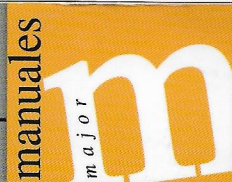


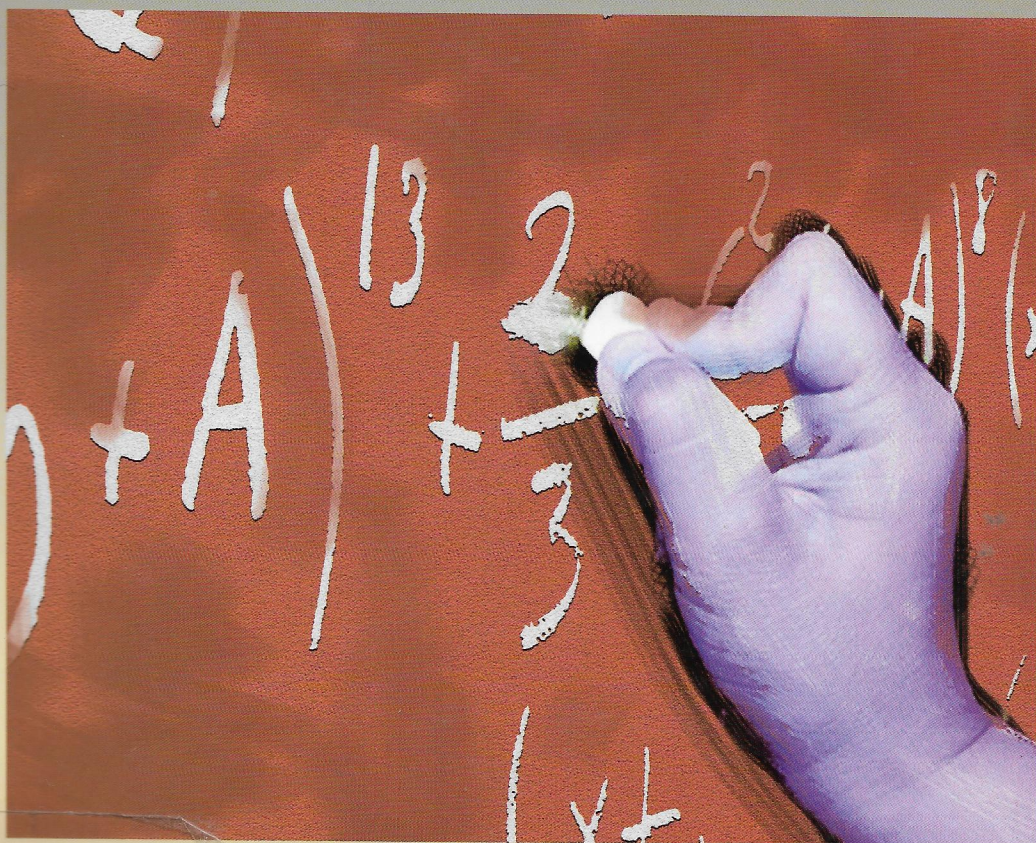
Ciencias Experimentales



y Exactas

RAFAEL ORTEGA RÍOS

# Modelos matemáticos



Biblioteca Universitaria de Granada



01826910

eug



## MODELOS MATEMÁTICOS

# Índice

<b>1. La ecuación lineal en diferencias</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción	9
1.2. La ecuación lineal de primer orden	13
1.3. Potencias de un número complejo y comportamiento asintótico de las soluciones	15
1.4. Fluctuaciones en el precio de un producto: modelo de la telaraña	17
1.5. El efecto multiplicador: un modelo macro-económico	21
1.6. La ecuación de orden superior	22
1.7. Raíces complejas	26
1.8. Raíces múltiples	29
1.9. Solución general de la ecuación lineal homogénea	33
1.10. Comportamiento asintótico de las soluciones	36
1.11. Interacción multiplicador-acelerador	39
1.12. Problemas	44
<b>2. Potencias de una matriz</b>	<b>49</b>
2.1. Dos métodos para resolver un problema	49
2.2. Teorema de Cayley-Hamilton	51
2.3. Un método gráfico	52
2.4. Valores y vectores propios	54
2.5. Diagonalización de matrices	56
2.6. Modelos lineales en Genética	59
2.7. Matrices no diagonalizables y forma canónica de Jordan	62
2.8. Comportamiento asintótico de las potencias de una matriz	64
2.9. Valor propio dominante	68
2.10. Poblaciones estructuradas por grupos de edad	71
2.11. Un ejemplo de marcha aleatoria	83
2.12. Problemas	91
<b>3. Máximos y mínimos: principios variacionales en Óptica</b>	<b>97</b>
3.1. La reflexión de la luz y el principio de Herón	97
3.2. Los espejos circulares y el principio modificado	105
3.3. Reflexión de la luz en espejos curvos	107

3.4. Propiedades ópticas de las cónicas . . . . .	110
3.4.1. La elipse . . . . .	110
3.4.2. La parábola . . . . .	110
3.4.3. La hipérbola . . . . .	112
3.5. La refracción de la luz y el principio de Fermat . . . . .	115
3.6. Fibra óptica . . . . .	119
3.7. Problemas . . . . .	125
<b>4. La escala musical y los números reales</b>	<b>129</b>
4.1. Ondas sonoras . . . . .	129
4.2. La escala pitagórica . . . . .	134
4.3. La escala de doce notas . . . . .	139
4.4. Ampliación de la escala y mejor aproximación . . . . .	140
4.5. Fracciones continuas . . . . .	143
4.6. Números famosos y sus aproximaciones . . . . .	150
4.7. Problemas . . . . .	152
<b>Bibliografía</b>	<b>154</b>

# Prólogo

Este libro está dirigido a los estudiantes de los primeros cursos de la carrera de Matemáticas. Probablemente la mayoría de las herramientas matemáticas ya les serán conocidas y el objetivo será entender cómo se pueden emplear en otras disciplinas científicas. Cuando se piensan las matemáticas como una parte de la cultura, surgen nuevas metáforas que ayudan a entender mejor el significado de los teoremas y a formular nuevas preguntas. Acostumbramos a imaginar que el vector  $v = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  es un punto del espacio euclídeo; en este libro también será un perfil genético, la pirámide de edad de una población estructurada por grupos o la distribución de masas de una marcha aleatoria sobre los vértices de un triángulo. Por eso esta asignatura pretende ser un viaje hacia afuera de las matemáticas, y también hacia adentro.

Los estudiantes van a encontrar muchos temas que les son conocidos: espacios vectoriales y aplicaciones lineales, números complejos, matrices, límites, probabilidades, polinomios, funciones reales de variable real, máximos y mínimos, cónicas, funciones trigonométricas, grupos y alguna cosa más. Con todo eso estudiaremos modelos en Economía (Lección 1), en Biología (Lección 2) y en Óptica (Lección 3). Por último discutiremos la construcción de escalas musicales para comprender mejor aquello del Do, Re, Mi, Fa, Sol... (Lección 4).

Las aplicaciones de las matemáticas son increíblemente variadas y hay por tanto muchas posibilidades a la hora de construir una asignatura como esta. He procurado elegir modelos que procedan de distintas disciplinas y que ilustren las matemáticas en su conjunto, pero al fin y al cabo se ha tratado de una selección bastante subjetiva. El proceso de elaboración del texto ha sido largo. Durante bastantes años enseñé a alumnos de otras carreras y con ellos aprendí mucho de lo que hay en las páginas que siguen. En el año 2003 volví a la carrera de Matemáticas, con una asignatura nueva que se llamó "Modelos matemáticos de la Ciencia". Los apuntes de entonces son el origen de las tres primeras lecciones. Algunos alumnos de esa época me preguntaban por las conexiones con la Música, una cuestión que me resultaba muy atractiva y de la que lo ignoraba todo. Por eso empecé a estudiar esa añeja parte del Quadrivium y, con la llegada del nuevo plan de estudios, incorporé la lección sobre música.

Queda claro que mis antiguos alumnos son en gran parte culpables de que haya escrito este libro, pero también hay profesores a los que debo mencionar. He compartido la asignatura con Pedro Torres y Antonio Ureña y los dos me han hecho sugerencias para mejorar el texto; James Ward me habló hace bastante tiempo del libro

"Perfect Form", que fue clave para preparar la lección 3; Pablo Amster me envió su libro "Matemática, maestro" y me animó a preparar la lección 4; Alessandro Fonda leyó y corrigió las primeras notas que escribí sobre Música. También la edición y la presentación cuentan y en ese capítulo debo mencionar a Antonio López Carmona, a Antonio Ureña de nuevo, y a mi mujer, Consuelo, que ha preparado las figuras; seguramente ella ha sido la otra culpable de que escriba este libro.

Julio 10 1980  
R. Ortega

# Lección 1

## La ecuación lineal en diferencias

### 1.1. Introducción

Empezamos con tres ejemplos:

#### Progresiones geométricas

Son sucesiones del tipo

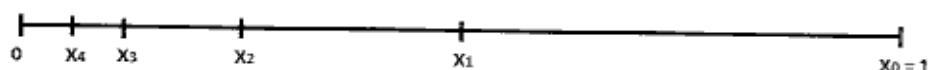
$$\{x_0, x_0r, x_0r^2, x_0r^3, \dots, x_0r^n, \dots\}$$

con término general  $x_n = x_0r^n$ . Si  $x_0 \neq 0$  y  $r \neq 0$  se cumple  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = r$  y el número  $r$  se denomina la razón.<sup>1</sup> Preferimos la fórmula

$$x_{n+1} = rx_n$$

que define una progresión geométrica general.

Pensemos en el ejemplo  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$



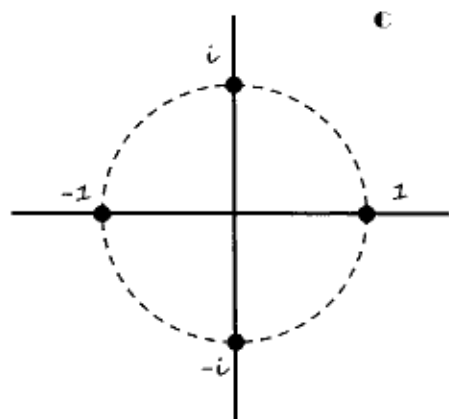
Las progresiones con razón  $r \in ]0, 1[$  pueden servir para modelar fenómenos en los que una cantidad tiende a desaparecer: rebotes de una pelota contra el suelo o desintegración radiactiva. Pensemos ahora en la progresión  $1, 3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots$ . Las progresiones con razón  $r \in ]1, \infty[$  sirven para modelar crecimientos rápidos: interés bancario, crecimiento de una población o un organismo en el periodo inicial, entre otros.

<sup>1</sup> cociente de dos números, una de las acepciones de la palabra *razón*

Una observación importante: tiene sentido considerar progresiones geométricas con números complejos. Todas la fórmulas para las progresiones reales (término general, producto, suma) siguen siendo válidas en el caso complejo. En realidad la teoría de progresiones se puede presentar en cualquier cuerpo conmutativo. Como ejemplo podemos suponer  $x_0 = 1$  y  $r = i$

$$1, i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Esta progresión tiene periodo 4.



Calculamos la parte real e imaginaria,

$$\operatorname{Re}(i^n) : \overbrace{1, 0, -1, 0, 1, \dots} \quad \operatorname{Im}(i^n) : \overbrace{0, 1, 0, -1, 0, \dots}$$

y observamos que estas sucesiones tienen periodo 4 pero **no** son progresiones geométricas.

**Ejercicio.** Construye una progresión geométrica compleja que tenga periodo 27.

### La sucesión de Fibonacci

$$f_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

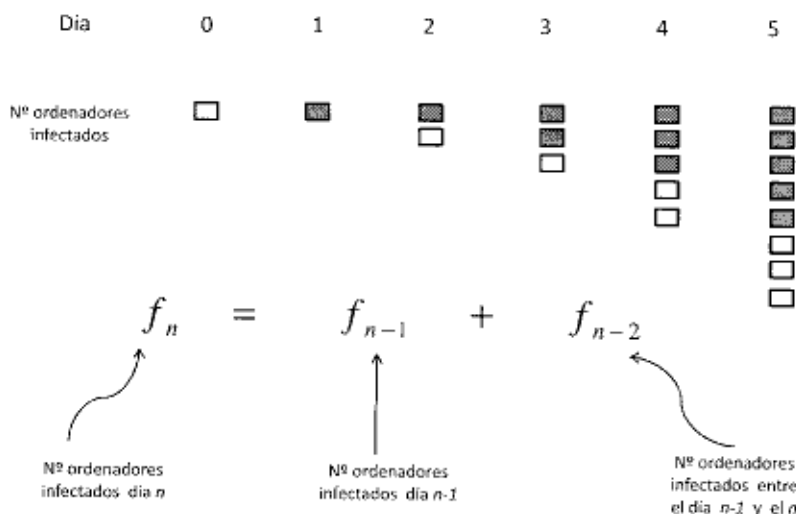
Los dos primeros términos son uno y los restantes se obtienen al sumar los dos anteriores. En fórmulas,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

Imaginemos un virus informático que, una vez alojado en el ordenador, permanece inerte el primer día y después infecta una computadora cada jornada.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>En el siglo XIII Fibonacci utilizó otra metáfora para introducir su sucesión: "un hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y se pretende saber cuántos se crían a partir de este par en un año si su naturaleza es parir otro par cada mes, y los nacidos también paren desde el segundo mes"





### Repetición de una operación con la calculadora

Usamos una calculadora científica en el modo radianes y escribimos un número cualquiera. Cuando se presiona la tecla coseno de manera reiterada

$$\cos + \cos + \cos + \cos + \dots$$

aparecen en la pantalla los términos de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Obedecen la ley

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

y el término inicial  $x_0$  es el número que se escribió al empezar.

**Ejercicio.** Experimenta el proceso anterior para distintas elecciones de  $x_0$ . ¿Qué comportamiento asintótico se observa? Se puede demostrar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  siempre tiene límite. Dando esto por supuesto prueba que dicho límite tiene que ser el número 0'7390851332152...

¿Qué tienen en común estos tres ejemplos?

Son procesos iterativos que vienen regulados por ecuaciones en diferencias,

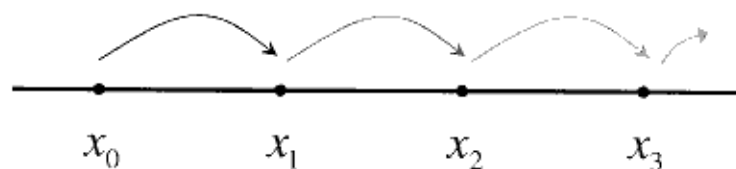
$$x_{n+1} = rx_n \quad (1.1)$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (1.2)$$

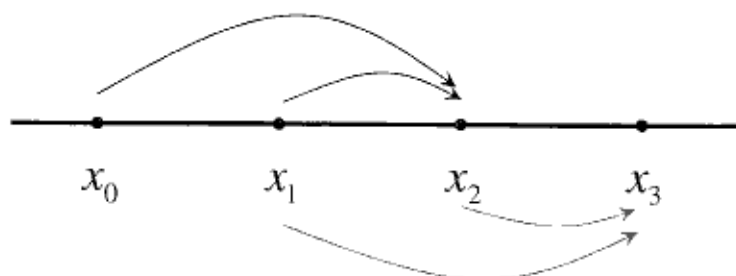
$$x_{n+1} = \cos x_n \quad (1.3)$$

válidas para  $n \geq 0$ . Las ecuaciones primera y tercera son de un paso (primer orden) mientras que la segunda es de dos pasos (segundo orden).

El número de condiciones iniciales está ligado al orden: en (1.1) o (1.3) podemos arrancar con un solo número  $x_0$ ,



en cambio para la ecuación (1.2) debemos prescribir dos números  $x_0$  y  $x_1$ .



En esta lección estudiaremos clases de ecuaciones lineales que incluyen a (1.1) y (1.2). La tercera ecuación es **no** lineal y no la vamos a estudiar en este curso.

**Ejercicio.** Define de manera precisa la clase de ecuaciones en diferencias de orden  $p \geq 1$ . Define también la sub-clase de ecuaciones lineales.

## 1.2. La ecuación lineal de primer orden

Vamos a estudiar

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  son números dados. Diremos que es una ecuación *completa* si  $\beta \neq 0$  y *homogénea* si  $\beta = 0$ .

En primer lugar observamos que esta ecuación engloba la teoría de progresiones. Para  $\alpha = 1$  obtenemos las progresiones aritméticas con diferencia  $\beta$ ,

$$x_{n+1} = x_n + \beta.$$

Las soluciones son  $x_n = x_0 + n\beta$ .

Para  $\beta = 0$  encontramos las progresiones geométricas de razón  $\alpha$ ,

$$x_{n+1} = \alpha x_n.$$

Ya sabemos que las soluciones en este caso son de la forma  $x_n = c\alpha^n$  donde  $c \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria.

Si  $\alpha \neq 1$  y  $\beta \neq 0$  las soluciones no serán progresiones. Para calcularlas hacemos algunas observaciones:

- La ecuación admite una única solución constante.

Buscamos un número  $x_*$  de manera que  $x_n = x_*$  sea solución. Al sustituir en la ecuación

$$x_* = \alpha x_* + \beta \Rightarrow x_* = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

- Suponemos  $x_n = z_n + x_*$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es solución de la ecuación completa  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  si y sólo si  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  es solución de la ecuación homogénea  $z_{n+1} = \alpha z_n$ .

Supongamos que  $x_n$  es solución de la ecuación completa, teniendo en cuenta la relación entre  $x_n$  y  $z_n$  y la definición de  $x_*$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - x_* = \alpha x_n + \beta - x_* = \alpha x_n + \beta - (\alpha x_* + \beta) = \alpha(x_n - x_*) = \alpha z_n,$$

para  $n \geq 0$ , y  $z_n$  es solución de la homogénea. El recíproco queda como ejercicio.

A partir de estas observaciones encontramos todas las soluciones de la ecuación completa cuando  $\alpha \neq 1$ , estas son

$$x_n = c\alpha^n + x_*, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Ajustaremos la constante  $c$  a la condición inicial  $x_0$ ; para ello hacemos  $n = 0$  en la fórmula anterior,

$$x_n = c\alpha^n + x_*, \quad n = 0 \Rightarrow x_0 = c + x_*, \quad c = x_0 - x_*$$

$$x_n = (x_0 - x_*)\alpha^n + x_*, \quad n \geq 0$$

**Nota.** En el caso especial  $\alpha = 0$  estas fórmulas pierden su sentido para  $n = 0$ ; todas las soluciones son de la forma  $\{x_0, x_*, x_*, \dots, x_*, \dots\}$ .

**Ejemplo.**  $x_{n+1} = ix_n + 1$ ,  $x_0 = i$ .

En este caso  $\alpha = i \neq 1$ ,  $\beta = 1$ . Buscamos en primer lugar todas las soluciones de la ecuación.

Solución constante:

$$x_* = ix_* + 1 \Rightarrow x_* = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Soluciones de la homogénea:

$$z_{n+1} = iz_n \Rightarrow z_n = ci^n.$$

Todas las soluciones de la completa:

$$x_n = z_n + x_* = ci^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Una vez hecho esto ajustamos la constante  $c$ ,

$$n=0 \rightarrow i = x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + c, \quad c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Solución: 
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)i^n$$

Veamos que esta ecuación compleja es equivalente a un sistema real. Escribimos

$$x_n = u_n + iv_n$$

donde  $u_n = \operatorname{Re}(x_n)$ ,  $v_n = \operatorname{Im}(x_n)$  son las nuevas incógnitas (reales). Se cumple

$$x_{n+1} + iv_{n+1} = i(u_n + iv_n) + 1 = iu_n - v_n + 1.$$

Igualando parte real y parte imaginaria,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + 1, \\ v_{n+1} = u_n, \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ . Tomando las partes real e imaginaria en la fórmula para  $x_n$  vamos a encontrar la solución del sistema,

$$u_n = \operatorname{Re}(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(i^n) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(i^{n+1}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ 1, & n \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$v_n = \operatorname{Im}(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(i^n) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}(i^{n+1}) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 3 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Ejercicio.** Resuelve

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 1, & u_0 = 1 \\ v_{n+1} = u_n + v_n, & v_0 = 0. \end{cases}$$

### 1.3. Potencias de un número complejo y comportamiento asintótico de las soluciones

En el ejemplo anterior nos aparecían las potencias de  $i$ , que tienen un comportamiento sencillo (4-ciclo). La fórmula de *Moivre* permite entender cómo se comportan las potencias de cualquier número  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Si escribimos este número en la forma

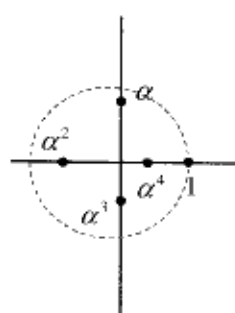
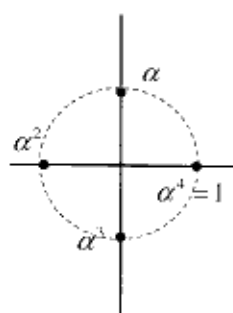
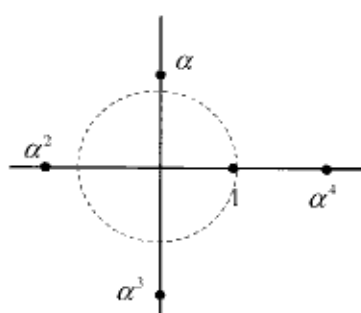
$$\alpha = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

donde  $r = |\alpha|$  es el módulo y  $\theta \in \mathbb{R}$  es uno de sus argumentos, se cumple

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Describamos algunas propiedades de la sucesión  $\{\alpha^n\}_{n \geq 0}$ ,

- Si  $|\alpha| < 1$  se cumple  $\alpha^n \rightarrow 0$ . Además, si  $\alpha$  no es real, esta sucesión converge al origen siguiendo una espiral
- Si  $|\alpha| > 1$  sus potencias se van a infinito y, si  $\alpha$  no es real, siguen una espiral divergente
- El caso  $|\alpha| = 1$  es el más delicado, las potencias  $\alpha^n$  permanecen en la circunferencia unidad  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . En ocasiones la sucesión  $\alpha^n$  es periódica, pero esto no siempre ocurre.


 $\alpha = 0.8i$ 

 $\alpha = i$ 

 $\alpha = 1.2i$ 

**Ejercicio.** Describe el comportamiento de las sucesiones  $\alpha^n$ ,  $\beta^n$  y  $\gamma^n$  si  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\beta = 1 + i$ ,  $\gamma = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$ .



Ahora es fácil discutir qué hacen las soluciones de la ecuación  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

- $|\alpha| < 1$ . Las soluciones se expresan como

$$x_n = c\alpha^n + x_*$$

donde  $x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$  y  $c \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria. Como  $\alpha^n \rightarrow 0$ , todas las soluciones convergen al equilibrio,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*.$$

- $|\alpha| > 1$ . Las soluciones no constantes divergen. Suponemos  $x_n = c\alpha^n + x_*$  con  $c \neq 0$ , entonces

$$|x_n| \geq |c\alpha^n| - |x_*| \rightarrow \infty,$$

pues  $|\alpha^n| = |\alpha|^n \rightarrow \infty$  y  $|c| \neq 0$ ,  $|x_*|$  son constantes. Aquí conviene observar que hemos usado la conocida desigualdad

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

con  $z_1 = c\alpha^n$  y  $z_2 = -x_*$ .

**Nota.** Esta desigualdad suele ser útil cuando se busca una cota por abajo, en cambio la desigualdad triangular se suele usar para buscar cotas superiores.

- $|\alpha| = 1$ . Suponemos primero  $\alpha \neq 1$  y observamos que  $|x_n - x_*| = |c\alpha^n| = |c|$ . De aquí deducimos que la sucesión  $x_n$  se mueve en la circunferencia de centro  $x_*$  y radio  $|c|$ . Además, de la fórmula de Moivre deducimos que no tiene límite. El caso  $\alpha = 1$  es muy especial, ahora tenemos progresiones aritméticas  $x_n = x_0 + n\beta$  que cumplen  $|x_n| \rightarrow \infty$  si  $\beta \neq 0$ .

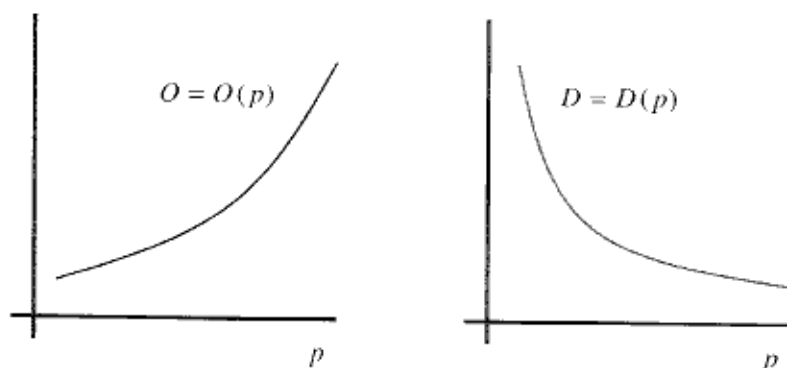
# 1.4. Fluctuaciones en el precio de un producto: modelo de la telaraña

El precio de un producto agrícola varía cada temporada y se forma así una sucesión que pretendemos estudiar

$$p_n = \text{precio en el año } n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Son muchos los factores que influyen en las fluctuaciones del precio: lluvias, situación económica de los países a los que se exporta, productos competidores, etcétera. Ignoraremos todos esos factores exógenos y nos centraremos en las fluctuaciones intrínsecas, generadas por los mecanismos de oferta y demanda del propio producto.

La oferta y la demanda se suponen funciones conocidas del precio,  $D = D(p)$ ,  $O = O(p)$ . Estas funciones definen el producto que estamos considerando: espárrago, habas, maíz, trigo, cebada, girasol, ... Además, es claro que  $O$  debe ser una función creciente mientras que  $D$  es decreciente. Para comprender esto basta observar que, a mayor precio, más tendencia tendrán los agricultores a cultivar ese producto y menos interés en comprarlo tendrán los consumidores.

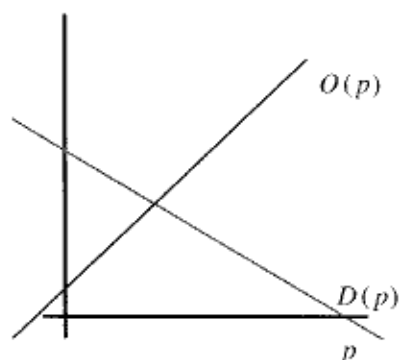


En la gráfica anterior las funciones de oferta y demanda se han dibujado como funciones no lineales pero al diseñar el modelo vamos a hacer la hipótesis más simple posible: las funciones  $O$  y  $D$  son afines,  $O(p) = a + bp$ ,  $D(p) = c - dp$ . Las gráficas son dos rectas, una con pendiente positiva y otra negativa. En economía las cantidades  $b$  y  $d$  son llamadas *marginales*. La marginal de la oferta/demanda mide la sensibilidad de los productores/consumidores a las variaciones de precio.

En la teoría estática se hace la hipótesis del equilibrio: la demanda y la oferta se igualan. Esto se justifica porque se espera que después de algún tiempo el precio se ajuste de manera que toda la producción se consuma.

$$O(p) = a + b p \quad b > 0$$

$$D(p) = c - d p \quad d > 0$$



De la ecuación

$$D(p_*) = O(p_*)$$

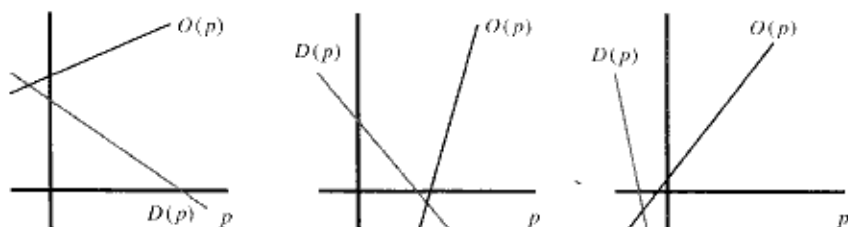
se llega al *precio ideal o de equilibrio*

$$p_* = \frac{c - a}{b + d}.$$

A partir de ahora impondremos la condición

$$c > a$$

con objeto de que el precio de equilibrio sea positivo. Esta hipótesis nos asegura que las rectas se cortan en el primer cuadrante y se excluyen situaciones como las del siguiente dibujo.



En el modelo dinámico se tiene en cuenta el desfase que se produce al ajustar la demanda y la oferta. Los agricultores toman la decisión de cultivar el producto con bastantes meses de antelación y el precio que conocen es de la temporada anterior; por el contrario los consumidores conocen el precio de temporada. A partir de estas observaciones se postula la ecuación en diferencias

$$D(p_n) = O(p_{n-1}).$$

Esta ley dinámica lleva a la ecuación lineal de primer orden

$$p_n = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

El coeficiente  $\alpha = -\frac{b}{d}$  es distinto de 1 y por tanto sabemos que hay una solución constante. Como era de esperar, esta solución es precisamente el precio de equilibrio  $p_n = p_*$ . Todas las soluciones reales de esta ecuación se expresan en la forma

$$p_n = k(-1)^n \left(\frac{b}{d}\right)^n + p_*, \quad n \geq 0$$

para alguna constante  $k \in \mathbb{R}$ . Conviene observar que esta fórmula deja de tener sentido para el modelo cuando  $p_n$  se hace negativa.

**Ejercicio.** Encuentra una condición sobre  $p_0$  que sea necesaria y suficiente para la positividad de la solución:  $p_n > 0$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

Vamos a estudiar el comportamiento de los precios a largo plazo y para ello distinguimos tres casos:

1.  $b < d$

Todas las soluciones cumplen  $p_n \rightarrow p_*$ . Los precios oscilan y tienen a estabilizarse en el precio de equilibrio.

2.  $b > d$

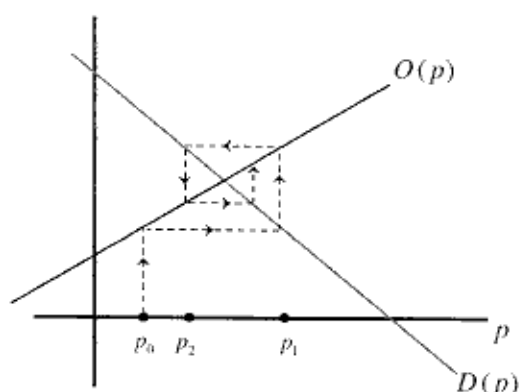
Las soluciones no constantes cumplen  $|p_n| \rightarrow \infty$ . Después de algunas oscilaciones la solución se hace negativa y el modelo deja de ser significativo.

3.  $b = d$

Es un caso de transición entre los dos anteriores. Las soluciones no constantes son 2-ciclos.

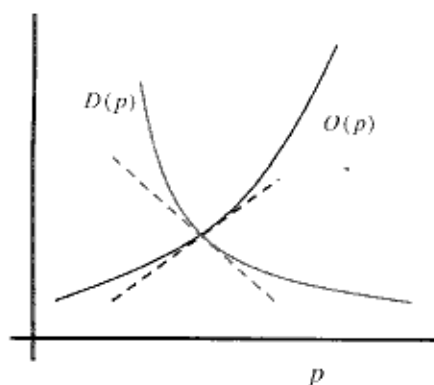
La condición  $b < d$  se puede interpretar como una condición de estabilidad para el modelo. Si recordamos la interpretación de las marginales, nos dice que los productores son menos sensibles a los cambios de precios que los consumidores.

La representación gráfica que se suele hacer de este modelo explica la asociación con una telaraña. Dibujamos las rectas de oferta y demanda sobre el mismo plano y señalamos  $p_0$  sobre el eje horizontal. Calculamos  $O(p_0)$  trazando una vertical y lo igualamos a  $D(p_1)$  mediante una línea horizontal. Entonces repetimos el proceso partiendo de  $p_1$ .



Acabamos con dos críticas al modelo:

- En situaciones reales las funciones de demanda y oferta no son rectas. Al escoger para la demanda una función afín, nos encontramos con demandas negativas para  $p$  grande. Esto no tiene sentido y hace que aparezcan precios negativos. Sin embargo el modelo con rectas no es tan malo cerca del equilibrio, pues se pueden reemplazar las curvas de oferta y demanda por sus tangentes en  $(p_*, D(p_*))$ . El modelo que hemos presentado es significativo para fluctuaciones pequeñas alrededor de  $p_*$ .





- La validez en el tiempo de este modelo ha de ser bastante limitada. Los productores detectarán el patrón y diseñarán estrategias más inteligentes; por ejemplo elaborando un precio esperado a partir del precio de varios años anteriores. De esta forma se llega a variantes del modelo de la telaraña que conducen a ecuaciones de segundo o tercer orden.

## 1.5. El efecto multiplicador: un modelo macro-económico

En la teoría macro-económica de Keynes (sin sector exterior) aparecen tres magnitudes:

$$Y = \text{renta nacional}, \quad I = \text{inversión}, \quad C = \text{consumo}.$$

Se hacen los siguientes supuestos:

$$[1.] \quad Y = C + I$$

Toda la riqueza producida por el país se dedica a consumo o inversión

$$[2.] \quad C = a + bY, \quad a \geq 0, 0 < b < 1$$

El consumo es función de la renta. La marginal  $b$  indica la tendencia al gasto, mayor cuanto más cerca de 1 esté el número  $b$ .

Si unimos 1 y 2,

$$Y = a + bY + I \rightarrow Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b} I$$

y esta fórmula revela el efecto multiplicador de la inversión. La inversión  $I$  eleva la renta en la cantidad  $\frac{1}{1-b} I$ , que es mayor a  $I$ .

**Nota.**  $0 < b < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-b} > 1$

La discusión anterior es estática y hay que tener en cuenta que el efecto multiplicador solo será patente después de un cierto número de años; sería infantil pretender que el efecto de una inversión sea casi inmediato. Vamos a introducir dinámica suponiendo que se produce un desfase, el consumo de un año depende de la renta del año anterior,

$$[2']. \quad C_n = a + bY_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Hacemos una hipótesis adicional: la inversión  $I$  es constante. Esto no es muy realista pero nos permitirá permanecer en el marco de las ecuaciones que sabemos resolver. Si unimos 1 y 2',

$$Y_n = C_n + I = a + bY_{n-1} + I.$$

Hemos llegado a la ecuación lineal en diferencias

$$Y_n = bY_{n-1} + a + I, \quad n \geq 1.$$

Como el coeficiente  $\alpha = b \neq 1$ , existe una solución constante y esta resulta ser la renta de equilibrio que encontramos en la teoría estática,

$$Y_* = \frac{a + I}{1 - b}.$$

Las restantes soluciones reales son

$$Y_n = cb^n + Y_*$$

con  $c$  una constante real no nula. Como  $b \in ]0, 1[$ ,  $Y_n$  converge a  $Y_*$  de manera monótona. A largo plazo el modelo dinámico se aproxima al estático.

## 1.6. La ecuación de orden superior

Estudiaremos

$$(*) \quad x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$$

donde  $k \geq 1$  es el orden de la ecuación. Los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  son fijos y pueden ser reales o complejos. Usaremos la notación  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$  donde  $\mathbb{K}$  puede ser  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Supondremos también  $a_0 \neq 0$ , pues en otro caso es posible rebajar el orden de la ecuación.

**Ejemplo.**  $x_{n+2} + 3x_{n+1} = 0 \rightarrow x_{n+1} + 3x_n = 0$ .

La ecuación de Fibonacci es del tipo  $(*)$  con  $k = 2$ ,  $a_0 = a_1 = -1$ . La ecuación homogénea de primer orden también es del tipo  $(*)$ , con  $k = 1$ ,  $x_{n+1} + a_0x_n = 0$ .

Una *solución* de  $(*)$  es una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$  y que cumple la relación de recurrencia para cada  $n \geq 0$ . Esta definición sugiere trabajar con el espacio vectorial  $S$  de las sucesiones. Los vectores de  $S$  se denotarán por

$$X = \{x_n\}_{n \geq 0} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad x_n \in \mathbb{K}.$$

La suma y el producto por escalar se efectúan coordenada a coordenada,

$$X + Y = \{x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots\}, \quad \lambda X = \{\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots\},$$

si  $X, Y \in S$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Ejercicio.** Prueba que  $S$  es un espacio vectorial. Demuestra que los vectores

$$X_0 = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}, X_1 = \{0, 1, \dots, 0, \dots\}, \dots, X_n = \{0, 0, \dots, 1, \dots\}, \dots$$

son linealmente independientes en  $S$ . ¿Es  $X = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$  combinación lineal de los vectores anteriores?

Pretendemos hacer uso del álgebra lineal abstracta, y para ello vamos a introducir una aplicación lineal que jugará un papel importante en la resolución de la ecuación (\*). Definimos

$$L: S \rightarrow S, L(X) = X^*, x_n^* = x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n$$

y escribimos la ecuación (\*) en la forma más abstracta

$$L(X) = 0.$$

En esta fórmula hay un pequeño abuso de lenguaje, pues el 0 que aparece es el 0 vector; es decir, la sucesión nula  $\{0, 0, \dots, 0, \dots\}$ .

**Ejemplo (Operador de Fibonacci).**  $x_n^* = x_{n+2} - x_{n+1} - x_n$

- $L(\{1, 1, \dots, 1, \dots\}) = \{-1, -1, \dots, -1, \dots\}$
- $L(\{3^n\}_{n \geq 0}) = \{3^{n+2} - 3^{n+1} - 3^n\}_{n \geq 0} = 5\{3^n\}_{n \geq 0}$
- $L(\{f_n\}_{n \geq 0}) = 0$  donde  $\{f_n\}$  es la sucesión de Fibonacci.

