Sucesiones y Operador Shift.

Espacio de Sucesiones

$$S := \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$$ sucesiones reales.

$S^{\mathbb{C}}$ sucesiones complejas

Operador Shift $T : S \to S$

$$Tx(n) = x(n+1)$$

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$\pi_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

$\pi_\lambda(n) = \lambda^n$ Nota: ·) $0^0 = 1$.

·) $T\pi_\lambda = \lambda \pi_\lambda$

·) $\ker T = \mathbb{R}\, \pi_0$ $\pi_0 = (1, 0, 0, \dots)$

·) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\pi_\lambda \in S^{\mathbb{C}}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, es un valor propio de T, π_λ es un vector propio.

Algebra generada por un Operador. (Anillo) ②

Notación

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(x)$ = anillo de Polinomios en x.

El producto es el "producto formal"

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(T)$ = Anillo generado por T

$$\left\{ a_0 I + a_1 T^2 + \dots + a_k T^k : \; a_0, a_1, \dots a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

El producto es la composición.

<u>Nota</u> $\quad T^k = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ veces}}$

$$T^k T^p = \underbrace{T \cdot T \circ \dots \circ T}_{k \text{ veces}} \circ \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{p \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k+p \text{ veces}} = T^p \circ T^k$$

Como los generadores conmutan el anillo es conmutativo.

La aplicación

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(T)$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \longrightarrow L_p = a_0 I + a_1 T + \dots + a_k T^k$$

Es un morfismo de Anillos.

Lema 1 $\quad L_p \Pi_\lambda = P(\lambda)\Pi_\lambda$

La ecuación lineal de orden k, planteamiento funcional.

si tomamos la ecuación

$$(*) \quad a_k x(n+k) + a_{k-1} x(n+k-1) + \dots + a_1 x(n+1) + a_0 x(n) = b(n)$$

asociado al polinomio característico

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

entonces la ecuación $(*)$ se escribe como

$$L_p x = b$$

donde L_p es el operador asociado a P. (Pag 2)

Sea $\sigma = \{\text{Raices de } P\}$, entonces

$$\Sigma = \{\text{Conjunto de las soluciones de la homogenea}\}$$

$$= \operatorname{Ker} L.$$

Lema (Caso no resonante)

Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma$ entonces la ecuación

$L x = \Pi_\lambda$ tiene una solución particular

de la forma $c\Pi_\lambda$

Dem Usando el Lema 1 (Pag 3)

$$L_p \, c\Pi_\lambda = c\,P(\lambda)\,\Pi_\lambda$$

y usando que $\lambda \notin \sigma$ $P(\lambda) \neq 0$ y por tanto
puedo tomar $c = \frac{1}{P(\lambda)}$.

Aplicación Calcula todas las soluciones de

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 2^n + 3^n. \quad (*1)$$

vamos primero a obtener una solución particular
de $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 2^n$ (*2)

y de
$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 3^n$ (*3)

Sumando las soluciones particulares de (*2)
y (*3) obtenemos una solución particular de
(*1).

Para resolver (*2) observamos que tenemos

$$Lx = \Pi_2$$

donde L es el operador asociado a ~~$P(x) = x^2+2x+1$~~
$P(x) = x^2 + 2x + 1$

y como $\sigma = \{-1\}$ es no resonante.

Busco por tanto una solución del tipo

$x = c\,2^n$ de donde usando (✱2)

$$c\,2^{n+2} + 2c\,2^{n+1} + c\,2^n = 2^n$$

y portanto $9c = 1$ y tenemos una solución

particular

$$x_n = \frac{1}{9} 2^n$$

Si usamos (✱3) en lugar de (✱2) obtenemos

La solución particular

$$x_n = \frac{1}{16} 3^n$$

De donde la solución particular de (✱1)

$$x_n = \frac{1}{9} 2^n + \frac{1}{16} 3^n$$

de aqui añadiendo las de la homogenea $(-1)^n$

$n(-1)^n$

queda

$$\boxed{x_n = \frac{1}{9} 2^n + \frac{1}{16} 3^n + c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n}$$

volviendo al caso general ⊛ en pag 3

se obtiene lo siguiente

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \sigma$ y b una combinación lineal de $\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}, \dots, \pi_{\lambda_r}$

entonces

$$Lx = b$$

tiene una solución particular que es también una combinación lineal de $\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}, \dots, \pi_{\lambda_r}$.