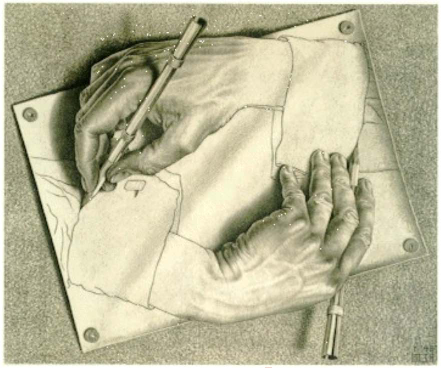
ALGORÍTMICA

Capítulo 1: La Eficiencia de los Algoritmos

Tema 3: Resolución de Recurrencias Asintóticas

- Metodologías de demostración. Inducción
- Resolución de recurrencias con función característica
- Ecuaciones homogéneas
- Ecuaciones no homogéneas
- Cambio de variable
- Transformaciones del rango



M.C. Escher, Drawings Hands, 1948

Metodologías de demostración

- Demostración por Contradicción
  - Suponemos que un resultado (teorema) es falso. Demostramos que esta hipótesis implica que una propiedad que sabemos que es cierta, es falsa. Se concluye entonces que la hipótesis original es verdadera
- Demostración mediante un Contraejemplo
  - Se trata de usar un ejemplo concreto para demostrar que una propiedad no se verifica siempre
- Inducción Matemática
  - Se demuestra un caso base , se supone que la hipótesis que queremos demostrar es cierta hasta k, y entonces se demuestra que es cierta para k+1

Motivación

- Las ecuaciones recurrentes son frecuentes en Teoría de Algoritmos
- La inducción se usa en las demostraciones matemáticas asociadas a algoritmos recursivos
  - e.g. quicksort, búsqueda binaria
- También se usa para obtener estimaciones de los tiempos de ejecución
  - A partir de los tamaños de los datos input data
    - e.g. El tiempo crece ***linealmente*** con el número de datos que se procesan
    - e.g. Tiempos basados en las veces que se ejecuta un lazo

El método inductivo

- La inducción se usa para resolver problemas como:
  - ¿Es cierto S(n) para todos los valores de n?
    - generalmente para todo $n \geq 0$ o todo $n \geq 1$
- Ejemplo:
  - Sea S(n) "$n^2 + 1 > 0$"
  - Es cierto S(n) para todo $n \geq 1$?

S(n) puede ser mucho mas complicado, por ejemplo un programa que se tenga que ejecutar para un valor *n*

El método inductivo

- ¿Cómo demostramos la veracidad o falsedad de S(n)?

- Una forma sería hacer la demostración para cada valor de n:
  - ¿Es S(1) cierto?
  - ¿Es S(2) cierto?
  - ...
  - ¿Es S(10,000) cierto?
  - ... ¡¡¡El método de la fuerza bruta!!!

No es muy práctico

El método inductivo

- La inducción es una técnica para demostrar rápidamente la veracidad o falsedad de S(n) para todo n
  - Sólo hay que hacer dos cosas
- Primero demostrar que **S(1) es cierto**
- Segundo, suponer que S(n) es cierto, y usarlo para probar que S(n+1) es cierto
- Entonces S(n) es cierto para todo n $\geq$ 1.

Ejemplo

- Demostrar que S(n): "$n^2 + 1 > 0$" $\forall n \geq 1$
- Primero probamos que S(1) es verdadero
- $S(1) = 1^2 + 1 = 2$, que es > 0
  - Así S(1) es verdadero
- Ahora probamos que S(n+1) es cierto, dado que S(n) lo es
- Si S(n) es cierto, entonces $n^2+1 > 0$, luego
  - $S(n+1) = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 1 +1 = (n^2 + 1) + 2n + 1$
  - Cómo $n^2 + 1 > 0$, entonces $(n^2 + 1) + 2n + 1 > 0$
  - así S(n+1) es cierto, dado que S(n) lo era
  - Por tanto S(n) --> S(n+1)

La Inducción mas formalmente

- Tres hechos:
  - 1. Hay que demostrar una **propiedad** S(n)

    La propiedad debe estar planteada sobre un valor entero n
  - 2. Una **base** para la demostración.