Designaremos por  $\Sigma$  al conjunto de soluciones de la ecuación (\*). Recordando la definición de núcleo de una aplicación lineal observamos que se cumple

$$\Sigma = \{X \in S : L(X) = 0\} = \text{Ker } L.$$

A partir de aquí obtenemos una consecuencia importante: el conjunto de soluciones  $\Sigma$  es un sub-espacio vectorial de  $S$ .<sup>3</sup> Esta propiedad nos permitirá fabricar muchas soluciones de la ecuación; por ejemplo, si conocemos dos soluciones no triviales podemos hacer sus combinaciones lineales y obtenemos un plano de soluciones. El espacio  $S$  tiene dimensión infinita pero el sub-espacio  $\Sigma$  va a tener dimensión finita,

$$\dim \Sigma = k = \text{orden de } (*).$$

Para demostrarlo recordamos que dos espacios vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión.<sup>4</sup> Vamos a construir un isomorfismo entre  $\Sigma$  y  $\mathbb{K}^k$  que consiste en quedarse con los primeros  $k$  términos de la sucesión,

$$\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{K}^k, X = \{x_n\}_{n \geq 0} \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Para que  $\Phi$  sea isomorfismo se debe cumplir

- $\Phi$  es lineal,  $\Phi(X + Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$ ,  $\Phi(\lambda X) = \lambda X$ . Esto es fácil de comprobar, pues en los dos espacios las operaciones se definen coordenada a coordenada

<sup>3</sup>Dados  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y una aplicación lineal  $\psi: V \rightarrow W$ , el núcleo,  $\text{Ker } \psi$ , es un sub-espacio de  $V$

<sup>4</sup>Dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$  son isomorfos,  $V \cong W$ , si existe una aplicación lineal y biyectiva entre ellos

- $\Phi$  tiene inversa. Dado un vector  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  en  $\mathbb{K}^k$ , lo interpretamos como un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación (\*). A partir de  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  vamos construyendo por recurrencia  $x_k, x_{k+1}, \dots$ . De esta forma obtenemos una sucesión  $X = \{x_n\}$ . Es fácil comprobar que la inversa se define como  $\Phi^{-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = X$ .

**Ejemplo.**  $x_{n+1} = \lambda x_n$ . Introducimos la notación

$$\pi_\lambda = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\}$$

para designar la progresión geométrica de razón  $\lambda$  y término inicial  $x_0 = 1$ . En este caso  $\Sigma$  tiene dimensión uno y sus vectores son todas las progresiones geométricas de razón  $\lambda$ ,

$$\Sigma = \{c\pi_\lambda : c \in \mathbb{K}\}.$$

Se cumple  $\Phi(c\pi_\lambda) = c$  y  $\Phi^{-1}(c) = c\pi_\lambda = \{c, c\lambda, c\lambda^2, \dots, c\lambda^n, \dots\}$ .

¿Puede ocurrir que la progresión  $\pi_\lambda$  sea también solución de una ecuación de orden superior? Para dar respuesta a esta pregunta calculamos  $L(\pi_\lambda)$  usando la definición de la aplicación lineal  $L$ ,

$$L(\pi_\lambda) = L(\{\lambda^n\}_{n \geq 0}) = \{\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n\}_{n \geq 0} =$$

$$(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)\{\lambda^n\}_{n \geq 0}.$$

Si asociamos a  $L$  el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

llegamos a la fórmula

$$L(\pi_\lambda) = p(\lambda)\pi_\lambda$$

y deducimos que  $\pi_\lambda$  será una solución de (\*) cuando  $\lambda$  sea una raíz del polinomio  $p$ .

**Ejemplo.** (Ecuación de Fibonacci)  $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ . Se cumple  $L(\pi_\lambda) = \{\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n\}_{n \geq 0} = (\lambda^2 - \lambda - 1)\{\lambda^n\}_{n \geq 0} = p(\lambda)\pi_\lambda$  con  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ . Las raíces de este polinomio son

$$\lambda_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La raíz positiva  $\lambda_+$  es el famoso *número de oro*. Sabemos que las progresiones geométricas  $\pi_{\lambda_+}$  y  $\pi_{\lambda_-}$  son soluciones y, como  $\Sigma$  es un espacio vectorial, también serán soluciones sus combinaciones lineales

$$c_1\pi_{\lambda_+} + c_2\pi_{\lambda_-}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

Conviene observar que cuando  $c_1$  y  $c_2$  son diferentes de cero la solución que obtenemos ya no es una progresión geométrica. En este ejemplo  $\Sigma$  tiene dimensión 2 y parece razonable pensar que la fórmula anterior describe todas las soluciones; para estar seguros debemos probar que las sucesiones  $\pi_{\lambda_+}$  y  $\pi_{\lambda_-}$  son linealmente independientes en  $\Sigma$  o, lo que es lo mismo, en  $S$ .

**Lema 1.6.1.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  números distintos ( $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ). Entonces  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$  son linealmente independientes en  $S$ .

**Demostración.** Comenzamos recordando un resultado de álgebra lineal abstracta. Si las imágenes por una aplicación lineal de un conjunto de vectores son linealmente independientes, entonces también lo son los originales.<sup>5</sup> Es decir, si  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales y  $\psi: V \rightarrow W$  es una aplicación lineal; dados  $v_1, \dots, v_p \in V$ ,

$$\psi(v_1), \dots, \psi(v_p) \text{ linealmente independientes en } W \Rightarrow \\ v_1, \dots, v_p \text{ linealmente independientes en } V.$$

Consideramos la aplicación lineal que consiste en quedarse con los primeros  $p$  términos de la sucesión,

$$\Psi: S \rightarrow \mathbb{K}^p, \quad \Psi(\{x_n\}_{n \geq 0}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Calculamos las imágenes de  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$ ,

$$\Psi(\pi_{\lambda_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_1^{p-1} \end{pmatrix}, \dots, \Psi(\pi_{\lambda_p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_p \\ \lambda_p^2 \\ \dots \\ \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Estos vectores son linealmente independientes en  $\mathbb{K}^p$ , pues si los disponemos como columnas de una matriz y calculamos el determinante, llegamos al conocido *determinante de Vandermonde*, que es no nulo,<sup>6</sup>  $\det(\Psi(\pi_{\lambda_1}) | \Psi(\pi_{\lambda_2}) | \dots | \Psi(\pi_{\lambda_p})) =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = \prod_{i,j=1, i > j}^p (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Entonces, la independencia lineal de  $\Psi(\pi_{\lambda_1}), \dots, \Psi(\pi_{\lambda_p})$  en  $\mathbb{K}^p$  implica la independencia lineal de  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$  en  $S$ .  $\square$

**Nota.** Vandermonde da nombre al determinante anterior por un error de interpretación. En una de sus memorias usó sub-índices y super-índices para designar los coeficientes de una matriz general (fila y columna). A partir de ahí no hay más que confundir los super-índices con exponentes. "Y quizás es esta equivocación lo que ha salvado el nombre de Vandermonde del más completo olvido" H. Lebesgue.

<sup>5</sup> Conviene observar que el recíproco no es cierto, las aplicaciones lineales no conservan la independencia lineal a menos que sean monomorfismos

<sup>6</sup>  $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^p$  son linealmente independientes si y solo si  $\det(v_1 | \dots | v_p) \neq 0$



**Ejemplo.** *La sucesión de Fibonacci.* A partir del lema anterior sabemos que el espacio de soluciones  $\Sigma$  de la ecuación  $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$  está generado por  $\pi_{\lambda_{\pm}}$  con  $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Por tanto,

$$\{f_n\}_{n \geq 0} = c_1 \pi_{\lambda_+} + c_2 \pi_{\lambda_-}$$

y ajustamos las constantes  $c_1, c_2$  a partir de las condiciones iniciales  $f_0 = f_1 = 1$ ,

$$f_0 = 1 \rightarrow 1 = c_1 + c_2, \quad f_1 = 1 \rightarrow 1 = c_1 \lambda_+ + c_2 \lambda_-.$$

Hemos encontrado un sistema lineal compatible determinado en las incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , con solución

$$c_1 = \frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}.$$

Llegamos a la fórmula del término general

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

A partir de esta fórmula observamos que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\lambda_+^{n+2} - \lambda_-^{n+2}}{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}} = \frac{\lambda_+ - \lambda_- \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{n+1}}.$$

Puesto que  $|\lambda_-| < \lambda_+$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De manera imprecisa decimos que la sucesión de Fibonacci se parece (para  $n$  grande) a una progresión geométrica cuya razón es el número de oro.

## 1.7. Raíces complejas

Supongamos que los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  son reales pero el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

admite una raíz compleja  $\lambda_* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Entonces también será raíz de  $p(\lambda)$  el número conjugado  $\bar{\lambda}_*$  y encontramos las soluciones complejas

$$\pi_{\lambda_*} = \{1, \lambda_*, \lambda_*^2, \dots\}, \quad \pi_{\bar{\lambda}_*} = \{1, \bar{\lambda}_*, \bar{\lambda}_*^2, \dots\}.$$

Como  $\lambda_* \neq \bar{\lambda}_*$ , estas soluciones son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ . Consideramos las combinaciones lineales

$$R = \frac{1}{2} \pi_{\lambda_*} + \frac{1}{2} \pi_{\bar{\lambda}_*}, \quad I = \frac{1}{2i} \pi_{\lambda_*} - \frac{1}{2i} \pi_{\bar{\lambda}_*},$$

que también son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ .

**Ejercicio.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $v_1, v_2 \in V$  vectores linealmente independientes. Prueba que también lo son los vectores  $w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ ,  $w_2 = \frac{1}{2i}v_1 - \frac{1}{2i}v_2$ .

Las sucesiones  $R$  e  $I$  se pueden ver como la parte real e imaginaria de  $\pi_{\lambda_*}$ , pues si  $z = x + iy$  es un número complejo,

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

A partir de la fórmula de Moivre podemos expresar  $R$  e  $I$  en términos reales,

$$\lambda_* = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \lambda_*^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

$$R = \{r^n \cos n\theta\}_{n \geq 0}, \quad I = \{r^n \sin n\theta\}_{n \geq 0}.$$

Partimos de las soluciones complejas  $\pi_{\lambda_*}$ ,  $\pi_{\bar{\lambda}_*}$  y hemos llegado a las soluciones reales  $R, I$ , pero hay todavía una cuestión delicada. Sabemos que  $R$  e  $I$  son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  pero, como son soluciones reales, nos preguntamos ahora si también serán linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ . La respuesta es sí y la justificación la encontramos en una observación general sobre los espacios vectoriales.

**Nota.** Todo espacio vectorial  $V$  sobre los complejos se puede ver también como un espacio vectorial sobre los reales. Si  $v_1, \dots, v_p \in V$  son vectores  $\mathbb{C}$ -linealmente independientes entonces también son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes. La razón es simple, si se cumple

$$\sum_{i=1}^p c_i v_i = 0, \quad c_i \in \mathbb{C} \Rightarrow c_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

también se ha de cumplir la implicación más débil

$$\sum_{i=1}^p c_i v_i = 0, \quad c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow c_i = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

El recíproco es falso, los vectores  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{G}^2$  cumplen  $iv_1 - v_2 = 0$  y son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes.

**Ejercicio.** ¿Qué habría pasado en las discusiones anteriores si hubiéramos cambiado los papeles de  $\lambda_*$  y  $\bar{\lambda}_*$ .

**Ejemplo.** Para resolver  $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$  buscamos las raíces del polinomio  $\lambda^2 + \lambda + 1$ . Estas son

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Las sucesiones

$$\pi_\omega = \{1, \omega, \omega^2, \dots\}, \quad \pi_{\bar{\omega}} = \{1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots\}$$

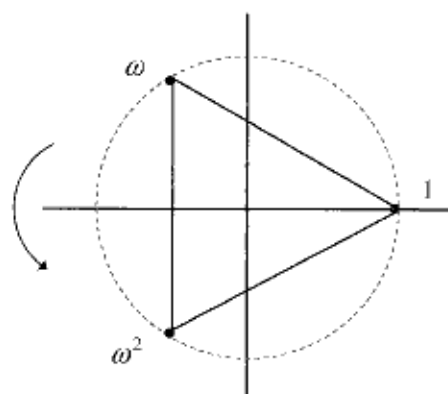
pertencen a  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  y son linealmente independientes en  $S$ . Como el sub-espacio  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  tiene dimensión dos, forman una base. Para hacernos una idea del comportamiento de  $\pi_\omega$  y  $\pi_{\bar{\omega}}$  observamos que  $\omega$  y  $\bar{\omega}$  son raíces cúbicas de la unidad,

$$\omega^3 = 1, \quad \bar{\omega}^3 = 1.$$

En el plano complejo los números  $1, \omega$  y  $\bar{\omega}$  son vértices de un triángulo equilátero y las potencias sucesivas se obtienen efectuando rotaciones de los vértices

$$1, \omega, \omega^2 = \bar{\omega}, \omega^3 = 1, \omega^4 = \omega, \omega^5 = \bar{\omega}, \dots$$

Esto muestra que las sucesiones  $\pi_\omega$  y  $\pi_{\bar{\omega}}$  son 3-ciclos (se repiten cada tres términos).



Las soluciones **complejas** están descritas en la fórmula

$$x_n = c_1 \omega^n + c_2 \bar{\omega}^n; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Ahora vamos a describir  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ . Podemos calcular  $R$  e  $I$  usando la fórmula de Moivre y teniendo en cuenta que  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ ,

$$R = \left\{ \cos \frac{2\pi n}{3} \right\}_{n \geq 0}, \quad I = \left\{ \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} \right\}_{n \geq 0}.$$

También podemos calcular estas sucesiones mirando el dibujo del triángulo equilátero y buscando las proyecciones sobre los ejes coordenados,

$$R = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots \right\}, \quad I = \left\{ 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots \right\}.$$

Describimos las soluciones **reales** por

$$x_n = \begin{cases} c_1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 1.8. Raíces múltiples

Comenzamos con un ejemplo:

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0.$$

El polinomio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$  tiene la raíz doble  $\lambda_* = -1$ . Sabemos que

$$\pi_{-1} = \{(-1)^n\}_{n \geq 0} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

es solución pero no podemos fabricar una segunda solución  $\pi_\lambda$  con  $\lambda \neq -1$ . Habrá que buscar soluciones de un nuevo tipo para describir  $\Sigma$ . Antes conviene repasar la noción de *multiplicidad* de una raíz. Dado un polinomio

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

con raíces distintas  $\lambda_1, \dots, \lambda_\sigma$ , lo factorizamos como

$$p(\lambda) = a_k \prod_{h=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_h)^{m_h}.$$

El número  $m_h$  es la multiplicidad de  $\lambda_h$ . El número de raíces no puede superar al grado,  $\sigma \leq k$ , y la suma de multiplicidades ha de coincidir con el grado,

$$m_1 + \dots + m_\sigma = k.$$

Usando las derivadas sucesivas del polinomio es posible calcular la multiplicidad de una raíz sin necesidad de factorizar el polinomio. Una raíz  $\lambda_* \in \mathbb{C}$  tiene multiplicidad  $m \geq 2$  si se cumple

$$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = \dots = p^{(m-1)}(\lambda_*) = 0, \quad p^{(m)}(\lambda_*) \neq 0.$$

**Ejercicio.** Calcula la multiplicidad de  $\lambda_* = 1$  para el polinomio  $p(\lambda) = \lambda^{100} - 49\lambda^2 - 2\lambda + 50$ .

Probaremos que si  $\lambda_*$  es una raíz con multiplicidad  $m$  del polinomio característico de la ecuación (\*), entonces las sucesiones

$$\{\lambda_*^n\}, \{n\lambda_*^n\}, \dots, \{n^{m-1}\lambda_*^n\}$$

están en  $\Sigma$ . Más en general, dado cualquier polinomio  $q(n) = c_{m-1}n^{m-1} + \dots + c_1n + c_0$  de grado a lo sumo  $m-1$ , la sucesión  $\{q(n)\lambda_*^n\}$  está en  $\Sigma$ . Para justificarlo es bastante observar que esta sucesión se expresa como combinación lineal de las anteriores,

$$\{q(n)\lambda_*^n\} = c_{m-1}\{n^{m-1}\lambda_*^n\} + \dots + c_1\{n\lambda_*^n\} + c_0\{\lambda_*^n\}.$$

En el ejemplo inicial teníamos  $\lambda_* = -1$  y  $m = 2$ , así que encontramos las soluciones reales

$$\{(c_1n + c_0)(-1)^n\}_{n \geq 0}; \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora un ejemplo más complicado. La ecuación

$$x_{n+5} - 2x_{n+4} + 2x_{n+3} - 4x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$$

tiene un polinomio característico que factoriza en la forma  $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2$  y admite las raíces

$$\lambda_1 = 2, m_1 = 1; \lambda_2 = i, m_2 = 2; \lambda_3 = -i, m_3 = 2.$$

Encontramos las soluciones  $\{2^n\}$ ,  $\{i^n\}$ ,  $\{ni^n\}$ ,  $\{(-i)^n\}$ ,  $\{n(-i)^n\}$ . Para encontrar soluciones reales podemos emplear el siguiente

**Ejercicio.** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una solución compleja de la ecuación (\*). Se supone que los coeficientes  $a_0, \dots, a_{k-1}$  son reales. Demuestra que las sucesiones  $\{\operatorname{Re}(x_n)\}_{n \geq 0}$  y  $\{\operatorname{Im}(x_n)\}_{n \geq 0}$  también son soluciones. Construye un ejemplo que muestre que el resultado es falso si los coeficientes no son reales.

En el ejemplo anterior obtenemos las soluciones reales

$$\{\operatorname{Re}(i^n)\}_{n \geq 0} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}, \quad \{\operatorname{Im}(i^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$

$$\{\operatorname{Re}(ni^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 0, -2, 0, 4, \dots\}, \quad \{\operatorname{Im}(ni^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 0, -3, 0, \dots\}.$$

Dedicaremos el resto de la sección a probar el siguiente resultado.

**Proposición 1.8.1.** Sea  $\lambda_* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  una raíz de  $p(\lambda)$  con multiplicidad  $m \geq 2$ . Entonces  $\{q(n)\lambda_*^n\}_{n \geq 0}$  es una solución de (\*) para cada polinomio  $q(n)$  de grado a lo sumo  $m-1$ .

**Nota.**  $\lambda_* = 0$  no puede ser raíz del polinomio característico pues se supone  $a_0 \neq 0$ .

Antes de la demostración necesitamos algunos preliminares y un par de lemas.



Partimos de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y de la sucesión

$$\pi_\lambda = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\}$$

y definimos nuevas sucesiones

$$D\pi_\lambda = \{0, 1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots, n\lambda^{n-1}, \dots\},$$

$$D^2\pi_\lambda = \{0, 0, 2, 6\lambda, 12\lambda^2, \dots, n(n-1)\lambda^{n-2}, \dots\}.$$

En general, para cada  $r \geq 1$ ,

$$D^r\pi_\lambda = \{q_r(n)\lambda^{n-r}\}_{n \geq 0} \text{ donde } q_r(n) = n(n-1)\dots(n-r+1).$$

Observamos que estas sucesiones se obtienen por derivación sucesiva con respecto a  $\lambda$  de la sucesión  $\pi_\lambda$ , lo que justifica la notación. La fórmula  $L[\pi_\lambda] = p(\lambda)\pi_\lambda$  nos ha sido de gran ayuda para producir todas las soluciones en el caso de raíces simples, ahora presentamos otra fórmula que va a ser clave para raíces múltiples, en ella aparecen números combinatorios.

**Lema 1.8.2.**

$$L[D^r\pi_\lambda] = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} p^{(h)}(\lambda) D^{r-h}\pi_\lambda$$

para cada  $r \geq 1$ .

**Nota.** Con las convenciones  $D^0\pi_\lambda = \pi_\lambda$ ,  $\binom{0}{0} = 1$ ,  $p^{(0)} = p$ , recuperamos la fórmula del caso simple para  $r = 0$ .

*Demostración.* Se podría intentar una demostración directa por inducción sobre  $r$ , pero sería un poco pesada y no nos explicaría cómo se ha generado la fórmula. Vamos a proceder con más astucia. Partimos de la fórmula conocida  $L[\pi_\lambda] = p(\lambda)\pi_\lambda$  y derivamos con respecto a  $\lambda$ ,

$$L[D\pi_\lambda] = DL[\pi_\lambda] = D[p(\lambda)\pi_\lambda] = p'(\lambda)\pi_\lambda + p(\lambda)D\pi_\lambda,$$

así hemos llegado a la fórmula para  $r = 1$ . Para  $r \geq 2$  podemos usar la *regla de Leibniz*<sup>7</sup> que extiende la fórmula para la derivada del producto a derivadas de orden superior. Ahora derivamos  $r$  veces en lugar de una vez,

$$L[D^r\pi_\lambda] = D^r L[\pi_\lambda] = D^r [p(\lambda)\pi_\lambda] = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} p^{(h)}(\lambda) D^{r-h}\pi_\lambda.$$

<sup>7</sup>Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables hasta el orden  $r$  se cumple  $(f \cdot g)^{(r)} = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} f^{(h)} \cdot g^{(r-h)}$

En los cálculos anteriores hay varias cosas que aclarar:

- La derivación se efectúa en cada término de la sucesión; es decir, en la identidad

$$\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \cdots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n = p(\lambda)\lambda^n$$

- Al derivar en la fórmula anterior se observa que la conmutación  $L[D\pi_\lambda] = D[L\pi_\lambda]$  está justificada
- Obtenemos la fórmula para  $\lambda$  complejo pero ¿cómo se deriva una función de variable compleja? Por ahora podemos entender que la demostración está completa para  $\lambda$  real. Para el caso complejo podemos pensar que se trata de un cálculo formal; en un curso más avanzado de la carrera el estudiante le dará rigor a ese caso.

□

**Ejercicio.** Demuestra la fórmula

$$1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^3 + \cdots + 1000\lambda^{999} = \frac{1000\lambda^{1001} - 1001\lambda^{1000} + 1}{(\lambda - 1)^2},$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lema 1.8.3.** Las sucesiones  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$  son soluciones de (\*).

*Demostración.* Comenzamos suponiendo que  $\lambda_*$  es una raíz que cumple  $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = 0$  y aplicamos la fórmula del lema anterior con  $r = 1$ ,

$$L[D\pi_\lambda] = p'(\lambda)\pi_\lambda + p(\lambda)D\pi_\lambda.$$

Al evaluar en  $\lambda = \lambda_*$  observamos que  $D\pi_{\lambda_*}$  es solución. Supongamos ahora que  $\lambda_*$  cumple  $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = p''(\lambda_*) = 0$  y hagamos  $r = 2$  en la fórmula,

$$L[D^2\pi_\lambda] = p''(\lambda)\pi_\lambda + 2p'(\lambda)D\pi_\lambda + p(\lambda)D^2\pi_\lambda.$$

Haciendo  $\lambda = \lambda_*$  deducimos que  $D^2\pi_{\lambda_*}$  es solución. En general, si  $\lambda_*$  tiene multiplicidad  $m$  encontramos las soluciones  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$ . □

*Demostración. Proposición 1.8.1.* Vamos a probar que toda sucesión del tipo  $\{q(n)\lambda_*^n\}$  se expresa como combinación lineal de  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$ , con ello llegaremos a la conclusión por ser  $\Sigma$  un espacio vectorial. En primer lugar observamos que los polinomios

$$q_0(n) = 1, \quad q_1(n) = n, \quad q_2(n) = n(n-1), \dots, q_{m-1}(n) = n(n-1) \cdots (n-m+2)$$

forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo  $m-1$ ,  $\mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}_{m-1}[n]$ . Dado  $q \in \mathbb{P}_{m-1}$ ,  $q = \sum_{j=0}^{m-1} c_j q_j$  para ciertos números  $c_j$ . Como  $\lambda^r D^r \pi_\lambda = \{q_r(n)\lambda^n\}_{n \geq 0}$ , deducimos que

$$\{q(n)\lambda_*^n\} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \lambda_*^j D^j \pi_{\lambda_*}.$$

□

**Ejercicio.** Usando la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de Lagrange prueba que los polinomios

$$1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)$$

forman una base de  $\mathbb{P}_4$ .

**Ejercicio.** Dado  $\varepsilon > 0$  encuentra la solución  $\{x_n^\varepsilon\}_{n \geq 0}$  de

$$x_{n+2} - (14 + \varepsilon)x_{n+1} + (49 + 7\varepsilon)x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Calcula  $x_n^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x_n^\varepsilon$ . ¿Qué ecuación resuelve la sucesión  $\{x_n^0\}_{n \geq 0}$ ?

## 1.9. Solución general de la ecuación lineal homogénea

El siguiente resultado proporciona una descripción completa del espacio  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 1.9.1.** Consideramos la ecuación (\*) con coeficientes complejos

$$a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$$

y suponemos que el polinomio característico se factoriza como

$$p(\lambda) = \prod_{h=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_h)^{m_h}.$$

Entonces las soluciones de (\*) son de la forma  $\{x_n\}$  con

$$x_n = \sum_{h=1}^{\sigma} f_h(n) \lambda_h^n,$$

donde  $f_h$  es un polinomio de grado a lo sumo  $m_h - 1$ .

Tenemos ya probada una parte substancial del teorema pues, a la vista de la proposición 1.8.1 de la sección anterior, sabemos que las sucesiones  $x_n$  descritas en el teorema son soluciones de la ecuación.<sup>8</sup> Falta probar que no hay más soluciones. Esto será consecuencia del siguiente

**Lema 1.9.2.** Las sucesiones

$$\pi_{\lambda_1}, \dots, D^{m_1-1} \pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}, \dots, D^{m_2-1} \pi_{\lambda_2}, \dots, \pi_{\lambda_{\sigma}}, \dots, D^{m_{\sigma}-1} \pi_{\lambda_{\sigma}}$$

forman una base de  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ .

<sup>8</sup>Una vez más hemos usado que  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  tiene estructura de espacio vectorial

**Ejercicio.** Demuestra que toda combinación lineal del tipo

$$\sum_{h=1}^{\sigma} \sum_{j=0}^{m_h-1} c_{h,j} D^j \pi_{\lambda_h}$$

es una solución de las descritas por el teorema.

No vamos a dar una prueba completa del lema porque resulta de notación muy pesada, pero vamos a presentar las claves con las que se puede construir una demostración. De entrada observamos que en la candidatura a base hay  $m_1 + m_2 + \dots + m_{\sigma} = k$  soluciones. Vamos bien pues sabemos que ese número es justamente la dimensión de  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ . Todo lo que tenemos que hacer es probar que las sucesiones del lema son linealmente independientes<sup>9</sup> Para ello podemos proceder como en el caso de raíces simples y utilizar la aplicación lineal

$$\Psi : S \rightarrow \mathbb{K}^k, \quad \Psi(\{x_n\}_{n \geq 0}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Será suficiente probar que

$$\det(\Psi(\pi_{\lambda_1}) | \dots | \Psi(D^{m_1-1} \pi_{\lambda_1}) | \dots | \Psi(\pi_{\lambda_{\sigma}}) | \dots | \Psi(D^{m_{\sigma}-1} \pi_{\lambda_{\sigma}})) \neq 0.$$

Llegamos así a una versión generalizada del determinante de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & 1 & \dots & \lambda_{\sigma} & 1 & \dots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \dots & \lambda_{\sigma}^2 & 2\lambda_{\sigma} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-2} & \dots & \lambda_{\sigma}^{k-1} & (k-1)\lambda_{\sigma}^{k-2} & \dots \end{pmatrix}$$

y hay que probar que este determinante no es nulo cuando los números  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma}$  son distintos dos a dos. Es posible calcular este determinante usando una idea que ya ha aparecido antes: obtener nuevas fórmulas a partir de otras ya conocidas mediante la derivación de algún parámetro. En lugar de tratar el caso general nos vamos a limitar a un ejemplo. Por eso, lo que sigue **no** es una demostración completa.

<sup>9</sup>V espacio vectorial de dimensión  $k$ ,  $v_1, \dots, v_k \in V$  vectores linealmente independientes  $\rightarrow v_1, \dots, v_k$  base de  $V$

Partimos del determinante de Vandermonde  $4 \times 4$ ,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & d \\ a^2 & x^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & x^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} = (x-a)(c-a)(c-x)(d-a)(d-x)(d-c).$$

Pensamos que  $a$ ,  $c$  y  $d$  son números fijos y  $x$  es una variable. Vamos a derivar la identidad respecto a  $x$  y para eso nos hace falta la regla para derivar determinantes.

Dadas funciones  $f_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en el intervalo  $I$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , la función  $D(x) = \det(f_{ij}(x))$  también es derivable y su derivada cumple

$$D'(x) = \det \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdot & f_{1d}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdot & f_{2d}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{d1}(x) & f_{d2}(x) & \cdot & f_{dd}(x) \end{pmatrix} +$$

$$\det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdot & f_{1d}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdot & f_{2d}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{d1}(x) & f'_{d2}(x) & \cdot & f_{dd}(x) \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdot & f'_{1d}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdot & f'_{2d}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{d1}(x) & f_{d2}(x) & \cdot & f'_{dd}(x) \end{pmatrix}.$$

En la derivada de un determinante  $d \times d$  aparece la suma de  $d$  determinantes, en cada uno de ellos se deriva una columna.

Volvemos a nuestro determinante  $4 \times 4$  y observamos que los coeficientes  $f_{ij}$  son constantes o monomios. Como la variable  $x$  solo aparece en la segunda columna, en tres de los determinantes aparecerá una columna de ceros. Si derivamos la identidad de Vandermonde,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & c & d \\ a^2 & 2x & c^2 & d^2 \\ a^3 & 3x^2 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} = (c-a)(c-x)(d-a)(d-x)(d-c) -$$

$$(x-a)(c-a)(d-a)(d-x)(d-c) - (x-a)(c-a)(c-x)(d-a)(d-c).$$

Esta fórmula es válida para valores arbitrarios de  $x$ , si hacemos  $x = a$ ,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & c & d \\ a^2 & 2a & c^2 & d^2 \\ a^3 & 3a^2 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} = (c-a)^2(d-a)^2(d-c).$$

Esta fórmula muestra que el determinante no se anula si los números  $a$ ,  $c$  y  $d$  son distintos.

De nuevo hemos derivado funciones de variable compleja.

**Ejercicio.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con base  $u_1, v_1, \dots, u_t, v_t, w_1, \dots, w_s$ . Prueba que  $r_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1, y_1 = \frac{1}{2i}u_1 - \frac{1}{2i}v_1, \dots, r_t = \frac{1}{2}u_t + \frac{1}{2}v_t, y_t = \frac{1}{2i}u_t - \frac{1}{2i}v_t, w_1, \dots, w_s$  es otra base.

**Ejercicio.** Enuncia y demuestra un teorema que describa el espacio  $\Sigma_{\mathbb{R}}$  para una ecuación con coeficientes reales.

**Ejercicio.** Se considera la ecuación lineal completa

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b_n,$$

donde  $\{b_n\}$  es una sucesión dada. Se supone que  $\{x_n^*\}$  es una solución conocida. Demuestra que cada solución  $\{x_n\}$  se expresa en la forma  $x_n = y_n + x_n^*$  donde  $\{y_n\}$  es una solución de la ecuación homogénea (\*). Encuentra todas las soluciones de la ecuación

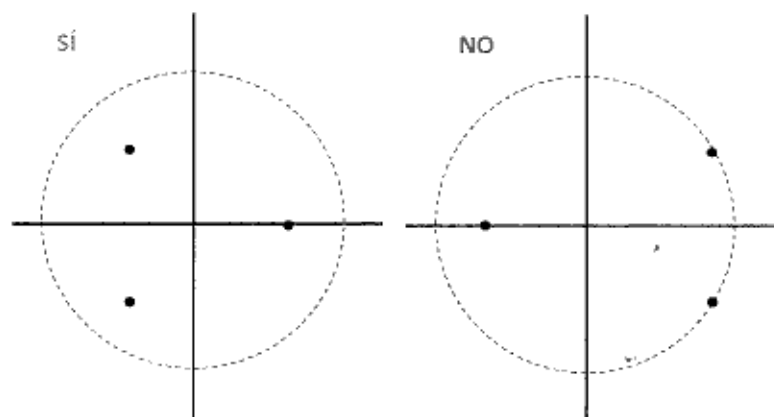
$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 3^n.$$

## 1.10. Comportamiento asintótico de las soluciones

Como consecuencia de los resultados de la sección anterior podemos decidir bajo qué condiciones todas las soluciones de la ecuación (\*) tienden a cero.

**Corolario 1.10.1.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_\sigma$  las raíces del polinomio  $p(\lambda)$  asociado a (\*). Son equivalentes:

- (i) todas las soluciones de la ecuación (\*) convergen a cero,
- (ii)  $\max_{h=1, \dots, \sigma} |\lambda_h| < 1$ .



**Nota.** En este resultado se entiende que estamos trabajando con soluciones complejas, en el espacio  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ . En el caso de que los coeficientes sean reales el resultado también es válido si nos restringimos a soluciones reales, en  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ .

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supondremos que (ii) no se cumple y probaremos que entonces tampoco se cumple (i). Dada una raíz  $\lambda_i$  con  $|\lambda_i| \geq 1$ , la solución

$$\pi_{\lambda_i} = \{1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^n, \dots\}$$

no converge a cero,<sup>10</sup> pues  $|x_n| = |\lambda_i^n| = |\lambda_i|^n \geq 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Fijamos

$$\mu = \max_{h=1, \dots, \sigma} |\lambda_h| < 1.$$

Sabemos por el teorema anterior que las soluciones se escriben en la forma

$$x_n = \sum_{h=1}^{\sigma} f_h(n) \lambda_h^n,$$

donde  $f_h$  es un polinomio de grado a lo sumo  $m_h - 1$ . Por la desigualdad triangular para números complejos,

$$|x_n| \leq \sum_{h=1}^{\sigma} |f_h(n)| |\lambda_h|^n \leq \left( \sum_{h=1}^{\sigma} |f_h(n)| \right) \mu^n.$$

Para continuar las estimaciones usaremos el siguiente

**Ejercicio.** Sea  $f(x)$  un polinomio de grado a lo sumo  $d$ , entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq Cx^d \text{ si } x \geq 1.$$

Como  $f_h$  es un polinomio en la variable  $n$ ,

$$\sum_{h=1}^{\sigma} |f_h(n)| \leq \sum_{h=1}^{\sigma} C_h n^{m_h-1} \leq \left( \sum_{h=1}^{\sigma} C_h \right) n^{k-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se cumple  $n^{k-1} \mu^n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$  porque  $\mu$  está en el intervalo  $[0, 1[$ . Entonces,

$$|x_n| \leq \left( \sum_{h=1}^{\sigma} C_h \right) n^{k-1} \mu^n \rightarrow 0.$$

□

Este resultado se puede aplicar sin necesidad de conocer las raíces, pues existen criterios que permiten decidir si todas las raíces están dentro del disco unidad usando tan solo información simple de los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ . Vamos a presentar el **criterio** en el caso sencillo de los polinomios de grado 2:

<sup>10</sup>En el caso de coeficientes reales, y si  $\lambda_i$  no es real,  $\{\operatorname{Re}(\lambda_i^n)\}$  y  $\{\operatorname{Im}(\lambda_i^n)\}$  son soluciones reales que no convergen a cero

Dado un polinomio  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  con coeficientes reales  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  y raíces  $\lambda_1, \lambda_2$ , se cumple

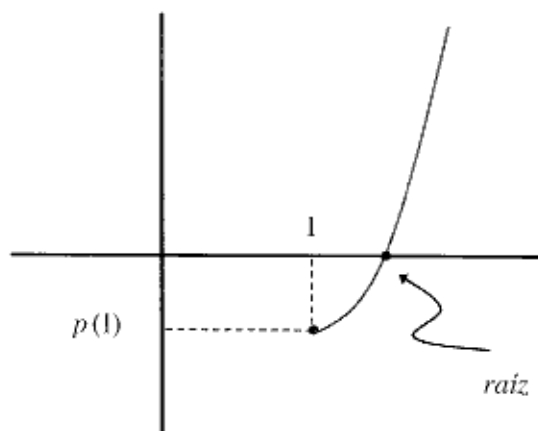
$$|\lambda_i| < 1, i = 1, 2 \Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ p(0) = a_0 < 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Comenzamos recordando la fórmula

$$a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

que se obtiene de la identidad  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ .

$\Rightarrow$ ] Probemos que  $p(1)$  es positivo. Suponemos, por reducción al absurdo, que  $p(1) \leq 0$ . Como  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p(\lambda) = +\infty$ , el teorema de Bolzano nos permite encontrar una raíz de  $p(\lambda)$  en  $[1, \infty[$ , lo que va contra la hipótesis  $|\lambda_i| < 1$ .



La prueba de  $p(-1) > 0$  es análoga. Finalmente,

$$a_0 \leq |a_0| = |\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2| < 1.$$

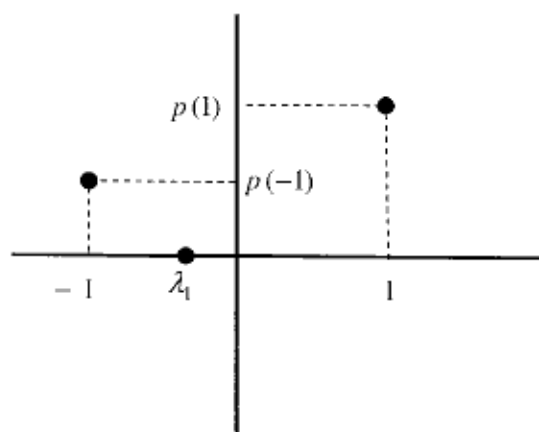
$\Leftarrow$ ] Distinguimos los casos de raíces complejas y reales.

