Capítulo 1

Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Consideraremos métodos que proporcionan la integrabilidad de una función aunque no el valor de la integral, métodos que proporciona ambas cuestiones y métodos que, asegurada la integrabilidad, nos proporcionen el valor de la integral. Con respecto al problema del cálculo, nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá relacionando la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.2.1 Teorema de Fubini.

3.2.2 Teorema de Tonelli.

2.2.3 Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas.

3.2.4 Relación de ejercicios.

1.0.1. Teorema de Fubini

Recuérdese que el problema del cálculo de la integral de una determinada función, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió usando la regla de Barrow. Sin embargo, no disponemos de una tal regla en $\mathbb{R}^N$ con $N > 2$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, sabido que la función es integrable, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, consideramos la función $f_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ que viene definida por $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, consideramos la función $f^y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ que viene definida por $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 1.0.1. *(de Fubini) Sean p, q dos nu ́meros naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

1. *Para cada casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, la función f^y es integrable en $\mathbb{R}^p$ y si g es la función definida c.p.d. en $\mathbb{R}^q$ por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\lambda$, entonces g es integrable en $\mathbb{R}^q$.*

2. *Para cada casi todo $x \in \mathbb{R}^x$, la función f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$ y si h es la función definida c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f_x \, d\lambda$, entonces h es integrable en $\mathbb{R}^p$.*

3. *$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^q} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^p} h \, d\lambda$.*

Demostración. Supongamos en una primera etapa que $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{M}^{p+q}$. Puesto que f es integrable, es obligado que $\lambda(E) < +\infty$. Supongamos inicialmente que E es un producto de los intervalos acotados $I \in \mathcal{I}^p$ y $J \in \mathcal{I}^q$. Es claro que $\chi_{I\times J}(x,y) = \chi_I(x)\chi_J(y)$ y que $f_x = \chi_I(x)\chi_J$ y $f^y = \chi_J(y)\chi_I$ para todo $x \in I$, $y \in J$. La acotación de los intervalos nos aseguran las afirmaciones (1) y(2) para todo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$. Además, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{I\times J} \, d(x,y) = v(I \times J) = v(I)v(J) = \int_{\mathbb{R}^p} v(J)\chi_I(x)d(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} \chi_J(y)d(y) \right] \chi_I(x)d(x).$$

Análogamente, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{I\times J} \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} \chi_I(x)d(x) \right] \chi_J(y)d(y).$$

Si E es un conjunto abierto sabemos, por la Proposición **??**, que existe una familia $\{I_n \times J_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ numerable de intervalos acotados de $\mathbb{R}^{p+q}$ disjuntos dos a dos tales que $E = \cup_n(I_n \times J_n)$ con $I_n \in \mathcal{I}^p$ y $J_n \in \mathcal{I}^q$ para todo n. Es claro que $\chi_E = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{I_n\times J_n}$. Consideremos, para cada n, la función $f_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k\times J_k}$. Usando que, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, $f_n^y = \sum_{k=1}^{n} \chi_{J_k}(y)\chi_{I_k}$ y para cada $x \in \mathbb{R}^p$, $(f_n)_x = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x)\chi_{J_k}$, la observación primera, nos asegura que, para cada n, f_n verifica la tesis del Teorema para todo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$. Dado que la sucesión $\{f_n\}$ es una sucesión creciente de funciones simples que converge puntualmente a la función χ_E, aplicando el T.C.M.p (Teorema **??**), se obtiene que la sucesión creciente $\{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_n(x,y) \ d(x,y)\}$ converge a $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_E(x,y) \ d(x,y)$. Por otra parte, puesto que, para cada $x \in I$, la sucesión $\{(f_n)_x\}$ es una sucesión creciente de funciones simples que converge puntualmente a la función $(\chi_E)_x$, aplicando de nuevo el Teorema **??**, se obtiene que la sucesión creciente $\{\int_{\mathbb{R}^q} (f_n)_x(y) \ d(y)\}$ converge a $\{\int_{\mathbb{R}^q} (\chi_E)_x(y) \ d(y)\}$, y aplicando por tercera vez el Teorema **??**, se obtiene que la sucesión $\{\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (f_n)_x(y) \ d(y)\right](x) \ d(x)\}$ converge a $\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (\chi_E)_x(y) \ d(y)\right](x) \ d(x)$. Si ahora tenemos en cuenta que los elementos de la sucesión $\{\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (f_n)_x(y) \ d(y)\right](x) \ d(x)\}$ coinciden, por lo ya observado en el caso anterior, con los de la sucesión $\{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_n(x,y) \ d(x,y)\}$, tendremos que sus límites coinciden, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_E(x,y) \ d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (\chi_E)_x(y) \ d(y) \right] (x) \ d(x).$$

