Daniel Cerezo García

1

a) $\alpha = 0'4 \Rightarrow x_{n+1} = 0'4 \cdot |x_n| - 1$

Calculemos los puntos de equilibrio:

Como tenemos valor absoluto,

si $x^* > 0$, entonces $x^* = 0'4 \cdot x^* - 1 \Rightarrow 0'6\, x^* = -1$; $x^* = -\frac{1}{0'6} \rightarrow$ no puede ser ya que $x^* > 0$

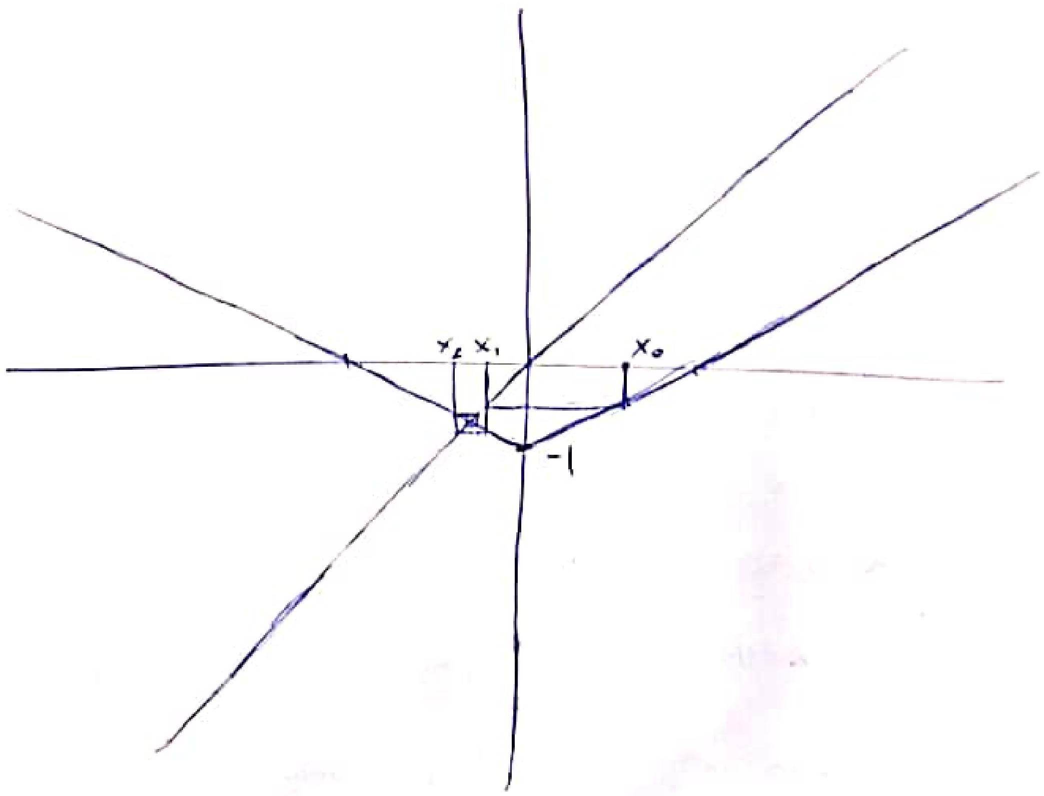
si $x^* < 0$, entonces $x^* = -0'4 \cdot x^* - 1 \Rightarrow 1'4\, x^* = -1$; $x^* = -\frac{1}{1'4} = -\frac{5}{7}$

Por tanto, el punto de equilibrio es $x^* = -\frac{5}{7}$.

Su solución general es: $x_k = \left(x_0 - \left(-\frac{5}{7}\right)\right) \cdot 0'4^k - \frac{5}{7}$

Está claro que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{k \to +\infty} x_k = -\frac{5}{7}$.

Gráficamente,



Podemos observar que x_k tiende a $-\frac{5}{7}$.

Escaneado con CamScanner

b) Repetimos el mismo proceso que en el apartado a)

$$x^* > 0 \Rightarrow x_1^* = \alpha \cdot x_1^* - 1 \Rightarrow x_1^* = \frac{-1}{1-\alpha}$$
$$x^* < 0 \Rightarrow x_2^* = -\alpha x_2^* - 1 \Rightarrow x_2^* = \frac{-1}{1+\alpha}$$

$$x_1^* > 0 \iff 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$$
$$x_2^* < 0 \iff 1+\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > -1$$

Como $\alpha > 0$, si $\alpha \in]0,1] \Rightarrow$ solo hay un punto de equilibrio: $x_2^* = \frac{-1}{1+\alpha}$

si $\alpha \in]1,+\infty[\Rightarrow$ hay dos puntos de equilibrio: $x_1^* = \frac{-1}{1-\alpha}$

$$x_2^* = \frac{-1}{1+\alpha}$$

c) $\alpha = 1'3 \Rightarrow x_{n+1} = 1'3 \cdot |x_n| - 1 \Rightarrow x_1^* = \frac{-1}{-0'3} = 3'\widehat{3}$

$$x_2^* = \frac{-1}{1+1'3} = -\frac{1}{2'3} = -0'435$$

Observemos la estabilidad: Primero de x_1^*.

$$x_k = (x_0 - x_1^*) \cdot 1'3^k + x_1^*$$

Por tanto,

$$|x_k - x_1^*| = |x_0 - x_1^*| \cdot 1'3^k$$

De esta manera, para $\varepsilon = 1$ por ejemplo, $\forall \delta > 0 : |x_0 - x_1^*| < \delta$, entonces podemos encontrar $K \in \mathbb{N}$ tal que: $K > \log_{1'3} \frac{1}{|x_0 - x_1^*|} \Rightarrow |x_k - x_1^*| > \varepsilon = 1$

Podemos encontrar este $K \in \mathbb{N}$, ya que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\exists K \in \mathbb{N} : K > a$.

De forma análoga para x_2^*, obtenemos que ambos puntos de equilibrio son inestables.

d) $\alpha = 2 \Rightarrow x_{n+1} = 2\cdot|x_n| - 1$

Queremos ver si $\{0'2, -0'6\}$ es un 2-ciclo. Si $x_0 = 0'2$:

$$x_1 = 2\cdot 0'2 - 1 = 0'4 - 1 = -0'6$$

$$x_2 = 2\cdot|-0'6| - 1 = 2\cdot 0'6 - 1 = 1'2 - 1 = 0'2$$

obtenemos así que efectivamente $\{0'2, -0'6\}$ es un 2-ciclo.

Para estudiar la estabilidad, obtenemos dos puntos de equilibrio:

$$x_1^* = \frac{-1}{1-2} = +1$$

$$x_2^* = \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

Observamos primero la estabilidad de x_1^*.

$$x_k = (x_0 - x_1^*)\cdot 2^n + x_1^* \Rightarrow x_k - x_1^* = (x_0 - x_1^*)\cdot 2^k$$

Luego,

$$|x_k - x_1^*| = |x_0 - x_1^*|\cdot 2^k$$

De esta forma, para $\varepsilon = 1$, por ejemplo, ~~$\forall\varepsilon$~~ $\forall \delta > 0 : |x_0 - x_1^*|\cdot 2^k$, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \log_2 \frac{1}{|x_0 - x_1^*|}$, ya que $\forall a \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N}: k > a$. Por tanto, $x_1^* = 1$ es inestable.

~~De~~

De forma análoga, vemos que $x_2^* = -\frac{1}{3}$ también es inestable.