

Análisis Matemático II

Tema 1: Sucesiones de funciones

22-23 de febrero y 2 de marzo

1 Convergencia puntual

2 Convergencia uniforme

3 Relación con otras propiedades

Convergencia puntual

●○○

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

○○○

Sucesiones de funciones

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es
una aplicación de \mathbb{N} en \mathcal{F}

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una aplicación de \mathbb{N} en \mathcal{F}

Si A un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de todas las funciones de A en \mathbb{R}

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una aplicación de \mathbb{N} en \mathcal{F}

Si A un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de todas las funciones de A en \mathbb{R}

Entonces, una **sucesión de funciones** de A en \mathbb{R} es una aplicación de \mathbb{N} en $\mathcal{F}(A)$

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una aplicación de \mathbb{N} en \mathcal{F}

Si A un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de todas las funciones de A en \mathbb{R}

Entonces, una **sucesión de funciones** de A en \mathbb{R} es una aplicación de \mathbb{N} en $\mathcal{F}(A)$

Tal sucesión asocia, a cada $n \in \mathbb{N}$, el **n -ésimo término** de la sucesión que será una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ y entonces la sucesión se denota por $\{f_n\}$

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una aplicación de \mathbb{N} en \mathcal{F}

Si A un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de todas las funciones de A en \mathbb{R}

Entonces, una **sucesión de funciones** de A en \mathbb{R} es una aplicación de \mathbb{N} en $\mathcal{F}(A)$

Tal sucesión asocia, a cada $n \in \mathbb{N}$, el **n -ésimo término** de la sucesión que será una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ y entonces la sucesión se denota por $\{f_n\}$

Definir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en \mathbb{R} equivale a definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, y cada $x \in A$, un número real $f_n(x)$

Convergencia puntual

○●○

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

○○○

Convergencia puntual

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en C
y que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en C
y que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C

Sea $C_p = \{x \in A : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$ y $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C_p$

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en C
y que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C

Sea $C_p = \{x \in A : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$ y $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C_p$

Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C ,
entonces $C \subset C_p$ y $f(x) = F(x) \quad \forall x \in C$

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en C
y que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C

Sea $C_p = \{x \in A : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$ y $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in C_p$

Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C ,

entonces $C \subset C_p$ y $f(x) = F(x) \quad \forall x \in C$

Se dice que C_p es el **campo de convergencia puntual** de $\{f_n\}$

Convergencia puntual

○○●

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

○○○

Ejemplo de convergencia puntual

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $] -1, 1]$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $] -1, 1]$ en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $] -1, 1]$ en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$

si, y sólo si, $C \subset] -1, 1]$, en cuyo caso,

el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es $\varphi|_C$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $] -1, 1]$ en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, $C \subset] -1, 1]$, en cuyo caso, el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es $\varphi|_C$

Por ejemplo, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a **cero** en $] -1, 1[$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $] -1, 1]$ en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, $C \subset] -1, 1]$, en cuyo caso, el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es $\varphi|_C$

Por ejemplo, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a **cero** en $] -1, 1[$
 φ_n es continua en $] -1, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero φ no es continua en 1

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

●○○○○

Relación con otras propiedades

○○○

Definición de convergencia uniforme

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

En tal caso se tiene:

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

En tal caso se tiene:

- $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

C subconjunto no vacío de A y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

En tal caso se tiene:

- $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C
- $\emptyset \neq D \subset C \Rightarrow \{f_n\}$ converge uniformemente en D a $f|_D$

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○●○○○

Relación con otras propiedades

○○○

Ejemplo de convergencia uniforme

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1]$ a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1]$ a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $] -1, 1[$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1]$ a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $] -1, 1[$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $] -1, 1]$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1]$ a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $] -1, 1[$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $] -1, 1]$
- En general, la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1]$ a la función $\varphi :] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $] -1, 1[$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $] -1, 1]$
- En general, la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme
- Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $r < 1$, se tiene que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en $[-r, r]$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $] -1, 1[$ a la función $\varphi :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in] -1, 1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $] -1, 1[$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $] -1, 1[$
- En general, la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme
- Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $r < 1$, se tiene que
 $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en $[-r, r]$
- En general, no se puede hablar de un “campo de convergencia uniforme”

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○●○○

Relación con otras propiedades

○○○

Primer criterio de convergencia uniforme

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)| \leq 1/(2n) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,
existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} , con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geq m \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en \mathbb{R} tal que

$$\{\rho_n\} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)| \leq 1/(2n) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en \mathbb{R}

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○○●○

Relación con otras propiedades

○○○

Segundo criterio de convergencia uniforme

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a 0,

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C

Ejemplo

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C

Ejemplo

En el caso $A = [0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{y} \quad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C

Ejemplo

En el caso $A = [0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{y} \quad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0, 1]$, pero no uniformemente

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○○○●

Relación con otras propiedades

○○○

Criterio de Cauchy

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C , entonces

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C , entonces

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C , entonces

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C ,

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C , entonces

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C ,
entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en C

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

●○○

Convergencia uniforme y continuidad

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$

y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

que converge uniformemente, en un entorno U del punto x_0 ,

a una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$

y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

que converge uniformemente, en un entorno U del punto x_0 ,

a una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f_n es continua en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$,

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$

y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en \mathbb{R}

que converge uniformemente, en un entorno U del punto x_0 ,

a una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f_n es continua en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$,

entonces f es continua en el punto x_0 .

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

○●○

Convergencia uniforme y derivación

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$
converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto,
que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$
converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto,
que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

- f_n es derivable en I , para todo $n \in \mathbb{N}$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

- f_n es derivable en I , para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f'_n\}$ converge uniformemente en I a una función $g: I \rightarrow \mathbb{R}$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

- f_n es derivable en I , para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f'_n\}$ converge uniformemente en I a una función $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

- f_n es derivable en I , para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f'_n\}$ converge uniformemente en I a una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I a una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en \mathbb{R} , y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en \mathbb{R} , supongamos que:

- f_n es derivable en I , para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f'_n\}$ converge uniformemente en I a una función $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I a una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ que es derivable en I con $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$

Convergencia puntual

○○○

Convergencia uniforme

○○○○○

Relación con otras propiedades

○○●

Convergencia uniforme e integración

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión
de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} ,

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión
de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} ,
que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} , que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} , que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} , que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{y} \quad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} , que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{y} \quad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0, 1]$, pero

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} , que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{y} \quad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0, 1]$, pero

$$\int_0^1 h_n(x) dx = \frac{1}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$