Tema 7

Integración de funciones reales

Conocida la integral para funciones medibles positivas, pasamos a estudiar la integración de funciones con valores reales. Llegaremos así a la versión definitiva del concepto de integral, que aparecerá como un *funcional lineal positivo*, definido en el espacio vectorial formado por las que llamaremos *funciones integrables*. La propiedad más importante de esta nueva integral es sin duda el *teorema de la convergencia dominada*. Igual que el de la convergencia monótona, este teorema nos proporciona una condición suficiente para permutar la integral con el límite puntual, pero ahora para una sucesión de funciones integrables.

7.1. Funciones integrables

Trabajamos, como hasta ahora, en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, que mantenemos fijo. Para una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$, es decir, para $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, pretendemos definir cuando sea posible, la integral de f sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$.

Sabemos que f^+ y f^- son funciones medibles positivas cuyas integrales ya conocemos, y su definición no debería cambiar. Además, queremos que la integral que vamos a definir se comporte linealmente, luego la integral de f ha de ser la diferencia entre las integrales de f^+ y f^-. Para que esta diferencia tenga sentido, y sea un número real, debemos exigir que las integrales de f^+ y f^- sean finitas. En tal caso, la integral de $|f|$ también va a ser finita, ya que $|f| = f^+ + f^-$, pero el recíproco es igualmente cierto, ya que $f^+ \leqslant |f|$ y $f^- \leqslant |f|$. Esto motiva las definiciones que siguen.

Decimos que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **integrable** en un conjunto medible $E \subset \Omega$, cuando verifica que

$$\int_E |f| < \infty$$

En tal caso tenemos $f^+, f^- \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ y el crecimiento de la integral ya definida en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ nos dice que

$$\int_E f^+ \leqslant \int_E |f| < \infty, \qquad \text{y también,} \qquad \int_E f^- \leqslant \int_E |f| < \infty$$

Podemos por tanto definir la **integral** de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Nótese que esta definición de integral es coherente con lo que habíamos hecho hasta ahora, pues si la función integrable f verifica que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_0^+$, con lo que tenemos $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, entonces es claro que $f^+ = f$ y $f^- = 0$, luego la integral recién definida coincide con la integral de f como función medible positiva, que ya conocíamos.

Hay otra cuestión de coherencia que conviene aclarar. Fijada una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ y un conjunto medible $E \subset \Omega$, la restricción $f\big|_E$ es una función medible en E, esto es $f\big|_E \in \mathcal{L}(E)$, luego usando la definición anterior, con E en el papel de Ω, tiene sentido preguntarse si $f\big|_E$ es integrable en E, y en su caso, definir la integral de $f\big|_E$ sobre E. Ahora bien, es obvio que el valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa, de $f\big|_E$, coinciden respectivamente con las restricciones a E de las funciones $|f|$, f^+ y f^-. Por otra parte, para $h \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, también sabemos que las integrales sobre E de h y de $h\big|_E$ coinciden. Usando esto con $h = |f|$, así como también con $h = f^+$ y $h = f^-$, obtenemos que $f\big|_E$ es integrable en E si, y sólo si, lo es f, en cuyo caso, la integral sobre E de $f\big|_E$ coincide con la de f.

Como primera propiedad de la integral que acabamos de definir, reducimos su estudio al caso $E = \Omega$, como ya hicimos para funciones medibles positivas:

- **Localización.** *Una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:*

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f \tag{1}$$

Usando la localización para funciones medibles positivas tenemos que

$$\int_E |f| = \int_\Omega \chi_E |f| = \int_\Omega |\chi_E f|$$

luego f es integrable en E si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω. En tal caso, como también es claro que $\big(\chi_E f\big)^+ = \chi_E f^+$ y $\big(\chi_E f\big)^- = \chi_E f^-$, razonando con estas funciones igual que hemos hecho con el valor absoluto, obtenemos claramente la igualdad (1). ■

A partir de este momento, consideramos solamente integrales sobre Ω, pues siempre se podrá usar la idea anterior para extender cualquier resultado al caso general.

Denotaremos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones integrables en Ω, a las que nos referiremos simplemente como **funciones integrables**. Está claro que $\mathcal{L}_1(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y pronto veremos que $\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$.

