Daniel Cerezo García

④ Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones en $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que $\{f_n(x)\} \to 0$, puesto que, si $x=0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{0}{1} = 0$$

Y si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = 0$$

Por tanto, obtenemos que, si definimos la función $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$, entonces $\{f_n\} \to f_0$.

En este caso, el campo de convergencia puntual de $\{f_n\}$ es $\mathbb{R}_0^+$.

b) Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty)$, pero no en $[0, \delta]$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, f_n es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con

$$f_n'(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 4n^2x^3 \cdot 2nx^2}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{4nx + 4n^3x^5 - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} =$$

$$= \frac{4nx(1-n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}$$

Entonces, $f_n'(x) = 0 \iff x=0$ ó $1-n^2x^4 = 0 \iff x=0$ ó $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

Como $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ó $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Veamos la monotonía de $f_n(x)$.

$$f_n'\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{2n}{\sqrt{n}}\left(1-\cancel{4}\, n^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4\right)}{\left(1+n^2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4\right)} = \frac{\frac{2n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{16}\right)}{\left(1+\frac{1}{16}\right)} > 0$$

$$f_n'\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{8n}{\sqrt{n}}\left(1-n^2\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4\right)}{\left(1+n^2\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^4\right)} = \frac{\frac{8n}{\sqrt{n}}(1-16)}{(1+16)} < 0$$

Por tanto, fijado $n\in\mathbb{N}$, f_n es creciente en el intervalo $\cancel{[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]}$ $]0,\frac{1}{\sqrt{n}}[$ y decreciente en el intervalo $]\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty[$.

~~Si creamos entonces la sucesión x_n tal que~~

$$\cancel{x_n = \left\{ x_n \ \frac{1}{\sqrt{n}} \right.}$$

Entonces, dado $\delta\in\mathbb{R}^+$, existe $m\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt{m}}<\delta$.

Definiendo entonces la sucesión $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^+$ tal que

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n\geq m \\ 0 & n<m, \end{cases}$$

podemos observar que la ~~sucesión~~ $\cancel{\{f_n(x_n)\}}$ $\{x_n\}\subset[0,\delta[\subset[0,\delta]$ y $\{f_n(x_n)\}\not\to 0$. Por tanto, $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f_0 en $[0,\delta]$.

Ahora, podemos ver que $\cancel{\forall n\in\mathbb{N}: n\geq m}$, como $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n es decreciente a partir de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, y $\frac{1}{\sqrt{m}}<\delta$, entonces $\forall n\in\mathbb{N}: n\geq m$, f_n es decreciente en $]\delta,+\infty[$. Definiendo la sucesión $\{\varphi_n\}$ como $\varphi_n=f_n(\delta)$, tenemos

$\cancel{\varphi_n \ f_n}$

que $0\leq f_n(x)\leq f_n(\delta)=\varphi_n$.

Y como $\{\varphi_n\}\to 0$ por la convergencia puntual estudiada, sabemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\delta,+\infty[$.

2.1

⑤ Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) = n (\cos x)^n \operatorname{sen} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $p \in \mathbb{R}$ con $0 < p < \pi/2$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[p, \pi/2]$, pero no en el intervalo $[0, p]$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, g_n es derivable $\forall x \in [0, \pi/2]$ con

$$g_n'(x) = -n^2 \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}^2 x + n \cdot (\cos x)^{n+1} =$$

$$= n \cdot (\cos x)^{n-1} (-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

Entonces, $g_n'(x) = 0 \longleftrightarrow \cos x = 0$ ó $-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$,

$\cos x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{n} \longleftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\Updownarrow$$

$$x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Podemos observar la monotonía de g_n.

$0 \nearrow \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \searrow$

g_n crece en el intervalo $\left]0, \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right[$ y decrece en el intervalo $\left]\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right[$.

~~Definimos entonces la sucesión $\{x_n\}$ tal que~~

Sea cual sea $p \in \mathbb{R} : 0 < p < \pi/2$, $\exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) < p$.

Si definimos ahora la sucesión

$\{x_n\}$ tal que $x_n = \begin{cases} n \cdot \left[\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]^n \cdot \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$

Entonces, tenemos que $\{x_n\} \subset [0, p]$ y $\{x_n\} \not\to 0$.

Podemos observar que la convergencia puntual de g_n consiste en que $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\{g_n(x)\} \to f_0$, ya que

$\lim_{n\to+\infty} g_n(0) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(\pi/2) = 0$ y $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$ para $0 < x < \pi/2$

Este último límite es debido a la escala de infinitos (a^n cuando $n \to \infty$ converge "más rápidamente" ~~que~~ que n).

Así, vemos que en el intervalo $[0, p]$, $\{g_n\}$ no converge uniformemente.

Por otro lado, $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que g_n es decreciente $\forall x \in]\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{\sqrt{n}}), \pi/2[$.
Además, ~~$\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos $m \in \mathbb{N}$~~ tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{\sqrt{m}}) < p$, ~~tenemos~~ si definimos la sucesión $\{\varphi_n\}$ como $\varphi_n = g_n(p)$, tenemos que, ~~$g_n(x)$~~ $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq m$, $g_n(x) < g_n(p) = \varphi_n$ $\forall x \in [p, \pi/2]$.
Por tanto, como $\{\varphi_n\} \to 0$ por la convergencia puntual antes estudiada, sabemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[p, \pi/2]$.

4.1

Escaneado con CamScanner

Índice de comentarios

1.1 Deberías explicarlo, porque tienes una indeterminación

1.2 Esto se podría hacer mejor ¿no te parece?

2.1 Correcto

3.1 Aquí te has despistado: x_n sí tiende a cero. Lo que necesitas es que g_n(x_n) no tienda a cero, pero no lo dices ni lo demuestras

4.1 Esta parte es correcta pero lo explicas de forma muy liosa