(1) Juan Valentín Guerrero Cano 45338112Y.

a) $\alpha = 0'4 \Rightarrow X_{n+1} = 0'4|X_n| - 1$. Primero calculemos los puntos de equilibrio de la ecuación y demos su solución general:

$x^* > 0 \qquad x^* = 0'4x^* - 1 \Rightarrow x^* = \frac{-1}{1-0'4} = -1'\hat{6}$ → NO ES SOLUCIÓN

$x^* < 0 \qquad x^* = -0'4x^* - 1 \Rightarrow x^* = \frac{-1}{1+0'4} = -0'7143 = -\frac{5}{7}$

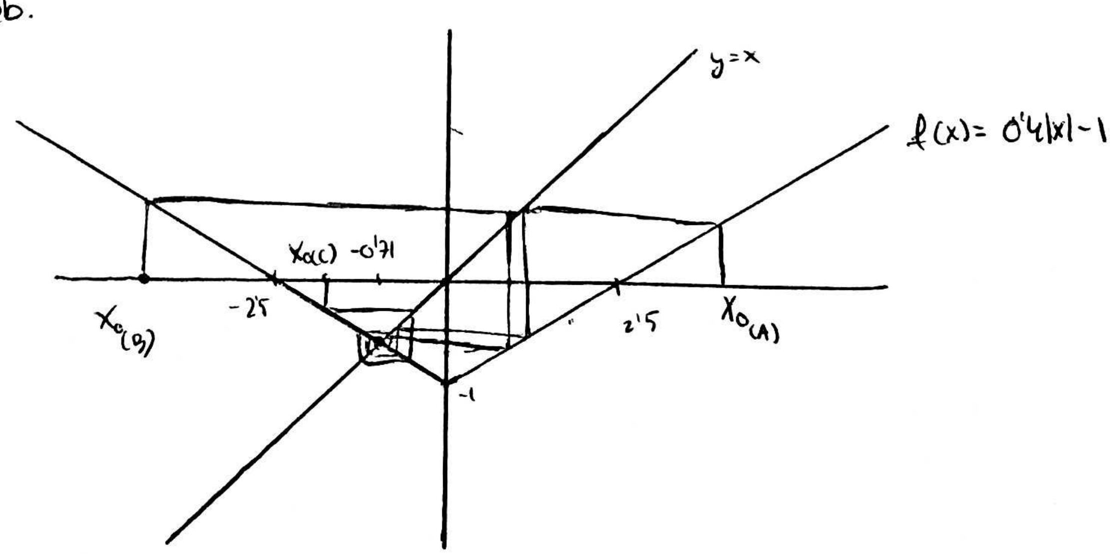
Luego el único punto de equilibrio es $x^* = -0'7143$.

Sol g: $X_k = (x_0 + \frac{5}{7})\, 0'4^n - \frac{5}{7}$.

Claramente $\lim_{k \to \infty} X_k = -\frac{5}{7}$ independientemente del valor inicial de x_0 y del valor absoluto.

Luego nuestro punto de equilibrio $x^* = -0'7143$ es un atractor global. De esta manera la gráfica de las soluciones de nuestra ecuación frente al x_0 tomado quedaría:

Gráfico Cob-web.



Como se puede observar para $X_{0(A)}, X_{0(B)}, X_{0(C)}$ ~~la ecuación~~ las soluciones tienden al atractor $-\frac{5}{7}$ (nuestro punto fijo)

b) $\alpha > 0 \Rightarrow \quad x_{n+1} = \alpha |x_n| - 1.$

Estudiamos los puntos de equilibrio:

$x^* \geq 0 \qquad x^* = \alpha \cdot x^* - 1 \Rightarrow \qquad x^* = \frac{-1}{1-\alpha}$

$x^* < 0 \qquad x^* = -\alpha \cdot x^* - 1 \Rightarrow \qquad x^* = \frac{-1}{1+\alpha}$

Veamos si $\forall \alpha \in (0, +\infty)$ la ecuación tiene dos puntos fijos:

- Cuando el denominador se anule, solo habrá un punto de equilibrio:

Si $\alpha = 1 \Rightarrow \quad \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} \Rightarrow$ Solo un punto fijo: $\boxed{x^* = \frac{-1}{2}}$

- Si $\alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{1-\alpha} < 0 \Rightarrow$ NO es solución.

