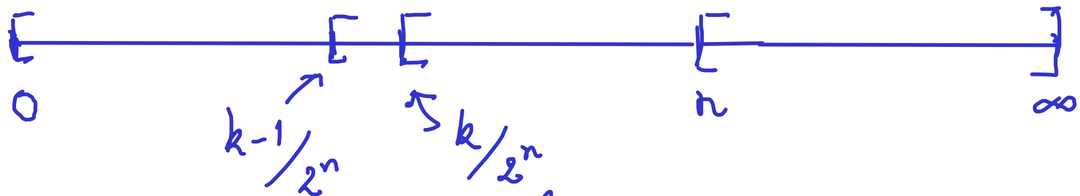
Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Teorema de aproximación uniforme

Si f es una función medible positiva, tal que $\sup f(\Omega) < \infty$, entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω.

$n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n2^n$



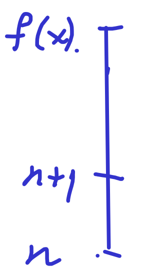
$$[0, \infty] = \left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right[\right) \uplus [n, \infty]$$

$$F_n = \{ x \in \Omega : f(x) \geqslant n \} \in \mathcal{M}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{M}$$

$$\Omega = \left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} E_{nk} \right) \uplus F_n$$

1)

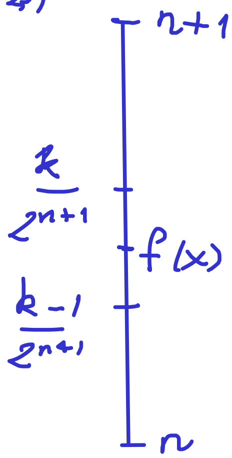


$$S_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

$x \in \Omega \quad ¿ S_n(x) \leq S_{n+1}(x)?$

$n+1 < f(x), \quad x \in F_{n+1} \subset F_n \qquad S_n(x) = n < n+1 = S_{n+1}(x)$

2)



$n \le f(x) < n+1 \quad , \quad x \in F_n \quad , \quad s_n(x) = n$

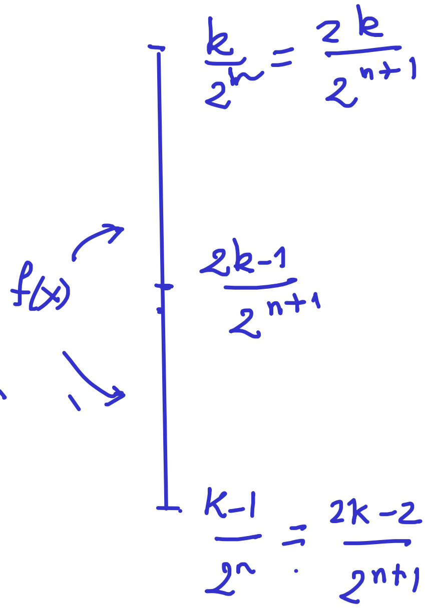
$\exists\, k \in \{1, 2, \dots, (n+1)2^{n+1}\} : x \in E_{n+1,k}$

$\frac{k-1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{k}{2^{n+1}}$

$n \le f(x) < \frac{k}{2^{n+1}} \quad , \quad n\,2^{n+1} < k$

$n\,2^{n+1} \le k-1 \quad , \quad s_n(x) = n \le \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$

3)



$f(x) < n \quad \exists\, k \in \{1, 2, \dots, n\,2^n\} : x \in E_{nk}$

$\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$

$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$ Dos casos:

$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \qquad s_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = s_n(x)$

$\frac{2k-1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} \qquad s_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} > \frac{2k-2}{2^{n+1}} = s_n(x)$

Resumen: $s_n(x) \le s_{n+1}(x) \ \forall x \in \Omega \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{s_n\}$ es creciente

$x \in \Omega \quad ¿\{s_n(x)\} \to f(x)?$

Si $f(x) = \infty$, $s_n(x) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{s_n(x)\} = \{n\} \to \infty = f(x)$

Si $f(x) < \infty \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : m > f(x)$

$n \ge m \Rightarrow n > f(x) \Rightarrow \exists\, k \in \{1, 2, \dots n\,2^n\} : x \in E_{nk}$

$\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \quad , \quad s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \quad , \quad 0 \le f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$

$\exists\, m \in \mathbb{N} : n \ge m \Rightarrow 0 \le f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad , \quad \{s_n(x)\} \to f(x)$

$\sup f(\Omega) < \infty$, $\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq M \quad \forall x \in \Omega$

$\exists\, m \in \mathbb{N} : \quad m > M$

$n \geq m \ , \quad x \in \Omega \implies f(x) < n \implies \exists\, k \in \{1, 2, \dots n2^n\} : x \in E_{nk}$

$$\implies 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

Por tanto:

$$n \geq m \implies 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \Omega$$

$\{s_n\}$ converge a f uniformemente en Ω

Operaciones algebraicas con funciones medibles positivas

Si f y g son funciones medibles positivas,

entonces $f+g$ y fg también lo son

$\{s_n\} \nearrow f$, $\{t_n\} \nearrow g$, s_n, t_n simples positivas $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{s_n + t_n\} \nearrow f+g$, $s_n + t_n$ simple positiva $\forall n \in \mathbb{N}$,

luego $f+g$ medible

$\{s_n t_n\} \nearrow fg$, $s_n \cdot t_n$ simple positiva $\forall n \in \mathbb{N}$

luego $f \cdot g$ medible