④ $f_n(x) = \dfrac{2n\cdot x^2}{1+n^2\cdot x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) $x=0 \rightarrow \quad f_n(0) = \dfrac{2n\,0}{1+n^2\cdot 0} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f_n(0)\} = \{0,\dots,0\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+: \quad f_n(x) = \dfrac{2n\cdot x^2}{1+n^2\cdot x^4} = \dfrac{2n\cdot x^2}{n\cdot x^2\left(\frac{1}{n\cdot x^2}+n\cdot x^2\right)} = \dfrac{2}{\frac{1}{n\cdot x^2}+n\cdot x^2}$

Luego: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Definiendo $\varphi(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow \{f_n(x)\} \to \varphi(x) \; \forall x \in \mathbb{R}_0^+$

Luego el campo de convergencia de $\{f_n\}$ es $\mathbb{R}_0^+$

$\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 en $\mathbb{R}_0^+$

b) $n \in \mathbb{N}$ $\quad F_n$ derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con:

$F_n' = \dfrac{2x^2(1+n^2\cdot x^4) - 2n\cdot x^2(2n\cdot x^4)}{(1+n^2\cdot x^4)^2} = \dfrac{2x^2(1+n^2\cdot x^4 - 2n^2\cdot x^4)}{(1+n^2\cdot x^4)^2} =$

$= \dfrac{2x^2(1-n^2\cdot x^4)}{(1+n^2\cdot x^4)^2} = 0$

$2x^2(1-n^2\cdot x^4) = 0$ si $x=0$
$1 = n^2\cdot x^4 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Sol $+ \Rightarrow \left(+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ya que $x \in \mathbb{R}_0^+$

$F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad F'(x) \geq 0 \Rightarrow F_n$ creciente en $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad f'(x) \leq \Rightarrow f_n$ decreciente en $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$

$$\text{máx}\left\{ f_n(x) : x \in \mathbb{R}_0^+ \right\} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

$\delta \in \mathbb{R}^+ : \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta \qquad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n \geq m$

$x_n = 0 \quad n < m$

$x_n \in [0, \delta[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{f_n(x_n) - 0\} \not\to 0 \quad \{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \delta]$

Estudiemos la convergencia uniforme en $[\delta, +\infty[$

$n \geq m \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta \quad f_n$ decreciente $[\delta, +\infty[$

$0 < f_n(x) \leq f_n(\delta) = \delta_n \qquad \{f_n(\delta)\} = \{\delta_n\} \to 0$

$\exists\, m \in \mathbb{N} : \; n \geq m \qquad |f_n(x)| \leq \delta_n \quad \forall x \in [\delta, +\infty[$

$\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty[$

⑤ $g_n(x) = n\cdot(\cos x)^n \operatorname{sen} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$

Para $n \in \mathbb{N}$: g_n es derivable en $[0, \frac{\pi}{2}]$

$g'_n(x) = -n^2\cdot(\cos x)^{n-1}\cdot \operatorname{sen}^2 x + n\cdot(\cos x)^{n+1} =$

$= n\cdot(\cos x)^{n-1}\cdot\left((\cos x)^2 - n\cdot \operatorname{sen}^2 x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g'_n(x) = 0 \iff \begin{cases} n\cdot(\cos x)^{n-1} = 0 \\ (\cos x)^2 - n\cdot \operatorname{sen}^2 x = 0 \end{cases}$

$n\cdot(\cos x)^{n-1} = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$

3.1

$(\cos x)^2 - n\cdot(\operatorname{sen} x)^2 = 0 \iff \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = n \iff Tg(x) = \sqrt{n} \iff$

$\iff \quad x = \arctan(\sqrt{n})$

$0 < x < \arctan(\sqrt{n}) \to g'_n(x) \geq 0 \Rightarrow g_n$ creciente en $(0, \arctan\sqrt{n})$

$\arctan(\sqrt{n}) < x < \frac{\pi}{2} \to g'_n(x) \leq 0 \Rightarrow g_n$ decreciente en $(\arctan\sqrt{n}, \pi/2)$

$\max\{g_n(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = g_n(\arctan(\sqrt{n})) = \alpha$

3.2

Sea $p \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\exists\, m \in \mathbb{N}: n \geq m \quad \arctan(\sqrt{n}) < p$

Definimos x_n: $\quad x_n = \arctan(\sqrt{n}) \quad \forall n \geq m$
$\qquad x_n = 0 \qquad n \leq m$

Entonces $x_n \in [0, p] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{g_n(x)\} \not\to 0$

Esto implica que no converge uniformemente en $[0, p]$

Si para $n \geq m$ tenemos $\arctan(\sqrt{n}) < p$ y

g_n decreciente en $[p, \frac{\pi}{2}[$.

Convergencia puntual de g_n:

Si $x = 0$ $\{g_n\} \to 0$ si $x = \frac{\pi}{2}$ $\{g_n\} \to 0$ y

si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\{g_n\} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{g_n\} \to 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Luego $0 < g_n(x) \leq g_n(p) = P_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n \geq m \quad |g_n(x)| \leq P_n \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \{g_n\}$ converge uniformemente en $[p, \frac{\pi}{2}]$

Índice de comentarios

2.1 Es 1 y no 2, pero no afecta al razonamiento

2.2 Correcto

3.1 Error tg = sen/cos
no al revés

3.2 Falso, por culpa del error al calcular el punto crítico

4.1 Otra vez falso

4.2 El error al calcular el punto crítico invalida todo el razonamiento