En particular, la integral $\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}(\chi_E)_x(y)\ d(y)\right](x)\ d(x)$ es finita, lo que nos asegura que la función $h(x)=(\int_{\mathbb{R}^q}(\chi_E)_x(y)\ d(y))(x)$ está definida c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y por tanto, para casi todo punto $x\in\mathbb{R}^p$, la sucesión $\{\int_{\mathbb{R}^q}(f_n)_x(y)\ d(y)\}$ está acotada por por $\int_{\mathbb{R}^q}(\chi_E)_x(y)\ d(y)$. En consecuencia, podemos asegurar, vía el T.C. M. que la función $(\chi_E)_x$ es integrable en $\mathbb{R}^q$, para casi todo x. También, es obvio que la función h es integrable en $\mathbb{R}^p$. Esto nos asegura la veracidad de las afirmaciones (1) y (2) para casi todo $x\in\mathbb{R}^p$. Igualmente se puede argumentar para casi todo $y\in\mathbb{R}^q$.

Si $E=\cap_n G_n$ es un conjunto de tipo G_δ, donde puedo suponer que los conjuntos abiertos G_n son de medida finita y tales que $G_n\supseteq G_{n+1}$(en otro caso, tomamos $G'_n=\cap_{i=1}^n(G_i\cap G)$, donde G es abierto de medida finita que contiene a E- vease Proposición **??**-), entonces la sucesión $\{\chi_{G_n}\}$ es una sucestón decreciente de funciones convergiendo a la función χ_E. Tomando ahora $f_n=\chi_{G_n}$, teniendo el cuenta el comentario al Teorema **??** para una sucesión decreciente de funciones, y aplicando idéntico argumento del párrafo anterior, junto con el hecho de que para todo x, $(\chi_E)_x\leq(\chi_{G_1})_x$ e igualmente para todo y, $(\chi_E)^y\leq(\chi_{G_1})^y$, se obtiene que χ_E verifica la tesis del Teorema para casi todo $x\in\mathbb{R}^p$ e $y\in\mathbb{R}^q$.

Si por el contrario $E=Z$ es un conjunto de medida nula, por la propiedad de regularidad de la medida exterior de Lebesgue (Proposición **??**), existe un conjunto A de tipo G_δ que contiene a Z y es de medida nula. En tal caso, por lo obtenido con anterioridad,

$$0=\lambda(A)=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\chi_A(x,y)d(x,y)=\int_{\mathbb{R}^q}\left[\int_{\mathbb{R}^p}(\chi_A)^y(x)d(x)\right](y)d(y).$$

En virtud de la Proposición **??**.(4), las funciones $y\mapsto(\int_{\mathbb{R}^p}(\chi_A)^y(x)d(x))$ y $(\chi_A)^y$ son nulas c.p.d. Así pues, puesto $\chi_Z\leq\chi_A$ (y por tanto, $(\chi_Z)^y\leq(\chi_A)^y$) se tiene que también las funciones $y\mapsto(\int_{\mathbb{R}^p}(\chi_Z)^y(x)d(x))$ y $(\chi_Z)^y$ son nulas c.p.d. Así pues,

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left[\int_{\mathbb{R}^q}(\chi_Z)^y d(x)\right]\ d(y)=0,$$

lo que unido al hecho de que

$$0=\lambda(Z)=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\chi_Z(x,y)\ d(x,y),$$

nos permite deducir la veracidad deel apartado (1) y de la primera igualdad de (3). El apartado (2) y la segunda igualdad de (3), se prueban de forma análoga. En consecuencia, $f=\chi_Z$ verifica la tesis del Teorema.