Conviene aclarar que no se verifica ninguna inclusión entre $\mathcal{L}_1(\Omega)$ y $\mathcal{L}^+(\Omega)$. Una función integrable puede tomar valores negativos, mientras que una función medible positiva puede no ser integrable, bien porque tome el valor ∞, o bien porque su integral sea ∞.

Como primera propiedad verdaderamente relevante de la nueva integral, comprobamos que se comporta como pretendíamos al definirla.

- **Linealidad.** $\mathcal{L}_1(\Omega)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{L}(\Omega)$ *y definiendo* $I(f) = \int_\Omega f$ *para toda* $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, *se obtiene una aplicación lineal* $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Para $f,g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $|\alpha f + g| \leqslant |\alpha|\,|f| + |g|$, con lo que usando el crecimiento y la homogeneidad de la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ obtenemos:

$$\int_\Omega |\alpha f + g| \leqslant |\alpha| \int_\Omega f + \int_\Omega |g| < \infty$$

Luego $\alpha f + g$ es integrable, y esto prueba que $\mathcal{L}_1(\Omega)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$.

Para la linealidad de I, vemos que $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, o lo que es lo mismo,

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

En ambos miembros tenemos una suma de funciones medibles positivas, luego podemos usar que la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ es aditiva con respecto al integrando, para obtener que

$$I\big((f+g)^+\big) + I\big(f^-\big) + I\big(g^-\big) = I\big((f+g)^-\big) + I\big(f^+\big) + I\big(g^+\big)$$

de donde deducimos obviamente que $I\big(f+g\big) = I\big(f\big) + I\big(g\big)$. Sólo queda probar que, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se tiene

$$I\big(\alpha f\big) = \alpha I\big(f\big) \tag{1}$$

Si $\alpha \geqslant 0$, vemos que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, luego basta usar la homogeneidad de la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$:

$$I\big(\alpha f\big) = I\big(\alpha f^+\big) - I\big(\alpha f^-\big) = \alpha\, I\big(f^+\big) - \alpha\, I\big(f^-\big) = \alpha\, I\big(f\big)$$

Para el caso $\alpha = -1$, observamos que $(-f)^+ = f^-$ y $(-f)^- = f^+$, de donde deducimos que $I\big(-f\big) = -I\big(f\big)$. Finalmente, si $\alpha \in \mathbb{R}^-$, usando los dos casos ya resueltos, obtenemos:

$$I\big(\alpha f\big) = -I\big(-\alpha f\big) = -(-\alpha) I\big(f\big) = \alpha\, I\big(f\big)$$

Así pues, hemos probado (1) en todos los casos, lo que concluye la demostración. ■

La otra propiedad básica de la integral se refiere a la relación de orden entre funciones. Recuérdese que, para $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$, se tiene $f \leqslant g$, cuando $f(x)|, \leqslant g(x)$ para todo $x \in \Omega$.

- **Positividad.** *Si* $h \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ *verifica que* $h \geqslant 0$, *entonces* $\int_\Omega h \geqslant 0$. *Por tanto:*

  (*i*) $f,g \in \mathcal{L}_1(\Omega)\,, \quad f \leqslant g \implies \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$

  (*ii*) $\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

La primera afirmación es obvia, ya que $h \in \mathcal{L}_1(\Omega) \cap \mathcal{L}^+(\Omega)$ luego su integral es un número real no negativo. Para deducir (i) basta tomar $h = g - f \geqslant 0$ y usar la linealidad de la integral:

$$0 \leqslant \int_\Omega (g-f) = \int_\Omega g - \int_\Omega f \qquad \text{luego} \qquad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$$

Finalmente, para obtener (ii), dada $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se tiene $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, y usando (i) obtenemos:

$$-\int_\Omega |f| \leqslant \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega |f|$$

que equivale a la desigualdad buscada. ■

Es costumbre usar el término "funcional" para referirse a una aplicación que esté definida en un espacio vectorial formado por funciones, y tome valores en el cuerpo escalar. Por eso nos referimos al resultado anterior diciendo que la integral es un **funcional lineal positivo** en el espacio vectorial $\mathcal{L}_1(\Omega)$ de las funciones integrables. La afirmación (i) del último enunciado, muestra el *crecimiento* de la integral, la misma propiedad que teníamos en $\mathcal{L}^+(\Omega)$. Por último, la desigualdad que aparece en (ii) es la que casi siempre se usa para acotar una integral. Pero la propiedad más importante de la integral que estamos estudiando, es sin duda el resultado que ahora vamos a demostrar.