Caso I:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Como los coeficientes son reales,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ . Además,<sup>11</sup>  $a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2$ . De la hipótesis  $a_0 < 1$  deducimos  $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 < 1$  y concluimos que las raíces quedan dentro del disco unidad.

Caso II:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . De las hipótesis  $p(1) > 0$  y  $p(-1) > 0$  deducimos que  $p(1) + p(-1) = 2 + 2a_0 > 0$ , lo que implica  $a_0 > -1$ . Por hipótesis ya sabíamos que  $a_0 < 1$  y obtenemos  $|a_0| < 1$ . De la fórmula del producto de las raíces deducimos que  $|\lambda_1| |\lambda_2| < 1$  y al menos una de las raíces está en el intervalo  $] -1, 1[$ ; suponemos por ejemplo que esto le ocurre a  $\lambda_1$ . De los valores de  $p(\lambda)$  en  $\lambda = -1, \lambda_1, 1$ , observamos que el polinomio cuadrático tiene su cambio de monotonía en  $] -1, 1[$ .

<sup>11</sup>  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$





Entonces  $p(\lambda)$  es estrictamente decreciente en  $]-\infty, -1]$  y estrictamente creciente en  $[1, +\infty[$ . Así,  $p(\lambda) > p(-1) > 0$  si  $\lambda \in ]-\infty, -1[$  y  $p(\lambda) > p(1) > 0$  si  $\lambda \in ]1, +\infty[$ . Al ser las raíces reales ambas han de estar en  $] -1, 1[$ .  $\square$

**Ejercicio.** Encuentra las condiciones sobre los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  para que las raíces del polinomio  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  cumplan  $\lambda_i \in ]2, 3[$ .

## 1.11. Interacción multiplicador-acelerador

Volvemos al modelo macro-económico con magnitudes

$$Y = \text{renta nacional}, \quad I = \text{inversión}, \quad C = \text{consumo}.$$

La novedad con respecto al caso ya tratado va a estar en la inversión, que no se supondrá constante. En el año  $n$  la inversión tendrá dos componentes

$$I_n = I'_n + I''_n, \quad I'_n = \text{inversión inducida}, \quad I''_n = \text{inversión autónoma}.$$

Supondremos que el gasto público es constante y coincide con la inversión autónoma,

$$I''_n = G > 0.$$

La inversión inducida dependerá de la variación del consumo, siguiendo el principio de aceleración

$$I'_n = k(C_n - C_{n-1}),$$

donde  $k > 0$  es el *coeficiente acelerador*. Pensemos por ejemplo en la industria del automóvil, si un año aumentan mucho las ventas, habrá más tendencia a invertir en nuevas factorías, naves de almacenamiento, publicidad, etcétera. Por el contrario, si el consumo baja,  $\Delta C = C_n - C_{n-1} < 0$ , hay desinversión.

La relación entre el consumo y la renta será la misma que en el modelo anterior,<sup>12</sup>

$$C_n = bY_{n-1}, \quad 0 < b < 1.$$

Por último imponemos la condición

$$Y_n = C_n + I_n.$$

Juntando las ecuaciones llegamos al sistema

$$\begin{cases} Y_n = C_n + I_n \\ C_n = bY_{n-1} \\ I_n = k(C_n - C_{n-1}) + G, \end{cases}$$

que se transforma en una ecuación de segundo orden para la renta,

$$Y_n = bY_{n-1} + kb(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + G \Rightarrow Y_n - b(1+k)Y_{n-1} + kbY_{n-2} = G.$$

Este modelo fue propuesto por Samuelson y tiene en cuenta el efecto multiplicador  $b$  y acelerador  $k$ . Se trata de una ecuación lineal **completa** y la vamos a resolver usando la misma técnica que en la ecuación de primer orden: buscamos una solución constante y luego le sumamos las soluciones de la homogénea.<sup>13</sup>

*Solución constante:*  $Y_n = \bar{Y} \Rightarrow \bar{Y} - (1+k)b\bar{Y} + kb\bar{Y} = G$

$$\bar{Y} = \frac{G}{1-b}.$$

Encontramos de nuevo la renta de equilibrio. Al ser  $Y_n$  constante, también lo es  $C_n$  y la inversión inducida es nula, el efecto acelerador desaparece para esta solución.

*Solución general:*  $Y_n = y_n + \bar{Y}$  donde  $y_n$  es solución de la ecuación homogénea

$$y_n - b(1+k)y_{n-1} + kb y_{n-2} = 0,$$

con polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b(1+k)\lambda + kb.$$

A partir de esta información podemos discutir el comportamiento cualitativo de las soluciones según los valores de  $b$  y  $k$ . Estamos interesados en la convergencia de las soluciones a la renta de equilibrio y en el carácter monótono u oscilante de las soluciones.

<sup>12</sup>En el modelo anterior  $C_n = a + bY_{n-1}$ . Para simplificar se hace  $a = 0$ .

<sup>13</sup>La justificación de este procedimiento está en el último ejercicio de la sección 1.9.

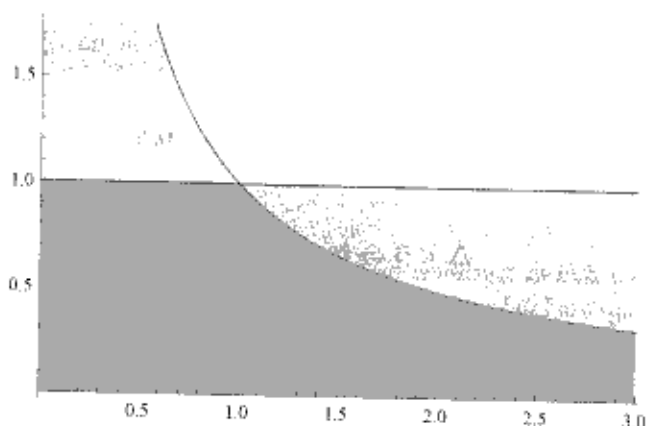
**Convergencia.** La condición  $Y_n \rightarrow \bar{Y}$  es equivalente a  $y_n \rightarrow 0$ . De acuerdo a los resultados de la sección anterior, esto ocurrirá (para todas las soluciones) si y solo si

$$p(1) = 1 - b(1+k) + kb > 0, \quad p(-1) = 1 + b(1+k) + kb > 0, \quad p(0) = kb < 1.$$

Puesto que  $k$  es positivo y  $b \in ]0, 1[$ , las dos primeras desigualdades se cumplen siempre; la convergencia al equilibrio es equivalente a la *condición de estabilidad*

$$kb < 1.$$

Hacemos un diagrama en el plano de parámetros  $(k, b)$ , la región de interés será la banda semi-infinita  $k > 0$  y  $0 < b < 1$ .



La curva  $kb = 1$  es una rama de hipérbola que separa el comportamiento estable del inestable. La zona más oscura es la región de estabilidad (convergencia al equilibrio). En ella el modelo dinámico conduce, a largo plazo, a la conclusión de la teoría estática (efecto multiplicador).

**Monotonía y oscilación** Las raíces reales en el polinomio característico están asociadas al comportamiento monótono o alternado de las soluciones, las raíces complejas predicen comportamientos oscilatorios más complicados. El ejercicio que sigue explica esta afirmación.

**Ejercicio.** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación de segundo orden

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Estudiamos las soluciones reales y no triviales de esta ecuación. Prueba:

- Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  con  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ , casi todas las soluciones son monótonas a partir de un término
- Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  con  $\lambda_1 < -|\lambda_2|$ , casi todas las soluciones son oscilantes a partir de un término
- Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  con  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ , las soluciones no son ni monótonas ni oscilantes a partir de un término.

Después de este ejercicio discutimos el signo del discriminante del polinomio  $p(\lambda)$  asociado al modelo de Samuelson,

$$\Delta = \Delta(k, b) = b^2(1+k)^2 - 4kb.$$

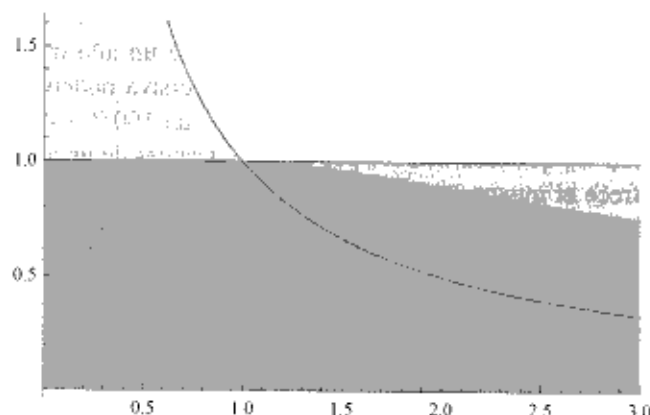
Se cumple

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow b < \frac{4k}{(1+k)^2}.$$

La curva  $b = \frac{4k}{(1+k)^2}$  corresponde al caso de raíz doble y separa las regiones de raíces reales y complejas. Para dibujar esta curva la interpretamos como la gráfica de la función racional  $b = F(k) = \frac{4k}{(1+k)^2}$ ,  $k \in ]0, \infty[$ . Esta función cumple  $F(0) = 0$ ,  $F(\infty) = 0$  y es creciente en  $]0, 1[$  y decreciente en  $]1, \infty[$ . Por tanto alcanza su máximo en  $x = 1$  con  $F(1) = 1$ .<sup>14</sup> Finalmente observamos que para  $k > 1$  la gráfica de  $F$  está por encima de la rama de hipérbola que encontramos antes,  $\frac{4k}{(1+k)^2} > \frac{1}{k}$  si  $k > 1$ .

<sup>14</sup> Observa que **no** hace falta calcular el signo de  $F''(1)$

Llegamos al **diagrama multiplicador-acelerador**, que separa el espacio de parámetros en cuatro regiones



*La economía no es una ciencia exacta; sin embargo, es más que un arte. No podemos predecir con precisión la renta nacional del próximo año, como los meteorólogos no pueden predecir el tiempo que hará la próxima semana con la misma precisión que el tiempo de pasado mañana. Pero ningún banco o gran empresa serían tan temerarios como para consultar a los astrólogos y no a los econométricos, o como para intentar hacer predicciones a ojo o por inspiración divina.*

Paul A. Samuelson, Reflexiones en el cuadragésimo sexto aniversario de un manual clásico de economía.

## 1.12. Problemas

**1.1** En el país de la filantropía hay un banco  $B_1$  que ofrece un interés del 100% con pago anual; si depositamos un euro, después de un año deberíamos recibir  $E_1 = 1 + 1 = 2$  euros. El banco  $B_2$ , todavía más generoso, ofrece un interés del 100% con pago semestral; si depositamos un euro, después de un año deberíamos recibir  $E_2 = 1 + 0,5 + 0,75 = 2,25$  euros. De manera recursiva podemos imaginar una sucesión de bancos  $B_n$  que ofrecen siempre el interés del 100% y efectúan  $n$  pagos. Calcula la cantidad  $E_n$  que recibiríamos por un euro después de un año. El banco más generoso  $B_\infty$  ofrece el mismo interés pero efectúa pagos continuos. Calcula  $E_\infty$ , la cantidad a recibir por un euro después de un año.

**1.2** Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2^n.$$

Encuentra una solución del tipo  $x_n^* = c2^n$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Describe todas las soluciones reales de esta ecuación. Encuentra la solución que cumple  $x_0 = 1$ .

**1.3** Se considera el sistema en diferencias

$$u_{n+1} = au_n + bv_n + c, \quad v_{n+1} = du_n + ev_n + f,$$

donde  $a, b, c, d, e, f$  son constantes reales. Determina la condición necesaria y suficiente que han de cumplir estos coeficientes para que la incógnita compleja  $x_n = u_n + iv_n$  cumpla una ecuación del tipo  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ .

**1.4** Se supone que  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $L : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal. Consideramos la ecuación lineal

$$L(x) = b$$

donde  $b \in W$  es un vector dado, y suponemos que se conoce una solución particular  $x^* \in V$ . Demuestra que el conjunto de soluciones  $L^{-1}(b)$  se puede describir en la forma

$$L^{-1}(b) = x^* + \text{Ker } L.$$

Utiliza la identidad anterior para resolver el sistema

$$2x + y + z = 1, \quad y - z = 0.$$

**1.5** Sea  $\mathcal{S}$  el espacio vectorial de todas las sucesiones complejas,  $X = \{x_n\}_{n \geq 0}$  con  $x_n \in \mathbb{C}$ . Podemos pensar que  $\mathcal{S}$  está compuesto por vectores con infinitas coordenadas; la suma y el producto por escalar se definen coordenada a coordenada. Se considera el operador

$$L: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad L(X) = X^*, \quad x_n^* = x_{n+1} - (2+i)x_n.$$

Calcula  $\text{Ker } L$  y  $L^{-1}(b)$  si  $b = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ .

**1.6** Se considera la ecuación  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

- (i) Encuentra la condición necesaria y suficiente que han de cumplir estos coeficientes para que todas las soluciones sean periódicas.
- (ii) Encuentra la condición para que todas las soluciones tengan límite.
- (iii) Se supone  $\alpha = \cos 1 + i \sin 1$ . Calcula  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |x_n|$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$  para cada solución.

**1.7** Las compañías  $Paga^+$  y  $Paga^-$  se han repartido el mercado de la telefonía. A pesar de la agresiva campaña de  $Paga^+$ , la otra compañía viene consiguiendo una mayor "fidelización". Se ha observado que cada año el 25 por ciento de los clientes de  $Paga^-$  se pasan a  $Paga^+$ , mientras que el 50 por ciento de los de  $Paga^+$  se pasan a  $Paga^-$ . ¿Qué se puede decir sobre el mercado de la telefonía a largo plazo?

**1.8** Un jugador de ajedrez es contratado por la compañía Galactic chess. Su trabajo consistirá en jugar 40 partidas simultáneas cada semana. El jugador dispone de dos estrategias, A y B. Gana en el 80 % de los casos con la estrategia A y en el 60 % con la B. Para diversificar su juego decide que cada semana empleará la estrategia B tantas veces como derrotas o tablas haya tenido en la semana anterior. Después de algunas semanas de practicar este sistema observa que siempre acaba jugando el mismo número de partidas con la estrategia B. ¿Cómo se explica este curioso hecho?

**1.9** Se considera la clase de ecuaciones

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$ .

- (i) Encuentra una ecuación que admita la solución  $\{2^n + 3^{n+1}\}_{n \geq 0}$ .
- (ii) Encuentra una sucesión de números reales que no pueda ser solución de una ecuación de esta clase.

**1.10** Se parte de dos números  $a$  y  $b$  y se calcula su media aritmética  $m$ . A continuación se calcula la media aritmética de  $b$  y  $m$ , y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$1, 2, 3/2, 7/4, 13/8, \dots$$

Demuestra que la sucesión resultante es convergente y expresa su límite en función de  $a$  y  $b$ . ¿Bajo qué condiciones sobre  $a$  y  $b$  se obtiene una sucesión monótona?

**1.11** En el espacio vectorial  $S$  de las sucesiones reales se consideran los vectores

$$X = \{1, 1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots\}, \quad Y = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}.$$

Demuestra que las sucesiones  $X, Y$  son linealmente independientes en  $S$ .

**1.12** Se considera la clase de ecuaciones

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$ .

- (i) Encuentra una ecuación que admita la solución  $\{17, 0, 17, 0, 17, 0, 17, 0, \dots\}$ .  
 (ii) ¿Puede ser la sucesión  $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}$  solución de una ecuación de esta clase?

**1.13** Resuelve

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = 1, \quad u_0 = u_{100} = 0.$$

Podemos pensar en un collar con 99 cuentas que está fijado en los extremos. [Sugerencia: hay una solución de la ecuación del tipo  $u_n = cn^2$ ].

**1.14** Usando el determinante de Vandermonde, encuentra una fórmula para

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 & z & 1 \\ x^2 & y^2 & 2y & z^2 & 2z \\ x^3 & y^3 & 3y^2 & z^3 & 3z^2 \\ x^4 & y^4 & 4y^3 & z^4 & 4z^3 \end{pmatrix}$$



**1.15** Decide para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que todas las soluciones de la ecuación

$$x_{n+4} + x_{n+2} + \alpha x_n = 0$$

convergen a cero.

**1.16** Las funciones de oferta y demanda son

$$O(p) = a + bp, D(p) = c - dp.$$

Se modifica el modelo de la telaraña de acuerdo a la ley

$$O(p_n^e) = D(p_n)$$

donde  $p_n^e$  es el precio esperado para el año  $n$  y viene dado por

$$p_n^e = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2}),$$

con  $\rho > 0$  un parámetro (si  $\rho = 0$  se vuelve al modelo de la telaraña).

- Demuestra que  $p_n$  cumple una ecuación del tipo  $p_{n+2} + a_1 p_{n+1} + a_0 p_n = k$  que tiene como solución constante al precio de equilibrio.
- Se supone  $b = d = 1$ . Calcula las soluciones y describe el comportamiento de los precios a largo plazo. ¿Son las predicciones idénticas a las que produciría el modelo simple de la telaraña?

**1.17** Sea  $\{s_n\}$  solución de

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

Se define la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}$  con  $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ . Encuentra una ecuación de tercer orden

$$s_{n+3} + A_2 s_{n+2} + A_1 s_{n+1} + A_0 s_n = 0$$

que sea satisfecha por  $\{s_n\}$  ¿qué relación hay entre las raíces de los dos polinomios característicos?

- Calcula  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  si  $x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$ ,  $x_0 = x_1 = 1$ .
- Encuentra una fórmula para las medias aritméticas de los números de Fibonacci,

$$\bar{f}_n = \frac{1}{n+1}(f_0 + f_1 + \dots + f_n).$$

Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_n}{f_n}$ .

**1.18** Por derivación de la fórmula

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

encuentra una fórmula para la suma de

$$2 + 6x + \cdots + n(n-1)x^{n-2}.$$

Utiliza lo anterior para sumar la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ .

**1.19** Se considera la clase de ecuaciones

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$ . Encuentra una condición sobre los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  que sea necesaria y suficiente para que la serie  $\sum_{n \geq 0} x_n$  sea convergente siempre que  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  sea solución de la ecuación.

**1.20** El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \quad C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = I'_n + G, \quad I'_n = k(C_n - C_{n-1}).$$

Se supone  $b = 0,1$ ,  $k = 0,2$ . Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$  y explica el efecto multiplicador.

## Lección 2

# Potencias de una matriz

### 2.1. Dos métodos para resolver un problema

Empezamos la lección con el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = x_n - 2y_n. \end{cases}$$

Se trata de un sistema de primer orden con dos ecuaciones lineales. Lo resolveremos primero usando los métodos de la lección anterior, luego usaremos la teoría de matrices.

#### Primer procedimiento: reducción a una ecuación de segundo orden

Pretendemos encontrar una ecuación donde no aparezca la incógnita  $y_n$ . Si despejamos en la primera ecuación, encontramos la fórmula

$$(\star) \quad y_n = -\frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n.$$

Cambiando los índices en la primera ecuación,  $n \rightarrow n+1$ ,

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3y_{n+1} \text{ por la segunda } = 2x_{n+1} - 3(x_n - 2y_n) =$$

$$2x_{n+1} - 3x_n + 6y_n \text{ por } (\star) = 2x_{n+1} - 3x_n - 2x_{n+1} + 4x_n.$$

Hemos llegado a la ecuación de segundo orden

$$x_{n+2} - x_n = 0,$$

con polinomio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Las raíces son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  y la solución general (real)

$$x_n = c_1 + c_2(-1)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para el cálculo de  $y_n$  volvemos a usar  $(\star)$ ,

$$y_n = -\frac{1}{3}(c_1 + c_2(-1)^{n+1}) + \frac{2}{3}(c_1 + c_2(-1)^n) = \frac{1}{3}c_1 + c_2(-1)^n.$$

**Segundo método: la notación vectorial**

Escribimos  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,

$$X_{n+1} = AX_n$$

e interpretamos el sistema como una generalización al caso vectorial de las progresiones geométricas. Ahora la "razón" es una matriz, el término general es un vector y estamos empleando un producto que no es conmutativo.

Por inducción,

$$X_1 = AX_0, \quad X_2 = AX_1 = A(AX_0) = \text{"asociativo"} = (A \cdot A)X_0 = A^2X_0,$$

$$X_n = AX_{n-1} = A(A^{n-1}X_0) = (A \cdot A^{n-1})X_0 = A^nX_0.$$

La fórmula del término general

$$X_n = A^nX_0$$

muestra que la resolución del sistema está ligada al cálculo de las potencias de la matriz  $A$ . Hay distintos procedimientos para el cálculo de estas potencias, más allá de multiplicar con paciencia. En esta lección aprenderemos algunos de ellos.

**Ejercicio.** En  $\mathbb{R}^3$  se considera la ecuación en diferencias

$$X_{n+1} = V \wedge X_n, \quad X_n \in \mathbb{R}^3,$$

donde  $V \in \mathbb{R}^3$  es un vector dado y  $\wedge$  denota el producto vectorial. Calcula el término general  $X_n$  si  $X_0 = e_1$  y  $V = e_2$  con  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . ¿Es válida la fórmula  $X_n = (V \wedge \dots \wedge V) \wedge X_0$ ? ¿Es asociativo el producto vectorial?

Nota: recordamos la definición de producto vectorial,

$$X \wedge Y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Teorema de Cayley-Hamilton

Dada una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ , se define su polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Se cumple

$$p(A) = 0.$$

Toda matriz cuadrada anula a su polinomio característico.

Sabemos bien lo que significa evaluar un polinomio en un número pero ¿cómo se evalúa en una matriz?

Dado un polinomio

$$q(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0,$$

se define

$$q(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I,$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $d \times d$ .

**Ejemplo.** Cálculo de  $p(A)$  y  $q(A)$  si

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad q(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$p(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$q(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si hubiéramos observado que  $p(\lambda)$  es el polinomio característico de  $A$  no habría hecho falta hacer el cálculo de  $p(A)$ .

El polinomio característico de una matriz  $d \times d$  tiene grado  $d$ , por eso el teorema C-H establece una relación entre  $A^d$  y las potencias anteriores de  $A$ ,

$$p(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1} \lambda^{d-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \Rightarrow A^d = -a_{d-1} A^{d-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I.$$

Si multiplicamos por  $A^n$  por la izquierda,

$$A^{n+d} = -a_{d-1} A^{n+d-1} - \cdots - a_1 A^{n+1} - a_0 A^n.$$

En muchas ocasiones es posible calcular las potencias de  $A$  a partir de esta ley de recurrencia. Volvemos al ejemplo inicial de la lección.

**Ejemplo.**  $X_{n+1} = AX_n$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$ . Por el teorema C-H,  $A^2 - I = 0$ ,

$$A^2 = I \rightarrow A^3 = A \rightarrow A^4 = A^2 = I \rightarrow A^5 = A^3 = A \rightarrow \dots$$

$$A^n = \begin{cases} A, & n \text{ impar} \\ I, & n \text{ par.} \end{cases}$$

La solución del sistema que cumple la condición inicial  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es

$$X_n = A^n X_0 = \begin{cases} AX_0, & n \text{ impar} \\ X_0, & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_0 - 3y_0 \\ x_0 - 2y_0 \end{pmatrix}, & n \text{ impar} \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, & n \text{ par.} \end{cases}$$

**Ejercicio.** Prueba que la matriz  $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  cumple

$$A^{n+2} - 3A^{n+1} - 10A^n = 0, \quad n \geq 0.$$

Se introduce la notación  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ . Demuestra que las cuatro sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  y  $\{d_n\}$  son soluciones de la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0.$$

A partir de este hecho calcula  $A^n$ .

## 2.3. Un método gráfico

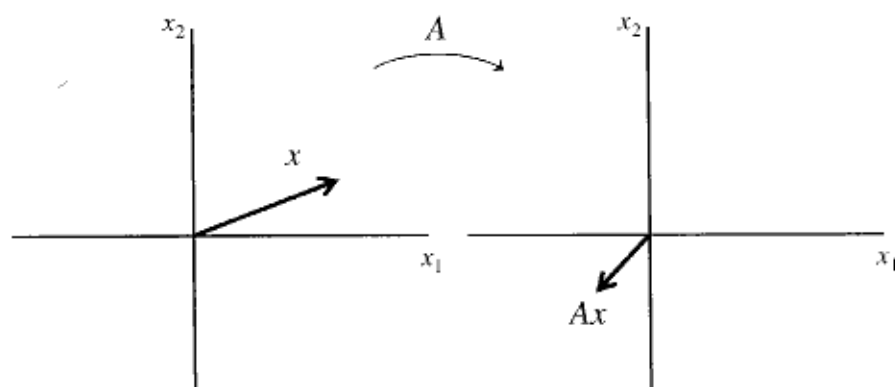
En ocasiones es posible calcular las potencias de una matriz con argumentos geométricos. Para ello hay que tener en cuenta que cada matriz representa una transformación lineal y también que el producto de matrices se define de manera que se corresponde con la composición de transformaciones. Nos concentramos en el plano. Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , definimos el endomorfismo lineal del plano

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto Ax.$$

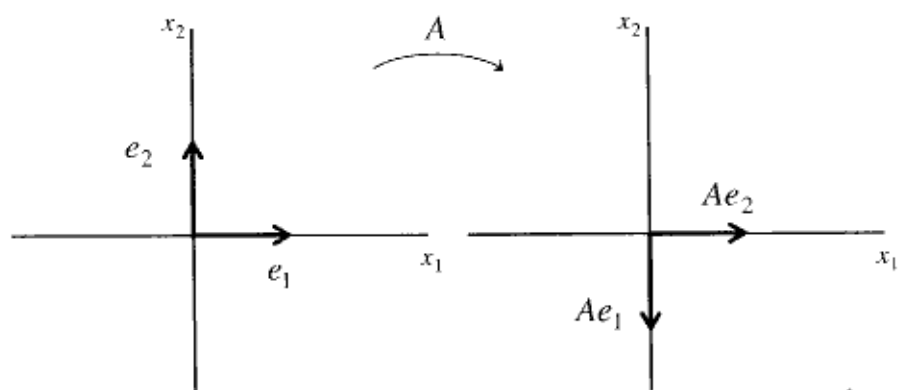
Sabemos que las columnas de  $A$  son las imágenes de los vectores básicos,

$$A = (Ae_1 | Ae_2), \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**¡En todo lo que sigue la notación por columnas es esencial!**



Por ejemplo, si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $Ae_1 = -e_2$ ,  $Ae_2 = e_1$  y observamos que  $A$  representa a la rotación de 90 grados en sentido de las agujas del reloj (orientación horaria).



Las potencias de  $A$  se corresponden con la composición de giros:  $A^2$ =rotación de  $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ,  $A^3$ =rotación de  $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ = -90^\circ$ ,  $A^4$  rotación de  $360^\circ \dots$

$$A^2 = -I, \quad A^3 = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = I, \dots$$

Observamos el parecido formal con las potencias del número  $i$ .

**Ejercicio.** Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

describe de manera geométrica las transformaciones asociadas. Calcula las potencias por el método gráfico.

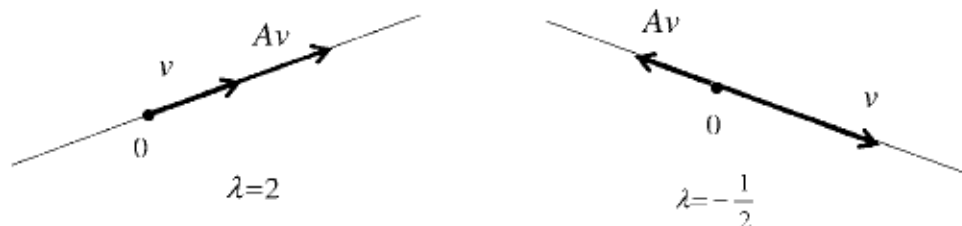
No parece fácil usar el método anterior para la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Para tratar matrices generales nos ayudaremos de una noción bien conocida.

## 2.4. Valores y vectores propios

Un número  $\lambda \in \mathbb{C}$  se dice *valor propio* de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  si existe un vector  $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$  tal que

$$Av = \lambda v.$$

El vector  $v$  se dice *propio*. Los valores propios dan lugar a subespacios invariantes de  $\mathbb{C}^d$ , que en los casos más simples serán rectas.



Volvemos a la conocida matriz

**Ejemplo.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

*Valores propios:*  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$

*Vectores propios:* resolvemos los sistemas homogéneos

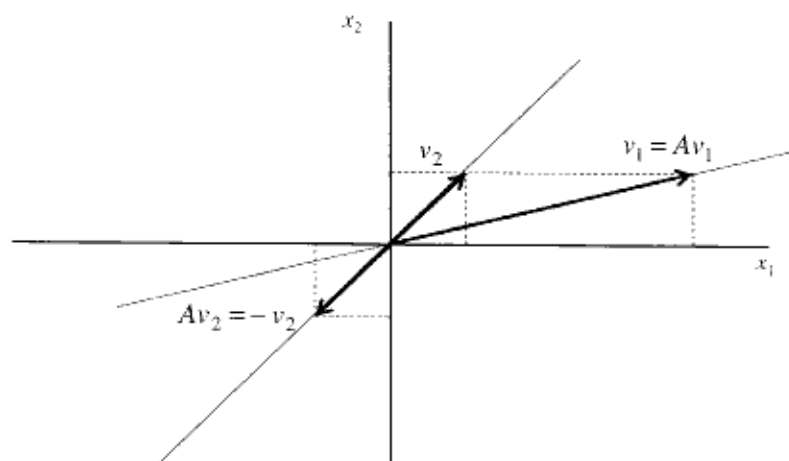
$$(A - \lambda_i I)x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Como los vectores propios asociados a un valor propio no son únicos, este sistema resulta ser compatible indeterminado. Escogemos una solución no trivial en cada caso,

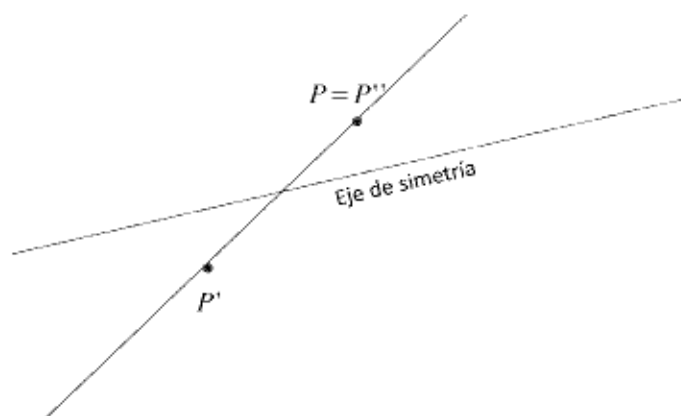
$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Las rectas engendradas por  $v_1$  y  $v_2$  son invariantes. En la primera los vectores se quedan fijos ( $\lambda_1 = 1$ ) y en la segunda cambian de sentido ( $\lambda_2 = -1$ ).



Hemos encontrado una simetría oblicua, en la dirección de  $\langle v_2 \rangle$  y con eje de simetría  $\langle v_1 \rangle$ .



Ahora podemos entender de manera geométrica el ejemplo del inicio de la lección; las soluciones son 2-ciclos porque el sistema describe una involución ( $A^2 = I$ ).

Las matrices reales  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  pueden tener valores propios complejos, en tal caso los subespacios propios no quedan dentro de  $\mathbb{R}^d$ . Esto ocurre con las rotaciones de ángulo  $\theta \in ]0, \pi[$ , son matrices reales pero no tienen rectas reales invariantes.

## 2.5. Diagonalización de matrices

Dos matrices  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  son *semejantes* si existe una matriz  $P \in \mathbb{C}^{d \times d}$  que cumple  $\det P \neq 0$  y

$$A = PBP^{-1}.$$

Llamaremos matriz de paso a  $P$ . Si  $A$  y  $B$  son semejantes, también lo son sus potencias.

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1}) \stackrel{\text{asociativa}}{=} PB^nP^{-1}.$$

**Ejercicio.** Dado un polinomio  $q(\lambda)$  y matrices semejantes  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ , también  $q(A)$  y  $q(B)$  son semejantes.

Supongamos que  $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$  es un vector propio de  $A$  y  $A = PBP^{-1}$ , entonces  $w = P^{-1}v$  es un vector propio de  $B$ ,

$$Av = \lambda v \rightarrow PBP^{-1}v = \lambda v \rightarrow Bw = \lambda w.$$

Como  $w \neq 0$ , las matrices  $A$  y  $B$  tienen los mismos valores propios. En ocasiones usaremos la notación  $\sigma(A)$  para indicar el espectro o conjunto de valores propios de  $A$ , así  $\sigma(A) = \sigma(B)$ .

Las matrices diagonales son de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

y sus potencias son fáciles de calcular,

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_d^n \end{pmatrix}.$$

En estas matrices se entiende que los números fuera de la diagonal son ceros.

Una matriz  $A$  se dice *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal  $D$ . La factorización  $A = PDP^{-1}$  es una diagonalización de  $A$ . Recordamos una conocida caracterización de las matrices diagonalizables,

$A$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  existe una base de  $\mathbb{C}^d$  compuesta por vectores propios

**Demostración.** Comenzamos observando algunas propiedades del producto de matrices: si  $M$  y  $N$  son matrices en  $\mathbb{C}^{d \times d}$  y escribimos la matriz  $N$  por columnas,  $N = (n_1 | n_2 | \cdots | n_d)$ , entonces

$$MN = (Mn_1 | Mn_2 | \cdots | Mn_d),$$

por otra parte, si  $D$  es una matriz diagonal,

$$ND = (\lambda_1 n_1 | \lambda_2 n_2 | \cdots | \lambda_d n_d).$$

$\Rightarrow$ ] Suponemos  $A = PDP^{-1}$  y escribimos la matriz de paso por columnas  $P = (p_1 | p_2 | \cdots | p_d)$ . Si multiplicamos a la derecha por  $P$ ,

$$AP = PD \Rightarrow (Ap_1 | Ap_2 | \cdots | Ap_d) = (\lambda_1 p_1 | \lambda_2 p_2 | \cdots | \lambda_d p_d).$$

Igualando por columnas obtenemos  $Ap_1 = \lambda_1 p_1$ ,  $Ap_2 = \lambda_2 p_2$ , ...,  $Ap_d = \lambda_d p_d$  y deducimos que las columnas de  $P$  son vectores propios de  $A$ . Puesto que la matriz de paso tiene inversa,  $\det(p_1 | p_2 | \cdots | p_d) = \det P \neq 0$ , y por tanto  $p_1, \dots, p_d$  forma una base de  $\mathbb{C}^d$ .

$\Leftarrow$ ] Suponemos que  $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}^d$  es una base de vectores propios,

$$p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}^d, \det(p_1 | \cdots | p_d) \neq 0, Ap_i = \lambda_i p_i, i = 1, \dots, d.$$

Nos inspiramos en la implicación anterior y construimos una matriz diagonal  $D$  que tiene en la diagonal los números  $\lambda_i$  y una candidata a matriz de paso  $P$  cuyas columnas son los vectores propios  $p_i$ . Por hipótesis  $\det P \neq 0$  y queremos probar  $A = PDP^{-1}$ . Esta identidad es ahora equivalente a  $AP = PD$  y un cálculo ya conocido nos demuestra que esto es cierto.

□

La demostración anterior nos enseña cómo diagonalizar una matriz: buscamos  $d$  vectores propios linealmente independientes y los usamos como columnas de la matriz de paso, en la matriz diagonal situamos el valor propio correspondiente al vector propio; podemos permutar las columnas de  $P$ , pero entonces hay que permutar en consonancia los valores propios de  $D$ .

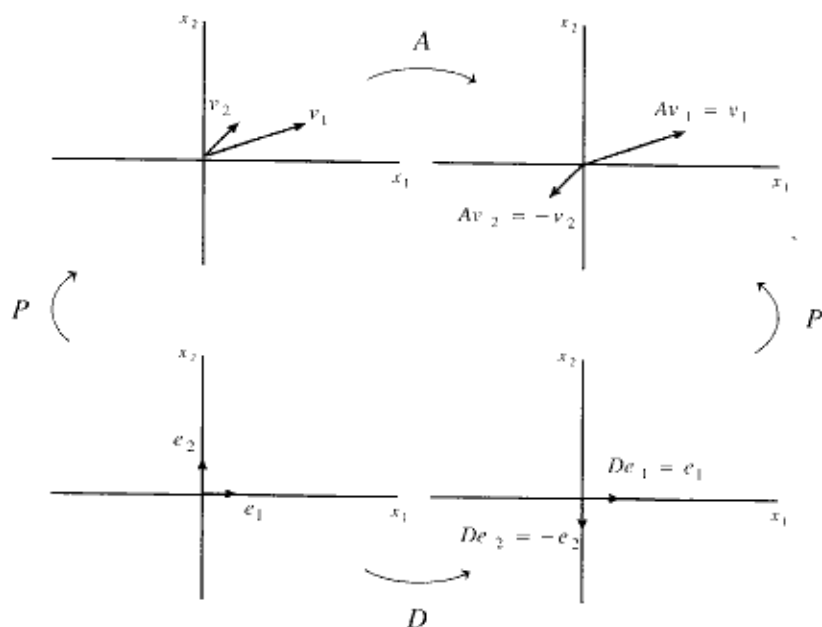
**Ejemplo.** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  es diagonalizable pues tiene los vectores propios  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  con  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ . Entonces  $A = PDP^{-1}$  con  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculamos las potencias de  $A$ ,  $A^n = PD^nP^{-1} =$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - (-1)^n & -3 + 3(-1)^n \\ 1 - (-1)^n & -1 + 3(-1)^n \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio.** Encuentra todas las matrices  $P$  para las que se cumple  $A = PDP^{-1}$  con  $D$  diagonal.  $A$  es la matriz del ejemplo anterior.