    Esta es la propiedad S(b) para algún entero. A menudo b = 0, 1.
  - 3. Una **etapa inductiva** para la demostración.
    Probamos la sentencia:

    "S(n) --> S(n+1)" $\forall n$.
- A S(n) se le suele llamar ***Hipótesis de Inducción***
  - Se concluye que S(n) es cierto para todo $n \geq b$

    S(n) podría no ser cierto para algún < b

Ejemplo 1

- Demostrar S(n): $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall$n ≥ 1
  - e.g. 1+2+3+4 = (4*5)/2 = 10
- ***Base.*** S(1), n = 1 $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ 1 = (1*2)/2

- ***Inducción.*** Suponemos que S(n) es cierto. Demostramos S(n+1), es decir:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n+1(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Ejemplo 2

- Probar S(n): $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ $\forall$n ≥ 0
  - e.g. 1+2+4+8 = 16-1
- ***Base.*** S(0), n = 0 $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0$ $2^0 = 2^1 - 1$
- ***Inducción.*** Suponemos S(n) cierta, y probamos S(n+1), que es:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$$

Ejemplo 3

- Demostrar S(n): $n! \geq 2^{n-1} \ \forall n \geq 1$
  - e.g. $5! \geq 2^4$, o lo que es lo mismo $120 \geq 16$

- ***Base.*** S(1), n = 1: $1! \geq 2^0$
  asi tenemos $1 \geq 1$
- ***Inducción***. Suponemos S(n) cierta y probamos
  S(n+1), es decir: $(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1} \geq 2^n$

$$\boxed{(n+1)! = n! * (n+1)}$$

Inducción parcial constructiva

- Supongamos la hipótesis **(parcialmente especificada)** de que cualquier entero ≥ 24 puede escribirse como $5a+7b$ para enteros no negativos a y b.
- La idea es aplicar el método inductivo y a lo largo de las demostraciones que hay que realizar, reunir información sobre a y b como para que se verifique la hipótesis inicial

Inducción parcial constructiva: Ejemplo

- Sea la función f: N → N definida por la siguiente recurrencia,

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n + f(n-1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  está claro que $f(n) = \Sigma_{i=0..n}\, i$.
- Supongamos que no sabemos que $f(n)$ vale $n(n+1)/2$, pero que estamos buscando una formula como esa. Obviamente,

$$f(n) = \Sigma_{i=0..n}\, i \leq \Sigma_{i=0..n}\, n = n^2,$$

  y por tanto $f(n)$ es $O(n^2)$.
- Esto sugiere que formulemos la hipótesis de que $f(n)$ podría ser un polinomio cuadrático.
- Ensayaremos la hipótesis de inducción parcialmente especificada $HI(n)$ de acuerdo con la cual $f(n) = an^2 + bn + c$.
- Esta hipótesis es parcial en el sentido de que a, b, y c no son aún conocidos.

Inducción parcial constructiva: Ejemplo

- Supongamos que HI(n-1) es cierta para algun $n > 1$, sabemos que,

$$f(n) = n + f(n-1) = n + a(n-1)^2 + b(n-1) + c =$$

$$= an^2 + (1+b-2a)n + (a-b+c)$$

- Para concluir HI(n), tiene que darse que

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

- Igualando los coeficientes de cada potencia de n,

$$1 + b - 2a = b$$

$$a - b + c = c.$$

- Asi $a = b = 1/2$, estando el valor de c aún no restringido.
- Por tanto, HI(n): $f(n) = n^2/2 + n/2 + c$.

Inducción parcial constructiva: Ejemplo

- Acabamos de demostrar que si HI(n-1) es cierta para algún $n > 1$, entonces también lo es HI(n).
- Queda por establecer la veracidad de HI(0) para concluir que HI(n) es cierta para cualquier entero n.
- Pero HI(0) dice que

$$f(0) = a0 + b0 + c = c.$$

- Sabiendo que $f(0) = 0$, concluimos que

$$c = 0$$

y que

$$f(n) = n^2/2 + n/2$$

es cierto para cualquier entero n.

Resolucion de recurrencias

- **Método de la función característica**
  - **Recurrencias homogéneas**

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = 0$$

  - Los t_i son los valores que buscamos. La recurrencia es lineal porque no contiene términos de la forma $t_i t_{i+1}$, t_i^2 ,
  - Los coeficientes a_i son constantes, y
  - La recurrencia es homogénea porque la combinación lineal de los t_i es igual a cero.
- La intuición nos sugiere intentar una solución de la forma

$$t_n = x^n$$

donde x^n es una constante aún desconocida

Recurrencias homogéneas

- Si ensayamos esa solución, obtenemos,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} = 0$$

- Esta ecuación se satisface si x = 0, o en caso contrario si

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

- Esta ecuación de grado k en x es la que se llama la **ecuación característica de la recurrencia**.
- Si las k raíces de esta ecuación, $r_1,\ldots,r_k$, son todas distintas (¡podrían ser números complejos!), entonces

$$t_n = \Sigma_{i=1..n}\, c_i r_i^n$$

  es una solución de la recurrencia, donde las k constantes c_i se determinan mediante condiciones iniciales. (Necesitamos exactamente k condiciones iniciales para determinar los valores de esas k constantes).