Si finalmente E es un conjunto medible en $\mathcal{M}^{p+q}$, en virtud de la Proposición **??**.(4), existe un conjunto A de tipo G_δ tal que $E\subseteq A$ y el conjunto $Z=A\cap E^c$ es de medida nula. Es obvio que $\chi_E=\chi_A-\chi_Z$ por lo que basta aplicar lo ya obtenido y las propiedades de las funciones integrables (véase Proposición **??**).

El caso en que f es una función simple no negativa, se resuelve usando de nuevo las propiedades de las funciones medibles no negativas (Proposición **??**). Si f es no negativa, teniendo en cuenta el Teorema**??**, basta usar de nuevo tres veces el Teorema **??**. Por fin, si f es una función integrable arbitraria, escribimos $f=f^+-f^-$ y aplicamos las propiedades de la integral y lo ya probado.

$\blacksquare$

Apliquemos nuestro teorema para calcular la integral en un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Para ello, consideremos las siguientes notaciones:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x, y) \in E\}.$$

Corolario 1.0.2. *Si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^q$, y, para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y)$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p$*

Demostración. Es obvio que, para todo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$, se tiene $\chi_E(x, y) = \chi_{E(x)}(y)$. Supongamos primeramente que E es de medida finita. En este caso, la función X_E es integrable y puedo aplicarle el Teorema de Fubini, para asegurar que $\chi_{E(x)} = (\chi_E)_x$ es integrable en $\mathbb{R}^q$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, luego medible, y por consiguiente, $E(x)$ es medible para todo x salvo un subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^p$.

Si E no es de medida finita, construimos los consabidos conjuntos $E_n = E \cap B(0, n)$. A partir de aqui construimos los conjuntos $Z_n := \{x \in \mathbb{R}^p ; \ E_n(x) \text{ no es medible}\}$ que son, por la observación anterior, de medida nula. Nótese que si $x \notin \cup_n Z_n$ entonces $E(x)$ puede escribirse como unión numerable de conjuntos medibles $(E(x) = \cup_n E_n(x))$. Por tanto $E(x)$ es medible para todo x salvo posiblemente en el subconjunto de medida nula $\cup_n Z_n$ de $\mathbb{R}^p$.

∎

Teorema 1.0.3. *(Teorema de Fubini. Caso $p = 1, q = 1$)*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x, y) dy] dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x, y) dx] dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf \ E_1, \ \beta_1 = Sup \ E_1, \ \alpha_2 = Inf \ E_2, \ \beta_2 = Sup \ E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}; \ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R}; \ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, siendo I, J intervalos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_E f(x, y) = \int_I [\int_J f(x, y) dy] dx = \int_J [\int_I f(x, y) dx] dy.$$

Demostración. Basta caer en la cuenta de que, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, $(f\chi_E)_x = f_x\chi_{E(x)}$, y que para cada $y \in \mathbb{R}^q$, $(f\chi_E)^y = f^y\chi_{E(y)}$ y aplicar el Teorema de Fubini a la función $f\chi_E$.

∎

Ejemplo: Calcúlese el área de la elipse de semiejes a y b.

Análogamente podemos aplicar el Teorema de Fubini para obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.0.4. *(Teorema de Fubini. Caso $p = 2, q = 1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x, y) d(x, y)] dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3,\ \beta_3 = Sup\ E_3$, donde

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para $(p = 1,\ q = 2)$ sin más que considerar los conjuntos $E[x]$ y $E[y]$.

Ejemplo: Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c.

Nota 1.0.5. Recuérdese que la integral en dos variables de una función no negativa puede ser vista como un cierto volumen. Además, si E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\} = [a, b].$$

el teorema de Fubini nos asegura que

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x, y, z) = \int_a^b (\int_{E(x)} 1\ d(y, z)) dx) = \int_a^b \lambda(E(x)) dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función integrable en $[a, b]$. Supongamos que el recinto $R(f)$ se hace girar alrededor del eje x. El conjunto así generado es llamado **sólido de revolución generado por f al girar sobre el eje x**, $S_x(f)$, esto es,

$$S_x(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Obsérvese que, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$\lambda(S_x(f)) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

1.0.2. Teorema de Tonelli

En esta sección abordamos los métodos que nos permitan dilucidar la integrabilidad de la función.