Vamos a pensar la diagonalización anterior desde un punto de vista geométrico. La transformación inducida por  $P$  lleva los ejes coordenados en los ejes propios y hace conmutativo el diagrama que sigue.



**Ejercicio.** Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  se dirá diagonalizable en los reales si existen matrices  $P, D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , con  $\det P \neq 0$  y  $D$  diagonal, y tales que  $A = PDP^{-1}$ . Demuestra que  $A$  es diagonalizable en los reales si y solo si existe una base de  $\mathbb{R}^d$  formada por vectores propios. Encuentra una matriz real  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  que sea diagonalizable en los complejos pero no en los reales.

## 2.6. Modelos lineales en Genética

Consideramos mecanismos hereditarios de tipo autosómico; por ejemplo, algunos de los que deciden el color de los ojos. Cada progenitor aporta un gen ( $A$  o  $a$ ) para formar el genotipo del nuevo individuo

$$AA, Aa, aa.$$

Comenzamos recordando la tabla de probabilidades de cada genotipo en función de los genotipos de la generación anterior.

		Generación $n + 1$		
Generación $n$		$AA$	$Aa$	$aa$
	$AA - AA$	1	0	0
	$AA - Aa$	1/2	1/2	0
	$AA - aa$	0	1	0
	$Aa - Aa$	1/4	1/2	1/4
	$Aa - aa$	0	1/2	1/2
	$aa - aa$	0	0	1

Para describir el perfil genético de una población usaremos un vector  $x \in \mathbb{R}^3$  que cumple

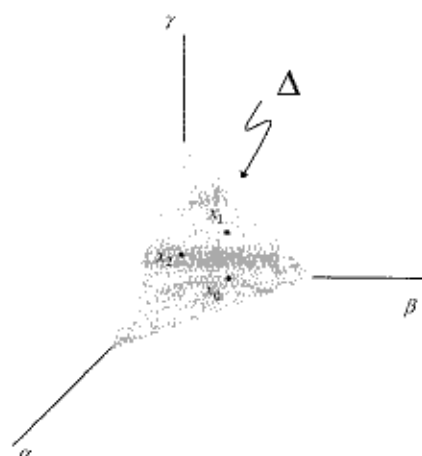
$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Llamaremos  $\Delta$  al conjunto de vectores  $x$  que cumplen estas condiciones. Las coordenadas de  $x$  representan los porcentajes de población con cada genotipo. Por ejemplo, si en una población el 50 % tiene genotipo  $AA$ , el 20 % tiene  $Aa$  y el 30 % tiene  $aa$ ,

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} \in \Delta.$$

Pretendemos seguir la evolución del perfil genético a lo largo de las generaciones: conocido  $x_0 \in \Delta$ , determinar  $x_n \in \Delta$  para cada  $n \geq 1$ . Podemos interpretar esta evolución de manera geométrica. El conjunto  $\Delta$  se puede expresar como la intersección del plano  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  con el primer octante. Se trata de la región encerrada por el triángulo equilátero de vértices  $e_1, e_2, e_3$ . Podemos pensar la sucesión  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  como un punto que se desplaza a saltos por  $\Delta$ .

**Ejercicio.** ¿Qué significado genético tienen los vértices de  $\Delta$ ? ¿y el baricentro?



Los sistemas de ecuaciones en diferencias que rigen la transición  $x_n \rightarrow x_{n+1}$  en Genética suelen ser no lineales. En esta lección solo nos ocupamos de sistemas lineales y por eso vamos a tratar una situación muy especial: una población de plantas en una granja que se fecundan de manera artificial y de acuerdo a un protocolo establecido. Podemos imaginar distintos protocolos, cada planta se fecunda con su propio genotipo, todas se fecundan con el tipo  $AA$ , etcétera.

**Ejemplo.** En un invernadero se producen flores rojas ( $AA$ ), rosas ( $Aa$ ) y blancas ( $aa$ ). Se sigue la regla de polinizar artificialmente cada planta con su propio color. El paso de una generación a la siguiente viene dado por las reglas

$$\begin{aligned}
 \text{Planta } AA + F.\text{Artificial } AA &\longrightarrow^1 AA \\
 \text{Planta } Aa + F.\text{Artificial } Aa &\begin{array}{l} \nearrow^{1/4} AA \\ \longrightarrow^{1/2} Aa \\ \searrow^{1/4} aa \end{array} \\
 \text{Planta } aa + F.\text{Artificial } aa &\longrightarrow^1 aa
 \end{aligned}$$

Escribimos la ley  $x_n \rightarrow x_{n+1}$ ,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + (1/4)\beta_n \\ \beta_{n+1} = (1/2)\beta_n \\ \gamma_{n+1} = (1/4)\beta_n + \gamma_n. \end{cases}$$

En forma matricial,

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la matriz  $A$  cumple dos propiedades:

- todos los coeficientes son no negativos,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$
- la suma de los coeficientes de cada columna es 1,  $\sum_{i=1}^3 a_{ij} = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Estas propiedades son claves para asegurar que el modelo está bien definido: para cada generación  $n$  el vector  $x_n$  es un vector de porcentajes,

$$x_n \in \Delta \implies x_{n+1} \in \Delta.$$

**Ejercicio.** Las matrices que cumplen las dos propiedades anteriores se llaman matrices estocásticas o de probabilidad. Dada una matriz de probabilidad  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , demuestra

$$x \in \Delta \implies Ax \in \Delta.$$

**Ejercicio.** Demuestra que 1 es valor propio de cualquier matriz de probabilidad.

Sugerencia:  $\det(A - I) = 0$ .

Sabemos que  $x_n = A^n x_0$  y pretendemos calcular las potencias de  $A$  por diagonalización. Observamos que  $A$  tiene vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con valores propios asociados  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ . Al ser independientes estos tres vectores,  $A$  es diagonalizable. Definimos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que  $A = PDP^{-1}$ . La inversa de  $P$  es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

y, después de algunos cálculos,

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Llegamos a las fórmulas para la solución

$$\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}})\beta_0 \\ \beta_n = \frac{1}{2^n}\beta_0 \\ \gamma_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}})\beta_0 + \gamma_0. \end{cases}$$

Si hacemos  $n \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_n \rightarrow \alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_0$ ,  $\beta_n \rightarrow 0$ ,  $\gamma_n \rightarrow \gamma_0 + \frac{1}{2}\beta_0$ . A largo plazo la población se segrega y las flores rosas desaparecen.

**Ejercicio.** Para calcular las potencias de  $A$  por un método alternativo empleamos la notación  $A^n = (a_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq 3}$ . A partir del teorema de Cayley-Hamilton prueba que existen números  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  y  $C_{ij}$  de manera que

$$a_{ij}^{(n)} = A_{ij} + B_{ij}n + C_{ij}\frac{1}{2^n}.$$

Calcula dichos números.

**Ejercicio.** Discute el comportamiento de un modelo en el que todas las plantas se polinizan con rojo.

## 2.7. Matrices no diagonalizables y forma canónica de Jordan

El ejemplo más sencillo de matriz no diagonalizable es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Observamos que el único valor propio es  $\lambda$  y solo hay una recta de vectores propios, la generada por  $e_1$ . Como es imposible encontrar una base de  $\mathbb{C}^2$  formada por vectores propios deducimos que  $A$  no es diagonalizable.

**Ejercicio.** Se considera la matriz  $A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\epsilon & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Demuestra que  $A_\epsilon$  es

diagonalizable si  $\epsilon \neq 0, 1$ , pero no lo es si  $\epsilon = 0$  o  $\epsilon = 1$ . Describe el comportamiento de las rectas propias cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $\epsilon \rightarrow 1$ .

El *teorema de la forma canónica de Jordan* asegura que toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  es semejante a una matriz diagonal por bloques  $J$  de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_{r-1} & \\ & & & & J_r \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

con

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \sigma(A).$$



**Ejercicio.** Encuentra todos los vectores propios asociados a cada submatriz  $J_i$ .

Cada valor propio aparece en la diagonal de  $J$  tantas veces como corresponda a su multiplicidad algebraica. Un valor propio puede tener asociadas varias cajas de Jordan. La forma canónica es única salvo permutaciones de las cajas. La estructura precisa de la matriz  $J$  es un asunto delicado del que no nos ocuparemos. No obstante, en las matrices de dimensión baja es fácil calcular  $J$ . Consideramos el siguiente ejemplo: una matriz  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  con polinomio característico  $(\lambda - 2)^3(\lambda - 3)$ . Las posibles formas de  $J$  son

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & J_4 \end{pmatrix}, \quad r = 4, \quad J_1 = J_2 = J_3 = (2), \quad J_4 = (3)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}, \quad r = 3, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = (2), \quad J_3 = (3)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}, \quad r = 2, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = (3).$$

En el primer caso la matriz tiene los vectores propios  $e_1, e_2$  y  $e_3$  asociados a  $\lambda_1 = 2$  y el vector propio  $e_4$  asociado a  $\lambda_2 = 3$ ; en el segundo caso,  $e_1$  y  $e_3$  son vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $e_4$  está asociado a  $\lambda_2$ ; en el tercer caso,  $e_1$  es un vector propio asociado a  $\lambda_1$  y  $e_4$  está asociado a  $\lambda_2$ . Dos matrices semejantes tienen el mismo número de vectores independientes asociados a cada valor propio, a partir de esta observación podemos reconocer la forma canónica  $J$  asociada a  $A$ ,

- $\dim \text{Ker}(A - 2I) = 3, \dim \text{Ker}(A - 3I) = 1 \Rightarrow r = 4$
- $\dim \text{Ker}(A - 2I) = 2, \dim \text{Ker}(A - 3I) = 1 \Rightarrow r = 3$
- $\dim \text{Ker}(A - 2I) = 1, \dim \text{Ker}(A - 3I) = 1 \Rightarrow r = 2.$

**Ejercicio.** Determina la forma canónica de Jordan asociada a la matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio.** Se supone  $A = PJP^{-1}$  con  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$ . Prueba que las columnas de  $P$  cumplen  $Ap_1 = 2p_1, Ap_2 = 2p_2 + p_1, Ap_3 = 2p_3 + p_2, Ap_4 = 3p_4$ .

**Ejercicio.** Prueba que las matrices  $B_+$  y  $B_-$  son semejantes,

$$B_+ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_- = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

## 2.8. Comportamiento asintótico de las potencias de una matriz

Dado un número  $\alpha \in \mathbb{C}$ , sabemos que sus potencias cumplen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$  si y solo si  $|\alpha| < 1$ . Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  nos preguntamos qué condición caracteriza la propiedad

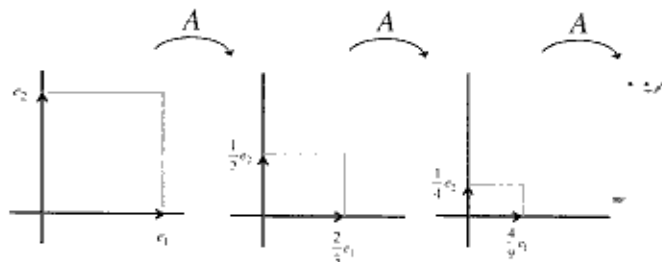
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0.$$

En primer lugar conviene aclarar qué se entiende por el límite de una sucesión de matrices: la matriz formada por los límites de cada componente.<sup>1</sup> Por ejemplo, la sucesión

$A_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$  converge a la matriz identidad  $I_2$ ; por el contrario la sucesión  $B_n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  no tiene límite.

Para intuir cuál puede ser la respuesta a la pregunta que nos hemos planteado vamos a analizar ejemplos sencillos con matrices diagonales.

- La matriz  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  contrae ambos ejes. Si calculamos la imagen iterada del cuadrado definido por  $e_1$  y  $e_2$  observamos que se trata de un rectángulo cada vez más pequeño.<sup>2</sup> Esto explica de manera geométrica que  $A^n \rightarrow 0$ .



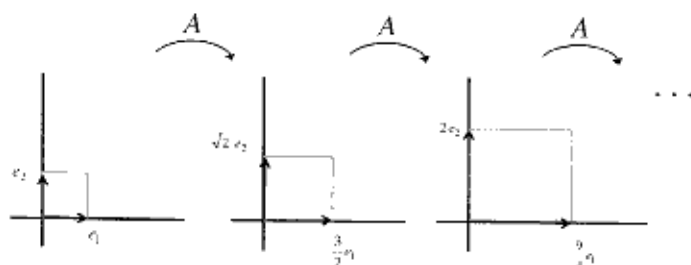
<sup>1</sup>Esta convergencia corresponde a la identificación de  $\mathbb{C}^{d \times d}$  y  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$  con la topología producto

<sup>2</sup>Es interesante recordar que  $|\det A|$  representa el área de la imagen de este cuadrado

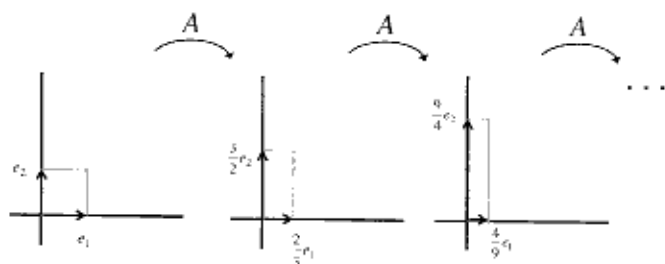
De manera más analítica,

$$A^n = \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matriz  $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  magnifica los dos ejes, las imágenes iteradas del cuadrado van cubriendo todo el primer cuadrante. En este caso no existe el límite de  $A^n$ .



- La matriz  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$  contrae el eje horizontal y dilata el vertical. Las imágenes iteradas del cuadrado se acumulan en la parte positiva del eje  $y$ . No existe el límite de las potencias.



Definimos el *radio espectral* de una matriz,

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  se cumple

$$A^n \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \iff r(A) < 1.$$

Para la demostración de este resultado haremos uso de la forma canónica de Jordán y también de la *continuidad del producto de matrices*: dadas las sucesiones  $\{A_n\}$  y  $\{B_n\}$  en  $\mathbb{C}^{d \times d}$ ,

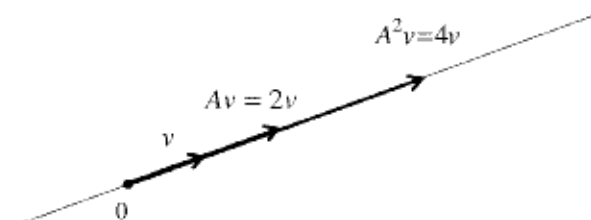
$$A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B \implies A_n B_n \rightarrow AB.$$

En la definición del producto de matrices solo aparecen multiplicaciones y sumas de coeficientes; como estas dos operaciones numéricas son continuas, también lo es la operación con matrices. Por la misma razón hay *continuidad para el producto de matrices y vectores*: dadas las sucesiones  $\{A_n\}$  en  $\mathbb{C}^{d \times d}$  y  $\{v_n\}$  en  $\mathbb{C}^d$ ,

$$A_n \rightarrow A, v_n \rightarrow v \implies A_n v_n \rightarrow Av.$$

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Dado un valor propio  $\lambda \in \sigma(A)$ , existe un vector propio asociado  $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$  que cumple  $Av = \lambda v$ . Entonces

$$A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v, A^3 v = \lambda^3 v, \dots, A^n v = \lambda^n v.$$



Por hipótesis sabemos que  $A^n$  tiende a cero y, por la continuidad del producto de matrices y vectores,  $A^n v \rightarrow 0$ . Así,  $\lambda^n v = A^n v \rightarrow 0$ . Como  $v$  es un vector fijo no nulo, seleccionamos una componente no nula  $i$  entre 1 y  $d$ . Se cumplirá  $\lambda^n v_i \rightarrow 0$  o, lo que es equivalente,  $\lambda^n \rightarrow 0$ . Hemos llegado a la conclusión porque podemos deducir  $|\lambda| < 1$ .

$\Rightarrow$  Probaremos el resultado después de hacer varias reducciones. Por hipótesis sabemos que la matriz  $A$  cumple  $r(A) < 1$ , como  $A$  y su forma canónica  $J$  tienen los mismos valores propios también se cumple  $r(J) < 1$ .

*Paso 1: es suficiente probar  $J^n \rightarrow 0$ .*

De la identidad  $A = PJP^{-1}$  y la continuidad del producto de matrices,

$$A^n = PJ^n P^{-1} \rightarrow P0P^{-1} = 0.$$

Paso 2: si expresamos  $J$  en bloques de Jordan  $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \dots \\ & & & J_r \end{pmatrix}$ , es suficiente probar  $J_i^n \rightarrow 0, i = 1, \dots, r$ .

La matriz  $J$  es diagonal por bloques y sus potencias también,

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & J_2^n & \\ & & \dots \\ & & & J_r^n \end{pmatrix}.$$

Al coincidir la convergencia de matrices con la de todas sus coordenadas se prueba este segundo paso.

Paso 3 (y conclusión): Dada la matriz  $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$  con  $|\lambda| < 1$ , se cumple  $\mathcal{J}^n \rightarrow 0$ .

Expresamos  $\mathcal{J}$  como suma de dos matrices,

$$\mathcal{J} = \lambda I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \dots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos llamada  $N$  a la segunda matriz porque se trata de una matriz *nilpotente*,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = 0; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

En general  $N^s = 0$  si  $s \times s$  es la dimensión de la matriz  $N$ .

Vamos a usar el *binomio de Newton* para calcular las potencias de  $\mathcal{J}$ ,

$$\mathcal{J}^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda I)^{n-k} N^k.$$

En apariencia el número de sumandos en esta suma se incrementa con  $n$ , pero como  $N$  es nilpotente las potencias  $N^k$  se anulan si  $k \geq s$ . Si suponemos  $n \geq s$ ,

$$\mathcal{J}^n = \binom{n}{0} \lambda^n I + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} N + \dots + \binom{n}{s-1} \lambda^{n-s+1} N^{s-1}.$$

Podemos interpretar los números combinatorios como polinomios en la variable  $n$ ,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \dots$$

Si  $|\lambda| < 1$  deducimos que

$$\binom{n}{0} \lambda^n \rightarrow 0, \quad \binom{n}{1} \lambda^n \rightarrow 0, \quad \dots, \quad \binom{n}{s-1} \lambda^n \rightarrow 0.$$

En la última expresión de  $\mathcal{J}^n$  aparecen  $s$  sumandos y cada uno de ellos tiende a cero, deducimos que también la suma tiende a cero.  $\square$

En la prueba anterior hemos dado un paso que merece ser criticado, ¿es correcto el uso del binomio de Newton en este contexto? Imaginemos por un momento el caso  $s = 2$  y supongamos que hubiéramos empleado una descomposición de  $\mathcal{J}$  diferente, digamos

$$\mathcal{J} = \lambda A + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que  $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ . Este ejemplo plantea todavía más dudas sobre el procedimiento anterior.

**Ejercicio.** Sea  $R$  un anillo y  $a, b \in R$  dos elementos del anillo que conmutan,  $ab = ba$ . Prueba que se cumple la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En el anillo de las matrices  $R = \mathbb{C}^{d \times d}$ ,  $A$  y  $B$  no conmutan mientras que sí lo hacen  $\lambda I$  y  $N$ . Esta diferencia entre el ejemplo y el caso tratado en la demostración es esencial.

## 2.9. Valor propio dominante

Diremos que una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  tiene un valor propio dominante  $\lambda_1$  si el espectro cumple:

- $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ ,  $r \leq d$
- $\lambda_1$  es simple (como raíz del polinomio característico)
- $|\lambda_i| < |\lambda_1|$  si  $i = 2, \dots, r$ .

Las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tienen el valor propio dominante  $\lambda_1 = 2$ . Las matrices

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no tienen valor propio dominante.

La existencia de un valor propio dominante ayuda a entender el comportamiento asintótico de las potencias de una matriz. Como ejemplo consideramos la matriz  $A_1$ , que tiene potencias

$$A_1^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & \operatorname{sen} n\theta \\ 0 & -\operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Esta sucesión no converge pero sí lo hace la sucesión que se obtiene al dividir por  $\lambda_1^n = 2^n$ ,

$$\frac{1}{\lambda_1^n} A_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos n\theta)/2^n & (\operatorname{sen} n\theta)/2^n \\ 0 & -(\operatorname{sen} n\theta)/2^n & (\cos n\theta)/2^n \end{pmatrix} \rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz límite  $Q$  es la proyección sobre el eje  $x$  (recta propia asociada a  $\lambda_1$ ). Extendemos este comportamiento al caso general.

**Proposición 2.9.1.** Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  con valor propio dominante  $\lambda_1$ , la sucesión  $\{\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\}_{n>0}$  converge a una matriz  $Q \in \mathbb{C}^{d \times d}$  que cumple

$$\operatorname{Im} Q = \operatorname{Ker} (A - \lambda_1 I), \quad Q^2 = Q, \quad AQ = QA.$$

**Nota.** Se dice que  $Q$  es la *proyección espectral* de  $A$  sobre la recta propia asociada al valor dominante.

**Demostración.** Hemos supuesto que  $\lambda_1$  es simple. Esto se refleja en la forma canónica  $J$ , que tiene una única caja de dimensión 1 asociada a este valor propio; es decir,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_* \end{pmatrix}$$

donde  $J_*$  es una sub-matriz que tiene valores propios  $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Interpretamos  $J$  como una matriz diagonal por bloques y deducimos

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & J_*^n \end{pmatrix}.$$

Al ser  $\lambda_1$  dominante, el radio espectral de la sub-matriz cumple

$$r(J_*) < |\lambda_1|.$$

Esta desigualdad es equivalente a  $r(\frac{1}{\lambda_1} J_*) < 1$  y por tanto podemos aplicar el resultado de la sección anterior a la matriz  $\frac{1}{\lambda_1} J_*$ . Deducimos que  $\frac{1}{\lambda_1^n} J_*^n \rightarrow 0$  y  $\frac{1}{\lambda_1^n} J^n \rightarrow \Theta$  con

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando una vez más la continuidad del producto de matrices,

$$\frac{1}{\lambda_1^n} A^n = P \left( \frac{1}{\lambda_1^n} J^n \right) P^{-1} \rightarrow P \Theta P^{-1}.$$

Hemos probado ya la existencia del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = Q \quad \text{con} \quad Q = P \Theta P^{-1}.$$

Ahora debemos comprobar que  $Q$  cumple las propiedades postuladas. El siguiente resultado de álgebra lineal abstracta nos será útil.

**Ejercicio.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$  y  $\psi: V \rightarrow W$  una aplicación lineal. Prueba que si  $v_1, \dots, v_d$  es una base de  $V$ , entonces la imagen de  $\psi$  está generada por  $\psi(v_1), \dots, \psi(v_d)$ .

$$\blacksquare \quad \text{Im } Q = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$$

Expresamos la matriz de paso  $P$  por columnas,  $P = (p_1 | p_2 | \dots | p_d)$ , y observamos que  $p_1$  cumple,

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1.$$

Para comprobar esta identidad partimos de  $AP = PJ$  y observamos que

$$AP = (Ap_1 | Ap_2 | \dots | Ap_d),$$

$$PJ = (p_1 | * | \dots | *) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} = (\lambda_1 p_1 | * | \dots | *).$$

Al igualar la primera columna de ambas expresiones deducimos que  $p_1$  es un vector propio asociado a  $\lambda_1$ ; además es no nulo porque es una columna de  $P$ , una matriz con determinante distinto de cero. Al ser  $\lambda_1$  simple sabemos que el espacio propio asociado a este valor propio es una recta, que ha de estar generada por  $p_1$ ,

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 I) = \langle p_1 \rangle.$$



Por otra parte, de la definición de  $Q$  deducimos que  $QP = P\Theta$ . Por columnas,

$$QP = (Qp_1 | Qp_2 | \cdots | Qp_d),$$

$$P\Theta = (p_1 | p_2 | \cdots | p_d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (p_1 | 0 | \cdots | 0).$$

Igualando las columnas,

$$Qp_1 = p_1, \quad Qp_2 = 0, \dots, Qp_d = 0.$$

Como  $p_1, p_2, \dots, p_d$  es una base de  $\mathbb{C}^d$ , deducimos del ejercicio anterior que

$$\text{Im } Q = \langle p_1 \rangle.$$

Hemos probado la primera propiedad: la imagen de  $Q$  es la recta propia asociada al valor propio dominante.

- $Q$  es una proyección,  $Q^2 = Q$

Observamos por cálculo directo que la matriz  $\Theta$  cumple esta propiedad. Entonces

$$Q^2 = P\Theta^2 P^{-1} = P\Theta P^{-1} = Q.$$

- $QA = AQ$

Como las potencias de una matriz siempre conmutan entre sí y el producto es continuo,

$$QA \leftarrow \left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right)A = A\left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right) \rightarrow AQ.$$

□

## 2.10. Poblaciones estructuradas por grupos de edad

Describiremos la evolución en el tiempo de una población dividida en grupos. Suponemos que la edad máxima a la que llega un individuo es  $L$  y formamos  $N$  grupos de edad según los intervalos

$$\left[0, \frac{L}{N}\right[, \left[\frac{L}{N}, \frac{2L}{N}\right[, \dots, \left[\frac{(N-1)L}{N}, L\right[.$$

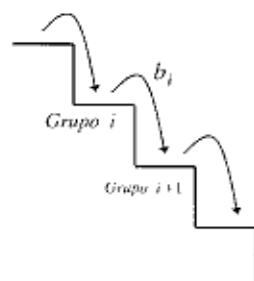
Por ejemplo, si  $L = 80$  y  $N = 4$  los grupos de edad serían

$$[0, 20[, [20, 40[, [40, 60[, [60, 80[.$$

La población se censa después de un periodo de tiempo de longitud  $\frac{L}{N}$ . De esta forma se consigue que todos los individuos que sobreviven hasta un nuevo censo se desplacen al siguiente grupo de edad,

$$\left[0, \frac{L}{N}\right] \rightsquigarrow \left[\frac{L}{N}, \frac{2L}{N}\right] \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left[\frac{(N-1)L}{N}, L\right] \rightsquigarrow$$

Podemos pensar en una piscifactoría, las truchas más jóvenes ocupan la piscina más alta y cada mes descienden a la siguiente piscina



Llamaremos  $b_i$  a la probabilidad de que un individuo del grupo  $i$  sobreviva para alcanzar el grupo  $i+1$ . Se cumple

$$0 < b_i < 1.$$

Introducimos la notación

$$x_i^{(n)} = \text{tamaño del grupo } i \text{ en el censo } n, i = 1, \dots, N.$$

Observamos que el sub-índice se refiere al grupo de edad y el super-índice al número de censos realizados. Se cumplirá

$$x_{i+1}^{(n+1)} = b_i x_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Estas ecuaciones modelan los procesos de envejecimiento y muerte. Nos falta una ecuación que describa la renovación de la especie (el nacimiento). Suponemos que la tasa de fecundidad en el grupo  $i$  es

$$a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Por ejemplo,  $a_3 = 2,5$  indicará 250 crías por cada 100 individuos del tercer grupo. No excluimos la posibilidad  $a_i = 0$  porque en muchas especies hay grupos de edad que no son fértiles. Esto ocurre por ejemplo en las poblaciones humanas. Escribimos la ecuación de renovación

$$x_1^{(n+1)} = a_1 x_1^{(n)} + a_2 x_2^{(n)} + \dots + a_N x_N^{(n)}.$$

Unimos esta ecuación a las anteriores y las expresamos en formato vectorial,

$$X_{n+1} = LX_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{N-1} & \end{pmatrix}.$$

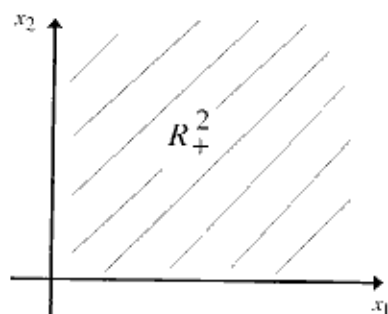
En la matriz de Leslie  $L$  son nulos los coeficientes que no están en la primera fila o en la sub-diagonal. Las coordenadas del vector  $X_n$  deben ser no negativas, pues miden el tamaño de una población. Vamos a introducir algunas notaciones en  $\mathbb{R}^N$  que nos serán

útiles. Dado un vector  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ , la norma de la suma se define por

$$\|X\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N|.$$

Se dice que el vector  $X$  pertenece a  $\mathbb{R}_+^N$  si todas sus coordenadas son no negativas. El conjunto  $\mathbb{R}_+^N$  es un cuadrante para  $N = 2$ , un octante para  $N = 3$ , etcétera.

$N = 2$



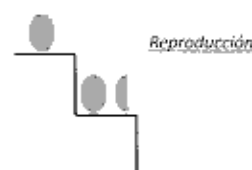
Para los vectores en  $\mathbb{R}_+^N$  la norma coincide con la suma de las coordenadas. En particular, si  $X \in \mathbb{R}_+^N$  representa una población estructurada por grupos,  $\|X\|$  es la población total y  $\frac{1}{\|X\|}X$  es un vector de norma uno al que llamaremos *pirámide de edad*. Es importante observar que el modelo está bien definido gracias a que todos los coeficientes de la matriz de Leslie son no negativos. Esto hace que el vector  $X_n$  permanezca en  $\mathbb{R}_+^N$ ,

$$X_0 \in \mathbb{R}_+^N, \quad X_1 = LX_0 \in \mathbb{R}_+^N, \dots, X_{n+1} = LX_n \in \mathbb{R}_+^N, \dots$$

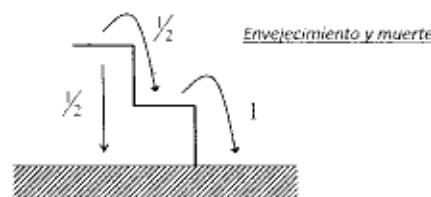
**Ejercicio.** Dada una matriz  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , demuestra que  $A(\mathbb{R}_+^d) \subset \mathbb{R}_+^d$  si y solo si  $a_{ij} \geq 0$  para cada  $i, j = 1, \dots, d$ .

Veamos un **ejemplo** sencillo:  $L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Hay dos grupos y ambos son fértiles.



$$X_{n+1} = LX_n \Rightarrow X_n = L^n X_0.$$



Calculamos  $L^n$  por diagonalización,

valores propios de  $L$ :  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ,

vectores propios asociados:  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$$L = P \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Calculamos la población total  $\|X_n\| = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$ . De la fórmula  $X_n = L^n X_0$  y tras algunos cálculos,

$$\|X_n\| = \left(\frac{3}{2}\right)^n (x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \|X_0\|.$$

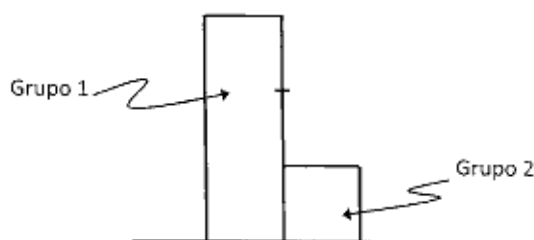
La población total crece en progresión geométrica<sup>3</sup> de razón  $\frac{3}{2}$ .

<sup>3</sup>"Tomando cualquier cantidad como la población mundial, por ejemplo mil millones, la especie humana aumentaría en la proporción 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc." T. Malthus, An essay on the principle of population, 1798

Vamos a analizar ahora el límite de la pirámide de edad (proporción de cada grupo sobre la población total). Después de algunos cálculos y haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{\|X_n\|} X_n \rightarrow \frac{1}{4(x_1^{(0)} + x_2^{(0)})} \begin{pmatrix} 3(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) \\ x_1^{(0)} + x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

A largo plazo esperamos un 75 % de población joven y un 25 % de población vieja



### Estudio general del modelo de Leslie

Consideramos la matriz

$$L = L_N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $a_i \geq 0$ ,  $0 < b_i < 1$ . Para comprender el comportamiento asintótico de las potencias de  $L$  vamos a hacer su estudio espectral. Para ello necesitaremos imponer una hipótesis adicional: hay dos grupos de edad consecutivos que son fértiles. Dicho de otro modo, para algún  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  se cumple

$$a_i \cdot a_{i+1} > 0.$$

1. El polinomio característico  $p_N(\lambda) = \det(L_N - \lambda I) =$

$$(-1)^N [\lambda^N - a_1 \lambda^{N-1} - a_2 b_1 \lambda^{N-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{N-3} - \cdots - a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1}].$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $N \geq 2$ .

$$N = 2, \quad p_2(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2b_1.$$

$N \geq 3$ ,  $N-1 \rightsquigarrow N$ . Desarrollamos el determinante por la última columna y observamos que una de las sub-matrices es precisamente  $L_{N-1}$ ,

$$p_N(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{N+1} a_N \det \begin{pmatrix} b_1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} \end{pmatrix} - \lambda p_{N-1}(\lambda).$$

Tenemos ahora un determinante fácil de calcular porque aparece una matriz triangular,

$$p_N(\lambda) = (-1)^{N+1} a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1} - \lambda p_{N-1}(\lambda) = \text{"HIPOTESIS DE INDUCCION"} =$$

$$(-1)^N [-a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1} + \lambda(\lambda^{N-1} - a_1 \lambda^{N-2} - \cdots - a_{N-1} b_1 \cdots b_{N-2})].$$

□

## 2. Un lema sobre polinomios

Se considera un polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^N - \beta_{N-1} \lambda^{N-1} - \cdots - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

con coeficientes reales que cumplen

$$\beta_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \beta_i \cdot \beta_{i+1} > 0 \quad \text{para al menos un } i \in \{0, \dots, N-2\}.$$

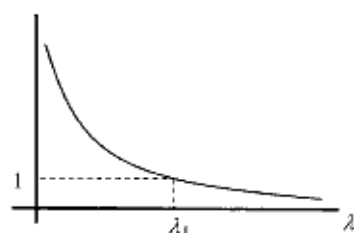
Entonces  $p(\lambda)$  tiene una única raíz positiva  $\lambda_1 \in ]0, \infty[$ . Además,

- $p(\lambda_1) = 0, p'(\lambda_1) \neq 0$
- $p(\mu) = 0, \mu \in \mathbb{C}, \mu \neq \lambda_1 \Rightarrow |\mu| < \lambda_1$ .

*Demostración.* Comenzamos probando que hay una única raíz positiva. Para  $\lambda \neq 0$  tenemos la equivalencia

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\beta_{N-1}}{\lambda} + \frac{\beta_{N-2}}{\lambda^2} + \cdots + \frac{\beta_1}{\lambda^{N-1}} + \frac{\beta_0}{\lambda^N} =: q(\lambda).$$

La función  $q(\lambda)$  es continua y estrictamente decreciente en  $]0, \infty[$ , además cumple  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = 0$ . De aquí se sigue la existencia de un único  $\lambda_1 \in ]0, \infty[$  con  $q(\lambda_1) = 1$ .



$\lambda_1$  es simple

La función  $q(\lambda)$  es derivable en  $]0, \infty[$  y la derivada cumple

$$q'(\lambda) = -\frac{\beta_{N-1}}{\lambda^2} - 2\frac{\beta_{N-2}}{\lambda^3} + \dots - (N-1)\frac{\beta_1}{\lambda^N} - N\frac{\beta_0}{\lambda^{N+1}} < 0.$$

De la definición de  $q$ ,

$$p(\lambda) = \lambda^N(1 - q(\lambda)), \quad \lambda \neq 0.$$

Derivando esta identidad,

$$p'(\lambda) = N\lambda^{N-1}(1 - q(\lambda)) - \lambda^N q'(\lambda)$$

y evaluando en  $\lambda = \lambda_1$

$$p'(\lambda_1) = N\lambda_1^{N-1}(1 - q(\lambda_1)) - \lambda_1^N q'(\lambda_1) = -\lambda_1^N q'(\lambda_1) > 0.$$

$\lambda_1$  es dominante

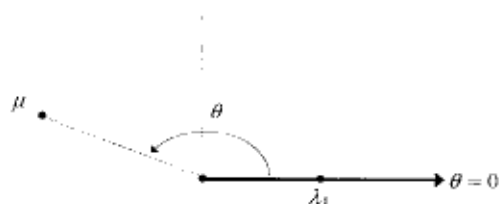
Comenzamos con una observación sencilla que será útil. Si  $\theta \in \mathbb{R}$  es un número que cumple

$$\cos k\theta = \cos(k+1)\theta = 1$$

para algún  $k = 1, 2, \dots$ , entonces<sup>4</sup>  $\theta = 2\pi m$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Supongamos ahora que  $\mu \neq \lambda_1$  es otra raíz de  $p(\lambda)$ . Nuestro objetivo es probar la desigualdad  $|\mu| < \lambda_1$ . Esto sería claro si  $\mu$  fuese 0; por eso a partir de ahora supondremos  $\mu \neq 0$ , lo que nos permitirá evaluar la función  $q(\lambda)$  en  $\lambda = \mu$ . Como  $\lambda_1$  es la única raíz positiva,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ . Podemos escoger un argumento en  $]0, 2\pi[$ ,

$$\mu = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r > 0, \quad \theta \in ]0, 2\pi[.$$

<sup>4</sup>  $k\theta = 2\pi p, (k+1)\theta = 2\pi q$  con  $p, q \in \mathbb{Z}, \theta = (k+1)\theta - k\theta = 2\pi q - 2\pi p, m = q - p$



Algunos cálculos prueban que  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$  y, de la fórmula de Moivre,

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta), \dots, \frac{1}{\mu^N} = \frac{1}{r^N}(\cos N\theta - i \sin N\theta).$$

De  $p(\mu) = 0$  deducimos  $q(\mu) = 1$ ; es decir,

$$\frac{\beta_{N-1}}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{\beta_{N-2}}{r^2}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + \dots + \frac{\beta_0}{r^N}(\cos N\theta - i \sin N\theta) = 1.$$

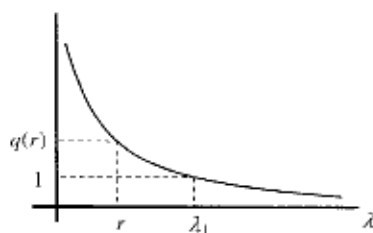
Si tomamos la parte real en esta identidad, obtenemos

$$\frac{\beta_{N-1}}{r} \cos \theta + \frac{\beta_{N-2}}{r^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{\beta_0}{r^N} \cos N\theta = 1.$$

Sabemos que los coeficientes consecutivos  $\beta_j$  y  $\beta_{j+1}$  son no nulos y, por la observación inicial, al menos uno de los números  $\cos(N-j)\theta$ ,  $\cos(N-j-1)\theta$  ha de ser menor que 1, entonces

$$\frac{\beta_j}{r^{N-j}} \cos(N-j)\theta + \frac{\beta_{j+1}}{r^{N-j-1}} \cos(N-j-1)\theta < \frac{\beta_j}{r^{N-j}} + \frac{\beta_{j+1}}{r^{N-j-1}}.$$

Conectando esta desigualdad con la identidad anterior deducimos que



$$q(r) = \frac{\beta_{N-1}}{r} + \frac{\beta_{N-2}}{r^2} + \dots + \frac{\beta_0}{r^N} > 1.$$



Como  $q$  es estrictamente decreciente

$$1 = q(\lambda_1) < q(r) \Rightarrow r < \lambda_1,$$

lo que completa la prueba porque  $r = |\mu|$ . □

Usaremos este lema para el estudio de la matriz de Leslie pero puede ser útil en otras situaciones. En el ejercicio siguiente se puede hacer uso del lema.