Ejemplo

$$\mathbf{t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0,\ t_0 = 0,\ t_1 = 1.}$$

- Ecuación característica,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

- Raíces: -1 y 4. Por tanto, la solución general tiene la forma,

$$t_n = c_1 (-1)^n + c_2 4^n$$

- El uso de las condiciones iniciales produce,

$$c_1 + c_2 = 0, \quad n = 0$$
$$-c_1 + 4c_2 = 1, n = 1$$

- $c_1 = -1/5$ y $c_2 = 1/5$, obteniendo finalmente,

$$\mathbf{t_n = (1/5)[4^n - (-1)^n]}$$

Ejemplo

$$\mathbf{t_n = t_{n-1} + t_{n-2},\ n \geq 2,\ t_0 = 0\ y\ t_1 = 1.}$$

- Esta recurrencia se corresponde con el algoritmo para calcular el termino general de la sucesion de Fibonacci
- Puede escribirse como

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

- Ecuacion característica: $x^2 - x - 1 = 0$
- Obtenemos,

$$\boxed{r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$t_n = (1/\sqrt{5})(r_1^n - r_2^n)$$

- Es fácil demostrar que este es el mismo resultado que el obtenido por De Moivre, con su formula para calcular números de la sucesión de Fibonacci

Recurrencias homogéneas

- Las raíces de la ecuación característica no son distintas.
- Sea $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ y r una raíz múltiple. Para cualquier valor $n \geq k$, consideramos el polinomio,

$$h(x) = x[x^{n-k}p(x)]' = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \ldots + a_k(n-k)x^{n-k}$$

- Sea q(x) el polinomio tal que $p(x) = (x-r)^2q(x)$.
- Entonces,

$$h(x) = x[(x-r)^2x^{n-k}q(x)]' = x[2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]']$$

- Como $h(r) = 0$, se demuestra que,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \ldots + a_k(n-k)r^{n-k}$$

es decir, $t = nr^n$ es también una solución

Recurrencias homogéneas

- Mas generalmente, si m es la multiplicidad de la raíz r, entonces

$$t_1 = r \text{ , } t_2 = nr^n, \;\; t_3 = n^2r^n \text{ ,..., } t_m = n^{m-1}r^n$$

son todas las posibles soluciones de la ecuación.

- La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos contribuidos por otras raíces de la ecuación característica.
- Así, de nuevo hay k constantes a determinar por las condiciones iniciales

Ejemplo

$$\mathbf{t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3},\ n \geq 3,\ t_0=0,\ t_1=1 \text{ y } t_2=2.}$$

- Esta recurrencia puede escribirse,

$$t_n - 5\, t_{n-1} + 8\, t_{n-2} - 4\, t_{n-3} = 0$$

- Característica: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$
- Raíces: 1 (simple) y 2 (doble).
- Por tanto, la solución general es $t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$.
- Las condiciones iniciales dan,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad\quad\quad &= 0,\ n = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2\, c_3 &= 1,\ n = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8\, c_3 &= 2,\ n = 2 \end{aligned}$$

- Asi, $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -(1/2)$ y $\mathbf{t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2.}$

Recurrencias no homogéneas

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

- El primer miembro es lo mismo que el de las homogéneas, pero en el segundo tenemos $b^n p(n)$, donde
  - b es una constante, y
  - p(n) es un polinomio en n de grado d.
- Por ejemplo, la recurrencia podría ser,

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

en cuyo caso b = 3 y p(n) = 1 es un polinomio de grado cero

Recurrencias no homogéneas

$$\mathbf{a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)}$$

- La ecuación característica que le corresponde se organiza como

  (Ecuación característica de la homogénea)$(x-b)^{d+1} = 0$

  $(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$

  y se resuelve como en el caso de las homogéneas
- Si $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$ entonces $(x-2)(x-3) = 0$
- Se aplican las mismas normas para raíces simples o múltiples que en el caso anterior

Ejemplo

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)\, 3^n$$

- Ecuación característica

$$(x-2)(x-3)^2 = 0$$

- Y por tanto la solución es

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

- Las constantes solo son utiles para conocer la solución con exactitud, pero no de cara a saber el orden del algoritmo del que proviene la recurrencia que estamos resolviendo
- Lo normal es conocer las condiciones iniciales a partir de datos experimentales

Ejemplo: Las Torres de Hanoi

- Según Edouard Lucas (1842-1891), en el Gran Templo de Benarés, bajo el domo que marca el centro del mundo, descansa un plato de bronce en el que están fijas tres agujas de diamante.