Teorema 1.0.6. *(de Tonelli) Sean p, q dos números naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una función medible. Consideremos las siguiente integrales iteradas:*

1. *$\int_{\mathbb{R}^q} g \, d\lambda$ donde la función $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}_0^+$ viene definida por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} |f^y| \, d\lambda$ para todo $y \in \mathbb{R}^q$,*

2. *$\int_{\mathbb{R}^p} h \, d\lambda$ donde la función $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_0^+$ viene definida por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} |f_x| \, d\lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.*

Si alguna de las integrales iteradas es finita entonces f es integrable en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n = |f| \wedge n\chi_{B(0,n)}$, la cual es una función integrable no negativa (téngase en cuenta que $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_n(x,y) d(x,y) \leq nv(B(0,n))$). Tomemos $(x,y) \in \mathbb{R}^{p+q}$, sea n_0 tal que $|f(x,y)| \leq n_0$ y $n_1$tal que $(x,y) \in B(0,n_1)$. Es claro que, para cada $n \geq n_0 + n_1$, $f_n(x,y) = |f(x,y)|$ luego la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a $|f|$. Aplicando el Teorema **??** a la sucesión $\{f_n\}$ obtenemos que las sucesiones crecientes $\{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_n(x,y) d(x,y)\}$ y $\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (f_n)_x(y) dy\right](x) dx\}$ convergen a $\{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f|(x,y) d(x,y)\}$ y $\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} (|f_x|)(y) dy\right](x) dx\}$ respectivamente. Sabemos por el Teorema de Fubini que los elementos de ambas sucesiones coinciden, luego también coinciden sus límites. Por tanto, si la integral iterada $\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} |f_x|(y) dy\right](x) dx\}$ es finita, entonces f es integrable en $\mathbb{R}^{p+q}$.

Idéntico razonamiento puede seguirse si la integral iterada $\int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} |f^y|(x) dx\right](y) dy\}$ es finita.

■

Nótese que si f es no negativa entonces podemos aplicar simultáneamente los Teoremas de Fubini y Tonelli. De hecho,

Corolario 1.0.7. *Sean p, q dos números naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}_0^+$ una función medible. Entonces f es integrable en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ si, y sólo si, es finita alguna de las las siguiente integrales iteradas:*

1. *$\int_{\mathbb{R}^q} g \, d\lambda$ donde la función $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ viene definida por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\lambda$ para todo $y \in \mathbb{R}^q$,*

2. *$\int_{\mathbb{R}^p} h \, d\lambda$ donde la función $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ viene definida por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, d\lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.*

En tal caso, existen las integrales iteradas y estas coinciden con la integral de la función f.

1.0.3. Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas

En algunas ocasiones interesa cambiar la función inicial por otra función. Este cambio viene arbitrado por el siguiente teorema del cambio de variable:

Teorema 1.0.8. *Sean U y V dos abiertos de $\mathbb{R}^N$ y sea φ un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre V. Si $E \subseteq V$ es un conjunto medible y y $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es integrable en E si, y sólo si, $f \circ \varphi|det(J_\varphi)|$ es integrable en $\varphi^{-1}(E)$. En tal caso*

$$\int_E f \; d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(E)} f \circ \varphi |det(J_\varphi)| \; d\lambda.$$

Demostración. Sólo haremos un esbozo de la demostración evitando algunos detalles técnicos.

Sea $E \subseteq V$ un conjunto medible. En virtud del Corolario **??** sabemos que $\varphi^{-1}(E)$ es un conjunto medible en $\mathbb{R}^N$. Además, teniendo en cuenta el ejemplo **??**.(e), también sabemos que $f \circ \varphi|det(J_\varphi)|$ es una función medible.