$\Rightarrow \frac{-1}{1+\alpha} < 0 \Rightarrow$ Si es solución.

Luego solo tendríamos un punto de equilibrio:

$\boxed{x^* = \frac{-1}{1+\alpha}.}$

- Si $\alpha > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow$ Si es solución.

$\Rightarrow \frac{-1}{1+\alpha} < 0 \Rightarrow$ Si es solución.

Luego tendrá dos puntos fijos: $\boxed{\begin{array}{l} x_1^* = \frac{-1}{1-\alpha} \\ x_2^* = \frac{-1}{1+\alpha} \end{array}}$

c) $\alpha = 1'3$ $\qquad X_{n+1} = 1'3\,|X_n| - 1$

Estudiamos la ~~func~~ ecuación de diferencias: dividiéndola en dos Trozos. $\begin{cases} X_{n+1} = 1'3X_n - 1 \\ X_{n+1} = -1'3X_n - 1 \end{cases}$

$\forall x^* < 0 \quad x^* = -1'3 \cdot x^* - 1 \quad \Rightarrow \quad x^* = \dfrac{-1}{1+1'3} = -0.43478$

$\forall x^* > 0 \quad x^* = 1'3 \cdot x^* - 1 \quad \Rightarrow \quad x^* = \dfrac{-1}{1-1'3} = 3,\widehat{3}$

Luego para $\alpha = 1'3$ $\;X_{n+1} = 1'3|X_n| - 1$ Tiene dos puntos fijos.

Estabilidad:

Siendo $f(x) = 1'3\,|x| - 1 \Rightarrow f \in C^1 \; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Estudiamos su derivada en dos Trozos $f'(x)\ \forall x > 0$ y $f'(x)\ \forall x < 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1'3x - 1 & \forall x \geq 0 \\ -1'3x - 1 & \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1'3 & \forall x > 0 \\ -1'3 & \forall x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$f'(-0'43478) = -1'3 \Rightarrow^* |-1'3| > 1 \Rightarrow$ inestable

$f'(3'\widehat{3}) = 1'3 \Rightarrow^* |1'3| > 1 \Rightarrow$ inestable.

Ambos puntos de equilibrio son inestables.

* Por el Teorema de la estabilidad asintótica

d) Si $\alpha = 2 \Rightarrow x_{n+1} = 2 \cdot |x_n| - 1$. $\quad f(x) = 2 \cdot |x| - 1$

¿Es un 2-ciclo con órbita $\{0'2, -0'6\}$?

¿ $-0'6 = f(0'2)$, $\quad 0'2 = f(-0'6)$?

$$f(0'2) = 2 \cdot |(0'2)| - 1 = 0'4 - 1 = -0'6.$$

$$f(-0'6) = 2 \cdot |-0'6| - 1 = 1'2 - 1 = 1'2.$$

Estudiamos sus puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} x^* > 0 & x^* = 2 \cdot x^* - 1 \Rightarrow x = 1 \\ x^* < 0 & x^* = -2x^* - 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Estabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \forall x \geq 0 \\ -2x - 1 & \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & \forall x > 0 \\ -2 & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\cancel{f(1) = 2 \Rightarrow |2| > 1 \Rightarrow \text{inestable}}.$$

$$\cancel{f(-\tfrac{1}{3}) = -2 \Rightarrow |-2| > 1 \Rightarrow \text{inestable}}.$$

$$\left| f'(1) \cdot f'(-\tfrac{1}{3}) \right| = |2 \cdot (-2)| = 4 > 1 \Rightarrow \text{inestable}.$$