Tema 3: Iteración de matrices y sistemas lineales de ecuaciones en diferencias. Matrices positivas. Poblaciones estructuradas por grupos de edad.

Modelos Matemáticos I

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Granada

Curso 2019/20

Modelos de estado, cadenas de Markov y probabilidad

Supongamos que los miembros de una determinada población puede elegir entre un conjunto finito de estados posibles $(E_1, E_2, ..., E_m)$ y que pueden cambiar de estado con el paso del tiempo.

Ejemplo

Clasificamos a los habitantes de un país en tres grupos: no fumadores, fumadores de menos de una cajetilla al día y fumadores de una o más cajetillas al día.

Supongamos que se realiza un estudio estadístico sobre dicha población para determinar los porcentajes que, trascurrido un periodo de tiempo, permanecerán en el mismo estado o cambiarán a otro.

del estado ▶	E_1	E_2	...	E_N	al estado ▼
	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	E_1
	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	E_2
	...	...	...	...	...
	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mm}	E_m

donde p_{ij} es la probabilidad de que alguien que tenga el estado E_j cambie al estado E_i.

Modelos de estado, cadenas de Markov y probabilidad

Representamos por un vector $X_n \in \mathbb{R}^m$ el estado de la población en el periodo n (indicando en cada componente el número de miembros que han elegido cada estado E_i).

Entonces, la evolución de la población se puede describir muy fácilmente mediante la expresión:

$$X_{n+1} = A\, X_n \qquad \text{(donde } A = (p_{ij})\text{)}$$

La matrix A se denomina matriz de estados o matriz de transición.

Ejemplo 1

Sup. que en un país operan 3 compañías de telefonía móvil: Or, Vo y Mo. Con el número de de clientes de cada compañía construimos el vector

$X = (\text{clientes de Or}, \text{clientes de Vo}, \text{clientes de Mo})$ medidos en millones

Supongamos que el estado inicial de la población de clientes es

$$X_0 = (6, 10, 15)$$

¿cuántos clientes hay en total? 31 ¿qué compañía tiene más clientes? Mo

Sup. que la matriz de transición para el periodo de un año es

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 3/5 & 2/5 \\ 1/4 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

¿qué porcentaje de los clientes de Or *se portan* a Vo durante un año? $1/2$
¿qué porcentaje de los clientes de Mo permanecen en la compañía cada año? $2/5$.

Ejemplo 1 (cont)

¿Qué pasará en el futuro (si las cosas no cambian)?

Podemos comprobar que

$$X_1 = A\,X_0 = (6.5, 15, 9.5)$$

y así, sucesivamente:

$$X_2 = A\,X_1,\ X_3 = A\,X_2,\ \ldots$$

Aunque, como sabemos, también podemos hacerlo de otro modo:

$$X_n = A^n X_0$$

Recuerda que la forma más adecuada para calcular potencias de una matriz (en especial si es *grande*) consiste en diagonalizarla.

Ejemplo 1(cont)

Si tenemos que diagonalizar la matriz A *a mano* es preferible diagonalizar primero la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 12 & 8 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Observa que $B = 20\,A$.

Los valores propios de B son $\{1, 4, 20\}$ con vectores propios asociados:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Los valores propios de A son $\{1/20, 4/20, 1\}$ con vectores propios asociados:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 1 (cont)

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Por tanto,

$$X_n = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\frac{1}{20})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Si tomamos límite:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{124}{19} \\ \frac{310}{19} \\ \frac{155}{19} \end{pmatrix} = \mathbf{31} \begin{pmatrix} \frac{4}{19} \\ \frac{10}{19} \\ \frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1 (cont)

Conforme pasa el tiempo, los clientes se van agrupando en las siguientes proporciones:

- La compañía Or será utilizada por $\frac{124}{19} \approx 6'52632$ millones de clientes.
- La compañía Vo será utilizada por $\frac{310}{19} \approx 16'3158$ millones de clientes.
- La compañía Mo será utilizada por $\frac{155}{19} \approx 8'15789$ millones de clientes.

A continuación recordaremos algunas propiedades que nos permitirán deducir esta información de una manera más rápida y sencilla.

Caso general

En general, dado un sistema dinámico de la forma

$$X_{n+1} = A\,X_n \qquad\qquad X \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathcal{M}_m$$

diremos que es una cadena de Markov si la matriz de A verifica:

- Los elementos de la matriz A son números comprendidos entre 0 y 1.
- La suma de los elementos de cada columna de A es igual a 1.

En este caso, diremos que la matriz A es una matriz de probabilidad, estocástica o de Markov.

Andrei Andreevitch Markov (1856-1922)

Caso general

Diremos que una matriz A es ergódica, primitiva o regular si A, o alguna de sus potencias, tiene todos sus elementos positivos (todos son mayores que 0).
Son matrices ergódicas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Son matrices no ergódicas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos recordando

Si A es una matriz de probabilidad, se cumple:

- $\lambda = 1$ es un valor propio de A,
- existe un vector propio de A asociado a $\lambda = 1$ y que está normalizado.

Si además A es una matriz ergódica, entonces:

- $\lambda = 1$ es el valor propio dominante,
- el vector propio normalizado v tiene todos sus elementos positivos,
- se cumple
$$\lim_{n\to\infty} X_n = s\, v$$
donde s es la suma de los elementos del estado inicial X_0.

