JULIÁN GARRIDO ARANA.

1. Dado $\alpha > 0$, se considera la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = \alpha \cdot |x_n| - 1 \qquad (1)$$

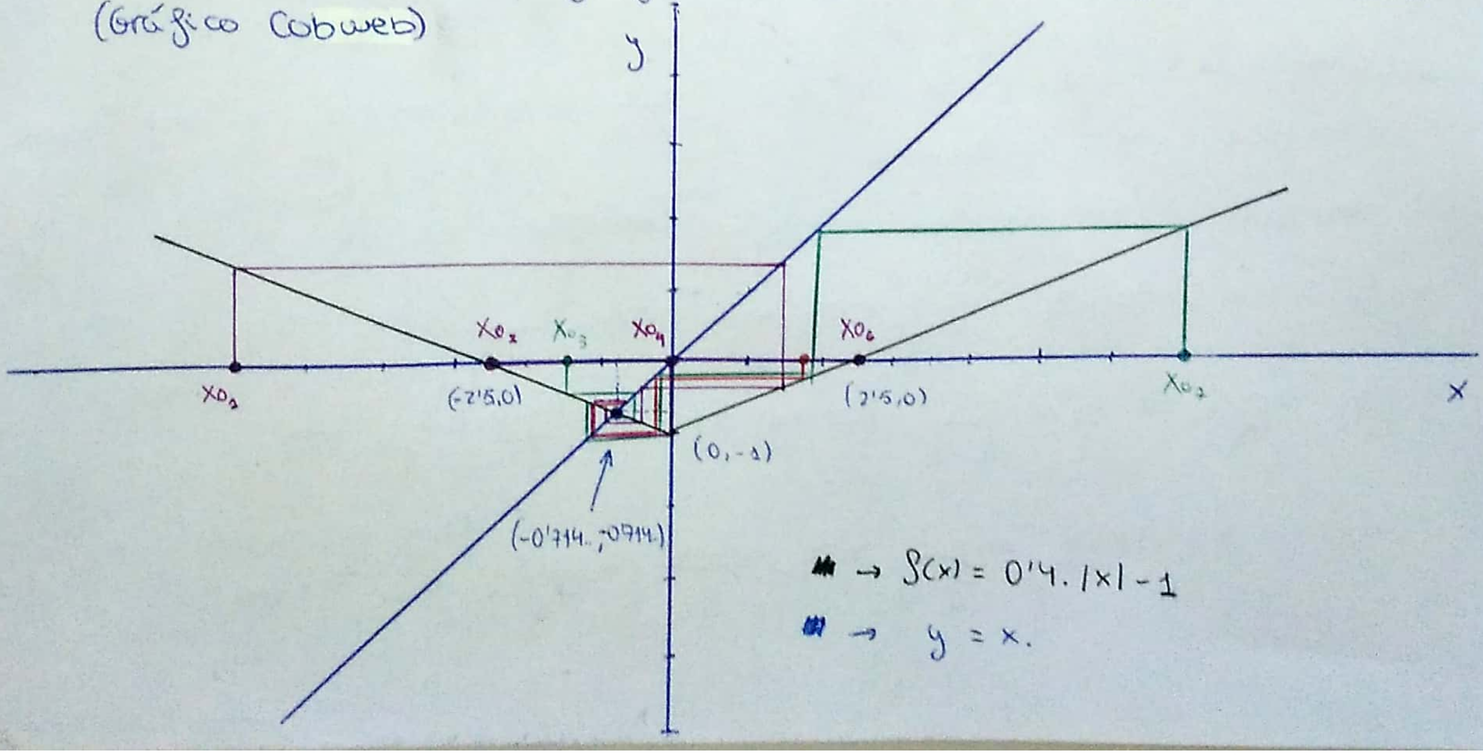
- a) Para $\alpha = 0.4$, estudia gráficamente el comportamiento de las soluciones en función de su dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.
- b) Para $\alpha \geq 0$ determina el número de puntos de equilibrio de la ecuación (1).
- c) Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio para $\alpha = 1.3$.
- d) Si $\alpha = 2$, comprueba que $\{0.2, -0.6\}$ es un 2-ciclo y estudia su estabilidad.

a) $\alpha = 0.4 \Rightarrow x_{n+1} = 0'4 \cdot |x_n| - 1$.; Si estudiamos los puntos de equilibrio: $\rightarrow x^* = 0'4 \cdot |x^*| - 1 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0'4 \cdot x^* - 1 & ① \\ x^* = 0'4 \cdot (-x^*) - 1 & ② \end{cases}$

① $\forall x^* \geq 0$ ② $\forall x^* < 0$.

$$\rightarrow \begin{cases} ① \Rightarrow x_1^* = \dfrac{-1}{0'6} = \dfrac{-5}{3} < 0 \Rightarrow \text{NO es solución posible.} \\ ② \Rightarrow x_2^* = \dfrac{-1}{1'4} = \dfrac{-5}{7} = -0'7142857\ldots \end{cases}$$

→ Vemos que ocurre gráficamente (Gráfico Cobweb)



JULIÁN GARRIDO ARANA.

