Tema 1

Inducción y recurrencia.

1.1 Introducción a los naturales.

Empezamos aquí a estudiar los números naturales. Todos sabemos que al hablar de los números naturales nos estamos refiriendo a los números $0, 1, 2, \ldots$. Sin embargo, para un estudio de algunas propiedades de los números naturales esta definición de números naturales es totalmente insuficiente. Necesitamos fijar una base como punto de arranque, a partir de la cual iremos desarrollando la teoría.

La primera cuestión que nos planteamos es dónde situar el punto de partida. Las posibilidades son varias. Por ejemplo, podemos empezar postulando la existencia de un conjunto (los números naturales) que satisface una serie de axiomas (los axiomas de Peano). A partir de estos axiomas podemos definir las operaciones básicas que todos conocemos (suma y producto) y el orden.

También es posible situar el punto de arranque en la teoría de conjuntos, y en el marco de esta teoría construir un conjunto $\mathbb{N}$ del cual se demuestra que satisface los axiomas de Peano. En este caso, los axiomas de Peano son una consecuencia de la construcción hecha de $\mathbb{N}$, mientras que en el caso anterior estos axiomas constituyen el principio de la teoría. Una vez demostrados los axiomas de Peano, se enlaza con el caso anterior.

1.2 Axiomática de Peano.

Como hemos dicho, comenzamos suponiendo que tenemos un conjunto $\mathbb{N}$. Los elementos de este conjunto se llaman números naturales.

- El cero es un número natural. $0 \in \mathbb{N}$
- El siguiente de un número natural es un número natural. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sigma(n) \in \mathbb{N}$.
- Cero no es el siguiente de ningún numero natural. $\forall n \in \mathbb{N}\ \sigma(n) \neq 0$
- Si los siguientes de dos números naturales son iguales, entonces los números naturales son iguales.
  $\forall m, n \in \mathbb{N}\ (\sigma(m) = \sigma(n) \to m = n)$
- Si un subconjunto de números naturales tiene el cero y siempre que tiene un número tiene a su siguiente, entonces el subconjunto son todos los números naturales.
  Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple:
  $$\left.\begin{array}{l} 0 \in A \\ \text{Si } n \in A, \text{ entonces } \sigma(n) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Teorema 1.1 *Todo número natural es distinto de su siguiente.* $\forall n \in \mathbb{N}\ n \neq \sigma(n)$

Demostración: Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : x \neq \sigma(x)\}$.
• Como $0 \neq \sigma(0)$, resulta $0 \in A$.
• Supongamos $n \in A$, es decir, $n \neq \sigma(n)$, luego $\sigma(n) \neq \sigma(\sigma(n))$, por tanto, $\sigma(n) \in A$.
Luego $A = \mathbb{N}$. □

Teorema 1.2 *Para cada número natural distinto de cero existe un único número natural del que es su siguiente.* $\forall n \in \mathbb{N}(n \neq 0 \to \exists_1 m \in \mathbb{N}\ n = \sigma(m))$

Demostración: Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \text{ o } \exists m \in \mathbb{N}(x = \sigma(m))\}$.
• Como $0 = 0$, resulta $0 \in A$.
• Supongamos $n \in A$, es decir, $n = 0$ o $n = \sigma(m)$ en cualquier caso $\sigma(n) = \sigma(n)$, por tanto, $\sigma(n) \in A$.
Luego $A = \mathbb{N}$.
La unicidad es consecuencia del axioma 4. □

1.3 Aritmética natural.

1.3.1 Suma de naturales.

Teorema 1.3 *Existe una única* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *que para todo* $m, n \in \mathbb{N}$ *verifica:*

- $m + 0 = m$
- $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Propiedades 1.4 *Para todo* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *se cumple:*

1. *Todo número natural es* 0 *o es el siguiente de un número natural.*
2. $m + 0 = 0 + m = m$.
3. $m + 1 = 1 + m = \sigma(m)$.
4. $(m + n) + p = m + (n + p)$.
5. $m + n = n + m$.
6. *Si* $m + p = n + p$, *entonces* $m = n$.
7. *Si* $m + n = 0$, *entonces* $m = n = 0$.