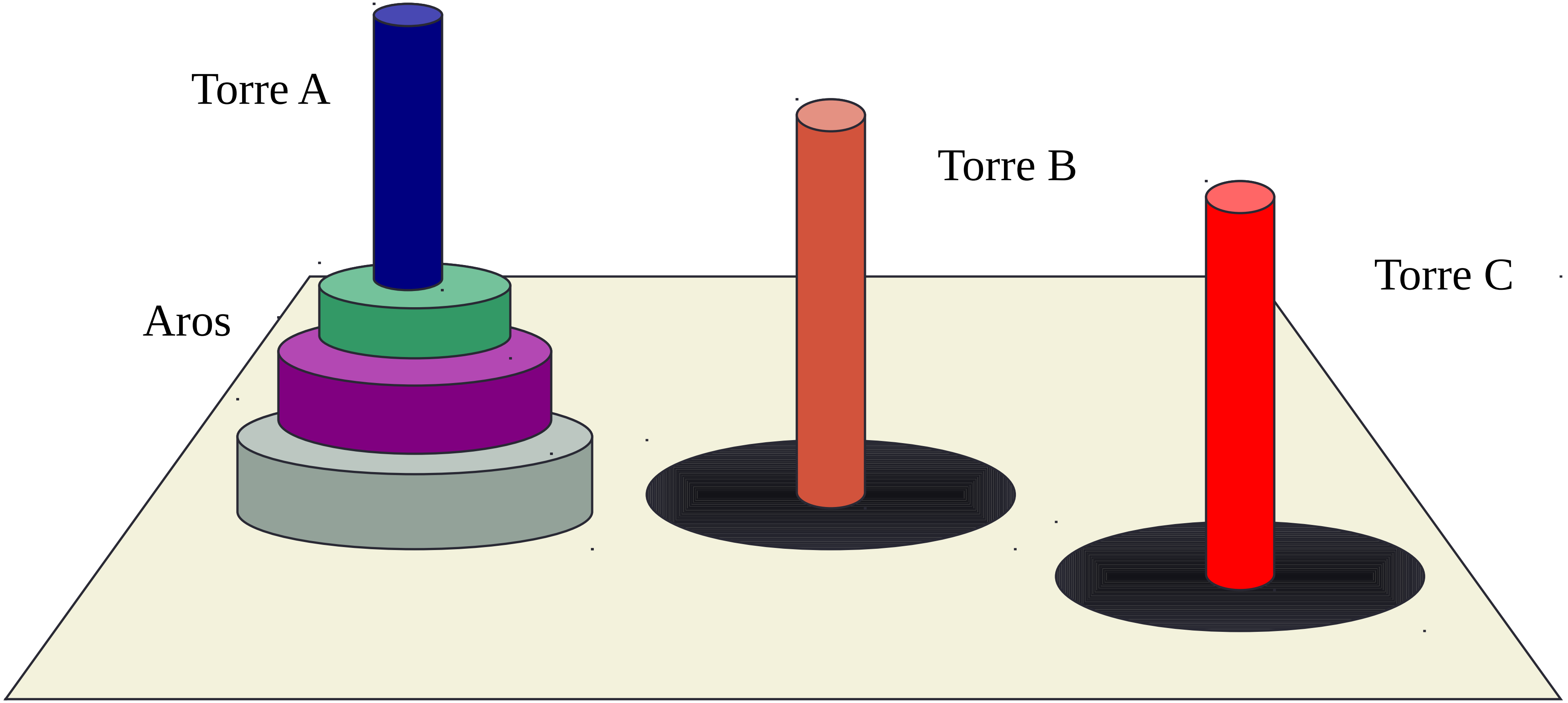
- En una de estas agujas un dios colocó 64 discos de oro, el disco más largo descansa sobre el plato y sobre éste está uno más pequeño y así sucesivamente hasta la punta.