**Ejercicio.** Definimos la sucesión de números de Fibonacci generalizados  $\{f_n^{(k)}\}_{n \geq 0}$ . El caso clásico se obtiene para  $k = 2$ . Comenzamos con una repetición de unos,  $1, 1, \dots, 1$  ( $k$  veces) y luego obtenemos cada término como la suma de los  $k$  anteriores. Por ejemplo, para  $k = 3$ ,

$$1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, \dots$$

Prueba que existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}^{(k)}}{f_n^{(k)}} = \alpha_k.$$

Demuestra que la sucesión  $\{\alpha_k\}$  es monótona.

3. *El valor propio dominante.* De la combinación de los pasos 1 y 2 sabemos que  $L$  tiene un valor propio dominante  $\lambda_1 > 0$ . Por el resultado de la sección anterior existe el límite

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n$$

y la matriz  $Q$  cumple

$$\text{Im } Q = \text{Ker } (L - \lambda_1 I), \quad LQ = QL, \quad Q^2 = Q.$$

Es fácil calcular el vector propio asociado a  $\lambda_1$ . El sistema  $(L - \lambda_1 I)x = 0$  se expresa como

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda_1)x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N = 0 \\ b_1x_1 - \lambda_1x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ b_{N-1}x_{N-1} - \lambda_1x_N = 0. \end{cases}$$

Como  $\lambda_1$  es simple, el rango de la matriz  $L - \lambda_1 I$  es  $N - 1$  y podemos prescindir de la primera ecuación sin modificar el conjunto de soluciones del sistema. Resolvemos las restantes ecuaciones en escalera. Para buscar una solución no trivial introducimos un parámetro o le damos un valor arbitrario no nulo a una de las incógnitas. Por ejemplo, si imponemos  $x_1 = 1$ ,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad x_3 = \frac{b_2}{\lambda_1}x_2 = \frac{b_2b_1}{\lambda_1^2}, \quad x_N = \frac{b_{N-1}b_{N-2} \dots b_2b_1}{\lambda_1^N}.$$

Hemos encontrado un vector propio asociado a  $\lambda_1$ ,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_2 b_1/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_{N-1} b_{N-2} \cdots b_2 b_1/\lambda_1^N \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(L - \lambda_1 I) = \langle v_1 \rangle.$$

Una propiedad importante de este vector es que todas sus coordenadas son positivas, expresaremos este hecho con la notación  $v_1 \gg 0$ . En general, dados dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , la notación  $x \gg y$  indica  $x_i > y_i$  para cada  $i = 1, \dots, N$ .

La positividad fuerte de  $v_1$  nos va a permitir probar una propiedad de la matriz  $Q$  que nos será muy útil,

$$\boxed{x \in \mathbb{R}^N, x \gg 0 \Rightarrow Qx \gg 0.}$$

Para preparar la prueba de esta implicación hacemos dos observaciones preliminares. La desigualdad vectorial  $x \geq y$  significará  $x_i \geq y_i$  para cada coordenada  $i = 1, \dots, N$ .

- Dados  $x, y \in \mathbb{R}^N$  con  $x \gg 0, y \gg 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que  $x \geq \delta y$ .

Por ejemplo, si  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$  hacemos  $\delta = \frac{1}{7}$ . En general se puede elegir  $\delta = \min\{x_1, \dots, x_N\} / \max\{y_1, \dots, y_N\}$ .

- Dadas una matriz  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  con coeficientes reales, son equivalentes:

$$(i) a_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, N \quad (ii) x \geq y \Rightarrow Ax \geq Ay, \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

**Ejercicio.** Demuestra la implicación anterior. Caracteriza las matrices para las que se cumple  $x \gg y \Rightarrow Ax \gg Ay$ .

*Demostración.* Comenzamos observando que se cumple

$$Qv_1 = v_1.$$

Esta propiedad se sigue de la demostración de la proposición 2.9.1 sobre el valor propio dominante, pero también la podemos obtener a partir de las propiedades de  $Q$ . Como  $v_1$  es vector propio,

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, L^2 v_1 = L(\lambda_1 v_1) = \lambda_1^2 v_1, \dots, L^n v_1 = \lambda_1^n v_1.$$

Entonces la sucesión  $\{\frac{1}{\lambda_1^n} L^n v_1\}$  es constante y, de la definición de  $Q$  y la continuidad del producto,

$$Qv_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n v_1 = v_1.$$

Para probar el resultado fijamos un vector  $x \gg 0$  y encontramos  $\delta > 0$  de manera que  $x \geq \delta v_1$ . La matriz  $L^n$  tiene todos sus coeficientes no negativos y por tanto respeta el orden vectorial,

$$x \geq \delta v_1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^n} L^n x \geq \frac{1}{\lambda_1^n} L^n (\delta v_1) = \delta v_1.$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,  $Qx \geq \delta v_1$ , lo que prueba que  $Qx$  es fuertemente positivo.  $\square$

En el último paso de la prueba hemos usado que el paso al límite conserva las desigualdades vectoriales no estrictas.

**Ejercicio.** Dada una sucesión  $\{x_n\}$  en  $\mathbb{R}^N$  que cumple  $x_n \geq y$ ,  $x_n \rightarrow x$ , prueba que  $x \geq y$ . ¿Es cierta la propiedad análoga para la desigualdad fuerte  $\gg$ ?

**Ejercicio.** Una demostración equivocada del resultado anterior. Encuentra el error en el siguiente razonamiento: la matriz  $L^n$  tiene la propiedad  $x \gg 0 \Rightarrow L^n x \gg 0$  para cada  $n \geq 1$ . Entonces  $\frac{1}{\lambda_1^n} L^n x \gg 0$  y, pasando al límite,  $Qx \gg 0$ .

4. *Población total.* Dado  $X_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $X_0 \gg 0$ , la población total después de  $n$  censos será

$$\|X_n\| = \|L^n X_0\|.$$

Recordamos que estamos usando la norma de la suma. Como la norma es continua,

$$\frac{1}{\lambda_1^n} \|X_n\| = \left\| \frac{1}{\lambda_1^n} L^n X_0 \right\| \rightarrow \|QX_0\|.$$

Por la propiedad que probamos antes sabemos que  $QX_0 \gg 0$  y por tanto  $\|QX_0\| > 0$ . Así  $\|X_n\|$  se comporta asintóticamente como una progresión geométrica de razón  $\lambda_1$ . Se cumple:

- Si  $\lambda_1 < 1$  hay **extinción**,  $\|X_n\| \rightarrow 0$ . Por la definición de límite encontramos  $n_0$  de manera que si  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{\lambda_1^n} \|X_n\| \leq 2\|QX_0\|$ .
- Si  $\lambda_1 > 1$  hay **crecimiento ilimitado**,  $\|X_n\| \rightarrow \infty$ . Demostración similar.
- Si  $\lambda_1 = 1$ ,  $X_n = L^n X_0 \rightarrow QX_0$ . La población persiste y tiene un límite finito,  $\|X_n\| \rightarrow \|QX_0\|$ . Este es un caso poco probable que hace de frontera entre los dos casos típicos en este modelo: extinción y crecimiento ilimitado.

5. *Pirámide de edad.* Dado  $X_0 \gg 0$  se cumple

$$\frac{1}{\|X_n\|} X_n = \frac{1}{\|(\frac{1}{\lambda_1^n} L^n) X_0\|} (\frac{1}{\lambda_1^n} L^n) X_0 \rightarrow \frac{1}{\|QX_0\|} QX_0,$$

y por tanto la pirámide de edad converge a un vector de norma 1. Podemos ser mucho más precisos, pues el vector  $QX_0$  está en  $\text{Im } Q = \langle v_1 \rangle$  y por tanto  $QX_0 = \alpha v_1$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como  $QX_0 \gg 0$ , se cumple  $\alpha > 0$ .

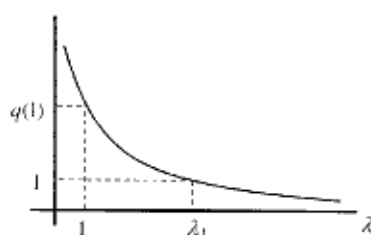
En conclusión,

$$\frac{1}{\|X_n\|} X_n \rightarrow \frac{1}{\|v_1\|} v_1.$$

La pirámide de edad converge al vector propio normalizado.

6. *Reemplazamiento generacional.* Terminamos con un criterio que permite decidir el comportamiento asintótico de la población total sin necesidad de calcular el valor propio dominante. Recordamos que la función  $q(\lambda)$  es estrictamente decreciente en  $]0, \infty[$  y cumple  $q(\lambda_1) = 1$ . Por lo tanto,

$$\lambda_1 > 1 \iff q(1) > 1.$$



De la definición de  $q(\lambda)$ ,

$$q(1) = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + \cdots + a_N b_{N-1} \cdots b_2 b_1.$$

Si llamamos a este número  $R$  obtenemos

$$\boxed{\text{Crecimiento ilimitado} \iff R > 1.}$$

Las desigualdades  $R < 1$  y  $R = 1$  se corresponden con la extinción y la permanencia finita.

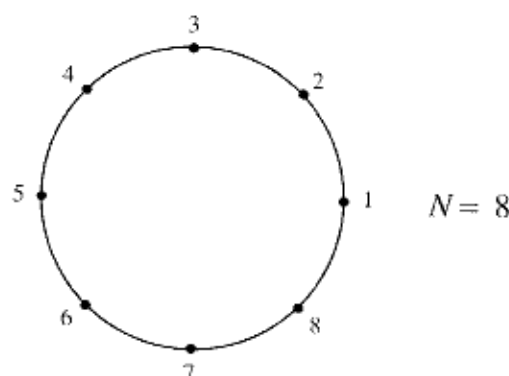
Hemos llegado al número  $R$  como consecuencia de algunos cálculos pero este número tiene una notable interpretación: el número medio de descendientes a lo largo de una vida

$$R = a_1 (\text{hijos en grupo 1}) + a_2 b_1 (\text{hijos en grupo 2}) + \cdots + a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1} (\text{hijos en grupo N}).$$

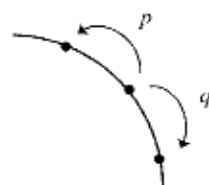
Hay reemplazamiento generacional si  $R \geq 1$ .

# 2.11. Un ejemplo de marcha aleatoria

El botánico Robert Brown observó que el movimiento de pequeñas partículas de polen situadas en el agua es muy errático. Este fenómeno, descubierto hacia 1827, es un ejemplo de *movimiento Browniano*. La teoría de este movimiento fue iniciada por Einstein hacia 1905 y ha sido ampliada y perfeccionada por varios físicos y matemáticos. El modelo continuo requiere herramientas matemáticas bastante elevadas, pero la versión discreta (*marcha aleatoria*) es más sencilla. Construiremos un modelo de marcha aleatoria en un retículo circular. Podemos imaginar  $N$  posiciones o casillas equi-espaciadas sobre una circunferencia.



Si una partícula se sitúa en una posición, después de una unidad de tiempo se desplazará a una de las dos casillas vecinas. Orientamos la circunferencia en sentido antihorario y llamamos  $p$  (respectivamente,  $q$ ) a la probabilidad de que la partícula salte a la casilla siguiente (respectivamente, anterior).



Los números  $p$  y  $q$  cumplen

$$p, q \in ]0, 1[, \quad p + q = 1.$$

En el caso  $p = q = \frac{1}{2}$  el avance y el retroceso son equi-probables, si  $p < q$  las partículas tienen más tendencia a rotar en sentido horario.

La distribución en el instante  $n$  se describe por un vector

$$X_n = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^N,$$

con  $x_i^{(n)}$  = número de partículas en la casilla  $i$ . Con las reglas de salto prescritas se llega a las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = px_N^{(n)} + qx_2^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} = px_1^{(n)} + qx_3^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ x_N^{(n+1)} = px_{N-1}^{(n)} + qx_1^{(n)}. \end{cases}$$

En notación vectorial,

$$X_{n+1} = AX_n, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ p & 0 & q & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 0 & q \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes de la matriz  $A$  son no negativos, por tanto

$$X_n \in \mathbb{R}_+^N \Rightarrow X_{n+1} \in \mathbb{R}_+^N.$$

Esta propiedad es importante porque muestra que el modelo está bien definido.

Las partículas saltan de casilla en casilla pero la cantidad total de partículas ha de permanecer constante. Esto nos lleva a conjeturar un *principio de conservación de la masa*:

$$\sum_{i=1}^N x_i^{(n+1)} = \sum_{i=1}^N x_i^{(n)}$$

o, de manera equivalente,

$$\|X_{n+1}\| = \|X_n\|,$$

si usamos de nuevo la norma de la suma. Para probar esta propiedad suponemos que

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$  es un vector cualquiera, y llamamos  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$  a la imagen de  $X$ ,  $Y = AX$ . Multiplicando matrices y sumando se obtiene

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = px_N + qx_2 + px_1 + qx_3 + \dots + px_{N-1} + qx_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_N.$$

Nuestro objetivo será entender cómo se distribuyen a largo plazo las partículas.

Probaremos que si  $N$  es **impar** la distribución tiende a ser uniforme, y esto ocurre con independencia de la condición inicial escogida. De manera más precisa, probaremos que para cualquier  $X_0 \in \mathbb{R}_+^N$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha U$$

donde  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  es el vector con todas la coordenadas iguales a 1 y  $\alpha > 0$  es un número que depende de la condición inicial  $X_0$ .

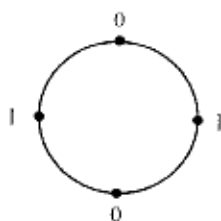
**Ejercicio.** Utiliza la conservación de la masa para probar que  $\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(0)} = \frac{1}{N} \|X_0\|$ .

Curiosamente el resultado anterior es falso cuando  $N$  es **par**. Si suponemos la condición inicial con unos y ceros alternados,

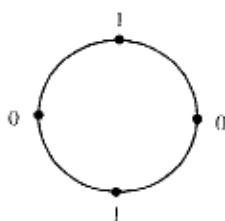
$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = AX_1 = X_0,$$

observamos que nos aparece un 2-ciclo, un comportamiento intermitente que impide la existencia del límite de la sucesión  $X_n$ .

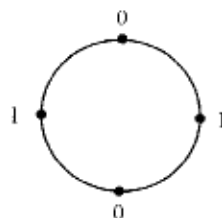
$$N = 2$$



$$n = 0$$



$$n = 1$$



$$n = 2$$

A partir de ahora supondremos

$N$  impar.

Vamos a probar la existencia del límite en varios pasos.

[0] Una convención. Dado un vector  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$  definimos dos coordenadas artificiales

$$x_0 = x_N, \quad x_{N+1} = x_1.$$

De esta manera la acción de la matriz  $A$  sobre un vector se escribe de manera más homogénea,

$$Y = AX, \quad y_j = px_{j-1} + qx_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

[1] Un vector propio de  $A$ . Se comprueba de manera directa que el vector  $U$  cumple  $AU = U$ , por tanto  $1 \in \sigma(A)$ .

[2] Los vectores propios son  $N$ -ciclos de una ecuación en diferencias. Dado un vector  $v \in \mathbb{C}^N$  y un número  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la identidad  $Av = \lambda v$  se puede escribir en la forma

$$pv_{j-1} + qv_{j+1} = \lambda v_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Si interpretamos estas ecuaciones en el contexto de la lección primera, casi podríamos afirmar que las coordenadas del vector  $v$  forman una solución de la ecuación en diferencias

$$(*) \quad x_{n+2} - \frac{\lambda}{q}x_{n+1} + \frac{p}{q}x_n = 0.$$

Pero esto no sería preciso porque las soluciones de  $(*)$  son sucesiones infinitas  $X = \{x_n\}_{n \geq 0}$ . Vamos a construir una verdadera solución usando la convención descrita en

[0] y repitiendo el vector  $v$  de manera periódica,

$$x_0 = v_N, \quad x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2, \dots, x_N = v_N$$

$$X_v = v_N \overbrace{v_1 \dots v_{N-1}} = \{v_N, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, \dots\}.$$

**Ejercicio.** Demuestra que  $X_v$  es solución de  $(*)$  si y solo si  $Av = \lambda v$ .

Como  $X_v$  es una sucesión periódica, podemos concluir que  $\lambda \in \mathbb{C}$  está en el espectro de  $A$  si y solo si la ecuación  $(*)$  admite un  $N$ -ciclo no trivial ( $X \neq 0$ ,  $x_{n+N} = x_n$  si  $n \geq 0$ ).

**Ejemplo.** ( $N = 3$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$ ). Para  $\lambda = -\frac{1}{2}$  la ecuación  $(*)$  se convierte en  $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ , que tiene las soluciones  $x_n = c_1 \omega^n + c_2 \bar{\omega}^n$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . En este caso todas las soluciones son 3-ciclos y a cada una de ellas le corresponde un vector propio. Por ejemplo, a  $\{1, \omega, \bar{\omega}, \dots\}$  le corresponde el vector

$$v = \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



**4** Las raíces de la unidad y los valores propios. Buscamos los valores de  $\lambda$  para los que la ecuación (\*) tiene  $N$ -ciclos no triviales. El polinomio asociado a (\*) es

$$q(r) = r^2 - \frac{\lambda}{q}r + \frac{p}{q}.$$

Distinguimos los casos de raíces simples y dobles.

**Caso (i)**  $r_+ \neq r_-$  raíces de  $q(r)$ .

Las soluciones de (\*) son de la forma  $x_n = c_1 r_+^n + c_2 r_-^n$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Para buscar soluciones periódicas usaremos el siguiente

**Ejercicio.** Una solución  $X \in \Sigma_{\mathbb{C}}$  de  $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$  es un  $N$ -ciclo si y solo si  $x_0 = x_N, x_1 = x_{N+1}$ .

Las ecuaciones  $x_0 = x_N$  y  $x_1 = x_{N+1}$  llevan al sistema lineal homogéneo

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} r_+^N - 1 & r_-^N - 1 \\ (r_+^N - 1)r_+ & (r_-^N - 1)r_- \end{pmatrix}.$$

Como buscamos soluciones no triviales exigimos que se cumpla

$$0 = \det M = (r_+^N - 1)(r_-^N - 1)(r_- - r_+).$$

Al ser las raíces de  $q(r)$  simples llegamos a la conclusión de que al menos una de ellas ha de ser raíz  $N$ -ésima de la unidad ( $r_+^N = 1$  o  $r_-^N = 1$ ). Supongamos por ejemplo que  $r_+^N = 1$ . De la ecuación  $q(r_+) = 0$  deducimos que  $\lambda = q r_+ + \frac{p}{r_+}$ . Como  $r_+$  está en la circunferencia unidad, se cumple  $r_+^{-1} = \overline{r_+}$  y  $\lambda = q r_+ + p \overline{r_+}$ .

Si definimos los vectores

$$v_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_{\pm} \\ r_{\pm}^2 \\ \vdots \\ r_{\pm}^{N-1} \end{pmatrix}$$

observamos que  $v_+$  (resp.  $v_-$ ) es un vector propio si  $r_+^N = 1$  (resp.  $r_-^N = 1$ ).

**Caso (ii)**  $r_0$  raíz doble de  $q(r)$ .

Las soluciones de (\*) son de la forma  $x_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$ . Después de algunos cálculos encontramos un nuevo sistema homogéneo

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} r_0^N - 1 & N r_0^N \\ r_0^N - 1 & (N+1) r_0^N - 1 \end{pmatrix}.$$

Si imponemos  $\det M = 0$  se ha de cumplir  $r_0^N = 1$  y como  $r_0$  es raíz doble de  $q(r)$ ,  $r_0^2 = \frac{p}{q}$ . Es fácil concluir que  $r_0 = 1$  y  $p = q$ .

Después de estas discusiones llegamos a una bonita fórmula para los valores propios de la matriz  $A$ ,

$$\lambda = qr + p\bar{r}$$

donde  $r$  es una raíz  $N$ -ésima de la unidad.

[5] *Una descripción explícita del espectro.* La fórmula de Moivre permite enumerar las raíces  $N$ -ésimas de la unidad,

$$r_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_j = qr_j + p\bar{r}_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + i(q-p)\sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right),$$

con módulo

$$|\lambda_j|^2 = \cos^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + (q-p)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right).$$

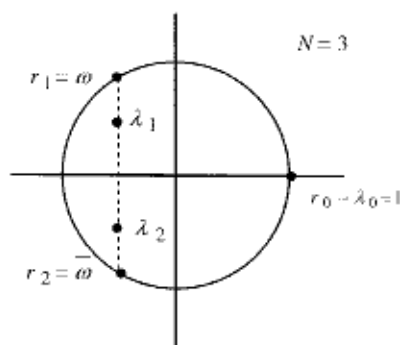
Al ser  $N$  impar se cumple

$$\lambda_0 = 1, \quad |\lambda_j| < 1 \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Esta propiedad no es suficiente para asegurar que  $\lambda_0$  sea dominante, pues no sabemos si es simple.

[6]  $\lambda_0 = 1$  es simple. Distinguimos dos situaciones:

[ $p \neq q$ ] Observamos que todos los valores propios  $\lambda_j, j = 1, \dots, N-1$  tienen parte imaginaria no nula y son distintos.



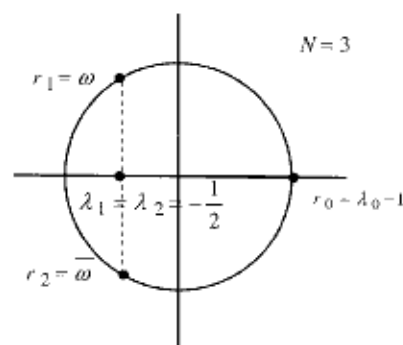
Por tanto la matriz  $A$  tiene  $N$  valores propios distintos y su polinomio característico ha de ser

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{N-1}).$$

Todas las raíces de este polinomio son simples.

$p = q = \frac{1}{2}$  Ahora los valores propios son reales y se cumple

$$\lambda_j = \lambda_{N-j}, \quad j = 1, \dots, \frac{N-1}{2}.$$



En este caso hay  $\frac{N+1}{2}$  valores propios, una cantidad menor que la dimensión  $N$ . Para  $j \geq 1$  el polinomio  $q(r)$  asociado a la ecuación en diferencias se convierte en

$$q(r) = r^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)r + 1,$$

que tiene las raíces  $r_{\pm} = \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$ . Como las dos son raíces de la unidad encontramos dos vectores propios linealmente independientes ( $v_+$  y  $v_-$ ) asociados a  $\lambda_j$ . Deducimos que la multiplicidad algebraica de  $\lambda_j$  es al menos 2. Esta información determina el polinomio característico de  $A$ , que ha de ser

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)^2 \cdots (\lambda - \lambda_{\frac{N-1}{2}})^2.$$

La raíz  $\lambda_0 = 1$  es simple y las demás son dobles.

[7] *Conclusión.* Sabemos ahora que  $A$  tiene el valor propio dominante  $\lambda_0 = 1$  y que  $U$  es un vector propio asociado. Entonces  $A^n$  converge a una matriz  $Q$  que cumple

$$\text{Im } Q = \text{Ker } (A - I) = \langle U \rangle.$$

Dado  $X_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $X_n = A^n X_0 \rightarrow QX_0$ . Puesto que  $QX_0$  pertenece a  $\text{Im } Q = \langle U \rangle$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $QX_0 = \alpha U$ . Hemos probado la convergencia de  $\{X_n\}$  a  $\alpha U$ .

*La mayoría de los modelos son caricaturas de la realidad pero si son buenos entonces, como las buenas caricaturas, retratan, aunque sea de manera distorsionada, algunas de las características del mundo real. El principal papel de los modelos no es tanto explicar y predecir -aunque esas son en último extremo las funciones principales de la ciencia- como polarizar el pensamiento y plantear cuestiones agudas.*

Mark Kac, Algunos modelos matemáticos en la ciencia.

## 2.12. Problemas

[2.1] Demuestra el teorema de Cayley-Hamilton. *Sugerencia: forma canónica de Jordan.*

[2.2] Calcula  $p(A)$  en cada caso,

$$(i) \ p(x) = (x-1)^4, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) \ p(x) = x^2 - 1, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[2.3] Demuestra que una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  es nilpotente si y solo si  $\sigma(A) = \{0\}$ .

[2.4] Describe todas las matrices nilpotentes  $2 \times 2$  en función de tres parámetros.

[2.5] Un hortelano de la Arcadia cultiva la mandrágora y obtiene una cosecha a la semana. Las mandrágoras pueden ser rojas (con genotipo AA o Aa) y amarillas (con genotipo aa). De manera sistemática fecunda sus plantas de acuerdo a la siguiente regla: mezcla con AA martes y jueves, mezcla con Aa lunes y miércoles, aa viernes. Los fines de semana descansa. Se sabe que al principio todas las mandrágoras eran rojas ¿Qué previsiones habrá a largo plazo?

[2.6] Describe en términos de dos parámetros todas las matrices  $2 \times 2$  que no son diagonalizables y tienen el vector propio  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

[2.7] Se sabe que una matriz  $4 \times 4$  tiene dos valores propios distintos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  con multiplicidades  $m_1 = m_2 = 2$ . Describe todas las posibles formas canónicas de Jordan que se pueden presentar y determina en cada caso el número de vectores propios linealmente independientes asociados a cada valor propio.

[2.8] Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  para las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 100 & -100 \\ 100 & -100 \end{pmatrix}$ .

[2.9] Calcula  $A^{400}$  si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**2.10** Dados  $a, b, c \in \mathbb{C}$  demuestra que la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es nilpotente. Utiliza lo anterior para calcular  $A^{1000}$  si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**2.11** Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  demuestra que existe una sucesión  $\{A_n\}$  en  $\mathbb{C}^{d \times d}$  de manera que cada  $A_n$  es diagonalizable y  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**2.12** Diseña un procedimiento que transforme la ecuación en diferencias  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$  en un sistema del tipo  $X_{n+1} = AX_n$  donde  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ . Demuestra el corolario 1.10.1 sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de segundo orden usando la teoría de la lección 2.

*Sugerencia: dada la sucesión  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ , considera la sucesión de vectores  $\left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \dots \right\}$*

**2.13** Resuelve la ecuación matricial

$$X^2 = I$$

donde  $X$  es una matriz real de dimensión  $2 \times 2$ . Describe el espectro de las soluciones. ¿Qué tipo de transformación lineal en el plano representa la matriz  $X$ ?

**2.14** Sea  $N \geq 2$  un entero fijo. Dados números  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{C}$ , se construye una sucesión de acuerdo a la ley

$$x_n = \frac{1}{N}(x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_{n-N}), \quad n \geq N.$$

Demuestra que existen números  $c \in \mathbb{C}$  y  $\lambda \in ]0, 1[$  de manera que

$$x_n = c + O(\lambda^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Es decir, existe  $M \geq 0$  tal que  $|x_n - c| \leq M\lambda^n$  para cada  $n$ .

**2.15** Se considera la matriz de Leslie  $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ .

Encuentra las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrios en el plano de parámetros  $(\alpha, \beta)$ .

**2.16** Una población estructurada en 2 grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula el límite de  $\frac{X_n}{\|X_n\|}$  si  $X_{n+1} = LX_n$ ,  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**2.17** Una población estructurada en  $N$  grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ 1/2 & & & & \\ & 1/3 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué grupo de edad es más fértil? ¿Se extinguirá esta población?

**2.18** La compañía de seguros *TodoPubli* estudia el lanzamiento de un nuevo seguro del automóvil dirigido a conductores de edades entre 18 y 20 años. El seguro se contrata al cumplir los 18 años y distingue tres categorías: clase Joven  $J$ , 18 años, clase Exclusiva  $E$ , 19 años, clase VIP  $V$ , 20 años. Después de algunos estudios se hacen las siguientes predicciones:

- el 50 por ciento de clientes jóvenes mantendrá su seguro hasta el segundo año y pasará a la clase  $E$
- el 60 por ciento de clientes exclusivos llegará a la clase VIP
- la captación de nuevos clientes vendrá dada por la ecuación de renovación

$$J_{n+1} = \frac{1}{2}E_n + V_n.$$

¿Se esperan muchos clientes a largo plazo?

**2.19** Las revistas **GolGranada** y **De primera** se reparten el mercado de la prensa deportiva. Se ha observado que hay tres tipos de lectores

$G$  = lectores exclusivos de **GolGranada**

$D$  = lectores exclusivos de **De primera**

$GD$  = lectores de ambas revistas.

También se sabe que cada año se pasa un 20% de lectores de  $G$  a  $D$ , un 30% de  $G$  a  $GD$ , un 10% de  $D$  a  $G$  y un 20% de  $D$  a  $GD$ . El resto de los lectores de  $G$  y  $D$  y todos los del sector  $GD$  no cambian de hábitos. Presenta un modelo que describa la evolución de los tres sectores.

**2.20** Demuestra que el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^{1000} - \lambda^{900} - \lambda^{800} - 1$$

admite una única raíz en  $]0, \infty[$ .

**2.21** Disponemos de  $10^7$  partículas que se distribuyen entre los cuatro vértices del grafo



Cada segundo las partículas cambian de posición, desplazándose con igual probabilidad a uno de los vértices adyacentes. Desde el vértice 1 pueden viajar al 2, 3 o 4; del 2 al 1 o 3; del 3 al 1, 2 o 4 y del 4 al 1 o 3. Presenta un modelo que describa la evolución de la distribución de partículas en el grafo.

**2.22** Un conjunto de partículas se distribuye entre las cuatro posiciones  $1, i, -1, -i$  del plano complejo. Cada unidad de tiempo las partículas se pueden desplazar a una de las casillas contiguas o bien pueden permanecer en la misma casilla. Las probabilidades son:  $p$  avanza una casilla (en sentido anti-horario),  $q$  retrocede una casilla,  $r$  permanece en la misma casilla. Escribe un modelo que describa la evolución de la distribución de masas.



2.23 Sea  $A$  una matriz cuadrada con valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  que cumplen

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, |\lambda_i| < 1, i = 3, \dots, r.$$

Se supone además que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son simples (como raíces del polinomio característico). Demuestra que existen matrices  $\Pi$  y  $\Sigma$  que cumplen

$$A\Pi = \Sigma, A\Sigma = \Pi, A^{2n} \rightarrow \Pi, A^{2n+1} \rightarrow \Sigma.$$

2.24 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 \end{pmatrix}$$

con  $p, q \in ]0, 1[, p + q = 1$ . Se supone que  $A$  tiene dimensión  $N$  par. Prueba:

- (i)  $AV = -V$  si  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (ii) si  $x \in \mathbb{C}^N, y = Ax$ , entonces

$$\sum_{j=1}^N (-1)^j x_j = - \sum_{j=1}^N (-1)^j y_j$$

- (iii) 1 y -1 son valores propios simples de  $A$
- (iv) Dado  $X_0 \in \mathbb{R}^N$ , la sucesión  $X_n = A^n X_0$  verifica

$$X_{2n} \rightarrow \alpha, X_{2n+1} \rightarrow \beta,$$

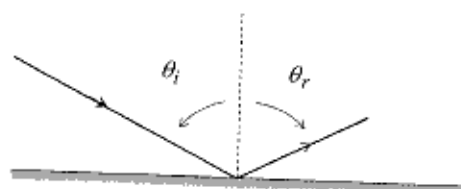
donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$  son dos vectores tales que  $A\alpha = \beta$  y  $A\beta = \alpha$ .

## Lección 3

# Máximos y mínimos: principios variacionales en Óptica

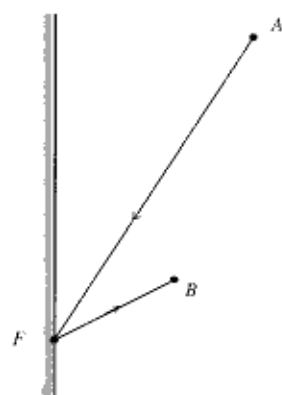
### 3.1. La reflexión de la luz y el principio de Herón

Todos hemos observado la trayectoria rectilínea de los rayos de luz y cómo cambia esta trayectoria cuando el rayo choca con un espejo. Se sabe que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.<sup>1</sup> Estos ángulos se miden con respecto a la perpendicular al espejo y se suponen en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

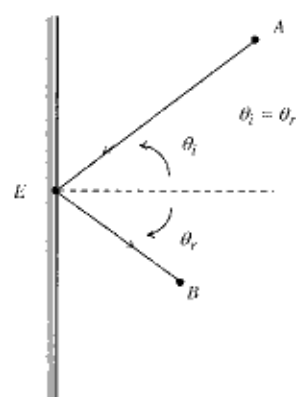


En el siglo II antes de Cristo, Herón de Alejandría formuló un *principio* que explica este hecho: de entre todos los caminos posibles, la luz recorre el más corto. Vamos a seguir el razonamiento de Herón para probar que su principio implica la identidad  $\theta_i = \theta_r$ . Suponemos que el rayo sale de  $A$  y llega a  $B$  después de chocar con el espejo. Los rayos *virtuales* o caminos posibles serán todos los caminos rectilíneos a trozos que viajan de  $A$  a  $B$  pasando por el espejo. Cada uno de estos rayos virtuales se determina mediante un punto  $F$  del espejo.

<sup>1</sup>El mismo fenómeno se produce en una mesa de billar cuando choca la bola con una de las bandas



Llamamos  $E$  al único punto en el espejo para el que el camino que pasa por  $A$ ,  $E$  y  $B$  cumple la ley de reflexión  $\theta_i = \theta_r$ .

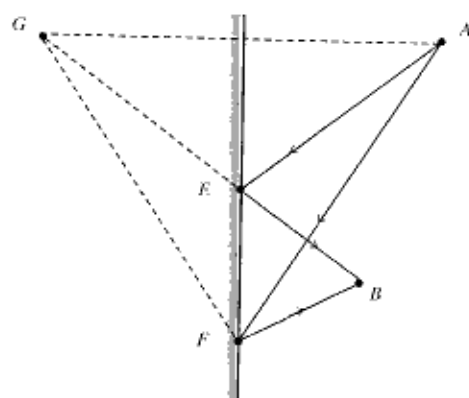


Pretendemos probar que este camino es el más corto. Esto quiere decir que, para cualquier punto  $F$  del espejo,

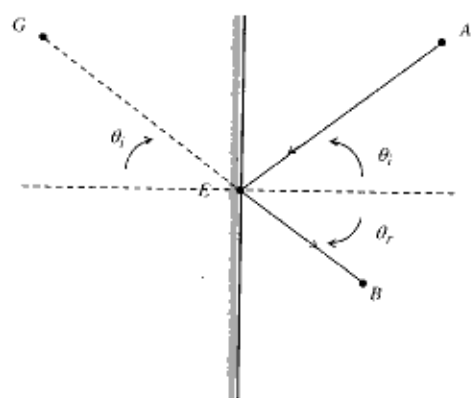
$$(\blacktriangle) \quad \overline{AE} + \overline{EB} \leq \overline{AF} + \overline{FB}$$

y la desigualdad es estricta si  $F \neq E$ .

Para probar esta desigualdad pasamos a través del espejo y reflejamos los segmentos  $AF$  y  $AE$ . Llamaremos  $G$  al reflejado de  $A$ .



Como las simetrías ortogonales conservan las longitudes,  $\overline{AE} = \overline{GE}$  y  $\overline{AF} = \overline{GF}$ . Ahora observamos una propiedad crucial del punto  $E$ , los segmentos  $GE$  y  $EB$  están alineados. Para justificarlo observamos que el segmento  $GE$  es el reflejado de  $AE$  y tiene por tanto pendiente  $\sim \tan \theta_i$ , por otra parte la pendiente de  $EB$  es  $\sim \tan \theta_r$ .