1.3.2 Producto de naturales.

Teorema 1.5 *Existe una única* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *que para todo* $m, n \in \mathbb{N}$ *verifica:*

- $m \cdot 0 = 0$.
- $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$

Propiedades 1.6 *Para todo* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *se cumple:*

1. $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$
2. $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$
3. $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$
4. $m \cdot n = n \cdot m$
5. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$
6. *Si* $m \cdot n = 0$, *entonces* $m = 0$ *o* $n = 0$

1.3.3 Potencias naturales.

Teorema 1.7 *Existe una única* $\square^{\square} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *que para todo* $m, n \in \mathbb{N}$ *verifica:*

- $m^0 = 1.$
- $m^{\sigma(n)} = m^n \cdot m.$

Propiedades 1.8 *Para todo* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *se cumple:*

1. $0^0 = 1$
2. $0^n = 0$ *para* $1 \leq n$
3. $1^n = 1$
4. $m^{n+p} = m^n \cdot m^p.$
5. $m^{n \cdot p} = (m^n)^p.$

1.3.4 El orden de los naturales.

Definición 1.1 (orden) *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *definimos* m *es menor o igual que* n *(*$m \leq n$*) si* $\exists x \in \mathbb{N}\ m + x = n.$

Propiedades 1.9 *Para todo* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *se cumple:*

1. $m \leq m.$
2. *Si* $m \leq n$ *y* $n \leq m$*, entonces* $m = n.$
3. *Si* $m \leq n$ *y* $n \leq p$*, entonces* $m \leq p.$
4. $m \leq n$ *o* $n \leq m$
5. *Si* $m \leq n$*, entonces* $\exists_1 p \in \mathbb{N}\ m + p = n$ *y lo llamamos* n *menos* m *(*$n - m$*).*
6. *Si* $m \leq n$*, entonces* $m + p \leq n + p.$
7. *Si* $m \leq n$*, entonces* $m \cdot p \leq n \cdot p.$
8. *Si* $m \cdot p \leq n \cdot p$ *y* $p \neq 0$*, entonces* $m \leq n$
9. *Si* $m \cdot p = n \cdot p$ *y* $p \neq 0$*, entonces* $m = n.$

1.3.5 Divisibilidad en $\mathbb{N}$.

Definición 1.2 (orden) *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *definimos* m *divide a* n *(*$m|n$*) si* $\exists x \in \mathbb{N}\ m \cdot x = n.$

Propiedades 1.10

1. $m|m.$
2. *Si* $m|n$ *y* $n|m$*, entonces* $m = n.$
3. *Si* $m|n$ *y* $n|p$*, entonces* $m|p.$
4. *Si* $m|n$*, entonces* $\exists_1 p \in \mathbb{N}\ m \cdot p = n$ *y lo llamamos* n *partido por* m *(*$\dfrac{n}{m}$*).*

1.4 Principio de inducción. Demostraciones por inducción.

Teorema 1.11 *Las tres propiedades que siguen son equivalentes.*

- *Principio de inducción. Si* $A \subseteq \mathbb{N}$ *cumple* $0 \in A$ *y (*$n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$*), entonces* $A = \mathbb{N}.$
- *Principio del buen orden. Todo subconjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*
- *Principio de inducción completa. Si* $A \subseteq \mathbb{N}$ *cumple* $0 \in A$ *y (si* $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq A \Rightarrow n + 1 \in A$*), entonces* $A = \mathbb{N}$

1.5 Ecuaciones en recurrencia.

Presentamos en esta sección una serie de ejemplos, de naturaleza muy diversa, en cuyo análisis obtendremos un variado muestrario de ecuaciones de recurrencia. Podremos ya resolver algunas de ellas con trucos “ad hoc”; para las restantes habrá que esperar a disponer de técnicas más generales, como la de las ecuaciones características y la de las funciones generatrices. Por resolver una ecuación de recurrencia, algo que ya avisamos al lector es en general tarea harto complicada, entendemos hallar una fórmula explícita para la sucesión de números que verifican la recurrencia.

Ejemplo 1.1 *Número de listas de longitud n formada con ceros y unos.*

No parece un ejemplo muy apasionante, dado que la regla del producto nos permite obtener directamente la respuesta: $a_n = 2^n$, para cada $0 < n$. Abordemos el problema desde otro punto de vista, planteando una recurrencia entre los números a_n. Para construir una lista de longitud n con ceros y unos tomamos primero una lista de longitud $n-1$ con las características pedidas (lo podremos hacer de a_{n-1} formas distintas). Luego, a cada una de ellas, le añadimos un 0 o un 1, para obtener así todas las posibles listas de longitud n. Como este procedimiento asocia a cada posible lista de longitud $n-1$ dos listas distintas de longitud n, se tendrá que

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} \ \textit{para}\ 2 \le n}$$