Supongamos en primer lugar que $f = \chi_F$, donde F es un subconjunto de E medible y llamo $G = \varphi^{-1}(F)$. Si φ es lineal, entonces la matriz asociada a la función φ coincide con su matriz jacobiana y por la Proposición **??** sabemos que

$$\lambda(\varphi(G)) = \lambda(G)|det\varphi| = \int_G |det\varphi| \; d\lambda = \int_G |detJ_\varphi| \; d\lambda. \tag{1.0.1}$$

Si φ no es lineal, sabemos que al menos localmente sí lo es. Por la propiedad de regularidad (Proposición **??**), solventando algún problema técnico, podemos suponer que F es abierto y escribir $G = \cup_n G_n$ tal que, para cada n, G_n es abierto, abiertos disjuntos dos a dos y $\varphi|_{G_n}$ es lineal. En tal caso, usando la igualdad 1.0.1,

$$\lambda(\varphi(G)) = \lambda(\cup_n \varphi(G_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\varphi(G_n)) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{G_n} |detJ_\varphi| = \int_{\cup_n G_n} |detJ_\varphi| \; d\lambda = \int_G |detJ_\varphi| \; d\lambda,$$

esto es, reencontramos la igualdad 1.0.1.

Por otra parte, sabemos que

$$\int_E \chi_F \; d\lambda = \lambda(F) = \lambda(\varphi(G)). \tag{1.0.2}$$

y que, para cada $x \in \varphi^{-1}(E)$,

$$\chi_{\varphi^{-1}(F)}(x) = \chi_F(\varphi(x)), \tag{1.0.3}$$

de donde, combinando estas últimas igualdades con la igualdad 1.0.1, obtenemos que

$$\int_E \chi_F \; d\lambda = \int_G |detJ_\varphi| \; d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(E)} \chi_{\varphi^{-1}(F)} |detJ_\varphi| \; d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(E)} \chi_F \circ \varphi |detJ_\varphi| \; d\lambda.$$

Como ya hemos hecho en otras ocasiones (véase Corolario **??**), en pasos sucesivos, cambiamos la función característica de un conjunto medible por una función simple (véase Proposición **??**) y finalmente por una función medible no negativa (caso que resolvemos usando el Teorema **??**).

Finalmente, aplicamos lo ya obtenido a $|f|$ para probar la relación de integrabilidad entre las funciones f y $f \circ \varphi |det(J_\varphi)|$ y a las funciones f^+ y f^- para ver la validez de la fórmula. ∎

Este teorema suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta) = \rho > 0,\ \forall (\rho, \theta) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta) \rho d(\rho, \theta).$$

Coordenadas cilíndricas, $n = 3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[\times \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta, z) = \rho > 0,\ \forall (\rho, \theta, z) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z) \rho d(\rho, \theta, z).$$

Coordenadas esféricas, $n = 3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 cos\varphi > 0,\ \forall (\rho, \theta, \varphi) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, sen\varphi) \rho^2 cos\varphi d(\rho, \theta, \varphi).$$

1.0.4. Relación de ejercicios

1. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible y sea $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función. Supongamos que el conjunto

$$R(f,E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \colon x \in \Omega,\ 0 < y < f(x)\}$$

es medible. Demuestre que f es medible.

2. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_I \text{sen}^2 x\ \text{sen}^2 y\ d(x,y),\ I = [0,\pi] \times [0,\pi].$

   b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\ d(x,y),\ I = [0,1] \times [0,1].$

   c) $\displaystyle\int_I y\ logx\ d(x,y),\ I = [1,e] \times [1,e].$

   d) $\displaystyle\int_I x^3\ y^3\ d(x,y),\ I = [0,1] \times [0,1].$

   e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\ d(x,y),\ I = [0,1] \times [0,1].$

   f) $\displaystyle\int_I x\ log(xy)\ d(x,y),\ I = [2,3] \times [1,2].$

   g) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\ d(x,y),\ I = [0,1] \times [1,2].$

3. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = 1$ siendo A la región limitada por $y^2 = x^3, \quad y = x$.

   b) $f(x,y) = x^2$ siendo A la región limitada por $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$.

   c) $f(x,y) = x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1)$.

   d) $f(x,y) = x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

   e) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x, x = 0, y = 1$.