Observando el diagrama, vemos que la función asociada a nuestra ecuación en diferencias corta en un único punto a la recta $y=x$, por lo que ese punto de corte es el único punto de equilibrio posible ($\alpha = -5/7$).

Además, independientemente del x_0 que cojamos, la solución converge a dicho punto de equilibrio, por lo que $\alpha = -5/7$ es un atractor global.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Concluimos pues que las soluciones no dependen del x_0 (dato inicial) que tomemos y que todas convergerán al punto de equilibrio $\alpha = -5/7 = -0'71428\ldots$

b)

$$x_{n+1} = \alpha |x_n| - 1 \longrightarrow x^* = \alpha |x^*| - 1 \begin{cases} x^* = \alpha x^* - 1 & \text{para } x^* \geq 0 \\ x^* = -\alpha x^* - 1 & \text{para } x^* < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{para } x^* \geq 0 \rightarrow x_1^* = \dfrac{-1}{1-\alpha} \\ \text{para } x^* < 0 \rightarrow x_2^* = \dfrac{-1}{1+\alpha} \end{array}\right\} \text{posibles soluciones} \rightarrow \text{ptos de equilibrio.}$$

$\rightarrow$ Como $\alpha > 0 \Rightarrow$ para $x_2^* < 0$, $\dfrac{-1}{1+\alpha} < 0$ siempre y por tanto siempre es solución.

Veamos que ocurre según los valores de α:

- Si $\alpha < 1 \Rightarrow x_1^* = \dfrac{-1}{1-\alpha} < 0$ para $x_1^* \geq 0$!! $\rightarrow$
- Si $\alpha = 1 \Rightarrow x_1^* = \dfrac{-1}{1-\alpha}$ NO es solución

Solo hay un único punto de equilibrio. $x_2^* = \dfrac{-1}{1+\alpha}$.

- Si $\alpha > 1 \Rightarrow x_1^* = \dfrac{-1}{1-\alpha} > 0$ para $x_1^* > 0 \Rightarrow$ Hay 2 puntos de equilibrio:
$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{-1}{1-\alpha} \\ x_2^* = \dfrac{-1}{1+\alpha} \end{cases}$$

JULIÁN GARRIDO ARANA.

c)) $\alpha = 1.3 \Rightarrow x_{n+1} = 1'3 . |x_n| - 1$.

Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1'3 . |x| - 1$ y entonces nos queda que $x_{n+1} = f(x_n)$.

Como $\alpha > 1$, por b) sabemos que hay 2 puntos de equilibrio que son:

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{-1}{1-1'3} = \dfrac{10}{3} = 3'\hat{3} \\ \beta_2 = \dfrac{-1}{1+1'3} = \dfrac{-10}{23} = -0'43478\ldots \end{cases}$$

Para estudiar su estabilidad aplicamos el Teorema de la Estabilidad asintótica local (derivada).

Como f no es derivable en $x=0$ ⊛, redefinimos f.

$$f(x) = \begin{cases} 1'3 x - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1'3 x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow f: I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Contemplamos entonces el SDD $\{I, f\}$ y los puntos de equilibrio β_1 y β_2. Tenemos que f es C^1 en su dominio.

⊛ y ninguno de los puntos de equilibrio es igual a cero.

$$f'(x) = \begin{cases} 1'3 & \text{si } x > 0 \\ -1'3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow |f'(x)| = 1'3 > 1 \ \forall x \in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f'(\beta_1)| = |f'(\beta_2)| > 1 \Rightarrow$ <u>β_1 y β_2 son inestables</u>

JULIÁN GARRIDO ARANA.

d)| $\alpha = 2 \Rightarrow x_{n+1} = 2|x_n| - 1$. Tomando f del apartado c)*, tenemos que $x_{n+1} = f(x_n)$. * cambiando el coeficiente 1'3 por 2.

$$\left\{\begin{array}{l} f(0'2) = -0'6 \\ f(-0'6) = 0'2 \end{array}\right\} \Rightarrow \{0'2, -0'6\} \text{ es un 2-ciclo.}$$

Para estudiar la estabilidad de este ciclo aplicamos el criterio del valor absoluto del producto de las derivadas.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f'(x)| = 2 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}_{\text{(no necesario)}} \text{ ;}$$

$$|f'(0'2) \cdot f'(-0'6)| = |2 \cdot (-2)| = |-4| = 4 > 1 \Rightarrow$$

$\Longrightarrow$ el ciclo es inestable.

Escaneado con CamScanner