Necesitamos, además, un valor inicial, el número de listas de longitud 1: $a_1 = 2$. El problema queda así resuelto en el siguiente sentido: el conocimiento de a_1 y la relación anterior nos permiten calcular a_2; con a_2, aplicando de nuevo la relación, evaluamos a_3, etc. Pero en este caso, además, podemos resolver la recurrencia y obtener una fórmula explícita para los a_n: basta aplicar reiteradamente la regla para obtener que, para cada $1 \le n$, $a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^2a_{n-2} = 2^3a_{n-3} = \cdots = 2^{n-1}a_1 = 2^n$

Ejemplo 1.2 *Número de regiones del plano determinadas por n rectas no paralelas y que por cualquier punto del plano pasan como máximo dos de ellas.*

Condiciones iniciales: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 11$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + n \ \textit{para}\ 2 \le n}$$

Ejemplo 1.3 *Las torres de Hanoi.*

Condiciones iniciales: $a_1 = 1$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 1 \ \textit{para}\ 2 \le n}$$

Ejemplo 1.4 *Llamemos a_n al número de listas de longitud n formadas con ceros y unos que no tienen unos consecutivos.*

Condiciones iniciales: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \textit{para}\ n \ge 3}$$

Ejemplo 1.5 *Llamemos a_n al número de formas de subir una escalera con n peldaños, si podemos subir uno o dos peldaños de una vez.*

Condiciones iniciales: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \textit{para}\ n \ge 3}$$

Ejemplo 1.6 *Cunicultura. Fibonacci.*

Llamemos F_n al número de parejas de conejos durante el n-ésimo mes.
Condiciones iniciales: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2, \ldots$

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \textit{para}\ n \ge 3}$$

A veces la sucesión de Fibonacci se suele definir como,

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *y* $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \textit{para}\ n \ge 2}$

1.6 Recurrencias homogéneas.

Definición 1.3 *Una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden k con coeficientes constantes es una relación*

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \cdots + c_{n-k}a_{n-k} = 0, \quad \text{con } k \leq n$$

donde $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{n-k}$ son constantes con $c_n \neq 0$ y $c_{n-k} \neq 0$.

Ejemplo 1.7 *Clasificar las ecuaciones que nos han salido en los ejemplos anteriores.*

1. *La ecuación del primer ejemplo $a_n - 2a_{n-1} = 0$ es lineal homogénea de orden 1 y con coeficientes constantes.*
2. *La ecuación del segundo ejemplo $a_n - a_{n-1} = n$ es lineal no homogénea de orden 1 y con coeficientes constantes.*
3. *La ecuación del tercer ejemplo $a_n - 2a_{n-1} = 1$ es lineal no homogénea de orden 1 y con coeficientes constantes.*
4. *Las ecuaciones del cuarto, quinto y sexto ejemplos $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ es lineal homogénea de orden 2 y con coeficientes constantes.*

Ejemplo 1.8 *Hallar una ecuación homogénea que satisfaga la sucesión $a_n = n^2$.*

$\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \\ a_{n-1} = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2n - 1$ *que es una ecuación en recurrencia que satisface n^2 pero no es homogénea. La reescribimos para $n - 1$*

$\left.\begin{array}{l} a_n - a_{n-1} = 2n - 1 \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-1) - 1 = 2n - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ *que es una ecuación en recurrencia que satisface n^2 pero no es homogénea. La reescribimos para $n - 1$*

$\left.\begin{array}{l} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \\ a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$ *que es una ecuación en recurrencia homogénea que satisface n^2.*

Centraremos nuestra atención en hallar la solución de estas ecuaciones. Si fijamos k condiciones iniciales la solución es única. En general encontrar la solución de una ecuación de recurrencia no es fácil. Veamos algunos casos sencillos:

Ejemplo 1.9 (raíces simples) *Condiciones iniciales: $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$*

$$\boxed{a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \quad \text{para } n \geq 2}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^2 + x - 6$

Calculamos sus raíces mediante la fórmula escolar (atribuida a Bhaskaracharya)

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ *luego $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$*

El polinomio característico factoriza como

$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

Solución general $\boxed{s_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 1 = A + B \\ 2 = 2A - 3B \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1$ *y* $B = 0$, *de donde,* $\boxed{a_n = 2^n}$

Ejemplo 1.10 (raíz doble) *Condiciones iniciales: $a_0 = 5$, $a_1 = 12$*

$$\boxed{a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \quad \text{para } n \geq 2}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^2 - 6x + 9$

Calculamos sus raíces mediante la fórmula escolar

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \dfrac{6 \pm 0}{2}$ *luego* $x_1 = 3$ *y* $x_2 = 3$

El polinomio característico factoriza como

$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Solución general $\boxed{s_n = (A \cdot n + B) \cdot 3^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 5 = B \\ 12 = (A+B)3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1$ *y* $B = 5$, *de donde,* $\boxed{a_n = (-n+5) \cdot 3^n}$

