Cadenas de Markov

Planteamiento probabilístico.

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ un número finito de estados en donde una partícula, dispositivo, individuo... puede estar con cierta ~~prop~~ probabilidad.

si llamamos $u^i = P\{$partícula esté en el estado $i\}$

entonces tenemos un vector

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix}$$

verificando

1. $0 \leq u^i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{k} u^i = 1$.

Sea

$$\Delta = \{ u \in \mathbb{R}^k : \text{se verifica (1) y (2)} \}.$$

Aparte tenemos un proceso que cambia al individuo de estado.

Sea $a_{ij} = P\left(\begin{array}{l}\text{un individuo de la}\\ \text{clase } j \text{ pase a la}\\ \text{clase } i \text{ tras el proceso}\end{array}\right)$

<u>Teorema</u> Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1..k\\ j=1..k}}$ $u = (u^i)_{i=1,\dots k}$ el vector de estados antes del proceso y y $v = (v^i)_{i=1..k}$ el vector de estados tras el proceso, ~~tras~~ entonces (Bajo independencia)

$$A \cdot u = v.$$

Dem. Es el teorema de la probabilidad total.

Cadenas de Markov

Planteamiento dinámico.

Si tenemos u_n = vector de estados tras aplicar n-veces el Proceso.

$$u_{n+1} = A u_n, \quad u_n \in \Delta$$

Tenemos un sistema dinámico en Δ

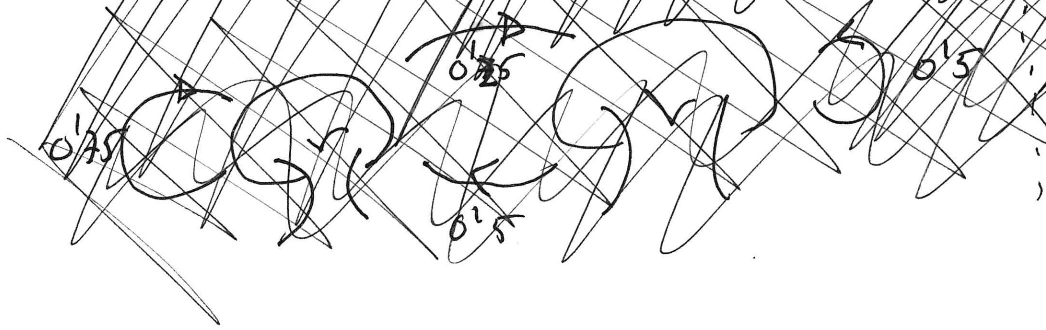
Notas: Si $e_1, e_2, \ldots, e_k$ es la base canónica en $\mathbb{R}^k$ ~~entonces~~ y $A = (A_1 | A_2 | \ldots | A_k)$ por columnas entonces

$$A e_j = A_j \in \Delta.$$

Una matriz se dice de estados, de probabilidad, estocástica si

$$\forall j, \quad A_j \in \Delta.$$

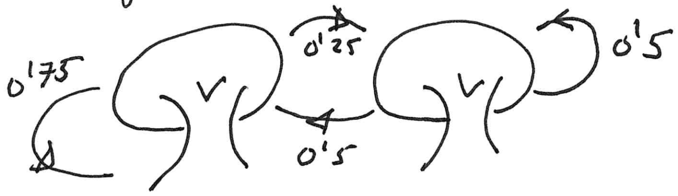
~~Ejemplos: Ejercicio 5 relación 1~~



$$\cancel{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'75 & 0'5 \\ 0'25 & 0'5 \end{pmatrix}}$$

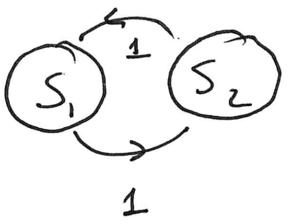
Ejemplos

① Ejercicio 5 Rel 1.



$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'75 & 0'5 \\ 0'25 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

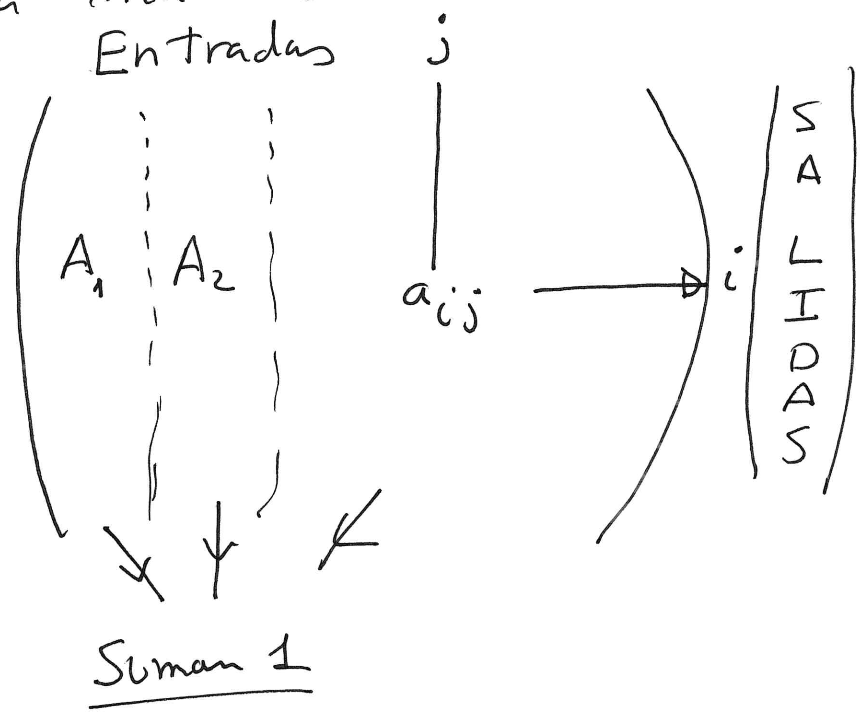
② Intercambio de estados



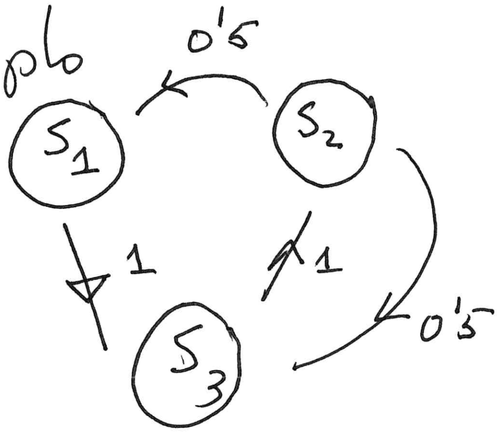
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③

Identificación visual de los elementos de la matriz



Ejemplo



$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0'5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0'5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \end{array}$$

Interpretación geométrica