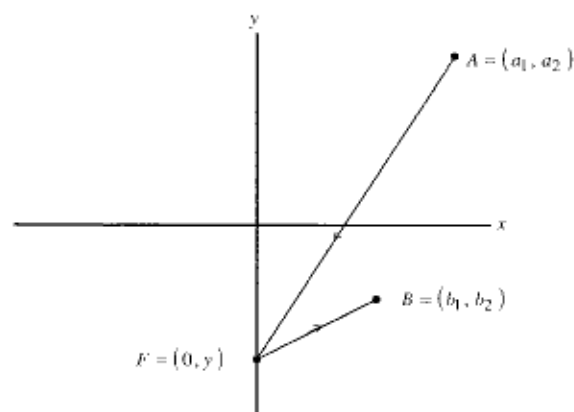


Una vez que sabemos que estos segmentos están alineados consideramos el triángulo de vértices  $GFB$ , el lado  $GB$  será menor que la suma de los otros dos lados  $GF$  y  $FB$  (desigualdad triangular). Es decir,

$$\overline{GB} \leq \overline{GF} + \overline{FB}.$$

Además, la desigualdad es estricta a menos que el triángulo degenerare porque  $E$  y  $F$  coincidan. Si descomponemos el segmento  $GB$  en dos partes obtenemos  $\overline{GB} = \overline{GE} + \overline{EB}$ . Puesto que  $\overline{GE} = \overline{AE}$  y  $\overline{GF} = \overline{AF}$ , llegamos a la desigualdad buscada ( $\blacktriangle$ ).

Han pasado muchos siglos desde Herón y ahora disponemos de las coordenadas cartesianas y el cálculo infinitesimal, podemos seguir un camino alternativo. En un plano  $x, y$  suponemos que el espejo está situado en el eje de ordenadas  $x = 0$  y los puntos  $A$  y  $B$  tienen coordenadas  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  con  $a_1 > 0$  y  $b_1 > 0$ . Esta última condición garantiza que los dos puntos están al mismo lado del espejo. Cada rayo virtual se describe por un punto  $F$  en el espejo, digamos  $F = (0, y)$  con  $y \in \mathbb{R}$ .



Identificamos el espacio de rayos virtuales a la recta real e interpretamos la distancia recorrida por los rayos virtuales como una función de variable real. Pasamos de la definición geométrica

$$\mathcal{D}(F) = \overline{AF} + \overline{FB}$$

a la función del Análisis,

$$\mathcal{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(y) = \sqrt{a_1^2 + (y - a_2)^2} + \sqrt{b_1^2 + (y - b_2)^2}.$$

Sabemos que la función raíz cuadrada  $R(x) = \sqrt{x}$  es continua en  $[0, \infty[$  pero no es derivable en  $x = 0$ ; esto podría suscitar alguna duda sobre la diferenciabilidad de la función  $\mathcal{D}$ . Pero no hay problema, los radicandos que aparecen en la definición de  $\mathcal{D}$  son estrictamente positivos (mayor o igual que  $a_1$  el primero y que  $b_1$  el segundo). Podemos aplicar la regla de la cadena (composición de  $R$  en  $]0, \infty[$  con polinomios) para deducir que  $\mathcal{D}$  es derivable infinitas veces,  $\mathcal{D} \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Calculamos la primera derivada

$$\mathcal{D}'(y) = \frac{y - a_2}{\sqrt{a_1^2 + (y - a_2)^2}} + \frac{y - b_2}{\sqrt{b_1^2 + (y - b_2)^2}}.$$

Los puntos  $y$  en los que se alcance el mínimo de  $\mathcal{D}$  serán puntos críticos. La condición  $\mathcal{D}'(y) = 0$  nos lleva a la ecuación<sup>2</sup>

$$\frac{y - a_2}{\sqrt{a_1^2 + (y - a_2)^2}} = \frac{b_2 - y}{\sqrt{b_1^2 + (y - b_2)^2}}.$$

Como la raíz cuadrada es positiva, esta ecuación implica que  $y - a_2$  y  $b_2 - y$  han de tener el mismo signo,  $(y - a_2)(b_2 - y) \geq 0$ . Elevando al cuadrado,

$$\frac{(y - a_2)^2}{a_1^2 + (y - a_2)^2} = \frac{(b_2 - y)^2}{b_1^2 + (y - b_2)^2} \Rightarrow b_1^2(y - a_2)^2 = a_1^2(b_2 - y)^2.$$

Extrayendo raíz cuadrada se obtiene  $b_1|y - a_2| = a_1|b_2 - y|$ . Como  $y - a_2$  y  $b_2 - y$  tienen el mismo signo llegamos a la ecuación lineal

$$b_1(y - a_2) = a_1(b_2 - y)$$

que tiene la única solución

$$y = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 + b_1}.$$

**Ejercicio.** Se supone que  $x$  es un número real y  $n \geq 2$  un entero. Determina la región de validez de cada una de las fórmulas  ${}^n\sqrt{x^n} = x$ ,  ${}^n\sqrt{x^n} = |x|$ .

Sabemos que  $\mathcal{D}$  tiene un único punto crítico y queremos probar que en este punto se alcanza el mínimo global de la función. Hay muchos procedimientos para hacer esto y vamos a presentar algunos de ellos. Conviene observar que no sería suficiente comprobar que la derivada segunda es positiva en el punto crítico; esto solo nos diría que se trata de un mínimo local.

**Ejercicio.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable que tiene un único punto crítico, ¿Se puede asegurar que  $f$  alcanza un máximo o un mínimo?

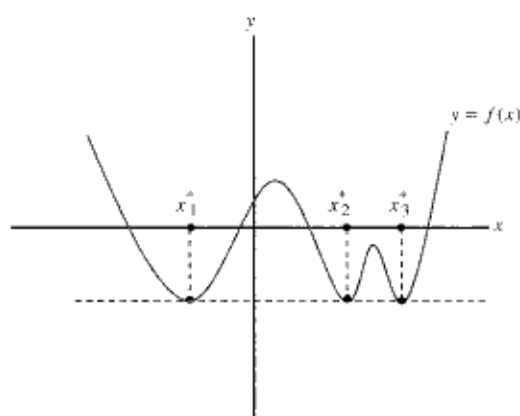
**Lema 3.1.1.** Se supone que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y cumple

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad (\text{coercividad}).$$

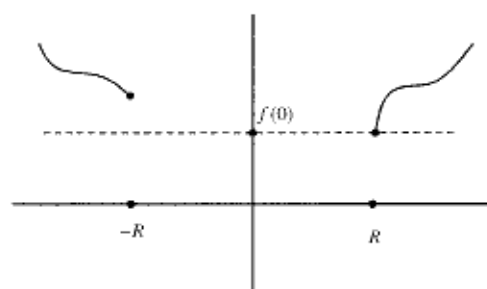
Entonces  $f$  alcanza su mínimo; es decir, existe  $x^* \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x^*) \leq f(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

**Nota.** Observamos que el punto  $x^*$  no siempre es único. En el siguiente ejemplo hay tres valores posibles.

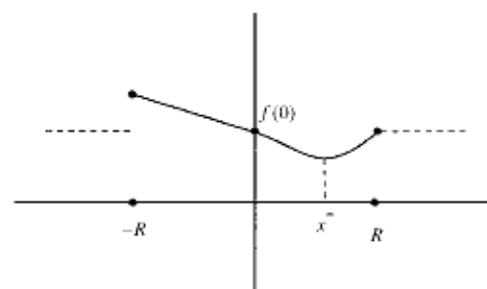
<sup>2</sup>Conviene reflexionar sobre el alcance exacto del razonamiento: no sabemos todavía si la función alcanza el mínimo, o si acaso lo alcanza en uno o muchos puntos



*Demostración.* Por la coercividad de la función podemos encontrar  $R > 0$  de manera que  $f(x) \geq f(0)$  si  $|x| \geq R$ .



En el intervalo compacto  $[-R, R]$  la restricción de  $f$  es continua y alcanzará un mínimo. Si llamamos  $x^* \in [-R, R]$  al punto donde se alcanza dicho mínimo, se cumple  $f(x^*) \leq f(x)$  para cada  $x \in [-R, R]$ .



En particular podemos elegir  $x = 0$  y se deduce que  $f(x^*) \leq f(0)$ . Afirmamos que en  $x^*$  se alcanza el mínimo de la función  $f$ , definida en todo  $\mathbb{R}$ ; es decir,  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Esta desigualdad es consecuencia de la definición de  $x^*$  si  $|x| \leq R$ . En caso contrario,  $|x| > R$  y  $f(x) \geq f(0) \geq f(x^*)$ .  $\square$

Para aplicar este lema en el problema de la reflexión de la luz debemos comprobar que la función  $\mathcal{D}$  es coerciva.<sup>3</sup> Usaremos las desigualdades

$$\sqrt{\square^2 + \ominus^2} \geq |\ominus|, \quad |\square - \ominus| \geq |\square| - |\ominus|,$$

válidas para cualesquiera números reales  $\square$  y  $\ominus$ . Si hacemos  $\square = a_1, b_1$ ,  $\ominus = y - a_2, y - b_2$  en la primera desigualdad,  $\square = y$ ,  $\ominus = a_2, b_2$  en la segunda,

$$\mathcal{D}(y) \geq |y - a_2| + |y - b_2| \geq 2|y| - |a_2| - |b_2| \rightarrow +\infty \quad \text{si } |y| \rightarrow \infty.$$

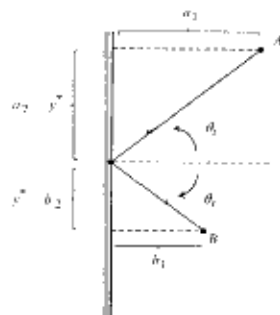
El lema nos dice que  $\mathcal{D}$  alcanza el mínimo global en algún punto  $y^* \in \mathbb{R}$ , como sabemos que esta función tiene un único punto crítico, se cumplirá

$$y^* = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 + b_1}.$$

Por este procedimiento analítico hemos probado que hay un único rayo que conecta  $A$  y  $B$  y hemos calculado el punto  $F = (0, y^*)$  de incidencia con el espejo. Ahora pretendemos recuperar la fórmula  $\theta_i = \theta_r$ . Partimos de la identidad

$$\frac{y^* - a_2}{a_1} = \frac{b_2 - y^*}{b_1}.$$

Supongamos por ejemplo  $a_2 > b_2$ , entonces  $y^* \in ]b_2, a_2[$  y observamos que cada una de las fracciones en la identidad anterior es justo la tangente de uno de los ángulos.



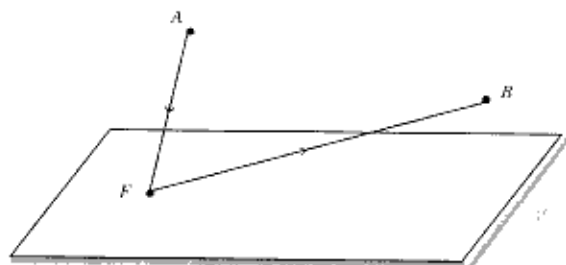
Por tanto,  $\tan \theta_i = \tan \theta_r$ . La función tangente es inyectiva en  $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$  y como sabemos que ambos ángulos están en ese intervalo, concluimos que  $\theta_i = \theta_r$ .

<sup>3</sup>Desde el punto de vista intuitivo la coercividad es evidente, los rayos virtuales de  $A$  a  $B$  se hacen muy largos cuando  $F$  se aleja mucho

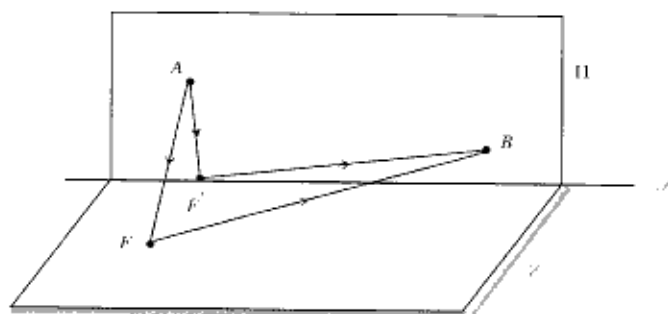


**Ejercicio.** Discute el caso  $a_2 \leq b_2$ .

Desde el inicio de la lección hemos dado por supuesto que los rayos de luz permanecen en un plano, ahora vamos a probar que es posible deducir este hecho del principio de Herón. La clave va a estar en la ampliación del espacio de rayos virtuales, que ahora se moverán en tres dimensiones. Pensamos que el espejo es un plano  $\mathcal{E}$  dentro de  $\mathbb{R}^3$  y seleccionamos dos puntos  $A$  y  $B$  que quedan al mismo lado del espejo. Consideramos todos los rayos (virtuales) que unen  $A$  y  $B$  después de pasar por algún punto  $F \in \mathcal{E}$ .



Consideramos el plano  $\Pi$  que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  y es ortogonal a  $\mathcal{E}$ . El corte de los dos planos será una recta  $\mathcal{L} = \mathcal{E} \cap \Pi$ . Dado un rayo virtual  $AFB$  consideramos su proyección ortogonal sobre  $\Pi$ , se obtiene así un nuevo rayo virtual  $AF'B$ . El rayo imagen queda dentro de  $\Pi$  y el punto  $F'$  está en la recta  $\mathcal{L}$ .



Las proyecciones ortogonales tienen la propiedad de no aumentar las distancias, por eso se cumplirá

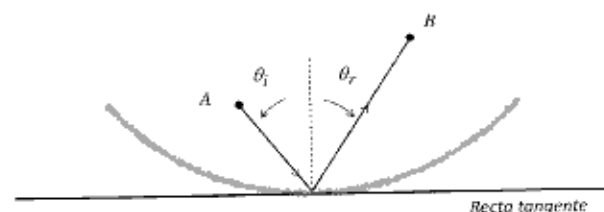
$$\overline{AF'} + \overline{F'B} \leq \overline{AF} + \overline{FB},$$

con desigualdad estricta siempre que  $F' \notin \ell$ .

Pensemos en el significado de esta desigualdad: el único rayo de longitud mínima para el modelo plano (rayos contenidos en  $\Pi$ ) también lo es para el modelo espacial (rayos en  $\mathbb{R}^3$ ).

### 3.2. Los espejos circulares y el principio modificado

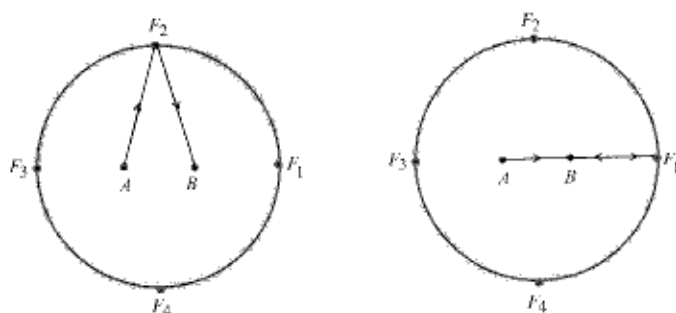
El fenómeno de reflexión de la luz también se produce en los espejos curvos y la ley  $\theta_i = \theta_r$  sigue siendo válida. Ahora los ángulos se calculan desde la recta normal al espejo en el punto de incidencia y están en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .



Se presentan dos novedades con respecto a los espejos planos:

- Dos puntos pueden estar unidos por varios rayos ópticos
- El principio de Herón no produce todos los rayos.

Como ejemplo consideramos un espejo circular y dos puntos  $A$  y  $B$  en su interior que tienen por punto medio al centro de la circunferencia. Es bastante intuitivo que hay cuatro rayos ópticos que unen estos dos puntos, son los que pasan por los puntos  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ .



Además, la longitud de los rayos  $AF_1B$  y  $AF_3B$  es menor que la de  $AF_2B$  y  $AF_4B$ . Para comprobarlo observamos que  $\overline{AF_1} + \overline{F_1B}$  es justo un diámetro de la circunferencia, mientras que  $\overline{AF_2} + \overline{F_2B} = 2\overline{AF_2}$  es mayor que dos radios.

Es interesante analizar este ejemplo con las herramientas del cálculo infinitesimal. Vamos a suponer que el espejo es la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 y los puntos  $A$  y  $B$  son  $(-\epsilon, 0)$  y  $(\epsilon, 0)$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$ . Podemos parametrizar el espejo en términos del ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \equiv \theta + 2\pi$ ,

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta.$$

Cada rayo virtual se identifica al punto de incidencia  $I = (\cos \theta, \sin \theta)$  o al ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$ . La longitud del rayo determina la función

$$D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(\theta) = \sqrt{(-\epsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + \sqrt{(\epsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}$$

y, después de un cálculo sencillo,

$$D(\theta) = \sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta} + \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta}.$$

Observamos que los radicandos son siempre mayores o iguales que  $(1-\epsilon)^2$  y la función  $D$  es  $C^\infty$ . A diferencia de lo que ocurría en el espejo rectilíneo, la función  $D$  tiene la cota superior  $D(\theta) \leq 4$  y no es coerciva. Sin embargo  $D$  es  $2\pi$ -periódica,

$$D(\theta + 2\pi) = D(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

y esto asegura que alcanza el máximo y el mínimo.

**Ejercicio.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $2\pi$ -periódica. Entonces existen números  $x_+, x_- \in \mathbb{R}$  tales que  $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . ¿Son únicos estos números?

La derivada es

$$D'(\theta) = \frac{-\epsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta}} + \frac{\epsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta}}$$

y la ecuación de puntos críticos  $D'(\theta) = 0$  conduce a las identidades  $\sin \theta = 0$  y  $\cos \theta = 0$ . Obtenemos los puntos críticos

$$\theta_1 = 2\pi N, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi N, \quad \theta_3 = \pi + 2\pi N, \quad \theta_4 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}$$

que se corresponden con los cuatro puntos del espejo  $F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$ . Observamos que

$$D(\theta_1) = D(\theta_3) = 2 < D(\theta_2) = D(\theta_4) = 2\sqrt{1 + \epsilon^2}$$

y concluimos que los rayos que pasan por  $F_1$  y  $F_3$  tienen longitud mínima mientras que los que pasan por  $F_2$  y  $F_4$  tienen longitud máxima.

La elección de la coordenada angular para parametrizar la circunferencia ha sido importante, en este caso no es buena idea utilizar coordenadas cartesianas. La circunferencia unidad se puede escribir en la forma  $x^2 + y^2 = 1$  y si despejamos  $y$  podemos cubrir la curva mediante la gráfica de dos funciones,

$$y = \varphi_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Esto ya introduce los primeros problemas porque a cada número  $x$  de  $] -1, 1[$  le corresponden dos puntos  $(x, \varphi_\pm(x))$  en la circunferencia. Una segunda dificultad se origina en la falta de regularidad de las funciones  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  en  $x = \pm 1$ . Podemos considerar la función

$$D: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(x) = \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon x} + \sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon x}$$

que nos da la longitud del rayo que une  $A$  y  $B$  a través del punto  $F = (x, \varphi_{\pm}(x))$ . El único punto crítico resulta ser  $x = 0$  y recuperamos los rayos que pasan por  $F_2$  y  $F_4$  pero hemos perdido los que pasan por  $F_1$  y  $F_3$ .

El ejemplo del espejo circular nos enseña que los rayos ópticos no siempre son los de longitud mínima, también pueden tener longitud máxima. En otros tipos de espejos pueden aparecer rayos ópticos en los que la función  $\mathcal{D}$  tiene un punto crítico en el que no se alcanza máximo o mínimo.

**Ejercicio.** Se considera el espejo de ecuación  $y = \frac{x^2}{2} + x^3$  y los puntos  $A = B = (0, 1)$ . Demuestra que el rayo vertical que emana de  $A$  y vuelve al mismo punto da lugar a un punto crítico de la función  $\mathcal{D}$ . ¿Qué tipo de punto crítico es?

Las discusiones anteriores nos llevan a postular el

**Principio variacional modificado:** los rayos ópticos se corresponden con los puntos críticos de  $\mathcal{D}$ .

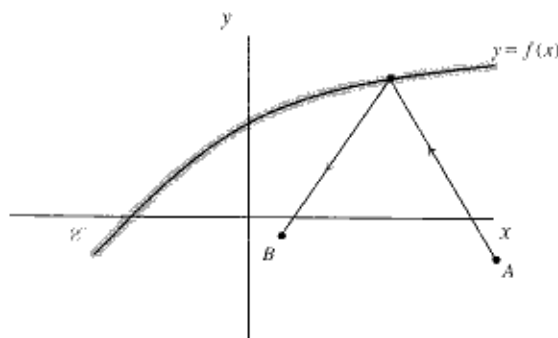
Conviene observar que este principio no es un enunciado matemático preciso, es más bien un procedimiento para construir modelos en Óptica.

### 3.3. Reflexión de la luz en espejos curvos

Para simplificar supondremos que el espejo es una curva explícita

$$\mathcal{E} : y = f(x)$$

donde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable definida en un intervalo abierto  $I$ . Fijamos dos puntos que queden al mismo lado del espejo, por ejemplo  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $a_1, b_1 \in I$ ,  $a_2 < f(a_1)$ ,  $b_2 < f(b_1)$ . Cada rayo virtual que viaja de  $A$  a  $B$  reflejándose en el espejo estará determinado por un punto de  $\mathcal{E}$  con coordenadas  $(x, f(x))$ .



La distancia recorrida por el rayo define la función

$$\mathcal{D}: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(x) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (f(x) - a_2)^2} + \sqrt{(x - b_1)^2 + (f(x) - b_2)^2}.$$

Como los radicandos nunca se anulan esta función es derivable. Sabemos por el principio generalizado que los rayos ópticos se corresponderán con los puntos críticos de  $\mathcal{D}$ . Después de algunos cálculos concluimos que estos puntos cumplen

$$(\infty) \quad \frac{x - a_1 + (f(x) - a_2)f'(x)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (f(x) - a_2)^2}} = \frac{b_1 - x + (b_2 - f(x))f'(x)}{\sqrt{(x - b_1)^2 + (f(x) - b_2)^2}}.$$

**Ejercicio.** Demuestra que si  $I = \mathbb{R}$  entonces  $(\infty)$  tiene al menos una solución.

La ecuación  $(\infty)$  tiene una interpretación geométrica y para llegar a ella necesitamos recordar algunas fórmulas de geometría elemental:

- La ecuación de la *recta tangente* a  $\mathcal{E}$  en el punto  $(x, f(x))$  es

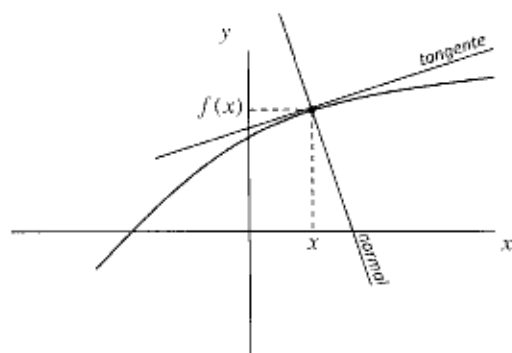
$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

Hemos introducido nuevas variables  $(X, Y)$ ; de esta forma nos podemos desplazar por la curva (se mueve  $x$ ) o por la tangente (se mueve  $X$ ).

La ecuación de la *recta normal* a  $\mathcal{E}$  en  $(x, f(x))$  es

$$X - x + f'(x)(Y - f(x)) = 0.$$

Para llegar a esta fórmula podemos tener en cuenta que las pendientes de dos rectas perpendiculares cumplen  $m_1 \cdot m_2 = -1$ . La expresión anterior es preferible a  $Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$  porque esta última fórmula excluye el caso de tangente horizontal.



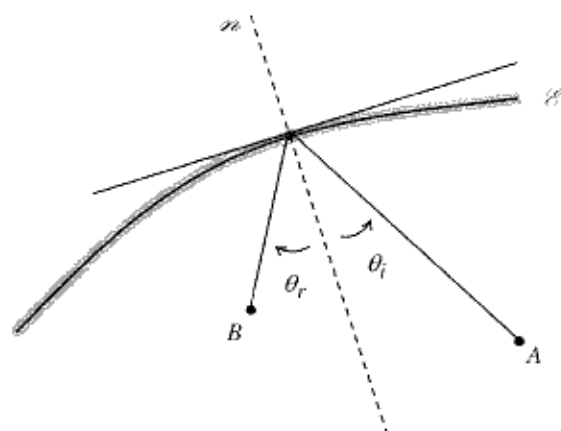
- Dada una recta  $\ell$  de ecuación  $AX + BY + C = 0$  y un punto del plano  $P = (p_1, p_2)$ , la distancia del punto a la recta es

$$\text{dist}(P, \ell) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Con esta información volvemos a la ecuación (2) y observamos que, salvo el signo, los numeradores pueden ser interpretados como evaluaciones en los puntos  $A$  y  $B$  de la forma que define la recta normal. Tomamos valores absolutos y dividimos ambos numeradores por la cantidad positiva  $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ . La ecuación (2) conduce a

$$\frac{\text{dist}(A, n)}{\text{dist}(A, F)} = \frac{\text{dist}(B, n)}{\text{dist}(B, F)}$$

donde  $F = (x, f(x))$  y  $n$  es la recta normal al espejo en el punto  $F$ . El primer término es precisamente el seno del ángulo de incidencia y el segundo el seno del ángulo de reflexión. Hemos obtenido la identidad  $\sin \theta_i = \sin \theta_r$  y, como la función seno es inyectiva en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , recuperamos la fórmula  $\theta_i = \theta_r$ .



**Ejercicio.** Extiende la discusión previa al caso de un espejo que tiene una representación en paramétricas

$$\mathcal{E} : \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I$$

donde  $I$  es un intervalo abierto, las funciones  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  son derivables y la curva paramétrica  $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$  es inyectiva.

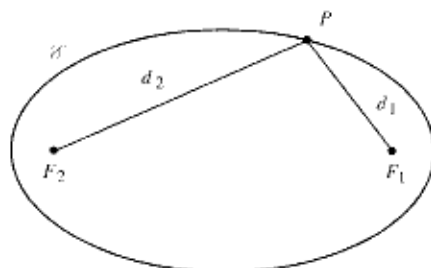
### 3.4. Propiedades ópticas de las cónicas

#### 3.4.1. La elipse

Es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano que cumplen

$$d_1 + d_2 = c$$

donde  $d_i$  es la distancia del punto  $P$  al foco  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  y  $c > 0$  es una constante dada.



Una elipse  $\mathcal{E}$  se determina de manera única por los dos focos  $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$  y la constante  $c$ . Para que el conjunto  $\mathcal{E}$  no sea vacío necesitamos la condición  $c \geq \overline{F_1 F_2}$ .

**Ejercicio.** Describe el conjunto  $\mathcal{E}$  en el caso  $c = \overline{F_1 F_2}$ . La misma cuestión cuando  $F_1 = F_2$  y  $c \geq 0$ .

Supongamos que estamos dentro de un espejo elíptico y consideramos los rayos virtuales que se emiten desde  $F_1$  y, después de reflejarse en  $\mathcal{E}$ , llegan a  $F_2$ . La definición de elipse nos dice que todos esos rayos tienen la misma longitud y por tanto la función  $\mathcal{D}$  es constante ( $= c$ ). En este caso todos los rayos son puntos críticos ( $\mathcal{D}' \equiv 0$ ).

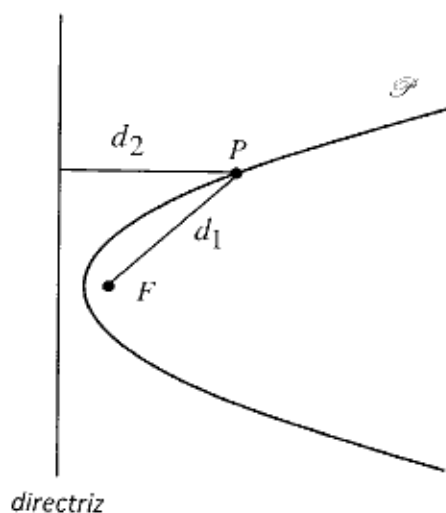
Imaginemos una mesa de billar con forma elíptica, si situamos la bola blanca en un foco y la roja en el otro, podemos lanzar la bola blanca en cualquier dirección, sabemos que después de rebotar en la banda va a golpear la bola roja.

#### 3.4.2. La parábola

Es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano que cumplen

$$d_1 = d_2$$

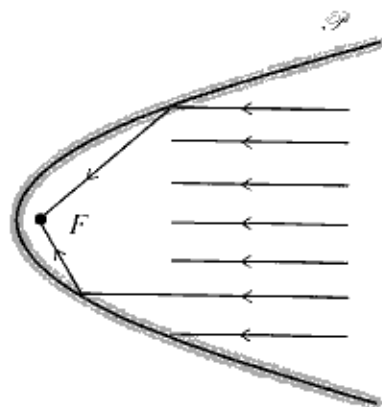
donde  $d_1$  es la distancia del punto  $P$  a una recta (directriz) y  $d_2$  es la distancia de  $P$  a un punto  $F$  (foco).



Una parábola  $\mathcal{P}$  se determina de manera única por el foco  $F$  y la directriz.

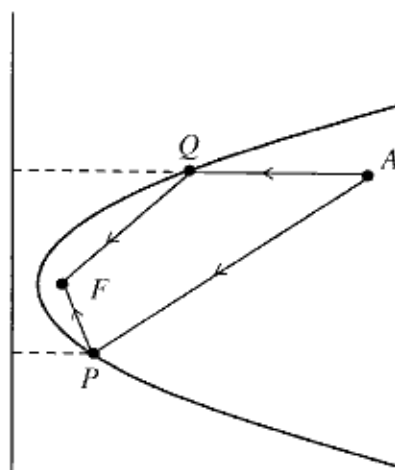
**Ejercicio.** Describe el conjunto  $\mathcal{P}$  cuando  $F$  es un punto en la directriz.

La parábola tiene una propiedad clave para la construcción de antenas: si se lanza una familia de rayos paralelos y perpendiculares a la directriz, todos se reflejan en el foco.





Para probar esta propiedad fijaremos un punto arbitrario  $A$  que quede al mismo lado del espejo  $\mathcal{P}$  que el foco y consideraremos los rayos virtuales que viajan de  $A$  a  $B = F$  después de reflejarse. Para no confundirnos con el foco ahora llamaremos  $P$  al punto del espejo en el que se refleja el rayo virtual. Llamaremos  $Q$  al punto de corte de la parábola con la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a la directriz.



Dado  $P \in \mathcal{P}$ ,  $P \neq Q$ , observamos que  $\overline{PF} = d_1 = d_2 = \text{dist}(P, \text{directriz})$ . El camino más corto desde el punto  $A$  a la directriz es la recta perpendicular que pasa por  $Q$ , entonces

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \text{dist}(P, \text{directriz}) > \overline{AQ} + \text{dist}(Q, \text{directriz}) = \overline{AQ} + \overline{QF}.$$

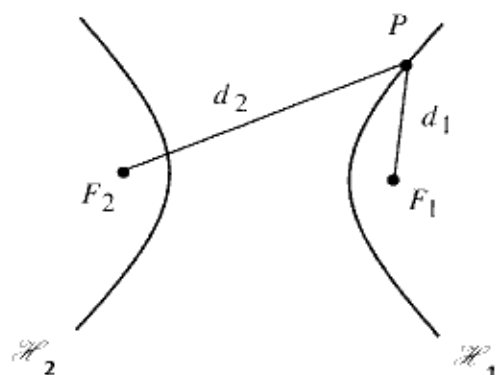
Hemos probado la desigualdad  $\mathcal{D}(P) > \mathcal{D}(Q)$  y por tanto  $\mathcal{D}$  alcanza un mínimo global estricto en el punto  $Q$ .

### 3.4.3. La hipérbola

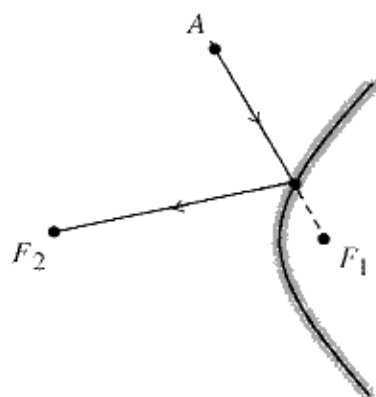
Es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano que cumplen

$$|d_1 - d_2| = c$$

donde  $d_i$  es la distancia del punto  $P$  al foco  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  y  $c > 0$  es una constante dada.

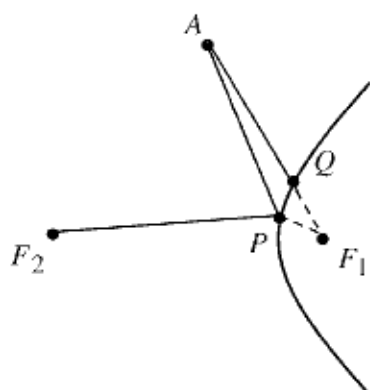


Una hipérbola  $\mathcal{H}$  se determina de manera única por los dos focos  $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$  junto con la constante  $c \leq \overline{F_1 F_2}$ . La rama más cercana al foco  $F_1$  se denotará por  $\mathcal{H}_1$  y está formada por los puntos para los que se cumple  $d_2 - d_1 = c$ . Imaginemos un espejo hiperbólico  $\mathcal{H}_1$  y un punto  $A$  en el mismo lado que  $F_2$ . Se cumple la siguiente propiedad: el rayo de luz que emana de  $A$  en la dirección de  $F_1$  se refleja en  $F_2$ .



Para probar esta afirmación llamamos  $Q$  al único punto en  $\mathcal{H}_1$  que está en el segmento que une  $A$  y  $F_1$  y consideramos el espacio de rayos virtuales que emanan de  $A$ , se reflejan en el espejo y llegan a  $B = F_2$ . Un punto genérico del espejo se denotará como  $P \in \mathcal{H}_1$ . La longitud del rayo virtual está dada por la función

$$D : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(P) = \overline{AP} + \overline{PF_2}.$$

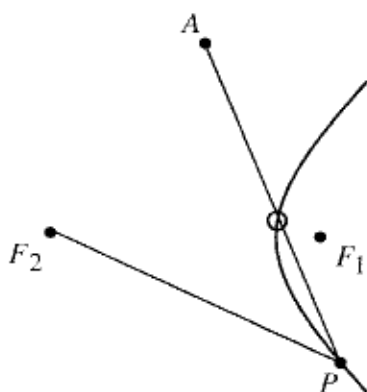


Por la desigualdad triangular sabemos que  $\overline{AP} + \overline{PF_1} \geq \overline{AF_1}$  y la desigualdad es estricta a menos que  $P$  coincida con  $Q$ . Entonces  $\mathcal{D}(P) \geq \overline{AF_1} - \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$  y, como  $P$  y  $Q$  son puntos de  $\mathcal{H}_1$ ,

$$\mathcal{D}(P) \geq \overline{AF_1} + c = \overline{AF_1} + \overline{QF_2} - \overline{QF_1}.$$

Los puntos  $A$ ,  $Q$  y  $F_1$  están alineados y por tanto  $\overline{AF_1} = \overline{AQ} + \overline{QF_1}$ . Sustituyendo en la desigualdad anterior se obtiene  $\mathcal{D}(P) \geq \mathcal{D}(Q)$  con desigualdad estricta si  $P \neq Q$ . Concluimos que la función  $\mathcal{D}$  tiene un mínimo global estricto en  $Q$ .

Hay un aspecto criticable en el argumento anterior. Hemos identificado los rayos virtuales con los puntos de la rama de hipérbola, pero muchos de estos puntos pueden no ser visibles desde  $A$ ; hemos permitido que el rayo atravesase el espejo en ocasiones.



Para evitar esta situación paradójica podemos restringir el espacio de rayos virtuales y considerar solo los puntos de la rama de hipérbola que son visibles desde  $A$ .

Diremos que un punto  $P \in \mathcal{H}_1$  es visible desde  $A$  si el segmento abierto que une los dos puntos no corta a la rama de hipérbola; es decir,

$$\lambda A + (1 - \lambda)P \notin \mathcal{H}_1, \text{ si } \lambda \in ]0, 1[.$$

Parece lógico considerar la función  $\mathcal{D}$  sobre el dominio

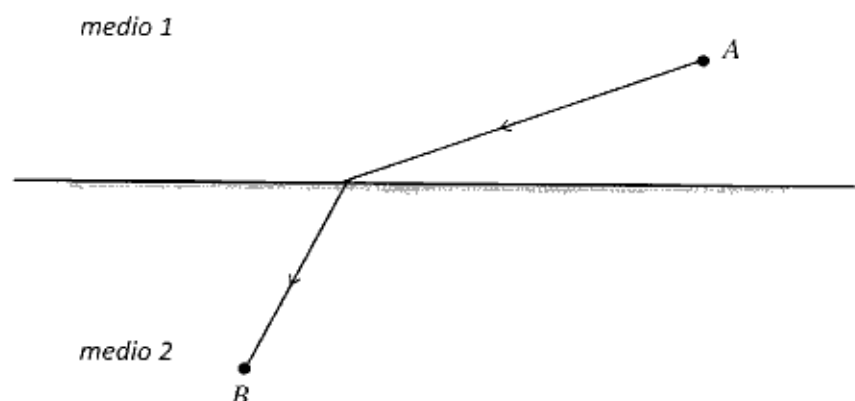
$$\mathcal{V}_A = \{P \in \mathcal{H}_1 : P \text{ es visible desde } A\}.$$

**Ejercicio.** Demuestra que para cualquier punto  $A \notin \mathcal{H}_1$  el conjunto  $\mathcal{V}_A$  no es vacío.

**Ejercicio.** Describe  $\mathcal{V}_A$  si  $A$  es el centro de la hipérbola.

### 3.5. La refracción de la luz y el principio de Fermat

La luz se propaga en línea recta en un medio óptico homogéneo, pero el rayo cambia de dirección cuando pasa de un medio a otro. Así le ocurre a los rayos que pasan del aire al agua.