Ejemplo 1.11 (raíces complejas simples) *Condiciones iniciales:* $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 1$

$$\boxed{a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \quad \text{para } n \geq 2}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^2 - 2x + 2$

Calculamos sus raíces mediante la fórmula escolar

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2}$ *luego* $x_1 = 1 + i$ *y* $x_2 = 1 - i$

El polinomio característico factoriza como

$x^2 - 2x + 2 = (x - (1+i))(x - (1-i))$

Solución general $\boxed{s_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = A(1+i) + B(1-i) \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{-i}{2},\ B = \frac{i}{2}$ *de donde* $\boxed{a_n = \frac{-i}{2}((1+i)^n - (1-i)^n)}$

Ejemplo 1.12 *Condiciones iniciales:* $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 1$

$$\boxed{a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0 \quad \text{para } n \geq 2}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^2 - 3x - 4$

Calculamos sus raíces mediante la fórmula escolar

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$ *luego* $x_1 = 4$ *y* $x_2 = -1$

El polinomio característico factoriza como

$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$

Solución general $\boxed{s_n = A(-1)^n + B \cdot 4^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = -A + 4B \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{5},\ B = \dfrac{1}{5}$ *de donde* $\boxed{a_n = \dfrac{1}{5}(4^n - (-1)^n)}$

Ejemplo 1.13 *Cunicultura. Fibonacci. Condiciones iniciales:* $F_0 = 0,\ F_1 = 1$

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^2 - x - 1$

Calculamos sus raíces mediante la fórmula escolar

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ *luego* $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ *y* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi}$

El polinomio característico factoriza como

$x^2 - x - 1 = (x-\varphi)(x-\bar{\varphi})$

Solución general $\boxed{s_n = A \cdot \varphi^n + B \cdot \bar{\varphi}^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = A\cdot\varphi + B\cdot\bar{\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow\ A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \textit{de donde,}\ \boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)}$$

Ejemplo 1.14 *Condiciones iniciales:* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *y* $a_2 = 2$

$$\boxed{a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0 \quad \textit{para } n \geq 3}$$

Hallamos el polinomio característico: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Calculamos sus raíces mediante Ruffini

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

El polinomio característico factoriza como

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$

Solución general $\boxed{s_n = A + (B\cdot n + C)\cdot 2^n}$

Solución particular. La hallamos utilizando las condiciones iniciales para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + C \\ 1 = A + 2B + 2C \\ 2 = A + 8B + 4C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = -C \\ 1 = 2B + C \\ 2 = 8B + 3C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 2,\ A = -2\ \textit{y}\ B = -\frac{1}{2},\ \textit{de donde,}\ \boxed{a_n = -2 + (-\frac{1}{2}n + 2)\cdot 2^n}$$

1.7 Recurrencias no homogéneas.

Consideremos ahora recurrencias algo más generales

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \cdots + c_{n-k}a_{n-k} = b^n p(n), \quad \text{para } k \leq n$$

donde $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{n-k}$ son constantes con $c_n \neq 0$ y $c_{n-k} \neq 0$ y b es una constante y $p(n)$ un polinomio en n de grado r.

Ejemplo 1.15 *Volvamos al ejemplo de las torres de Hanoi. Condiciones iniciales:* $a_1 = 1$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 1 \ \textit{para}\ 2 \leq n}$$

Término no homogéneo:

$1 = b^n p(n) \Rightarrow b = 1,\ p(n) = 1,\ gr(p) = 0$

Polinomio característico (de una homogénea que tiene las soluciones de la dada y muchas más):

$(x-2)(x-1)$

Solución general(ísima). General de una homogénea asociada: $\boxed{g_n = A \cdot 2^n + B}$

Extendemos las condiciones iniciales

$a_1 = 1,\ a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$

Solución particular

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2A + B \\ 3 = 4A + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \text{ y } B = -1, \text{ de donde, } \boxed{a_n = 2^n - 1}$$

Extendemos las condiciones iniciales para una sucesión arbitraria

$a_1 = a,\ a_2 = 2a_1 + 1 = 2a + 1$

Solución general de la no homogénea

$$\left.\begin{array}{rl} a = & 2A + B \\ 2a + 1 = & 4A + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{a+1}{2} \text{ y } B = -1, \text{ de donde, } \boxed{s_n = \frac{a+1}{2}2^n - 1}$$

Ejemplo 1.16 *Número de regiones del plano determinadas por n rectas no paralelas y que por cualquier punto del plano pasan como máximo dos de ellas. Condiciones iniciales:* $a_0 = 1$.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + n \text{ para } 1 \le n}$$