7.2. Segundo teorema de convergencia

En paralelismo con el teorema de la convergencia monótona, pero con funciones integrables, nos preguntamos si podemos permutar la integral con el límite puntual de una sucesión de funciones. Más concretamente, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, nos preguntamos si f es integrable, y en tal caso, si podemos asegurar que

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \tag{2}$$

En general, la respuesta a ambas preguntas es negativa, como vamos a comprobar.

En principio, sabemos que f es medible, como límite puntual de una sucesión de funciones medibles, pero puede no ser integrable, como ocurrre en el siguiente ejemplo.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ sea f_n la función característica del intervalo $[-n, n]^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}^N$, donde $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, pero f no es integrable. En este ejemplo $\{f_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, y también $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$. Como afirma el teorema de la convergencia monótona, usando la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$, ciertamente se tiene que

$$\int_\Omega f = \infty = \lim_{n\to\infty} (2n)^N = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

luego en $[0, \infty]$ se cumple la igualdad (2), pero eso sólo confirma que f no es integrable.

Por otra parte, aún cuando f sea integrable, puede que no se verifique (2), como ocurrirá en nuestro segundo ejemplo.

Otra vez $\Omega = \mathbb{R}^N$ y, para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = n^N g_n$ donde g_n es la función característica del intervalo $]0\,,1/n[^N$. Entonces $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$, con $\displaystyle\int_\Omega f_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en $\mathbb{R}^N$, pero ahora con $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Ciertamente se tiene $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}^N} f$$

Así pues, es natural buscar condiciones suficientes para que las dos preguntas planteadas tengan respuesta afirmativa. La más útil es la que aparece en el siguiente enunciado, consistente en suponer que nuestra sucesión de funciones está "dominada" por una función integrable.

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:*

$$\big| f_n(x) \big| \leqslant g(x) \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0, \qquad \text{de donde,} \qquad \int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \tag{3}$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de $|f_n| \leqslant g$ y $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ se deduce que $f_n \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Por otra parte, para cada $x \in \Omega$, vemos que $|f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant g(x)$. Por tanto, se tiene también $|f| \leqslant g$, de donde deducimos igualmente que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Se trata ahora de probar la primera afirmación de (3), de la que fácilmente obtendremos la segunda.

Sea pues $\rho_n = \displaystyle\int_\Omega |f_n - f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{\rho_n\}$ es una sucesión de números reales no negativos, y queremos probar que $\{\rho_n\} \to 0$. Para abreviar la notación, escribimos también $\rho = \displaystyle\int_\Omega (2g)$. La idea clave será usar el lema de Fatou para una conveniente sucesión de funciones. Concretamente tomamos $g_n = 2g - \big|f_n - f\big|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas que converge puntualmente en Ω a la función $2g$. De paso vemos que $\rho_n \leqslant \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El lema de Fatou y la linealidad de la integral nos dicen que

$$\rho = \int_\Omega (2g) = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n = \liminf_{n\to\infty} \big(\rho - \rho_n\big) \tag{4}$$

lo que nos llevará inmediatamente al resultado que buscamos.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\inf\big\{\rho - \rho_k : k \geqslant n\big\} = \rho - \sup\big\{\rho_k : k \geqslant n\big\}$ de donde, al tomar límites, obtenemos que $\liminf\limits_{n\to\infty}\big(\rho - \rho_n\big) = \rho - \limsup\limits_{n\to\infty} \rho_n$. Por tanto en (4) teníamos

$$\rho \leqslant \rho - \limsup_{n\to\infty} \rho_n, \qquad \text{es decir,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \rho_n \leqslant 0$$

pero siendo $\rho_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto significa que $\{\rho_n\} \to 0$.

La segunda afirmación de (3) se deduce claramente de la primera, usando la linealidad y positividad de la integral, que nos permiten escribir:

$$\left| \int_\Omega f_n - \int_\Omega f \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f) \right| \leqslant \int_\Omega |f_n - f| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \blacksquare$$