Matrices ~~de~~ positivas ~~Teorema~~ de Perron.

Definiciones

vectores
$$\begin{cases} u \leq v & \text{si} \quad u^i \leq v^i \\ u < v & \text{si} \quad u \leq v \ y \ u \neq v. \\ u << v & \text{si} \quad u^i < v^i \end{cases}$$
Fuertemente ordenado

Matrices
$$\begin{cases} M \leq N & \\ M < N & \Rightarrow \\ M << N & \text{Fuertemente ordenado} \end{cases}$$

vector positivo si $v \geq 0$

fuertemente positivo $v >> 0$

Matriz positiva — $M \geq 0$

$M > 0$

fuertemente positiva.

Propiedades

Si $M \geq 0$, $v \geq 0$ $\Rightarrow$ $Mv \geq 0$

Si $M \gg 0$ y $v > 0$ entonces $Mv \gg 0$

Ejercicio. Busca una matriz $M > 0$ ~~tal~~ y un vector $v \gg 0$ tal que $Mv \not\gg 0$.

Teorema de Peron Frobenius

Sea $M \gg 0$ entonces existe un vector propio $v \gg 0$.

Dem (Incompleta)

$v \in \Delta$ entonces $Av \gg 0$ y portanto

$$\frac{1}{\|Av\|_1} Av \in \Delta$$

Por el teorema de ~~Brauer~~ Brouwer.

tiene un punto fijo v

$$Av = \lambda v \quad \text{donde } \lambda = \|Av\|_1.$$

Si $v > 0$. $Av \gg 0$ luego $v \gg 0$. $v \in \Delta$

vector propio de Perron-Frobenius v_p, λ_p

Definición Par de Perron-Frobenius es $\lambda \in \mathbb{R}$, $v > 0$

$$Mv = \lambda v$$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_p$ $v = c\, v_p$ c constante.

Teorema Sea $M \gg 0$ entonces λ_p es el valor propio dominante, ~~Además $v_p \gg 0$~~

Primero el caso $\lambda_p = 1$. Un cambio de escala

en
$$x_{n+1} = M x_n$$

es un cambio de variable $y = Dx$ donde D es una matriz diagonal con elementos diagonales estrictamente positivos.

Si hacemos un cambio de escala $y_n = D x_n$

queda.
$$y_{n+1} = \underbrace{D M D^{-1}}_{\text{semejante a } M.} y_n$$

~~veamos~~ Observar que si $M \gg 0$, $DMD^{-1} \gg 0$

veamos que si D es apropiada $A = DMD^{-1}$ es de estados.

Para ello voy a tomar un cambio de escala para que $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sea vector propio de A^t.

$$D^{-1} M^t D e = e \quad \Rightarrow De = w \text{ vector propio de } M^t.$$

---

portanto $\sigma(M) = \sigma(A)$ y $\lambda = 1$ es valor propio dominante de M.

<u>Lema 3</u> Sean ~~A~~ M y ~~B~~ B dos matrices proporcionales es decir

$$\cancel{A = \lambda B} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$M = \nu B \qquad \lambda \neq 0$$

entonces si ~~M tiene~~

$$\sigma(\cancel{B}) = \nu\, \sigma(M) = \{\nu\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$$

además si λ es valor propio dominante de M $\nu\lambda$ es ~~propio~~ valor propio dominante de N.

Se llama radio espectral

$$\rho(A) = \operatorname{Max}\{|\lambda| \,/\, \lambda \in \sigma(A)\}$$

~~Propiedades~~ A^n

Un sistema

$$x_{n+1} = A x_n$$

se dice convergente si para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^k$ la solución $x_n \to 0$.

Proposición Son equivalentes

1. El sistema es convergente,
2. $A^n \to 0$ en $M_{k\times k}$,
3. $\rho(A) < 1$.

Sin demostración