Término no homogéneo:

$n = b^n p(n) \Rightarrow b = 1,\ p(n) = n,\ gr(p) = 1$

Polinomio característico:

$(x-1)(x-1)^2$

Solución general de una homogénea asociada: $\boxed{g_n = An^2 + Bn + C}$

Extendemos las condiciones iniciales

$a_0 = 1,\ a_1 = a_0 + 1 = 1 + 1 = 2,\ a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$

Solución particular

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C \\ 2 = A + B + C \\ 4 = 4A + 2B + C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = C \\ 1 = A + B \\ 3 = 4A + 2B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2} \text{ y } C = 1, \text{ de donde } \boxed{a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}}$$

Extendemos las condiciones iniciales para una sucesión arbitraria

$a_0 = a,\ a_1 = a_0 + 1 = a + 1,\ a_2 = a_1 + 2 = a + 1 + 2 = a + 3$

Solución general de la no homogénea

$$\left.\begin{array}{rl} a = & C \\ a + 1 = & A + B + C \\ a + 3 = & 4A + 2B + C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = C \\ 1 = A + B \\ 3 = 4A + 2B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2} \text{ y } C = a, \text{ de donde } \boxed{s_n = \frac{n^2 + n + 2a}{2}}$$

Otras ecuaciones en recurrencia no homogéneas

Todavía algo más generales

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = \sum_{i=1}^{i=r} b_i^n p_i(n), \quad \text{para } k \le n$$

donde $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{n-k}$ son constantes con $c_n \neq 0$ y $c_{n-k} \neq 0$ y b_i es una constante y $p_i(n)$ un polinomio en n de grado r_i.

Ejemplo 1.17 *Condiciones iniciales:* $a_0 = 0$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + n + 2^n \text{ para } 1 \leq n}$$

Términos no homogéneos:

$n = b^n p(n) \Rightarrow b = 1,\ p(n) = n,\ gr(p) = 1$ *y* $2^n = b^n p(n) \Rightarrow b = 2,\ p(n) = 1,\ gr(p) = 0$

Polinomio característico:

$(x-2)(x-1)^2(x-2)$

Solución general de una homogénea asociada: $\boxed{g_n = (An+B) \cdot 2^n + Cn + D}$

Extendemos las condiciones iniciales

$a_0 = 0,\ a_1 = 2a_0 + 1 + 2^1 = 0 + 1 + 2 = 3,\ a_2 = 2a_1 + 2 + 2^2 = 12$ *y* $a_3 = 2a_2 + 3 + 2^3 = 35$

Solución particular

$$\left.\begin{array}{r} 0 = B + D \\ 3 = 2A + 2B + C + D \\ 12 = 8A + 4B + 2C + D \\ 35 = 24A + 8B + 3C + D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} B = -D \\ 3 = 2A + C - D \\ 12 = 8A + 2C - 3D \\ 35 = 24A + 3C - 7D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B = -D \\ D = -3 + 2A + C \\ 3 = 2A - C \\ 7 = 5A - 2C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A = 1,\ C = -1,\ D = -2$ *y* $B = 2$, *de donde* $\boxed{a_n = (n+2)2^n - (n+2) = (n+2)(2^n - 1)}$

Extendemos las condiciones iniciales para una sucesión arbitraria

$a_0 = a,\ a_1 = 2a_0 + 1 + 2^1 = a + 1 + 2 = 2a + 3,\ a_2 = 2a_1 + 2 + 2^2 = 4a + 12$ *y* $a_3 = 2a_2 + 3 + 2^3 = 8a + 35$

Solución general de la no homogénea

$$\left.\begin{array}{r} a = B + D \\ 2a + 3 = 2A + 2B + C + D \\ 4a + 12 = 8A + 4B + 2C + D \\ 8a + 35 = 24A + 8B + 3C + D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} B = a - D \\ 3 = 2A + C - D \\ 12 = 8A + 2C - 3D \\ 35 = 24A + 3C - 7D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B = a - D \\ D = -3 + 2A + C \\ 3 = 2A - C \\ 7 = 5A - 2C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A = 1,\ C = -1,\ D = -2$ *y* $B = a + 2$, *de donde,* $\boxed{s_n = (n+a+2)2^n - (n+2) = (n+2)(2^n - 1)}$

1.8 Personajes y conceptos.

Leopold Kronecker, George Cantor, Giuseppe Peano, Euclides, Tales de Mileto, Pitágoras, Fibonacci, Edouard Lucas, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Bhaskaracharya, Ruffini

Teoría de conjuntos, Método axiomático, Sucesión de Fibonacci, Números de Lucas, Número de oro