Ejemplo 2

Dada la cadena de Markov

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} X_n$$

con $X_0 = (100, 200)$, para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ tenemos en cuenta que la matriz es estocástica y ergódica ($\lambda = 1$ es v.p. dominante):

- **Calculamos** un vector propio asociado a $\lambda = 1$ con las componentes positivas:

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.6 & -0.5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.6 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow -0.6x + 0.5y = 0 \Longrightarrow y = \frac{0.6}{0.5}x \Longrightarrow (x, y) = (0.5, 0.6)$$

- **Normalizamos**: $0.6 + 0.5 = 1.1 \Longrightarrow v = (\frac{0.5}{1.1}, \frac{0.6}{1.1}) \approx (0.45, 0.55)$

Ejemplo 2 (cont.)

- **Usamos los resultados**:

$$\lim_{n\to\infty} X_n \approx 300 \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 165 \end{pmatrix}$$

- **Interpretamos**: con el paso del tiempo, 135 que son aproximadamente el 45 % de la población total, elegirán la primera opción, mientras que 165 (el 55 % de la población) elegirá la segunda opción.

Ejemplo 3

Dada la cadena de Markov

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} X_n = AX_n$$

con $X_0 = (10, 20, 30)$, queremos saber qué ocurre a largo plazo, es decir, queremos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.
Observamos entonces que la matriz A es estocástica y para ver si es ergódica calculamos su cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0.3 & 0.45 \\ 0.3125 & 0.45 & 0.35 \\ 0.125 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Como $A^2 \gg 0$, la matriz A es ergódica. Como consecuencia, $\lambda = 1$ es un valor propio dominante y el vector propio asociado determina el comportamiento a largo plazo.

Ejemplo 3 (cont.)

Calculamos un vector propio asociado a $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -0.25 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & -0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left. \begin{array}{r} -0.25x + 0.6z = 0 \\ 0.5y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Entonces un vector propio sería $v = \left(\frac{12}{5}, 2, 1\right)$, normalizamos el vector $\frac{v}{\|v\|_1} = \left(\frac{4}{9}, \frac{10}{27}, \frac{5}{27}\right)$ y se tiene que :

$$\lim_{n \to \infty} X_n \approx 60 \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{10}{27} \\ \frac{5}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.66667 \\ 22.22222 \\ 11.11111 \end{pmatrix}$$

Aproximadamente 27 individuos elegirán la primera opción, 22 la segunda y 11 la tercera.

Ejemplo 4

Supongamos ahora que tenemos la cadena de Markov

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} X_n = AX_n$$

con $X_0 = (10, 20, 30)$, queremos saber qué ocurre a largo plazo, es decir, queremos calcular $\lim_{n\to\infty} X_n$.
Observamos entonces que la matriz A es estocástica y para ver si es ergódica calculamos su cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0.075 & 0 & 0.15 \\ 0.9 & 1 & 0.8 \\ 0.025 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

En este caso la matriz A no es ergódica. Como consecuencia, $\lambda = 1$ es un valor propio pero no tiene que ser dominante en principio.

Ejemplo 4 (cont.)

Calculamos los valores y vectores propios en este caso y diagonalizamos la matriz para ver lo que ocurre a largo plazo:

Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 0$ y una base de vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

y por tanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejemplo 4 (cont.)

Para calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todos los individuos acaban en el segundo estado. Decimos que la cadena de Markov tiene un estado absorbente.

Observación: En este caso, al ser el valor propio $\lambda = 1$ un valor propio dominante, el comportamiento de la población a largo plazo viene determinado por el vector propio asociado.

Ejemplo 5

Supongamos ahora que tenemos la cadena de Markov

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} X_n = AX_n$$

con $X_0 = (10, 20, 30)$, queremos saber qué ocurre a largo plazo, es decir, queremos calcular $\lim_{n\to\infty} X_n$.
Observamos entonces que la matriz A es estocástica pero no es ergódica.
Como consecuencia, $\lambda = 1$ es un valor propio pero no tiene que ser dominante en principio.

Ejemplo 5 (cont.)

Calculamos los valores y vectores propios en este caso y diagonalizamos la matriz para ver lo que ocurre a largo plazo:

Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 1/10$ y una base de vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

y por tanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/10)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejemplo 5 (cont.)

Para calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/3 \\ 20 \\ 80/3 \end{pmatrix}$$

Todos los individuos que estaban en el segundo estado siguen permaneciendo en el mismo estado y los de los estados 1 y 3 se distribuyen entre ellos.

Grafo asociado a una matriz

Ejemplo 3: Matriz ergódica

$$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} X_n$$

Ejemplo 4: Estado absorbente

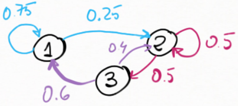
$$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} X_n$$

Ejemplo 5:

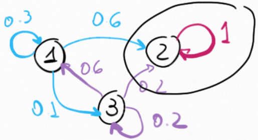
$$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} X_n$$

Grafo asociado a una matriz

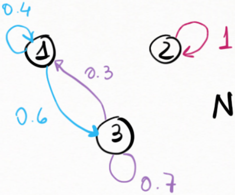
$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$



NO CONEXO

Curiosidades

- Muchas aplicaciones. La más importante en probabilidad.
- Generador de textos usando cadenas de Markov.
- PageRank de Google.