Alberto Llamas González

ENTREGA PRÁCTICAS GRUPO D

Análisis

El objetivo del problema es dadas C kilocalorías y un conjunto N de ingredientes diferentes, debemos elaborar una dieta con el mínimo número de dosis posibles de cada ingrediente para que la dieta tenga C kilocalorías. Llamaremos V al conjunto de ingredientes donde $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ y c_i son las calorías que aporta el ingrediente i.

Diseño del algoritmo

- Resolución del problema por etapas: Podemos resolver el problema por etapas donde en cada etapa seleccionaríamos qué ingrediente usar en la dieta o no. Es decir echar o no un ingrediente i con kalorías c_i. Podemos suponer que los ingredientes V están ordenados de menor a mayor valor para garantizar la optimidad.

- Ecuación recurrente: La solución depende de los ingredientes que debemos devolver, que notaremos como i y de las kcalorías restantes que queden por añadir a nuestra dieta j. Denominaremos $T(i,j)$ al mínimo número de dosis que hay que añadir a la dieta para j kcalorías, supuesto que consideremos añadir el ingrediente 1, ingrediente 2, ... hasta añadir o no el ingrediente i.

En la etapa i consideraremos añadir una dosis del ingrediente i. Hay 2 posibles decisiones:

- Añadir a la dieta una dósis del ingrediente i: donde las dósis que habría en la dieta y que deberíamos devolver serían $1 + T(i, j-c_i)$ (Restamos las kcalorías que añadimos a la dieta)

- No añadir una dosis el ingrediente de tipo i: en este caso, el mínimo nº de ingredientes a añadir será el mismo que antes de considerar añadir una dosis de un ingrediente de tipo i.

Podemos expresar la ecuación recurrente como:

$$T(i,j) = \min\{T(i-1,j) , 1 + T(i,j-c_i)\}$$

Los casos base serían:

- Añadir ingredientes sólo de 1 kcaloría $\Rightarrow T(1,j) = j$. Necesitamos j dosis de 1kcaloría para añadir j ingredientes

- Sin kcal restantes $j=0$; $T(i,0) = 0$. Si no quedan kcalorías por añadir a la dieta, el mínimo número de dosis a añadir es 0.

- <u>Valor objetivo</u>: Deseamos conocer el valor $T(n, N)$, el mínimo número de dosis posible para una dieta de C kcalorías, suponiendo que consideramos añadir dosis de cualquier ingrediente de $\{1 \ldots N\}$

• <u>Verificación del P.O.B</u>:

Para ~~[illegible]~~ j kcalorías ~~[illegible]~~ fijas, $T[i-1][j]$ es óptimo. El caso base $T(1,j)$ es óptimo trivialmente ya que sólo hay 1 tipo de ingrediente posible.

Cuando hay 2 tipos de ingrediente $T(2,j)$, seleccionamos el mínimo número de dosis de ingredientes entre $T(1,j)$ y añadir un ingrediente de tipo 2 quitando las kcalorías es decir $1 + T(2, j-c_2)$. Valor óptimo cuando $j >= c_2$.

$T(i-1,j)$ también es óptimo ya que el algoritmo ha ido seleccionando el mínimo. ~~[illegible]~~ Si no fuese óptimo existiría otra secuencia de decisiones diferentes que serían más óptimas que las decididas para llegar a $T(i-1,j)$ lo cual es imposible ya que el algoritmo selecciona siempre el mínimo número de dosis

• <u>Diseño de la memoria</u>:

• Podemos representar $T(i,j)$ como una matriz

• Dicha matriz tendrá N filas. Cada fila es un tipo de ingrediente. Tendrá ~~[illegible]~~ C+1 columnas. Cada columna serán las kcalorías restantes a añadir a la dieta entre {0 ... C}

• Cada celda de la matriz T, tendrá el mínimo número de dosis a añadir del ingrediente i para j kcalorías.

• Rellenaremos primero los casos base, después las filas {2,3 ... N} y cada fila se rellenará en orden creciente de columnas {1 ... C}

Podemos construir el algoritmo de la siguiente forma:

ALGORITMO T , S = DosisIngredientes (C , N , $\{c_1, c_2, \ldots c_N\}$)

T ← matriz de N filas $\{1 \ldots N\}$ y C columnas $\{0 \ldots C\}$

//casos base

Para cada fila i en $\{1 \ldots N\}$ hacer:

$T(i, 0) = 0$

Fin-Para

Para cada columna j en $\{1 \ldots C\}$ hacer:

$T(1, j) = j$

Fin-Para

Para cada fila i en $\{2 \ldots N\}$ hacer: //Ya hemos rellenado en el caso base la fila 1

Para cada columna j en $\{1 \ldots C\}$, hacer:

$T(i,j) = \min\{T(i-1, j), 1 + T(i, j - c_i)\}$

Fin-Para

Fin-Para

S ← T(N, C) // Mínimo número de dosis para elaborar una dieta de Kcal C.

