Cadenas totalmente conectadas 1.

Sea A una matriz de estados y consideramos

$$u_{n+1} = A u_n \quad u_n \in \Delta. \qquad (*)$$

Se dice que $(*)$ es totalmente conectado si

$$a_{ij} > 0 \quad \forall\, i, j$$

Teorema 1 En una cadena totalmente conectada el sistema dinámico $(*)$ tiene un único punto fijo u^* atractor global. Es decir

$$\forall\, u_0 \in \Delta, \; u_n \to u^* \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Nota: Dado que vamos a utilizar el T^a del punto fijo de Banach se tiene que además u^* es asintóticamente estable.

Repaso: Normas vectoriales.

Definición Norma, $\| \ \| : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0$ " = " $\iff u = 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \quad \lambda \in \mathbb{R}, \, u \in \mathbb{R}^K$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

Cadenas totalmente conectadas 2.

Ejemplos:

$$\|u\|_2 = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + \dots + (u^k)^2}$$

$$\|u\|_1 = |u^1| + |u^2| + \dots + |u^k|$$

Toda norma en un espacio vectorial define una distancia

$$d(u,v) = \|u - v\|.$$

Dem del Teorema 1,

Veamos que
$$\begin{aligned} \Delta &\to \Delta \\ u &\to Au \end{aligned}$$
es una contracción con la distancia que genera la norma $\| \ \|_1$.

Sea

$$\Sigma_m = \{ u \in \mathbb{R}^k, \ u_1 + u_2 + \dots + u^k = m \}$$

en particular

$$\Delta \subset \Sigma_1,$$

Σ_0 es un espacio vectorial.

Cadenas totalmente conectadas 3.

Lema 2 Existe $\alpha \in (0,1)$ talque

$$\|Av\|_1 \leq \alpha \|v_1\| \quad \forall v \in \Sigma_0.$$

De este Lema se puede deducir el Teorema 1

Si $x, y \in \Delta$

$$d(Ax, Ay) = \|Ax - Ay\|_1$$

$$= \|A(x-y)\|_1 \leq \alpha \|x-y\|_1$$

$$= \alpha\, d(x,y)$$

observar que si $x, y \in \Delta$ entonces $x-y \in \Sigma_0$.

Dem del Lema 1.

Sea $\alpha = \max\left\{ \|Av\| : \begin{array}{l} v \in \Sigma_0 \\ \|v\|_1 \leq 1 \end{array} \right\}$

① $\alpha > 0$ y en algun vector $v_* \in \Sigma_0$ con $\|v_*\|_1 = 1$ se alcanza.

Cadenas totalmente conectadas 4.

Dado $v \in \mathbb{R}^k$ se define

$$|v| = \begin{pmatrix} |v^1| \\ |v^2| \\ \vdots \\ |v^k| \end{pmatrix}$$

entonces $\left| [A v]^i \right| \leq [A |v|]^i$

y portanto

$$\|A v\|_1 \leq \|A |v| \|_1 .$$

Luego

$$\alpha = \|A v_*\|_1 \leq \|A |v_*| \|_1 = 1$$

porque $\|v_*\|_1 = 1 \iff |v_*| \in \Delta$.

Veamos por R.A. que $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$ en particular

$$\|A v_*\|_1 = \|A |v_*| \|$$

y todas las desigualdades que se usaron son igualdades.

Cadenas totalmente conectadas 5.

En particular

$$\left|\left[A v_*\right]^i\right| = \left[A|v_*|\right]^i$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_*^j\right| = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} |v_*^j|.$$

Lema 3 Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ numeros reales tales que

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_k|$$

entonces todos tienen el mismo signo.

Es decir o bien $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$

o bien $\alpha_i \leq 0 \quad \forall i$.

Con este lema llegamos a una contradiccion de que v_* tiene todas sus componentes positivas o negativas y no es posible que $v_* \in \Sigma_0$.

Cadenas totalmente conectadas 6.

La conclusión del Lema 2 se sigue del siguiente argumento

Si $V \neq 0$ $\quad \left\| \frac{V}{\|V\|_1} \right\|_1 \leq 1$ luego

$\left\| A \frac{V}{\|V\|_1} \right\|_1 \leq \alpha$ y por tanto

$$\|AV\|_1 \leq \alpha \|V\|_1$$

La demostración del Lema 3 se hace por inducción.

La distribución estable

Si A es una matriz de estados conectados al valor $u^* \in \Delta$ se le llama distribución estable.

Se tiene además que

$$u^* \in \mathring{\Delta} = \left\{ u \in \mathbb{R}^k \,/\, \begin{array}{l} 0 < u^i < 1 \\ \sum_{i=1}^{k} u^i = 1 \end{array} \right\}$$

Proposición 4 u^* es un vector propio asociado a $\lambda = 1$ y es único verificando

$$u^* \in \Sigma_1 .$$

Además para todo dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^k$ la sucesión dada por

$$x_{n+1} = A x_n$$

verifica $x_n \to m u^*$ donde $m = x_0^1 + x_0^2 + \cdots + x_0^k$.

Para ver esta proposición basta ver que:

Lema La aplicación $A : \Sigma_m \to \Sigma_m$ es contractiva y tiene un único punto fijo $m u^*$.

Ejemplos.

Dos países compiten por el abastecimiento de crudo mundial. Se sabe que el país A cuida más a sus clientes y, por tanto, el 90 % de los que un año contratan el abastecimiento con este vuelven a hacerlo al siguiente año. Sin embargo, solo el 70 % de los clientes de B vuelven a concertar de nuevo su abastecimiento con este. Se supone que todos los países tienen que contratar su abastecimiento con alguno de los dos países. ¿Hacia donde evolucionarán las cuotas de mercado?

Tres empresas A, B y C se reparten el total de clientes en los servicios de telefonía móvil. Se asume que cuando un cliente cambia su servicio de telefonía, cambia a cualquiera de las otras empresas con igual probabilidad. Sin embargo los servicios de atención cliente consiguen con 50 % en la empresa A, 60% por ciento en la empresa B y 30% en la empresa C, no abandonen la empresa de un año para otro. Sí actualmente tenemos 2500, 8500 y 6000 clientes respectivamente en las empresas A, B y C, ¿Qué pasará en los dos primeros años y tras mucho tiempo, sí la cada una de la empresas no cambia su política de mantenimiento de clientes?