Valor propio principal y dominante 1.

Si A es una matriz diagonalizable

$$A = PDP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

entonces $A^n = PD^nP^{-1}$ $\quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$

El comportamiento asintótico vendrá determinado por el mayor valor en módulo de los vectores propios.

Un valor propio λ se dice principal si

$$|\lambda| \geq |\mu| \quad \forall \mu \in \sigma.$$

Un valor propio se dice dominante si es algebraicamente simple y además

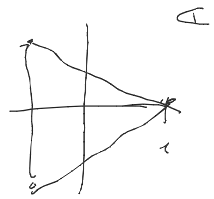
$$|\lambda| > |\mu| \quad \forall \mu \in \sigma \setminus \{\lambda\}.$$

Ejemplo

$\lambda = 1$ es principal en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ tiene 3 valores propios y $\lambda=-4$ es dominante.

La matriz $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ tiene por polinomio característico $\lambda^3-1=0$



$\lambda=1$ es valor propio principal pero no dominante.

Aunque esta teoría también tiene sentido en matrices complejas, nosotros solo consideramos los casos en donde A es siempre real. Pero puede tener valores propios complejos.

Si λ es un valor propio de una matriz real entonces $\bar{\lambda}$ también es valor propio y verifica $|\lambda|=|\bar{\lambda}|$ luego si λ es dominante y A real entonces λ es real.

Comportamiento asintótico en presencia de un valor propio dominante.

Sea $\bar{A}$ una matriz real y consideramos

$$x_{n+1} = A x_n \qquad x_n \in \mathbb{R}^k$$

entonces la presencia de un valor propio dominante tiene consecuencias sobre el sistema dinamico anterior.

Teorema 5 Sea $\lambda_1 \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$. Son equivalentes

① λ_1 es valor propio dominante.

② λ_1 es geometricamente simple y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^k$ existe un vector propio v asociado a λ tal que

$$\frac{1}{\lambda^n} x_n \to v.$$

Dem. Caso diagonalizable real

① $\Rightarrow$ ② $\displaystyle \frac{1}{\lambda^n} x_n = \frac{1}{\lambda^n} A^n x_0 = \frac{1}{\lambda^n} P D^n P^{-1} x_0$

$$= P \, \frac{1}{\lambda^n} D^n \, P^{-1} x_0$$

$$\frac{1}{\lambda^n} D^n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (\lambda_2/\lambda_1)^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_k/\lambda_1)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comportamiento asintótico en presencia de un valor propio dominante. 2

veamos que

$$V = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

es un vector propio asociado a λ_1

$$AV = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} P^{-1} \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \cdot \\ & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda_1 P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= \lambda_1 V.$$

$2 \Rightarrow 1$ λ_1 es valor propio algebraicamente simple pues consideramos el caso diagonalizable.

Si λ_2 es otro valor propio y V_2 es un vector propio asociado entonces tomo $x_0 = V_2$ y obtenemos que $x_n = \lambda_2^n V_2$ de donde

Comportamiento asintótico en presencia de un valor propio dominante. 3

Por tanto

$$\frac{1}{\lambda_1^n} x_n = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n v_2$$

Si $|\lambda_2| > \lambda_1$ tiende a ∞.

Si $|\lambda_2| = |\lambda_1|$ $\nearrow$ $\lambda_2 = \lambda_1$ No

$\searrow$ $\lambda_2 = -\lambda_1$

y no es convergente.

Si A es una matriz de estados totalmente conectados entonces u^* la distribución estable es un vector propio asociado a $\lambda = 1$.

Proposición 6 Sea A matriz de estados entonces $\lambda = 1$ es valor propio.

Dem $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A^t.

Proposición 7 $\lambda = 1$ en una matriz de estados totalmente conectados es un valor propio dominante.

Esta proposición se sigue de

Lema 8 $A : \Sigma_m \to \Sigma_m$ es contractiva

el cual se deduce del Lema 2.

Corolario (al Lema) $\lambda = 1$ es geométricamente simple.

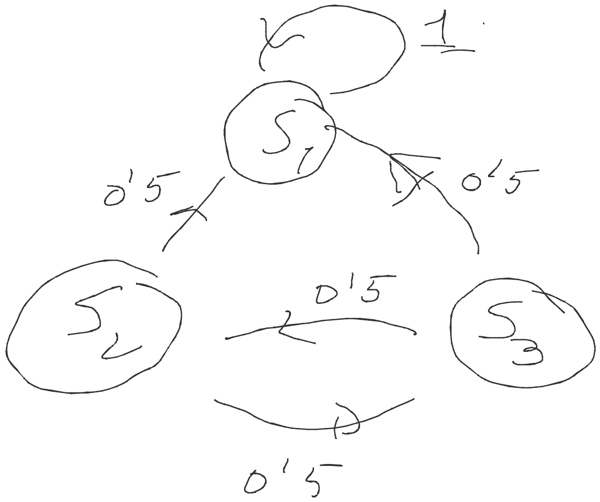
Ejemplos

Estudiar el comportamiento asintotico de

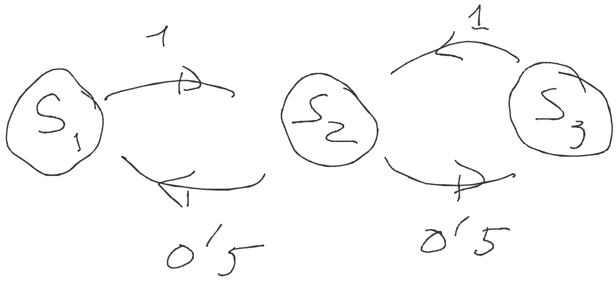
$$x_{n+1} = A x_n$$

donde x_0 es cualquier elemento de la base canonica. Y A viene dado por los modelos de estados dados en los siguientes gráficos.

a)



b)



c)