Devolver T , S

• Recuperación de la solución : Recuperaremos la solución desde el valor objetivo de la matriz T que hemos calculado anteriormente. La idea es partir del valor objetivo e ir comparando con los valores T(i-1,j) de la tabla donde si son iguales disminuimos en 1 i y si no añadimos dicho ingrediente y restamos sus kcal del total

ALGORITMO I = RecuperaIngredientes (T (1....N, 0...C))

// T es la tabla resultante del algoritmo anterior e I es el conjunto de ingredientes
// con sus kilocalorías correspondientes

I ← ∅

i ← N, j ← C

Mientras j <> 0, hacer

  Si i >= 1 y T(i,j) = T(i-1,j) entonces hacer:

    i = i-1

  En otro caso,

    j = j - ci

    Añadir ci a I // Ingrediente de tipo i con kcaloría ci

  Fin-En otro caso

Fin-Mientras

Devolver I

Escaneado con CamScanner

Caso de ejemplo:

Sea $C = 7$, $N = 3$ y $V = \{1, 4, 6\}$

Usando el algoritmo Dosis Ingredientes $(C, N, \{1, 4, 6\})$ Podemos rellenar la Tabla T y obtener $T[N][C]$

	0	1	2	3	4	5	6	7
1 $c_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7
2 $c_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4
3 $c_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	$\boxed{2}$

En primer lugar, rellenaríamos los casos base, $T(i,0)$, es decir $T(1,0) = 0$, $T(2,0) = 0$, $T(3,0) = 0$. A continuación, el siguiente caso base: $T(1,j) = j$, que sería la primera fila. Ahora rellenaremos la segunda fila en orden creciente de columnas, $T(2,1), T(2,2), \ldots T(2,C)$ y por último, la última fila. $T(3,1) \ldots T(3,C)$.

Una vez completa utilizamos el algoritmo de recuperación de la solución para ver que ingredientes con kcaloría asociada c_i hemos añadido a la dieta. Vemos que el mínimo número de dosis son 2 que es el valor $T[N][C]$

Utilizamos el algoritmo de recuperación de la solución

$T[3,7] = 2$

$2 = J <> 0$

$3 = i >= 1$ y $T(3,7) \neq T(2,7) \Rightarrow j = 7-6 = 1$, $I = \{c_3\}$

$i = 3 >= 1$ y $T(3,1) = T(2,1) \Rightarrow i = 3-1 = 2$, $I = \{c_3\}$

$i = 2 >= 1$ y $T(2,1) = T(1,1) \Rightarrow i = 2-1 = 1$; $I = \{c_3\}$

$i = 1 >= 1$ y $T(1,1) \neq T(0,1) \Rightarrow j = 1-1 = 0$; $I = \{c_3, c_1\}$

Salimos del bucle porque $j = 0 \Rightarrow I = \{c_3, c_1\}$ es decir 1 dósis del ingrediente 3 y una dósis del ingrediente 1.

PÁGINA CON CÁLCULOS PARA CASO DE EJEMPLO (SUCIO)

$T(2,1) = T(1,1) \;,\; 1 + T(2,0)$

$T(3,1) = T(2,1) \;,\; \cancel{1+T}$ $\quad i = 2$

$T(2,2) = T(1,2) \;,\; \cancel{1+}$

$T(2,3) = T(1,3)$

$T(2,4) = T(1,4) \;,\; 1 + T(2,0)$

$T(2,6) = T(1,6) \;,\; 1 + T(2,2)$

$7 - 4 = 3$

$T(2,3$

$T(3,2)$

$T(3,4) = T(2,4) \;,\; T(3,$

$T(3,5) = T(2,5) \;,$

$T(3,6) = \underbrace{T(2,6)}_{=3} \;,\; 1 + T(3,0)$

$T(3,7) = \underbrace{T(2,7)}_{=4} \;,\; 1 + T(3,1) = 2$

$T(3,7)$ ~~xxx~~ $T(3,7) \neq T(2,7)$ $\qquad T(1,1) \neq T(0,1)$

$j = 7 - 6 = 1$ $\qquad 1 - 1 = 0 = j$

Añadimos a I ci $\qquad$ Añadimos ci

$T(3,1) = 1 = T(2,1)$ ✓ $\Rightarrow i = 3 - 1, \quad T(2,1) = 1 = T(1,1)$