- Día y noche los monjes pasan los discos de una aguja a otra, de acuerdo a fijas e inmutables leyes que requieren
  - que el sacerdote de turno no mueva mas que un disco a la vez, y
  - que el disco se coloque en un aguja de tal forma que no haya un disco más pequeño bajo éste.

- Cuando los 64 discos hayan sido transferidos de la aguja donde el dios los colocó a una de las otras, los brahmanes se convertirán en polvo, y con un trueno el mundo conocido desaparecerá.

Ejemplo: Las Torres de Hanoi

Problema: trasladar todos los aros de la barra A a la B.



$$t_n = 2t_{n-1} + 1,\ n \geq 1, \text{ con } t_0 = 0 \Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 2^n$$

Ejemplo

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

- Puede reescribirse como $t_n - 2t_{n-1} = n$
- $b = 1$ y $p(n) = n$ un polinomio de grado 1.
- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 = 0$
- Raíces 2 (con multiplicidad 1) y 1 (con multiplicidad 2).
- Solución general: $t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n1^n$
- En el problema buscamos una solución para la que $t_n \geq 0$ para cualquier n. Si esto es así podemos concluir inmediatamente que t_n debe ser $O(2^n)$.

Generalización

- Sea

  $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots$

  donde las b_i son constantes distintas y los $p_i(n)$ son polinomios en n de grado d_i respectivamente.

- Basta escribir la ecuación característica,

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b_1)^{d1+1} (x-b_2)^{d2+1} = 0$$

- Por ejemplo $t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$, $n \geq 1$, con $t_0 = 0$.
- $b_1 = 1$, $p_1(n) = n$, $b_2 = 2$, $p_2(n) = 1$.
- Ecuación caracteristíca: $(x-2)(x-1)^2 (x-2) = 0$,
- Solución general: $t_n = c_1 1^n + c_2 n1^n + c_3 2^n + c_4 n2^n$

Cambio de variable

- **Calcular el orden de T(n) si n es potencia de 2, y**

$$T(n) = 4T(n/2) + n, \; n > 1$$

- Reemplazamos n por 2^k (de modo que $k = \lg n$) para obtener $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$. Esto puede escribirse,

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

- si $t_k = T(2^k) = T(n)$.
- La ecuación característica es $(x-4)(x-2) = 0$

  y entonces $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$.
- Poniendo n en lugar de k, tenemos $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$
- y T(n) está por tanto es $O(n^2$ /n es una potencia de 2)

Cambio de variable

- Encontrar el orden de T(n) si n es una potencia de 2 y

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2 , n > 1$$

- Obtenemos sucesivamente

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k, \text{ y}$$

$$t_k = 4t_{k-1} + 4^k$$

- Ecuación característica: $(x-4)^2 = 0$, y así

$t_k = c_1 4^k + c_2 k4^k$, $\mathbf{T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 lgn}$

- y (n) es $O(n^2 \log n$ / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de T(n) si n es una potencia de 2

$$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n,\ n > 1$$

- Obtenemos

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + k2^k$$

$$t_k = 2t_{k-1} + k2^k$$

- La ecuación característica es $(x-2)^3 = 0$, y así,

$$t_k = c_1 2^k + c_2 k2^k + c_3 k^2 2^k$$

$$T(n) = c_1 n + c_2 n\lg n + c_3 n\lg^2 n$$

- Así T(n) es $O(n\log^2 n$ / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2 y $T(n) = 3T(n/2) + cn$ (c es constante, $n \geq 1$).
- Obtenemos sucesivamente,

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + c2^k$$

$$t_k = 3t_{k-1} + c2^k$$

- Ecuación característica: $(x-3)(x-2) = 0$, y así,

$$t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$$

$$T(n) = c_1 3^{\lg n} + c_2 n$$

- y como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$, $T(n) = c_1 n^{\lg 3} + c_2 n$

y finalmente $T(n)$ es $O(n^{\lg 3}$ / n es potencia de 2).

Transformaciones del rango

- $T(n) = nT^2(n/2)$, $n > 1$, $T(1) = 6$ y n potencia de 2.
- Cambiamos la variable: $t_k = T(2^k)$, y así

$$t_k = 2^k t^2_{k-1} , k > 0; t_0 = 6.$$

- Esta recurrencia no es lineal, y uno de los coeficientes no es constante.
- Para transformar el rango, creamos una nueva recurrencia tomando $V_k = \lg t_k$, lo que da,

$$V_k = k + 2 V_{k-1} , k > 0; V_0 = \lg 6.$$

- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 = 0$ y así,

$$V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k1^k$$