}\right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia

El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

es la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definida por

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales,

su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant n\} \Big)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia

El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

es la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definida por

$$R = 1/L \qquad \text{donde} \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N},\ \ k \geqslant n\} \right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia

El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

es la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definida por

$$R = 1/L \qquad \text{donde} \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

entendiendo que $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$

Convergencia de las series de potencias (I)

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \Big\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\Big\}$$

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \Big\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\Big\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\right\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\right\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\right\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

La serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$,

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \Big\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\Big\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

La serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$,

y en particular, converge absolutamente en J.

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\right\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

La serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$,

y en particular, converge absolutamente en J.

Además, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \left(\overline{J} \cup \{a\}\right)$

Convergencia de las series de potencias (II)

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$

  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$
  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$

  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

  La serie sólo converge en el punto a

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$

  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

  La serie sólo converge en el punto a

- Radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$, intervalo de convergencia $]a-R, a+R[$:

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$

  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

  La serie sólo converge en el punto a

- Radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$, intervalo de convergencia $]a-R, a+R[$:

  La serie converge absolutamente en $]a-R, a+R[$,

  y uniformemente en cada compacto $K \subset]a-R, a+R[$.

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$

  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

  La serie sólo converge en el punto a

- Radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$, intervalo de convergencia $]a-R, a+R[$:

  La serie converge absolutamente en $]a-R, a+R[$,

  y uniformemente en cada compacto $K \subset]a-R, a+R[$.

  No converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\left\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\right\}$ es finito

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\left\{ n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0 \right\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$
- La primera no converge en 1 ni en -1

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R=1$
- La primera no converge en 1 ni en -1
- La segunda converge en el punto -1 pero no en 1

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$
- La primera no converge en 1 ni en -1
- La segunda converge en el punto -1 pero no en 1
- La tercera converge uniformemente en $[-1, 1]$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\left\{n\in\mathbb{N} : c_n\neq 0\right\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R=1$
- La primera no converge en 1 ni en -1
- La segunda converge en el punto -1 pero no en 1
- La tercera converge uniformemente en $[-1,1]$
- La primera no converge uniformemente en $]-1,1[$

La suma de una serie de potencias

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}(x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$ y $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1} (x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1} (x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (x-a)^n \quad \forall x \in J$

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}(x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R\neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \forall x\in J$

Entonces f es de clase C^{∞} en J. Además, para todo $k\in\mathbb{N}$,

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}(x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R\neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \forall x\in J$

Entonces f es de clase C^{∞} en J. Además, para todo $k\in\mathbb{N}$,

la serie $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}\,(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}(x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R\neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \forall x\in J$

Entonces f es de clase C^{∞} en J. Además, para todo $k\in\mathbb{N}$,

la serie $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}\,(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}\,(x-a)^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}c_n\,(x-a)^{n-k} \quad \forall x\in J$$

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1} (x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \forall x \in J$

Entonces f es de clase C^{∞} en J. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$,

la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k}\,(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k}\,(x-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n\,(x-a)^{n-k} \quad \forall x \in J$$

En particular: $f^{(k)}(a) = k!\, c_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Algunos desarrollos en serie

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El logaritmo

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El logaritmo

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \qquad \forall x \in]0,2[$$