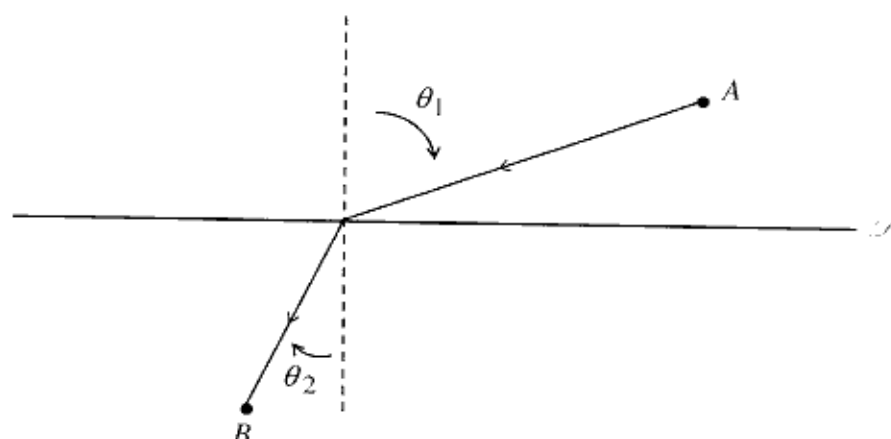


En este caso el rayo óptico no hace mínima la distancia de  $A$  a  $B$ , lo que va en contra del principio de Herón.<sup>4</sup> El fenómeno de la refracción se puede cuantificar a partir de experimentos. Dados dos medios, 1 y 2, que están separados por una recta  $\ell$ , se cumple la ley de Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \text{constante}.$$

<sup>4</sup>El principio generalizado tampoco se ajusta a la refracción; sabemos que la función  $\mathcal{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no tiene más punto crítico que el mínimo

Los ángulos están medidos desde la perpendicular a  $\ell$  que pasa por el punto de incidencia.



La constante la designaremos por  $n_{21}$  y solo depende de los medios: aire-agua, vacío-aire, etcétera. Como los rayos de luz son reversibles, podemos pensar también que el rayo viaja de  $B$  a  $A$  y los ángulos intercambiarán su papel, ahora la ley de Snell se cumplirá con

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}.$$

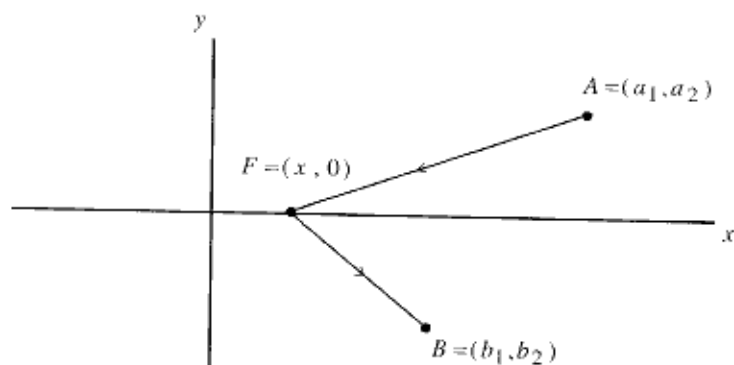
En el siglo XVII Fermat propuso un nuevo principio que permite explicar simultáneamente la reflexión y la refracción. Admitamos que la luz viaja a velocidad finita y que esta velocidad depende del medio. En el vacío la luz alcanza su velocidad máxima, en el aire es más veloz que en el agua, etcétera. Postulamos que el rayo busca el camino más rápido para viajar de  $A$  a  $B$ ; en general este camino no tiene que coincidir con el más corto. Con más precisión, suponemos que la velocidad de la luz es  $v_1$  en el medio 1 y  $v_2$  en el 2, identificamos el espacio de rayos virtuales con los puntos  $F$  de la recta  $\ell$  y consideramos la función tiempo empleado por el rayo

$$T: \ell \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(F) = \frac{1}{v_1} \overline{AF} + \frac{1}{v_2} \overline{FB}.$$

Hemos usado que, como la velocidad es constante en cada medio, se cumple la fórmula *velocidad = espacio/tiempo* mientras no cambiamos de zona.

**Ejercicio.** Demuestra que en un medio óptico homogéneo con velocidad  $v > 0$  las funciones  $D$  y  $T$  están relacionadas por la fórmula  $D = vT$ . En este ambiente los principios de Herón y Fermat coinciden.

Introducimos coordenadas  $x, y$  en el plano y suponemos que la recta  $\ell$  coincide con el eje de abscisas. Suponemos  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  con  $a_2 > 0 > b_2$  y describimos cada rayo virtual por el punto  $F = (x, 0)$ ,



el tiempo empleado está descrito por la función

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}.$$

Esta función es continua y coerciva,

$$T(x) \geq \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)|x| - \frac{a_1}{v_1} - \frac{b_1}{v_2} \rightarrow +\infty \text{ si } |x| \rightarrow \infty.$$

Por tanto podemos afirmar que  $T$  tiene un mínimo global. Esta función es infinitamente derivable y calculamos las dos primeras derivadas,

$$T'(x) = \frac{x - a_1}{v_1 \sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}} + \frac{x - b_1}{v_2 \sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}},$$

$$T''(x) = \frac{a_2^2}{v_1 ((x - a_1)^2 + a_2^2)^{3/2}} + \frac{b_2^2}{v_2 ((x - b_1)^2 + b_2^2)^{3/2}}.$$

La segunda fórmula muestra que la derivada segunda es positiva ( $T''(x) > 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ ) y entonces la derivada primera  $T'$  es estrictamente creciente y hay a lo sumo un punto crítico. Como ya sabíamos que hay mínimo, concluimos que hay una única solución de  $T'(x) = 0$ .

**Ejercicio.** Demuestra que una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  que cumple  $f''(x) > 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  tiene a lo sumo un punto crítico. Además en ese punto crítico la función alcanza un mínimo global estricto. ¿Puede ocurrir que  $f$  no tenga puntos críticos?

La condición de punto crítico nos lleva a la ecuación,

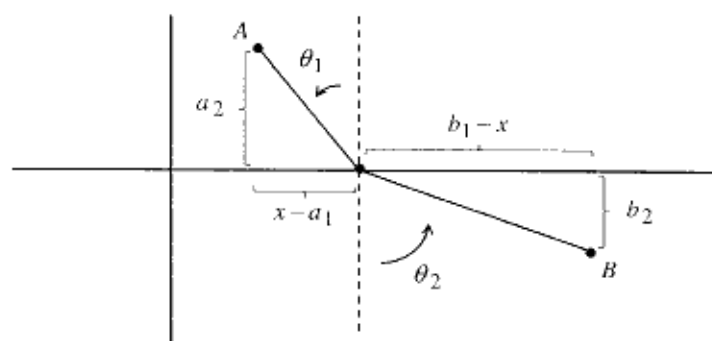
$$(\angle) \quad \frac{x - a_1}{v_1 \sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}} = \frac{b_1 - x}{v_2 \sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}}.$$

Elevando al cuadrado y después de algunos cálculos se llega a una ecuación polinómica de grado 4. En lugar de seguir ese camino vamos a pensar de manera geométrica, mostraremos que la identidad  $(\angle)$  no es más que la ley de Snell. Para simplificar suponemos que  $a_1 < b_1$ . De la ecuación deducimos que  $x - a_1$  y  $b_1 - x$  tienen el mismo signo, lo que implica  $x \in ]a_1, b_1[$ . Por la definición del seno de un ángulo,

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{x - a_1}{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}}, \quad \text{sen } \theta_2 = \frac{b_1 - x}{\sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}}$$

y la ecuación  $(\angle)$  se convierte en

$$\frac{1}{v_1} \text{sen } \theta_1 = \frac{1}{v_2} \text{sen } \theta_2.$$



**Ejercicio.** Estudia el caso  $a_1 \geq b_1$ .

Hemos probado que la ley de Snell es una consecuencia del principio de Fermat y además hemos obtenido una importante fórmula para el coeficiente de refracción,

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Antes  $n_{21}$  era una constante experimental pero ahora la podemos definir a partir de constantes más básicas ( $v_1$  y  $v_2$ ). Esto nos permite conectar los coeficientes de refracción en tres medios,

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_3} \frac{v_3}{v_2} = n_{31} n_{23}.$$

Dado un medio óptico  $\alpha$  se define el índice de refracción absoluto como el coeficiente de refracción al pasar del vacío al medio  $\alpha$ ,

$$n_{\alpha} = \frac{c}{v_{\alpha}},$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Se cumple

$$n_{\alpha\beta} = \frac{n_{\alpha}}{n_{\beta}}.$$

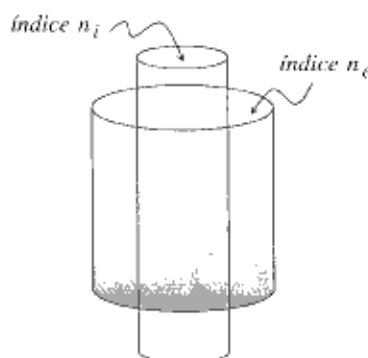
**Ejercicio.** Modela la refracción de la luz en un espacio tridimensional y prueba que se llega a las mismas conclusiones que en el modelo plano.

Hasta ahora hemos supuesto que la separación entre los medios 1 y 2 es una recta o un plano, pero también podemos considerar el caso de curvas y superficies. En ese caso aparecen rayos ópticos que no son mínimos de la función  $T$  y conviene enunciar un principio generalizado,

*Principio de Fermat:* en el espacio de los rayos virtuales que viajan de  $A$  a  $B$  se considera la función  $T$ , tiempo empleado por cada rayo; entonces los rayos ópticos son los puntos críticos de  $T$ .

### 3.6. Fibra óptica

El objetivo es transmitir señales luminosas a través de un cable muy largo y delgado hecho de plástico transparente. Interesa entonces que el rayo de luz se oriente hacia el centro, pues de esa manera se evita que pueda salirse del cable. Para que las matemáticas no sean muy complicadas vamos a presentar un diseño simple.



Pensemos en un cable infinito de forma cilíndrica que contiene un cilindro interior más delgado; el índice de refracción es  $n_i$  dentro del cilindro pequeño y  $n_e$  en la región periférica. Si hacemos  $n_e > n_i$  la velocidad de la luz será mayor en la región interior y los rayos preferirán esa zona.



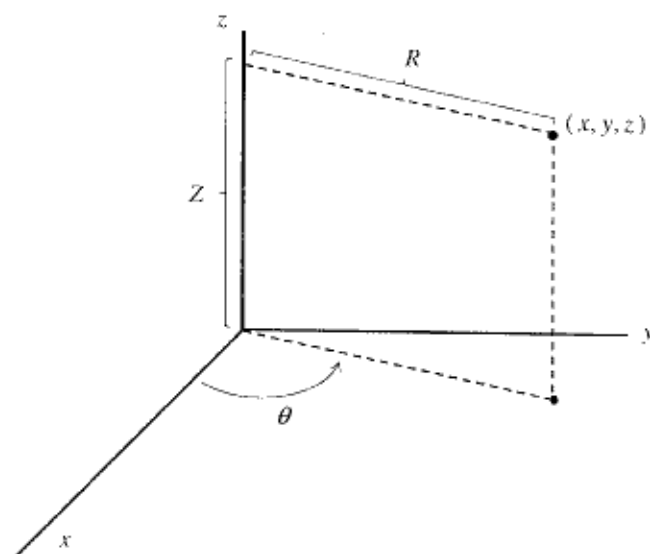
Para modelar una situación concreta fijamos cilindros concéntricos de radios 1 y  $\frac{1}{2}$  alrededor del eje  $z$ ,

$$C_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}.$$

Con esta geometría es muy conveniente usar *coordenadas cilíndricas* en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$(\theta, R, Z), \quad \theta = \theta + 2\pi, \quad R > 0, \quad Z \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = Z \end{cases}$$

Estas coordenadas son únicas para los puntos del espacio que no están en el eje  $z$ .

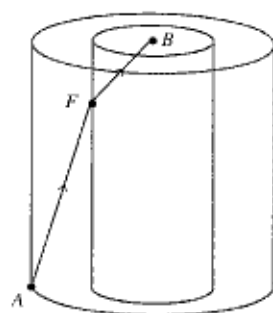


Los cilindros se expresan como

$$C_c : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = Z \end{cases} \quad C_i : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} \sin \theta \\ z = Z \end{cases}$$

con  $\theta, Z \in \mathbb{R}$ . El índice de refracción es  $n_i$  en  $\{R < \frac{1}{2}\}$  y  $n_e$  en  $\{\frac{1}{2} < R \leq 1\}$ . Usaremos el principio de Fermat para determinar los rayos que viajan del punto  $A = (1, 0, 0)$  al punto  $B = (0, 0, 1)$ . Observamos que  $A$  está en la zona exterior y  $B$  en la interior y por tanto la luz se refracta.

Los rayos virtuales viajan de  $A$  a  $B$  pasando por un punto  $F$  en  $C_i$ .



No todos los puntos del cilindro pequeño  $C_i$  son visibles desde  $A$ , por eso es conveniente restringir el espacio de rayos virtuales. Diremos que  $F = (x, y, z) \in C_i$  es visible desde  $A$  si  $\lambda F + (1 - \lambda)A \notin C_i$  para cada  $\lambda \in ]0, 1[$ . Consideramos la función tiempo

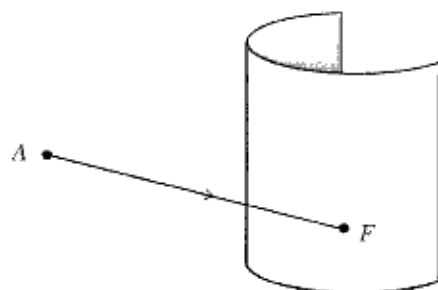
$$T : \mathcal{V}_A \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(F) = \frac{1}{v_e} \overline{AF} + \frac{1}{v_i} \overline{FB}$$

donde

$$\mathcal{V}_A = \{(x, y, z) \in C_i : (x, y, z) \text{ es visible desde } A\},$$

y  $v_e = \frac{c}{n_e}$ ,  $v_i = \frac{c}{n_i}$ .

Antes de estudiar esta función conviene describir con precisión el conjunto  $\mathcal{V}_A$ . De manera intuitiva parece claro que  $\mathcal{V}_A$  debe ser un conjunto con forma de teja



que se escribirá en la forma

$$\mathcal{V}_A = \left\{ \left( \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, Z \right) : |\theta| \leq \Theta, Z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vamos a demostrar esta afirmación y de paso calcularemos  $\Theta$ .

Dado un punto  $F = (\frac{1}{2}\cos \theta, \frac{1}{2}\sin \theta, Z) \in C_i$  queremos saber si existe algún  $\lambda \in ]0, 1[$  que cumpla<sup>5</sup>

$$\lambda(\frac{1}{2}\cos \theta, \frac{1}{2}\sin \theta, Z) + (1 - \lambda)(1, 0, 0) \in C_i.$$

Esta relación es equivalente a

$$(\frac{\lambda}{2}\cos \theta + 1 - \lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{4}\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

y, después de algunos cálculos,

$$(5 - 4\cos \theta)\lambda^2 + (4\cos \theta - 8)\lambda + 3 = 0.$$

Como es lógico  $\lambda = 1$  es una solución de esta ecuación. La segunda solución se obtiene de la fórmula para resolver la ecuación cuadrática

$$\lambda_{\pm} = \frac{8 - 4\cos \theta \pm \sqrt{\Delta}}{2(5 - 4\cos \theta)}$$

con  $\Delta = (4\cos \theta - 8)^2 - 12(5 - 4\cos \theta) = (4\cos \theta - 2)^2$ . Entonces

$$\lambda_{\pm} = \frac{4 - 2\cos \theta \pm |2\cos \theta - 1|}{5 - 4\cos \theta}.$$

Para deshacernos del valor absoluto distinguimos dos casos:

- Si  $|\theta| \leq \frac{\pi}{3}$  se cumple  $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$  y  $\lambda_+ = \frac{3}{5 - 4\cos \theta} \geq 1$ ,  $\lambda_- = 1$ . El punto es visible.
- Si  $\frac{\pi}{3} < |\theta| \leq \pi$  se cumple  $\cos \theta < \frac{1}{2}$  y  $\lambda_+ = 1$ ,  $\lambda_- = \frac{3}{5 - 4\cos \theta} \in ]0, 1[$ . El punto no es visible.

Hemos confirmado la descripción intuitiva de  $\mathcal{V}_A$  y además ahora sabemos que  $\Theta = \frac{\pi}{3}$ .

**Ejercicio.**  $\mathcal{V}_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, x \geq \frac{1}{4}\}$ .

Hemos identificado los rayos virtuales con los puntos de  $\mathcal{V}_A$ . Podemos describir esos puntos con las coordenadas cilíndricas  $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  y  $z \in \mathbb{R}$ . El tiempo empleado por los rayos se convierte en una función de dos variables,

$$\mathcal{T} : [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, z) \mapsto \mathcal{T}(\theta, z) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_e} \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\cos \theta)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 \theta + z^2} + \frac{1}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2 \theta + \frac{1}{4}\sin^2 \theta + (z - 1)^2} \\ &= \frac{1}{v_e} \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta + z^2} + \frac{1}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} + (z - 1)^2}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Si es posible encontrar  $\lambda$  entonces el punto no es visible

Vamos a probar que esta función tiene un mínimo global que se alcanza en un único punto. Para ello comenzamos observando que se cumple la desigualdad

$$\mathcal{T}(\theta, z) \geq \frac{1}{v_e} \sqrt{\frac{1}{4} + z^2} + \frac{1}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} + (z-1)^2} = \mathcal{T}(0, z).$$

Esta desigualdad es estricta si  $\theta \neq 0$ . Consideramos ahora la restricción de la función  $\mathcal{T}$  a la recta  $(0, z)$ , estos puntos se corresponden con los rayos virtuales que permanecen en el plano que contiene a los puntos  $A$  y  $B$  y al eje  $z$ . Hemos llegado a la función de una variable

$$\hat{\mathcal{T}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{\mathcal{T}}(z) = \frac{1}{v_e} \sqrt{\frac{1}{4} + z^2} + \frac{1}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} + (z-1)^2}.$$

Esta función ya nos ha aparecido en el estudio de la refracción de la luz y sabemos que tiene un mínimo global que se alcanza en la solución  $z = z^*$  de la ecuación

$$\frac{z}{v_e \sqrt{\frac{1}{4} + z^2}} = \frac{1-z}{v_i \sqrt{\frac{1}{4} + (z-1)^2}}.$$

Como consecuencia de lo anterior, la función  $\mathcal{T}$  de dos variables tiene un mínimo global estricto que se alcanza en  $(0, z^*)$ .

**Ejercicio.** Demuestra que  $z^* \rightarrow 0$  si  $\frac{n_2}{n_1} \rightarrow 0$ . Es decir, el rayo entra muy pronto en el cilindro pequeño si hay mucho contraste entre las regiones interior y exterior.

En principio se podría pensar en la posibilidad de obtener otros rayos ópticos que sean puntos críticos de  $\mathcal{T}$  pero no mínimos globales. Si se conoce la teoría de funciones de varias variables se puede comprobar que esto no ocurre. Un punto crítico de una función en varias variables es un punto donde se anulan todas las derivadas parciales. La función  $\mathcal{T}$  tiene derivadas parciales respecto a  $\theta$  y respecto a  $z$ . Aplicamos el principio de Fermat generalizado y llegamos al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} = 0.$$

Es decir,

$$\begin{cases} \frac{1}{v_e} \frac{\sin \theta}{2\sqrt{\frac{1}{4} - \cos \theta + z^2}} = 0 \\ \frac{1}{v_e} \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{4} - \cos \theta + z^2}} + \frac{1}{v_i} \frac{z-1}{\sqrt{\frac{1}{4} + (z-1)^2}} = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación deducimos que  $\sin \theta = 0$  y como  $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  se cumple  $\theta = 0$ . Ahora la segunda ecuación se convierte en  $\hat{\mathcal{T}}'(z) = 0$  y concluimos que el único punto crítico es  $(0, z^*)$ .

*Cada siglo se mofa del anterior, acusándolo de haber generalizado con demasiada ligereza e ingenuidad. Descartes se compadecía de los jónicos; hoy Descartes nos hace sonreír; sin ninguna duda nuestros hijos se reirán de nosotros algún día.*

*[...] El físico que acaba de renunciar a una de sus hipótesis debe estar contento, acaba de encontrar una ocasión inesperada para el descubrimiento. Me imagino que no había formulado su hipótesis a la ligera, que había tenido en cuenta todos los factores que parecían intervenir en el fenómeno. Pero si el experimento la refuta, es que hay alguna cosa no esperada, extraordinaria; es porque se ha encontrado lo desconocido, lo nuevo. ¿Ha sido estéril la hipótesis rechazada? Por el contrario, se puede decir que ha sido más útil que una hipótesis verdadera, ha dado lugar al experimento decisivo.*

Henri Poincaré, La Ciencia y la Hipótesis.

### 3.7. Problemas

**3.1** Decide en cada caso si las condiciones dadas garantizan que la función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza el mínimo,

- (i)  $X = \mathbb{R}$ ,  $f$  periódica
- (ii)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} f(x) > 0$ ,  $f(0) = 0$
- (iii)  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$
- (iv)  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  doblemente periódica,

$$f(x_1 + 2\pi, x_2) = f(x_1, x_2 + 2\pi) = f(x_1, x_2).$$

**3.2** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que cumple

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demuestra que  $f$  alcanza el máximo pero no el mínimo.

**3.3** En el espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, z)$  se sitúa un espejo en el plano  $z = 0$ . Formula un principio variacional para los rayos virtuales que emanan de  $A = (1, 0, 1)$  y llega a  $B = (0, 1, 1)$ . Calcula el rayo óptico ¿en qué plano se encuentra?

**3.4** Se considera un espejo parabólico de ecuación  $y = x^2$  y se emiten rayos de luz desde el punto  $P = (0, \alpha)$  en todas las direcciones. Determina, según los valores de  $\alpha > 0$ , el número de estos rayos que retornarán a  $P$  después de reflejarse en el espejo.

**3.5** Establece un principio variacional para describir la trayectoria de los rayos de luz que viajan de un punto  $A$  a un punto  $B$  después de reflejarse cinco veces en un espejo parabólico. Esboza uno de estos rayos.

**3.6** Describe todos los rayos de luz que parten del punto  $A = (1, 0)$  y llegan a  $B = (-1, 0)$  después de reflejarse en un espejo de ecuación  $x^2 + y^2 = 4$ .

**3.7** Encuentra todos los rayos que salen de  $A = (2, 2)$  y retornan a ese punto después de reflejarse en el espejo hiperbólico  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

**3.8** El conocido físico Sheldon Cooper ha publicado un artículo donde se establece un nuevo principio para explicar la reflexión de la luz: *de entre todos los rayos virtuales que unen  $A$  y  $B$ , el rayo óptico es el que hace mínima la medida (=área) del triángulo  $AFB$ , donde  $F$  es el punto de incidencia sobre el espejo.* ¿Es fácil refutar este principio?

**3.9** Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con  $a > b > 0$ .

(i) Calcula los focos.

(ii) Se considera un espejo elíptico con  $a = 3$ ,  $b = 2$ . Encuentra los rayos que salen de  $(0, 0)$  y retornan al mismo punto después de reflejarse en el espejo. Idéntica cuestión si el rayo sale de  $(\sqrt{5}, 0)$  y llega a  $(-\sqrt{5}, 0)$ .

**3.10** Se considera la parábola

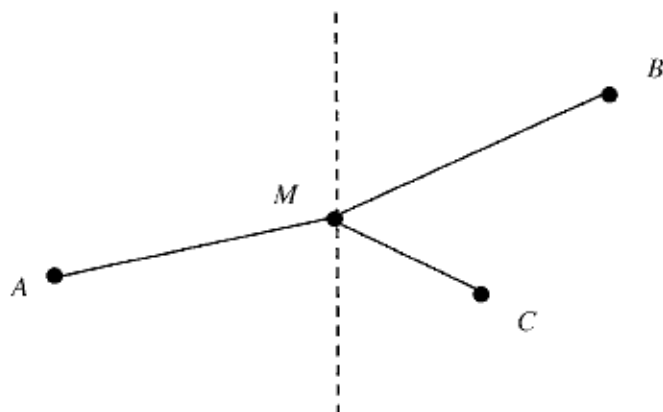
$$y = ax^2$$

con  $a > 0$ .

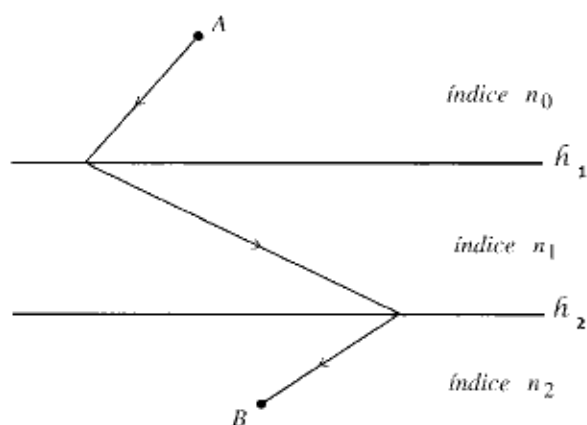
(i) Calcula el foco y la directriz.

(ii) Se considera un espejo parabólico con  $a = 1$ . Encuentra los rayos que viajan del punto  $A = (0, \frac{1}{4})$  al punto  $B = (b_1, b_2)$  con  $b_2 > b_1^2$ .

**3.11** Las ciudades  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  y  $C = (c_1, c_2)$  se van a unir por una carretera con un cruce situado en algún punto del tipo  $M = (0, y)$ . Cada kilómetro de carretera cuesta 3 millones de euros en la región  $\{x < 0\}$  y 4 millones en  $\{x > 0\}$ . Encuentra la ecuación que ha de cumplir  $y$  para que el coste total sea mínimo. [Se supone  $a_1 < 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $c_1 > 0$ ].



**3.12** Tres medios ópticos con coeficientes de refracción  $n_0$ ,  $n_1$  y  $n_2$  están separados por dos líneas horizontales  $h_1$  y  $h_2$ . Suponemos que  $h_1$  queda por encima de  $h_2$ . Se fijan dos puntos  $A$  (por encima de  $h_1$ ) y  $B$  (por debajo de  $h_2$ ). Aplica el principio de Fermat en el espacio de rayos virtuales indicado en la figura. ¿Se cumple la ley de Snell en este caso?





## Lección 4

# La escala musical y los números reales

### 4.1. Ondas sonoras

Al presionar una tecla del piano, la cuerda correspondiente se pone en movimiento y su vibración se transmite por el aire. Las oscilaciones de la cuerda se pueden representar por una función de dos variables<sup>1</sup>

$$u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto u(t, x)$$

donde  $u$  es la altura,  $t$  es el tiempo y  $x$  es la posición horizontal. El número  $L$  representa la longitud de la cuerda en equilibrio. La cuerda es muy elástica y está fija en los extremos,

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Es costumbre visualizar las funciones de dos variables como superficies en el espacio pero en este caso es más conveniente pensar que se trata de una película que, en cada instante  $t$ , nos dibuja la gráfica de una función de una variable,

$$u(t, \cdot) = \text{posición de la cuerda en el instante } t.$$

Pensemos por ejemplo en la función

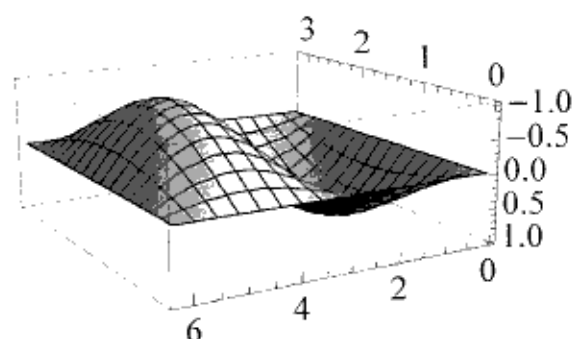
$$u(t, x) = \sin t \sin x, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$$

que puede representar el movimiento de una cuerda de longitud  $L = \pi$ .

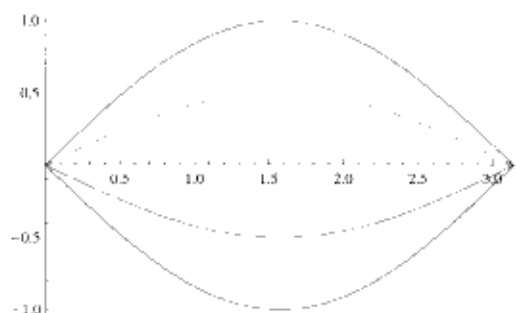
---

<sup>1</sup>Se trata de una suposición que, entre otras cosas, excluye la torsión de la cuerda

Su gráfica es la superficie



pero también la podemos pensar como una onda sinusoidal cuyo máximo oscila de manera periódica.



El sonido del tambor tiene un origen distinto, se produce por las vibraciones de una membrana. Si suponemos que se trata de un tambor circular aparece una función de tres variables

$$u : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x, y) \mapsto u(t, x, y)$$

donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  es un disco de radio  $R$ . Puesto que el borde del parche queda sujeto a la caja suponemos

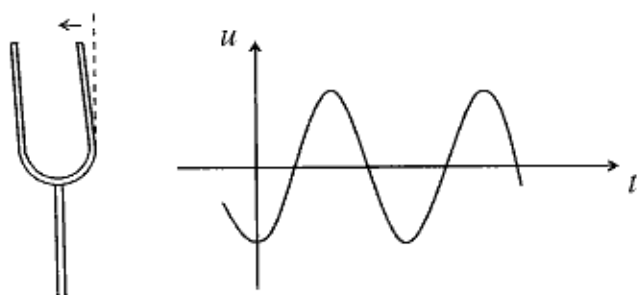
$$u(t, x, y) = 0 \quad \text{si } x^2 + y^2 = R^2.$$

**Ejercicio.** Describe de manera dinámica las vibraciones producidas por la función  $u(t, x, y) = (1 - x^2 - y^2) \cos t$ . Se supone  $R = 1$ .

Un instrumento mucho más simple que el piano o el tambor es el diapasón. Se trata de una horquilla metálica que produce una vibración al golpearla. En este caso se puede representar la onda por una función de una variable,

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto u(t)$$

que representa la desviación  $u$  del extremo del diapasón en cada instante  $t$ . Esta desviación se mide con respecto a la posición de equilibrio.



El diapasón tiene la virtud de emitir sonidos muy puros y por eso se utiliza como referencia para afinar instrumentos musicales. En términos matemáticos podemos decir que la vibración que produce es una función trigonométrica del tipo

$$u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ . Los números  $a$  y  $b$  dependerán del instante e intensidad de golpeo, el número  $\omega$  solo depende de la geometría y material del que esté hecho el diapasón. Las funciones trigonométricas son periódicas con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

**Ejercicio.** Prueba esta afirmación usando que las funciones seno y coseno son periódicas de periodo  $2\pi$ .

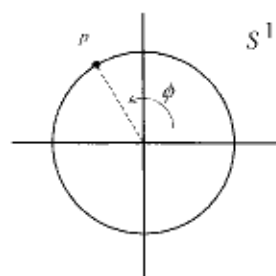
En cada periodo la función  $u(t)$  realiza una oscilación completa (*un ciclo*). El número de ciclos por segundo  $\nu$  se denomina *frecuencia* y se mide en hercios (*Herz*). Se determina por una simple regla de tres,

tiempo		ciclos
$T$ sg	—	$1$ Hz
$1$ sg	—	$\nu$ Hz

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

El oído humano capta las vibraciones entre 20 y 20,000 hercios, el rango para el de un perro va de los 50 a los 46,000. Para que todos los instrumentos y orquestas tengan una afinación común se hace la convención de establecer un La con 440 hercios, por eso los diapasones más comunes producen vibraciones con  $\omega = 880\pi = 2764'601\dots$

Para entender mejor la clase de funciones trigonométricas suponemos que el número  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  es estrictamente positivo y observamos que el punto  $p = (\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$  está en la circunferencia unidad  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Entonces existe un único ángulo  $\phi \in [0, 2\pi[$  que es argumento del punto,  $p = (\cos \phi, \sin \phi)$ .



Deducimos que

$$u(t) = A\left(\frac{a}{A}\cos \omega t + \frac{b}{A}\sin \omega t\right) = A(\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t)$$

y, de la fórmula del coseno de la diferencia<sup>2</sup>,

$$u(t) = A \cos (\omega t - \phi).$$

El número  $A$  es el máximo de la función  $u(t)$  y se suele llamar *amplitud*, el número  $-\phi$  es la *fase inicial*. Dibujamos la gráfica de una función trigonométrica en tres pasos: en el plano  $(t, u)$  trazamos una banda horizontal entre  $u = -A$  y  $u = A$ , a continuación dibujamos una onda de tipo coseno que está enmarcada en esa banda y va de  $t = \frac{\phi}{\omega}$  a  $t = \frac{\phi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}$ , por último extendemos esta función a toda la recta real por periodicidad.

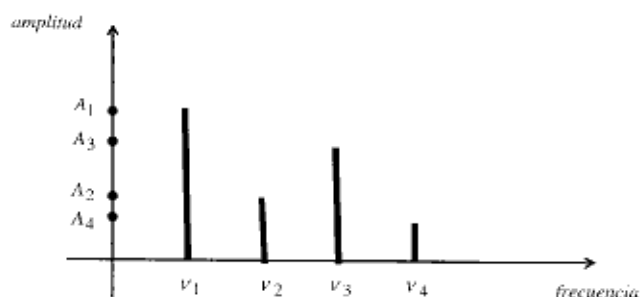
**Ejercicio.** Calcula la amplitud, frecuencia y fase inicial de la función  $u(t) = \sin \sqrt{2}t + \cos \sqrt{2}t$ .

En los pianos convencionales hay unos martillos que golpean cuerdas metálicas muy tensas, pero hay una clase de pianos en la que se sustituyen las cuerdas por diapasones. Las vibraciones producidas por un instrumento de este tipo y con  $N$  teclas son

$$(\boxplus) \quad u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) + \dots + A_N \cos(\omega_N t - \phi_N).$$

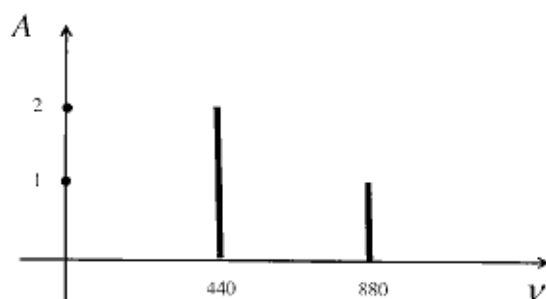
<sup>2</sup> $\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$

Los números  $A_i$  y  $\phi_i$  dependen del pianista (la pulsación y el tempo) mientras que los  $\omega_i$  dependen de las clases de diapasones empleadas para construir el piano. Es costumbre representar estas ondas por un diagrama de barras en el plano  $(\nu, A)$ .



En este diagrama se pierde la información sobre las fases.

**Ejercicio.** Describe todas las funciones de la clase  $(\boxplus)$  con diagrama



Cada uno de los sumandos en la fórmula  $(\boxplus)$  se denomina *armónico* (y también *harmónico*). Los armónicos tienen periodos distintos

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \dots, T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$$

y en general la función  $u(t)$  no es periódica.

**Ejercicio.** Demuestra que la función  $u(t) = \cos t + \cos \sqrt{2}t$  no es periódica.

La función  $u(t)$  sí es periódica cuando todas las frecuencias son múltiplos de la frecuencia correspondiente al primer armónico, es decir

$$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \dots, \omega_N = N\omega.$$

En este caso todos los periodos son divisores de  $T_1$ ,

$$T_1 = 2T_2 = 3T_3 = \dots = NT_N$$

y esto hace que  $T_1$  sea un periodo común para todos los armónicos. Por ejemplo, la función  $u(t) = \sin 3t + \cos 5t$  tiene periodo  $2\pi$  pues se puede expresar en la forma (II) con  $N = 5$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = 1$ ,  $A_4 = 0$ ,  $A_5 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\omega_k = k\omega$ ,  $\phi_3 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_5 = 0$ .

**Ejercicio.** Dada una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de periodo  $T$ , demuestra que los múltiplos  $2T, 3T, \dots, NT$  son también periodos de  $f$ .

**Ejercicio.** Dadas dos funciones  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con periodo común  $T$ , demuestra que la función  $f + g$  también es periódica con periodo  $T$ .

Leibniz decía que la música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando. Esta frase puede ser un poco exagerada pero al menos es cierto que percibimos lo periódico. Un piano construido con  $\omega_1, \dots, \omega_N$  cualesquiera solo produciría ruido, pero si se escogen estos números en progresión aritmética,  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $\omega_3 = 3\omega$ ,  $\dots$ ,  $\omega_N = N\omega$ , entonces será posible hacer música.