   f) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}, y = x$.

   g) $f(x,y) = xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x, x = 1$.

   h) $f(x,y) = xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el eje OX.

   i) $f(x,y) = 4 - y^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x$ y $y^2 = 8 - 2x$

   j) $f(x,y) = e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x$, $x = 2$ y el eje x

4. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x,y) = 1 - x - y,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x + y \leq 1\}$
   b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   c) $f(x,y) = x + y,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
   d) $f(x,y) = x^2\ y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$
   e) $f(x,y) = y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$
   f) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$
   g) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$
   h) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$
   i) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$
   j) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   k) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$
   l) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$
   m) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$

5. Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

   a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \bar{B}((0,0),1)$
   b) $f(x,y) = y,\quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) :\quad y \geq 0\}$
   c) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \bar{B}((1,0),1)$
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

6. Calcúlense las siguientes integrales dobles:

   a) $f(x,y) = x,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$
   b) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$
   c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \leq x \leq y^2,\quad x \geq 0, y \geq 0\}$
   d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   e) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2),\ x \geq 0\}$
   f) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2y,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

7. **Área de la cardioide.** La curva en $\mathbb{R}^2$, cuya ecuación en coordenadas polares viene dada por $\rho = 2a(1+cos\theta)$ ($a \in \mathbb{R}^+$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se llama una cardioide. Sea $E = \{(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 < \rho \leq 2a(1+cos\theta)\}$. Calcúlese $\lambda(E)$.

8. Calcule el volumen de la región A definida por:

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ \ x^2+y^2-ry \leq 0\}$.
   b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \geq 1,\ \ x^2+y^2 \leq 2,\ \ z(x^2+y^2) \leq 1,\ \ z \geq 0\}$.
   c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}$.
   d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.
   (e) **Bóveda de Viviani** $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-1/2)^2+y^2 \leq 1/4\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z\}\}$.
   (f) **cucurucho de helado invertido**

   $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq (1-z)^2,\ x^2+y^2 \leq z/2,\ z \leq 1\}.$$

   (g) **Volumen del toro** de radios r y R (flotador).
   h) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z,\ x^2+y^2 \leq \frac{z}{2}\}$.
   i) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ x^2+y^2-z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$.
   j) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x,y,z,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} < 1\}$.

9. **Sólidos de revolución generados por un giro alrededor del eje** OY. Sea $E \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ un conjunto medible. Consideremos el conjunto

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in E\}$$

   o (sólido de revolución obtenido al girar el conjunto E contenido en el plano XY en torno al eje OY). Probar que S es medible y que

   $$\lambda(S) = 2\pi \int_E x d(x,y).$$

10. Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

11. Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = \text{sen}^2(x),\ \ x \in [0,\pi]$, cuando ésta gira en torno al eje x.

12. Hállese el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2+9}$.

13. Una bola de madera de radio 9 cm es taladrada con una broca de radio 1 cm. Si la apertura ha completado un eje de la bola, ?'cuánto material de la bola ha sido eliminado con la broca?

14. Calcúlense las siguientes integrales triples:

   a) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, d(x,y,z),\ I = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

   b) $\displaystyle\int_A z\, e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2)\le z^2,\ z\ge 0,\ z\le 1\}.$

   c) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4\}.$

   d) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0,\ z\le 3\}.$

   e) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ $(n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}^+).$

   f) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2+z^2\le 2z\}$

   g) $f(x,y,z) = z,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1\}$

   h) $f(x,y,z) = x^2,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x\ge 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,\ 4z^2\ge 3(x^2+y^2)\}$

   i) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2}\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le z\le x^2+y^2,\ 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}$

   j) $f(x,y,z) = z,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le 2,\ x^2+y^2\le z\}$

   k) $f(x,y,z) = z^2,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2\mathrm{R}z\}$

   l) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\}$

15. Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}dx = \sqrt{2\pi/a}$, donde $a>0$.

16. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones en el conjunto A correspondiente y calcule su integral:

   a) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

   b) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x^2\le y\}$

   c) $f(x,y,z) = z,\ \ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1, z\ge 0\}$

   d) $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\ \ A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x,y\ge 0,\ x+y\le 2\}$

17. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(\alpha>0)$.

   b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{sen(x)sen(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(1<\alpha<2)$.

18. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones en el conjunto que se indica:

$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega = \mathbb{R}^2$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 > 1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega = \mathbb{R}^3$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 > 1\}$
e^{-xy}	$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x,\, 0 < y < \frac{1}{x}\}$
$(x-y)e^{-(x-y)^2}$	$\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
$\dfrac{e^{x+y}}{x-y}$	$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x,\, 0 < x < 1\}$

19. Demuestre que si $1 < \alpha < 2$, entonces la función

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

es integrable en $\mathbb{R}^2$.

20. Calcule la medida de los siguientes conjuntos:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \colon x = a + \sum_{k=1}^{N} t_k e_k,\, 0 \le t_k \le 1,\, k = 1, \ldots, N\right\},$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \colon x = a + \sum_{k=1}^{N} t_k e_k,\, 0 \le t_k,\, \sum_{k=1}^{N} t_k \le 1,\, k = 1, \ldots, N\right\},$$

donde $a, e_1, \ldots, e_N \in \mathbb{R}^N$.

21. Pruebe que $lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{sen(x)}{x} dx = \pi/2$.

Indicaciones:

a) Pruebe, usando los Teoremas de Fubini y Tonelli, que la función $F(x;y) = e^{-xy} senx$ es integrable en $]0,n[\times]0,+\infty[$ y que

$$\int_0^n \frac{sen(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} [\int_0^n e^{-xy} sen(x) dx] dy.$$

b) Para cada natural n, sea $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(y) = \int_0^n e^{-xy} sen(x) dx.$$

Pruébese, integrando por partes, que $\{f_n(y)\}$ converge a $\frac{1}{1+y^2}$. Pruebe además que $|f_n(y)| \leq \frac{3}{1+y^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Deduzca finalmente, utilizando el teorema de la convergencia dominada que $lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{sen(x)}{x} dx = \pi/2$.

22. Pruebe que la función

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}$$

es integrable en $\mathbb{R}^+ \times]0,1[$ y deduce que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{\cos x} dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\sqrt{2}).$$

23. Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{d(x,y)}{(1+x^2y)(1+y)} = \frac{\pi^2}{4}$$

y deduzca que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Deduzca de esto último que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bibliografía

[1] C. Aparicio del Prado y R. Payá Albert, Análisis Matemático I *Textos universitarios. Universidad de Granada. 5ª Edición* (1991).

[2] L. Boccardo and G. Croce, Elliptic partial differential equations: existence and regularity of distributional solutions. *De Gruyter Studies in Mathematics 55* (2013).

[3] M. W. Bostsko, An elementary proof of Lebesgue´s Differentiation theorem. *The American Math. Monthly 110 , p. 834-838* (2003)

[4] J.C. Burkill, The Lebesgue integral. *Cambridge University Press, London* (1963).

[5] J.C.Cabello, Una introducción a la Variable compleja. Aplicaciones. *Editorial Godel* (2016).

[6] J. Diestel, Uniform integrability: an introduction. *Rendiconti delliInstituto di Matematica dell´Universitá de Trieste, 23 , p. 41-90* (1991).

[7] J. J. Koliha, A Fundamental Theorem of Calculus for Lebesgue Integration. *The American Math. Monthly, 113:6 , p. 551-555* (2006).

[8] H. Lebesgue, Tesis doctoral. Thèses a la Faculté des Sciencies de Paris Nº d´order 1105. *Imprimerie Bernardoni de C. Rebeschini and C. Rue Rovello 14-16* (1902).

[9] W. Rudin, Real and complex Analysis. *Mc Graw-Hill Book Company* (1987).

[10] K. H. Stromberg, Introduction to classical Real Analysis. *Wadsworth International Group and Prindle, Weber and Schmidt* (1982).

[11] R.L. Wheeden and A. Zygmund, Measure and Integral, An introduction to Real Analysis. *CRC Press, Taylor and Fracis Group, Achapman and Hall Book* (2015).