Análisis Matemático II
Ejercicios del Capítulo 0: cálculo de integrales y sucesiones de funciones.

1. Calcular las siguientes integrales usando el **Teorema de Fubini**:

   a) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   b) $\displaystyle\int_I y\ \log x\ d(x,y),\ I=[1,e]\times[1,e].$

   c) $\displaystyle\int_I x^3\ y^3\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   d) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   e) $\displaystyle\int_I x\ \log(xy)\ d(x,y),\ I=[2,3]\times[1,2].$

   f) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[1,2].$

   g) $\displaystyle\int_E 1\ d(x,y)$, siendo $E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] : x+y\leq 1\}$ (triángulo).

   h) $\displaystyle\int_E 1\ d(x,y)$, siendo $E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] : x^2+y^2\leq 1\}$ (cuadrante circular).

2. (Cambio de variable: **coordenadas polares en** $\mathbb{R}^2$) Consideremos los siguientes abiertos $U=\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[$, $V=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0) : x\leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U\longrightarrow V$ definida por

   $$\phi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta).$$

   Probar que ϕ es un difeomorfismo y usarlo para calcular, mediante el Teorema del Cambio de Variable, las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_E 1\, d(x,y)$, siendo $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq r^2\}$ (círculo de radio r).

   b) La integral del apartado 1.- *h*) (cuadrante circular).

   c) $\displaystyle\int_E (x^2+y^2)\, d(x,y)$, siendo $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\leq x^2+y^2\leq 9\}$ (corona circular de radios 2 y 3).

   d) $\displaystyle\int_E (x^2+y^2)\, d(x,y)$, siendo $E=B((1,0),1)$ (círculo de centro $(1,0)$ y radio 1).

3. (Cambio de variable: **coordenadas cilíndricas en** $\mathbb{R}^3$) Consideremos los siguientes abiertos $U=\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z) :\ x\leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U\longrightarrow V$ definida por

   $$\phi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta,z).$$

   Probar que ϕ es un difeomorfismo y usarlo para calcular, mediante el Teorema del Cambio de Variable, las siguientes integrales:

a) $\int_E 1\, d(x,y)$, siendo $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le r^2 \;,\; 0 \le z \le h\}$ (cilindro de radio r y altura h).

b) $\int_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, siendo $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3\}$ (cono).

c) $\int_E 1\, d(x,y)$, siendo $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ (cucurucho de helado).

4. (Cambio de variable: **coordenadas esféricas en** $\mathbb{R}^3$) Consideremos los siguientes abiertos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : \; x \le 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi).$$

Probar que ϕ es un difeomorfismo y usarlo para calcular, mediante el Teorema del Cambio de Variable, las siguientes integrales:

a) $\int_E 1\, d(x,y)$, siendo $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ (esfera de radio r).

b) La integral del apartado 3.- c) (cucurucho de helado).

5. Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \; .$$

a) Estudiar la convergencia puntual.

b) Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$ (donde $a > 0$).

6. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n \; .$$

a) ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$?

b) ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[a,1]$ (donde $0 < a < 1$)?

7. Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \; .$$

a) Estudiar la convergencia puntual.

b) Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,\pi/2]$ (donde $0 < a < \pi/2$).

8. Consideremos la sucesión de funciones $f_n :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x} \; .$$

a) Estudiar la convergencia puntual.

b) Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ (donde $0 < a < b < \pi$).

9. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \ .$$

10. Consideremos la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n) \ .$$
Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$ (donde $a > 0$).

11. Estudiar la convergencia uniforme en $[0, +\infty[$ de la sucesión de funciones $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right) \ .$$