Los instrumentos de cuerda emiten ondas que se pueden representar por funciones de dos variables de la forma

$$u(t, x) = A_1(x) \cos(\omega t - \phi_1) + A_2(x) \cos(2\omega t - \phi_2) + \dots + A_N(x) \cos(N\omega t - \phi_N) + \dots$$

La suma puede ser infinita y en ese caso hay que interpretarla como una serie pero en todos los casos la función  $u(t, x)$  es periódica en la variable  $t$ .<sup>3</sup>

En un tambor circular las vibraciones son del tipo

$$u(t, x, y) = A_1(x, y) \cos(\omega_1 t - \phi_1) + A_2(x, y) \cos(\omega_2 t - \phi_2) + \dots + A_N(x, y) \cos(\omega_N t - \phi_N) + \dots$$

Ahora las frecuencias no son proporcionales y la función  $u(t, x, y)$  no es periódica en  $t$ ; por eso los tambores nos resultan poco armoniosos.

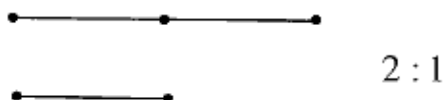
## 4.2. La escala pitagórica

Los experimentos de Pítagoras forman parte de la tradición clásica. En primer lugar observó que el sonido producido por dos cuerdas<sup>4</sup> que están en la proporción 2 : 1 es esencialmente el mismo.

<sup>3</sup>se trata de un modelo muy simplificado, todos sabemos distinguir un violín de una guitarra, aunque en la discusión anterior produzcan el mismo tipo de onda sonora

<sup>4</sup>se supone que las cuerdas están hechas del mismo material y son de igual grosor y tensión

Las cuerdas de longitud  $L$  y  $\tilde{L} = 2L$  dan la misma nota, más aguda para  $L$ , más grave para  $\tilde{L}$ .



A continuación considero cuerdas que están en la proporción 3 : 2, ahora los sonidos son distintos pero se combinan de un modo agradable, hay *consonancia*.



Galileo y Mersenne observaron que las proporciones 2 : 1 y 3 : 2 son las que llevan antes a un periodo común para las dos oscilaciones. Se sabe que el periodo mínimo de la vibración de una cuerda es proporcional a su longitud,

$$T = kL, \quad \tilde{T} = k\tilde{L}$$

donde  $k > 0$  solo depende del material del que están hechas las cuerdas. Escribimos los periodos de las dos oscilaciones en la proporción 2 : 1,

$$T = kL, \quad \boxed{2T = 2kL}, \quad 3T = 3kL, \quad 4T = 4kL, \dots$$

$$\boxed{\tilde{T} = k\tilde{L} = 2kL}, \quad 2\tilde{T} = 4kL, \quad 3\tilde{T} = 6kL, \quad 4\tilde{T} = 8kL, \dots$$

y observamos que el segundo periodo de la cuerda más corta coincide con el primer periodo de la cuerda más larga ( $\tilde{T} = 2T$ ). En la proporción 3 : 2,

$$T = kL, \quad 2T = 2kL, \quad \boxed{3T = 3kL}, \quad 4T = 4kL, \dots$$

$$\tilde{T} = k\tilde{L}, \quad \boxed{2\tilde{T} = 2k\tilde{L}}, \quad 3\tilde{T} = 3k\tilde{L}, \quad 4\tilde{T} = 4k\tilde{L}, \dots$$

Ahora el tercer periodo de la cuerda más corta coincide con el segundo de la más larga.

**Ejercicio.** Determina el primer periodo común para las vibraciones de dos cuerdas de longitudes  $L$  y  $\tilde{L}$  que están en la proporción  $p : q$  donde  $p$  y  $q$  son primos relativos ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p, q > 0$ ,  $\frac{p}{q}$  irreducible,  $pL = q\tilde{L}$ ).

La importancia de las proporciones 2 : 1 y 3 : 2 en la música occidental se ha explicado de muchas otras maneras pero nosotros tomaremos las agudas observaciones de Pitágoras como los dos principios de la teoría.

Vamos a construir la escala y para ello conviene empezar observando que si una cuerda de longitud  $L$  vibra con una cierta frecuencia  $\nu$ , entonces la cuerda de longitud  $\frac{L}{2}$  duplica la frecuencia,  $2\nu$ . En el piano las cuerdas más largas están en el lado izquierdo, por eso los tonos más graves están en esa zona del teclado. Orientaremos la escala del mismo modo, de menor a mayor frecuencia. Fijamos una frecuencia como unidad de referencia, se obtiene la misma nota si la multiplicamos o dividimos por 2, y eso se puede repetir cualquier número de veces. Obtenemos así el conjunto infinito de frecuencias que producen la misma nota

$$\mathcal{N}_0 = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}.$$



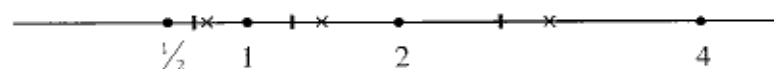
Llamaremos *Do* a esta nota.

A continuación construiremos las notas *Sol* y *Fa*, en consonancia con *Do*. Para ello multiplicamos el conjunto  $\mathcal{N}_0$  por  $\frac{3}{2}$  y  $\frac{2}{3}$ ,

$$\mathcal{N}_1 = \{\dots, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, 12, \dots\} \quad \text{Sol}$$

$$\mathcal{N}_{-1} = \{\dots, \frac{2}{12}, \frac{2}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \dots\} \quad \text{Fa}$$

Observamos que en el intervalo  $[1, 2]$  hay un representante de *Sol* y otro de *Fa*, igual ocurre en  $[\frac{1}{2}, 1]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[4, 8]$ , etcétera.



• *Do*      1 *Fa*      × *Sol*



Fabricamos nuevas notas a partir de *Sol*,

$$\mathcal{N}_2 = \left\{ \dots, \frac{9}{16}, \frac{9}{8}, \frac{9}{4}, \frac{9}{2}, 9, 18, \dots \right\} \quad Re$$

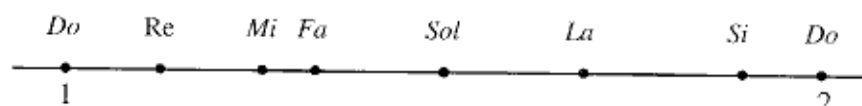
$$\mathcal{N}_3 = \left\{ \dots, \frac{27}{32}, \frac{27}{16}, \frac{27}{8}, \frac{27}{4}, \frac{27}{2}, 27, \dots \right\} \quad La$$

$$\mathcal{N}_4 = \left\{ \dots, \frac{81}{64}, \frac{81}{32}, \frac{81}{16}, \frac{81}{8}, \frac{81}{4}, \frac{81}{2}, \dots \right\} \quad Mi$$

$$\mathcal{N}_5 = \left\{ \dots, \frac{243}{128}, \frac{243}{64}, \frac{243}{32}, \frac{243}{16}, \frac{243}{8}, \frac{243}{4}, \dots \right\} \quad Si$$

Hemos encontrado las siete notas, que ordenamos según su representante en el intervalo  $[1, 2[$ ,

$$1 \in \mathcal{N}_0, \frac{9}{8} \in \mathcal{N}_2, \frac{81}{64} \in \mathcal{N}_4, \frac{4}{3} \in \mathcal{N}_{-1}, \frac{3}{2} \in \mathcal{N}_1, \frac{27}{16} \in \mathcal{N}_3, \frac{243}{128} \in \mathcal{N}_5$$



Los intervalos que delimitan dos frecuencias *Do* consecutivas se denominan *octavas*,

$$\dots, \left[\frac{1}{2}, 1\right], [1, 2], [2, 4], [4, 8], [8, 16], \dots$$

Por convenio se fija la frecuencia  $440\text{Hz}$  para la nota *La* de la primera octava  $[1, 2]$ . Obtenemos otros *La* en las frecuencias  $220\text{Hz}$ ,  $880\text{Hz}$ ,... En teoría hay infinitas posibilidades pero solo un número finito de estas frecuencias resulta audible.

**Ejercicio.** Calcula la frecuencia de *Fa* en la tercera octava  $[4, 8]$ .

Una vez que se ha aprendido el procedimiento para construir la escala conviene entender la estructura algebraica subyacente. Empezamos con el primer principio de Pitágoras, en el conjunto de los números reales y positivos  $\mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  consideramos la relación binaria *dar la misma nota*

$$x, y \in \mathbb{R}^+, \quad x \sim y \Leftrightarrow \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 2^n y.$$

**Ejercicio.** Demuestra que esta relación es de equivalencia. ¿Sigue siendo una relación de equivalencia cuando se sustituye  $\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{N}$ ?

Dado un número  $x \in \mathbb{R}^+$ , su clase de equivalencia se denotará por

$$[x] = \left\{ \dots, \frac{x}{4}, \frac{x}{2}, x, 2x, 4x, 8x, \dots \right\}.$$

Cada una de estas clases tiene un único representante en el intervalo  $[1, 2[$ .

Hemos definido las notas como

$$\mathcal{N}_k = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right], \quad k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Para situar el segundo principio de Pitágoras en el contexto del álgebra abstracta necesitamos recordar la noción de grupo cociente. Para simplificar supondremos que nos han dado un grupo conmutativo  $G$  con notación multiplicativa. Dado un subgrupo  $H$  se define la relación de equivalencia en  $G$ ,

$$g_1, g_2 \in G, \quad g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in H.$$

En el conjunto cociente, denotado como  $G/H$ , se define un producto entre clases,

$$[g_1] \cdot [g_2] = [g_1 \cdot g_2].$$

En principio no es claro que esta definición sea correcta, pues podría depender de la elección de los representantes en cada clase. Con un poco de trabajo se prueba que este no es el caso y que este producto da lugar a una estructura de grupo en el cociente.

Consideramos ahora el grupo conmutativo  $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ . Vamos a probar que las potencias de 2 forman un subgrupo,

$$\mathcal{D} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots \right\}.$$

Debemos comprobar que si  $x$  e  $y$  son dos números en  $\mathcal{D}$ , entonces  $xy^{-1}$  también está en  $\mathcal{D}$ ,

$$x = 2^n, \quad y = 2^m, \quad \Rightarrow \quad xy^{-1} = \frac{x}{y} = 2^{n-m} \in \mathcal{D}.$$

La relación *dar la misma nota* que definimos antes coincide con la relación de equivalencia inducida por el subgrupo  $H = \mathcal{D}$ . Consideramos el grupo cociente

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ / \mathcal{D}$$

y observamos que la escala está compuesta por algunos elementos del grupo cíclico engendrado por  $g = \left[\frac{3}{2}\right]$ ,

$$\{g^{-1}, g^0 = e, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}.$$

**Ejercicio.** ¿Qué nota coincide con el elemento neutro  $e$  de  $\mathcal{P}$ ?

### 4.3. La escala de doce notas

La escala de siete notas sería perfecta si  $g = [\frac{3}{2}]$  tuviese orden 7 en  $\mathcal{P}$ ; en ese caso se cumpliría

$$g^7 = e = [1] \Rightarrow g^6 = g^{-1}$$

y el proceso de Pitágoras no nos permitiría fabricar más notas. Al buscar la nota consonante con  $Si = g^5$  recuperaríamos  $Fa = g^{-1} = g \cdot g^5$ . Pero esto no ocurre, en el paso entre  $Si$  y  $Fa$  se produce una disonancia. Como  $Fa = [\frac{4}{3}]$  y  $Si = [\frac{243}{64}]$ , se cumple  $[\frac{3}{2}] \cdot Si = [\frac{729}{128}] \neq Fa$ . Hay una imperfección en la escala de 7 notas. El resultado siguiente implica que es posible fabricar tantas notas como se desee usando el proceso de Pitágoras: no existe una escala finita y perfecta.

**Lema 4.3.1.**  $g = [\frac{3}{2}]$  tiene orden infinito en  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Por reducción al absurdo suponemos que  $g$  tiene orden finito, digamos  $n \geq 1$ . De  $g^n = e$  se sigue que  $(\frac{3}{2})^n \sim 1$  y existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que

$$(\frac{3}{2})^n = 2^m \rightarrow 3^n = 2^{n+m}.$$

Observamos que, como  $3^n > 1$ , también  $2^{n+m} > 1$  y  $n+m > 0$ . La identidad  $3^n = 2^{n+m}$  es imposible porque  $3^n$  es impar y  $2^{n+m}$  es par.  $\square$

**Ejercicio.** Encuentra un elemento de  $\mathcal{P}$  que tenga orden 7.

Podemos ampliar la escala con potencias positivas  $g^6, g^7, \dots$  (*sostenidos*) o negativas  $g^{-2}, g^{-3}, \dots$  (*bemoles*). En principio podemos incluir tantas notas como queramos pero el número 12 tiene una propiedad que lo hace especial:  $g = [\frac{3}{2}]$  está muy cerca de tener orden 12. Para explicar esta afirmación un tanto etérea comenzamos con un cálculo muy preciso

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364\dots$$

Los números  $n = 12$  y  $m = 7$  se pueden pensar como una solución aproximada de la ecuación  $3^n = 2^{n+m}$ . Entonces  $g^{11} = [(\frac{3}{2})^{11}] = [1.35152\dots]$  y  $g^{-1} = [1.33333\dots]$  están muy próximos, sus representantes en la primera octava difieren en dos centésimas. El oído humano no detecta la diferencia y en la práctica la escala se cierra.<sup>5</sup>

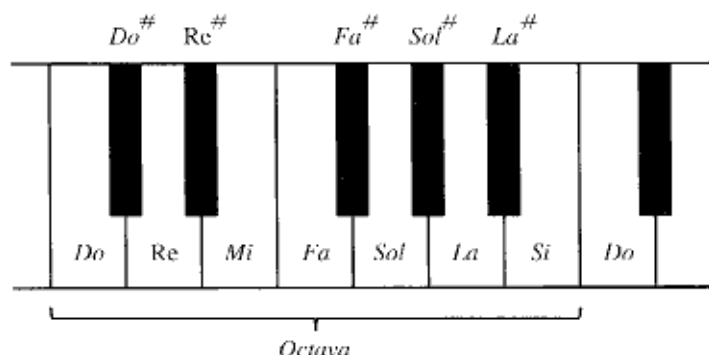
**Ejercicio.** Calcula los representantes en la primera octava de las clases  $g^k$  con  $5 \leq k \leq 10$ .

Si ordenamos las nuevas notas según su representante en la primera octava observamos que  $g^6$  queda entre  $Fa$  y  $Sol$  y la llamamos  $Fa^\sharp$ ,  $g^7$  entre  $Do$  y  $Re$  y la llamamos  $Do^\sharp$ , etcétera.

$$g^6 = Fa^\sharp, \quad g^7 = Do^\sharp, \quad g^8 = Sol^\sharp, \quad g^9 = Re^\sharp, \quad g^{10} = La^\sharp.$$

<sup>5</sup>  $g^6 = [1.4238\dots]$  difiere de  $g^{-1}$  en unas 8 centésimas, por eso la escala con 7 notas es más imperfecta

El teclado de un piano para concierto suele tener algo más de 7 octavas, en cada octava las teclas blancas representan las notas clásicas y las negras los sostenidos.



**Ejercicio.** Construye una escala de 12 notas con  $g^{-4}, g^{-3}, g^{-2}, \dots, g^6, g^7$ . Encuentra el orden de las notas según los representantes en la primera octava,  $g^{-4} = La^b, g^{-3} = Mi^b, g^{-2} = Si^b$ .

**Ejercicio.** Compara los representantes en la primera octava de  $Sol^b$  y  $La^b$ .

#### 4.4. Ampliación de la escala y mejor aproximación

En el siglo XIX se construyó un *armonio generalizado* con 53 notas en cada octava. Pretendemos entender la elección de este misterioso número. Por ahora vamos a pensar en el caso general, una escala con  $n$  notas  $g^{-1}, g^0, g^1, \dots, g^{n-2}$ . Buscamos los valores de  $n$  para los que  $g^n$  está muy próxima al elemento neutro  $e = [1]$ , eso implicará que  $g^{n-1}$  y  $g^{-1}$  estarán muy próximos y en la práctica no se pierde la consonancia. De manera más precisa, pretendemos que un representante de  $g^n$  esté cerca del número 1. Este representante se escribirá como  $2^{-m} \frac{3^n}{2^n} = \frac{3^n}{2^{n+m}}$  para algún entero  $m$  y llegamos al siguiente problema: encontrar  $n \geq 1$  y  $m \in \mathbb{Z}$  de manera que

$$(\diamond) \quad \frac{3^n}{2^{n+m}} = 1 + \epsilon$$

con  $|\epsilon|$  pequeño. Las incógnitas  $n$  y  $m$  en la ecuación  $(\diamond)$  están en el exponente, así que parece lógico tomar logaritmos. Usaremos el logaritmo en base 2. Como la función  $\log_2 : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva,  $(\diamond)$  es equivalente a

$$n \log_2(3) - (n + m) = \log_2(1 + \epsilon).$$

**Ejercicio.** Prueba que  $\log_2(3)$  es irracional.

Nuestra estrategia para buscar soluciones será emplear aproximaciones racionales de  $\log_2(3)$ . Supongamos que

$$\log_2(3) = \frac{p}{q} + \delta$$

donde  $p, q$  son enteros positivos y  $\delta$  es el error de aproximación. La elección  $n = q$ ,  $n + m = p$  reduce ( $\blacklozenge$ ) a

$$n\delta = \log_2(1 + \epsilon) \Leftrightarrow 2^{n\delta} - 1 = \epsilon.$$

Hay que hacer pequeña la cantidad  $n\delta$ , por eso no es suficiente aproximar  $\log_2(3)$  con mucha precisión ( $\delta$  pequeño), el denominador  $q = n$  también juega un papel.

El procedimiento más conocido para aproximar números irracionales por fracciones es el desarrollo decimal. Para nuestro problema no va a ser una buena idea usar ese desarrollo porque a medida que el error  $\delta$  se hace pequeño el denominador de la fracción aumenta muy rápido. Veamos un ejemplo concreto. Expresamos  $\log_2(3)$  en términos de logaritmos neperianos y usamos la calculadora para obtener el desarrollo decimal  $\log_2(3) = 1.5849625\dots$ . Si aproximamos por la fracción  $\frac{p}{q} = \frac{158}{100} = \frac{79}{50}$  obtenemos  $n = 50$  y  $m = 29$ . En este caso  $\delta = 0.0049625\dots$  y  $\epsilon = 0.187663\dots$ . La aproximación  $\frac{p}{q} = \frac{19}{12}$  no procede del desarrollo decimal y lleva a  $n = 12$ ,  $m = 7$ ,  $\delta = 0.0016292\dots$  y  $\epsilon = 0.013643\dots$

La escala de 12 notas está mucho más próxima a cerrar que la de 50.

**Definición.** Dado un número irracional  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , diremos que la fracción irreducible  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$ , es una *mejor aproximación de tipo I* si cualquier otra fracción con denominador igual o menor que  $q$  está más lejos de  $\alpha$ . Es decir,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{P}{Q} \right|$$

para cada  $P, Q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq Q > 0$ ,  $\frac{P}{Q} \neq \frac{p}{q}$ .

La fracción irreducible  $\frac{p}{q}$  es una *mejor aproximación de tipo II* si

$$|q\alpha - p| < |Q\alpha - P|$$

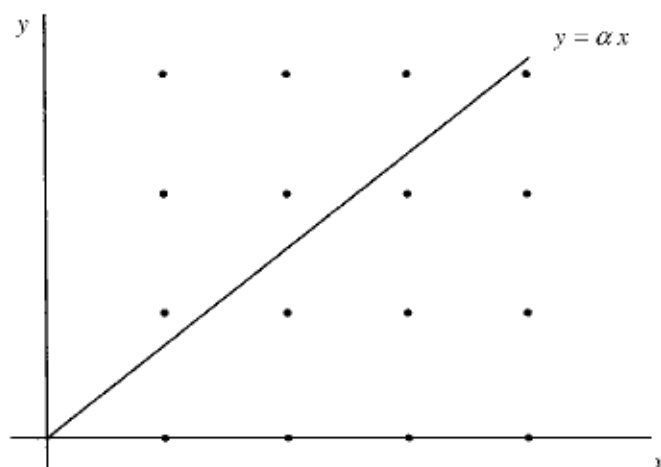
para cada  $P, Q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq Q > 0$ ,  $\frac{P}{Q} \neq \frac{p}{q}$ .

Como ejemplo consideramos el número  $\alpha = 0.201001000100001\dots$ , que es irracional porque su desarrollo decimal es infinito y no tiene una terminación periódica. La fracción  $\frac{1}{3}$  es una mejor aproximación de tipo I pero no lo es de tipo II pues  $|1\alpha - 0| = 0.201\dots < |3\alpha - 1| = 0.396\dots$

**Ejercicio.** Comprueba que  $\frac{3}{2}$  es una mejor aproximación de tipo II de  $\log_2(3)$ .

**Ejercicio.** Demuestra que una mejor aproximación de tipo II también lo es de tipo I [sugerencia: reducción al absurdo].

Para entender más sobre la aproximación de tipo II vamos a presentarla en lenguaje geométrico. En el primer cuadrante del plano  $(x, y)$  dibujamos la recta  $y = \alpha x$  y el retículo de puntos  $(d, c)$  con coordenadas enteras y cumpliendo  $d \geq 1, c \geq 0$ .



La distancia del punto  $(d, c)$  a la recta  $y = \alpha x$  está dada por la fórmula

$$\frac{|d\alpha - c|}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Salvo una constante multiplicativa, la cantidad  $|d\alpha - c|$  mide la distancia del punto  $(d, c)$  a la recta de pendiente  $\alpha$ . La fracción  $\frac{a}{b}$  es mejor aproximación de tipo II cuando el punto  $(b, a)$  es el más próximo a la recta entre todos los puntos  $(d, c)$  en la banda  $1 \leq d \leq b, c \geq 0$ . En el dibujo anterior las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{4}$  son mejores aproximaciones de tipo II de  $\alpha$ .

Nosotros estamos interesados en las mejores aproximaciones de tipo II del número  $\log_2(3)$ . Si  $\frac{n+m}{n}$  es una de estas aproximaciones y construimos una escala con  $n$  notas, el error  $\epsilon$  será menor que en todas las escalas con menos notas. En resumen, los denominadores de las mejores aproximaciones de tipo II deben producir buenas escalas.

## 4.5. Fracciones continuas

Una serie se puede pensar como un proceso iterativo en el que se hacen infinitas sumas, una fracción continua es otro proceso iterativo en el que se hacen infinitas divisiones. Más adelante veremos que la teoría de estas fracciones es la herramienta perfecta para encontrar mejores aproximaciones.

Dados números naturales  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  con  $a_n \geq 1$  si  $n \geq 1$ , vamos a dar sentido a la expresión

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Para ello definimos las cantidades

$$R_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}},$$

que juegan un papel análogo a las sumas parciales en la teoría de series. Probaremos que la sucesión  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  converge y definiremos

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

Después de calcular los primeros términos  $R_n$ ,

$$R_0 = a_0, \quad R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad R_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \dots$$

observamos que se cumple

$$R_0 < R_2 < \dots < R_{2n} < \dots < R_{2n+1} < \dots < R_3 < R_1.$$

**Ejercicio.** Demuestra que la función  $f(x) = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , es estrictamente creciente si  $n$  es par y estrictamente decreciente si es impar.

Las sucesiones  $\{R_{2n}\}$  y  $\{R_{2n+1}\}$  son monótonas y acotadas y por tanto cada una tiene un límite. Para probar la existencia del límite de la sucesión completa  $\{R_n\}$  es suficiente comprobar que los límites de  $R_{2n}$  y  $R_{2n+1}$  coinciden. Esto requiere trabajo. El número  $R_n$  siempre es racional y lo podemos escribir en la forma

$$R_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{N}, \quad p_n, q_n \text{ primos relativos.}$$

La fracción  $\frac{p_n}{q_n}$  se suele llamar una *reducida*. Calculamos las primeras reducidas

$$R_0 = a_0 \rightarrow p_0 = a_0, q_0 = 1; \quad R_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \rightarrow p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1.$$

**Ejercicio.**  $a_0 a_1 + 1$  y  $a_1$  son primos relativos.

Obtendremos todas las reducidas a partir de un producto de matrices.

**Lema 4.5.1.** Si definimos  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  se cumple

$$A_0 A_1 \dots A_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

*Demostración.* Partimos de la identidad

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

De la reducida

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

se obtiene

$$[a_1; a_2, \dots, a_n] = \frac{q_n}{p_n - a_0 q_n}.$$

Además, es fácil probar que  $q_n$  y  $p_n - a_0 q_n$  son primos relativos.

Con estos preparativos estamos listos para probar el lema por inducción sobre  $n \geq 1$ . Para  $n = 1$  se cumple

$$A_0 A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 a_1 + 1 & a_0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Suponemos ahora que el lema es válido hasta  $n - 1$  y se lo aplicamos a la fracción continua  $[a_1; a_2, \dots, a_{n-1}, \dots]$ . Entonces, teniendo en cuenta la forma de la reducida que calculamos antes,

$$A_1 A_2 \dots A_n = \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n - a_0 q_n & p_{n-1} - a_0 q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a la izquierda por  $A_0$  se llega a la conclusión de manera automática.  $\square$

El lema anterior tiene varias consecuencias importantes:

$$(i) \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Estas identidades nos dicen que el numerador y denominador de la reducida son soluciones de una ecuación lineal en diferencias de segundo orden.<sup>6</sup> Como sabemos calcular las condiciones iniciales  $p_0, p_1$  y  $q_0, q_1$ , los restantes términos los obtenemos de forma recursiva.

Para probar (i) usamos el lema junto con la asociatividad del producto de matrices y obtenemos

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = (A_0 A_1 \dots A_{n-1}) A_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>6</sup>en el caso general  $a_n$  es variable y no estamos en el marco de la lección 1



La conclusión se obtiene identificando coeficientes en la primera columna.

$$(ii) \quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Para probar esta identidad es suficiente tomar determinantes en la fórmula del lema

$$\det A_0 \det A_1 \cdots \det A_n = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$$

y observar que el determinante de la matriz  $A_i$  es  $-1$ .

Ahora podemos completar la prueba de la convergencia de  $R_n$ . De (i) deducimos que si  $n \geq 2$ ,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + 1.$$

Como  $q_1 = a_1 \geq 1$ , se deduce de manera recursiva que  $q_2 \geq q_1 + 1 = 2, \dots, q_n \geq n$ . Por otra parte se cumple

$$R_{2n+1} - R_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

y por (ii),

$$R_{2n+1} - R_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n+1)2n} \rightarrow 0.$$

Hemos probado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}$ .

Vamos a ilustrar la teoría con el caso más simple.

**Ejemplo.**  $[1; 1, 1, \dots, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$

Como  $a_n = 1$  para cada  $n$ , de acuerdo con (i) sabemos que tanto el numerador  $p_n$  como el denominador  $q_n$  de las reducidas cumplen la ecuación en diferencias

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

En este caso sí se trata de una de las ecuaciones estudiadas en la lección 1, no es otra que la ecuación de Fibonacci. Resolviendo la ecuación y ajustando las condiciones iniciales

$$p_0 = a_0 = 1, p_1 = a_0 a_1 + 1 = 2; \quad q_0 = 1, q_1 = a_1 = 1$$

encontramos las fórmulas

$$\begin{cases} p_n = \frac{2-r_-}{\sqrt{5}} r_+^n + \frac{r_+}{\sqrt{5}} r_-^n, \\ q_n = \frac{1-r_-}{\sqrt{5}} r_+^n + \frac{r_+-1}{\sqrt{5}} r_-^n, \end{cases}$$

con  $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . De aquí deducimos que

$$R_n = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow \frac{2-r_-}{1-r_-} = r_+.$$

Hemos llegado a una fórmula clásica para el número de oro,

$$[1; 1, 1, 1, \dots, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Una forma alternativa y quizás más simple para llegar a esta fórmula consiste en observar que se cumple

$$R_{n+1} = 1 + \frac{1}{R_n}.$$

Si llamamos  $\ell$  al límite de la sucesión  $R_n$ , haciendo  $n$  tender a infinito en la identidad anterior,

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0.$$

Por tanto  $\ell$  ha de ser  $r_+$  o  $r_-$ . Como sabemos que  $\ell > R_0 = 1$  concluimos que  $\ell = r_+$ .

Para completar nuestro estudio de las fracciones continuas vamos a probar que todo número irracional y positivo admite un desarrollo en fracción continua. Es decir, dado  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ , existen números naturales  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  con  $a_n \geq 1$  si  $n \geq 1$ , tales que

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

Para probarlo comenzamos calculando la parte entera de  $\alpha$  y definimos  $a_0 = [\alpha]$ . A continuación definimos un nuevo número  $\alpha_0$  por la fórmula

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_0}.$$

La diferencia entre  $\alpha$  y  $a_0$  está en el intervalo  $]0, 1[$  y eso implica que  $\alpha_0 > 1$ . Además  $\alpha_0$  es irracional. Podemos repetir el proceso partiendo de  $\alpha_0$ . En general se definen los números  $a_n$  y  $\alpha_n$  mediante las fórmulas

$$a_n = [\alpha_{n-1}], \quad \alpha_{n-1} = a_n + \frac{1}{\alpha_n}.$$

Se cumple

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\alpha_2}}} = \dots$$

La fórmula

$$\alpha = \frac{p_n \alpha_n + p_{n-1}}{q_n \alpha_n + q_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

se prueba por inducción sobre  $n$ , usando (i). Nos va a ser útil para probar la desigualdad

$$(\diamond) \quad R_{2n} < \alpha < R_{2n+1}.$$

Comprobemos por ejemplo la desigualdad de la derecha  $\alpha < R_{2n+1}$ , equivalente a

$$\frac{p_{2n+1} \alpha_{2n+1} + p_{2n}}{q_{2n+1} \alpha_{2n+1} + q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \Leftrightarrow p_{2n} q_{2n+1} < p_{2n+1} q_{2n}.$$

La última desigualdad es consecuencia directa de (ii).

Una vez que se ha comprobado ( $\diamond$ ) podemos hacer  $n \rightarrow \infty$  para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n} \leq \alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}.$$

Pero ya sabemos que los dos límites coinciden y hemos probado que  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ .

**Ejercicio.** Demuestra que el desarrollo en fracción continua de un número irracional y positivo es único.

La conexión entre las fracciones continuas y el problema de mejor aproximación la da el siguiente resultado:

**Teorema 4.5.2.** *Dado un número  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$  se cumple:*

- i) Si  $\frac{a}{b}$  es una mejor aproximación de tipo II de  $\alpha$ , entonces  $\frac{a}{b}$  es una reducida de  $\alpha$ .
- ii) Recíprocamente, si  $\frac{a}{b}$  es una reducida de  $\alpha$  con  $n \geq 2$ , entonces es también una mejor aproximación de tipo II.

**Nota.** Los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  se tratarán en los problemas 4.10 y 4.11.

Antes de entrar en los detalles de la prueba necesitamos una estimación del orden de convergencia de las reducidas.

**Lema 4.5.3.** *Para cada  $n \geq 0$  se cumple*

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

**Demostración.** Sabemos que  $\alpha$  está comprendido entre  $R_n = \frac{p_n}{q_n}$  y  $R_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ . Combinando este hecho con la identidad (ii),

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}|}{q_nq_{n+1}} = \frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

Hemos probado la desigualdad superior, para probar la inferior usaremos el siguiente

**Ejercicio.** Dadas dos fracciones  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$  con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$  y  $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\gamma}{\delta}$ , demuestra que se cumple

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \leq \frac{\gamma}{\delta}.$$

Supondremos que  $n$  es par (el caso impar queda como ejercicio). Se cumple

$$R_n < R_{n+2} < \alpha < R_{n+1}$$

y, por el ejercicio anterior, podemos intercalar infinitas fracciones intermedias entre  $R_n$  y  $R_{n+1}$ ,

$$R_n = \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \leq \frac{p_n + 2p_{n+1}}{q_n + 2q_{n+1}} \leq \dots \leq R_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

En particular,

$$R_{n+2} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = \frac{p_n + a_{n+2}p_{n+1}}{q_n + a_{n+2}q_{n+1}}$$

es una de estas fracciones. Deducimos que

$$R_n \leq \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \leq R_{n+2} < \alpha$$

y

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \left| \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

□

*Demostración del teorema. i)* Por reducción al absurdo suponemos que  $\frac{a}{b}$  es mejor aproximación pero no es una reducida y tratamos de llegar a una contradicción. Las reducidas cumplen  $R_0 < R_2 < \dots < \alpha < \dots < R_3 < R_1$  y por tanto solo hay tres posibilidades:

1.  $\frac{a}{b} > R_1$
2.  $\frac{a}{b} < R_0$
3.  $\frac{a}{b}$  queda entre  $R_{n-1}$  y  $R_{n+1}$  para algún  $n \geq 1$ .

En el caso 1,

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \left| R_1 - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|p_1 b - a q_1|}{q_1 b} \geq \frac{1}{q_1 b}.$$

Aquí hemos usado que  $\frac{a}{b} \neq \frac{p_1}{q_1}$  y por tanto  $p_1 b - a q_1$  es un entero no nulo. En consecuencia,  $|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1}$ . Si aplicamos la desigualdad superior en el lema con  $n = 0$  y tenemos en cuenta que  $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ , se obtiene  $|1 \cdot \alpha - a_0| < \frac{1}{q_1}$ . Hemos llegado a una contradicción porque  $|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|$  y habíamos supuesto que  $\frac{a}{b}$  es mejor aproximación.

El caso 2 queda como ejercicio, nos concentramos en el caso 3. Suponemos  $n$  par (el caso impar queda como ejercicio) y partimos de la situación descrita en el dibujo.



Se cumple

$$\left| \frac{a}{b} - R_{n-1} \right| < |R_n - R_{n-1}| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Por otra parte, usando  $\frac{a}{b} \neq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ,

$$\left| \frac{a}{b} - R_{n-1} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{|aq_{n-1} - bp_{n-1}|}{bq_{n-1}} \geq \frac{1}{bq_{n-1}}.$$

Combinando las dos desigualdades deducimos que  $q_n < b$ .

Observando el dibujo de nuevo,

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \left| R_{n+1} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_{n+1}} \Rightarrow |b\alpha - a| > \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Por la desigualdad superior del lema

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow |q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Hemos llegado a una contradicción porque  $|b\alpha - a| > |q_n \alpha - p_n|$ ,  $q_n < b$  y habíamos supuesto que  $\frac{a}{b}$  era mejor aproximación.

ii) Partimos de una reducida  $\frac{p_n}{q_n}$  con  $n \geq 2$  y queremos probar que es mejor aproximación. La observación siguiente es clave.

**Ejercicio.** Prueba que la sucesión  $\{q_n\}_{n \geq 1}$  es estrictamente creciente. ¿Es esto cierto para  $\{q_n\}_{n \geq 0}$ ?

Sea  $(x_0, y_0)$  el punto más cercano a la recta  $y = \alpha x$  de entre todos los puntos del retículo  $(x, y)$ ,  $x = 1, 2, \dots, q_n$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots$ .

**Ejercicio.** Demuestra que  $(x_0, y_0)$  existe y es único.

La fracción  $\frac{y_0}{x_0}$  es irreducible<sup>7</sup> y por la forma en que ha sido definida es una mejor aproximación de tipo II. Por la primera parte del teorema (ya probada) sabemos que ha de ser una reducida,  $\frac{y_0}{x_0} = \frac{p_k}{q_k}$ . Como  $q_k = x_0 \leq q_n$  se obtiene  $k \leq n$ . Vamos a probar que en realidad se cumple

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{p_n}{q_n},$$

y eso completa la demostración porque sabemos que  $\frac{y_0}{x_0}$  es una mejor aproximación. Por reducción al absurdo suponemos  $\frac{y_0}{x_0} = \frac{p_k}{q_k}$  con  $k < n$ . Como  $n \geq 2$  sabemos que  $q_k < q_n$  y, por la definición de  $(x_0, y_0)$ ,  $|\alpha q_k - p_k| \leq |\alpha q_n - p_n|$ . Por el lema,

$$|\alpha q_k - p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}} \geq \frac{1}{q_{n-1} + q_n}, \quad |\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Combinando estas desigualdades,

$$\frac{1}{q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n-1} + q_n} \Rightarrow q_{n+1} < q_n + q_{n-1}.$$

Esta desigualdad no es compatible con la conocida identidad  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$  y hemos llegado a una contradicción.

<sup>7</sup>  $x_0 = mx_1, y_0 = my_1 \Rightarrow |\alpha x_0 - y_0| = m|\alpha x_1 - y_1|$

## 4.6. Números famosos y sus aproximaciones

Ahora sabemos cómo encontrar las mejores aproximaciones de un número irracional a partir de su desarrollo en fracción continua pero ¿cómo podemos calcular ese desarrollo? Una de las demostraciones de la sección anterior se puede interpretar como un algoritmo para el desarrollo en fracción continua. Vamos a verlo en algunos casos:

*El número  $\pi$*

Partimos de  $\alpha = \pi = 3'141592\dots$  y calculamos su parte entera  $a_0 = [\pi] = 3$ . A continuación fabricamos el nuevo número  $\alpha_0$  y repetimos el proceso tantas veces como queramos.

$$\begin{array}{lll} a_0 = 3 & \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_0} & \alpha_0 = \frac{1}{0'141592\dots} = 7'062513\dots \\ a_1 = [\alpha_0] = 7 & \alpha_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1} & \alpha_1 = \frac{1}{0'062513\dots} = 15'996594\dots \\ a_2 = [\alpha_1] = 15 & & \end{array}$$

Hemos obtenido  $\pi = [3; 7, 15, \dots]$ . Las primeras reducidas son  $R_1 = \frac{22}{7}$ ,  $R_2 = \frac{333}{106}$ .

**Ejercicio.** Comprueba que  $\frac{22}{7}$  es una mejor aproximación de tipo II de  $\pi$ .

*El número  $e$*

Euler obtuvo la fórmula  $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$ .

**Ejercicio.** Comprueba los primeros términos  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 2$  y calcula las primeras reducidas de  $e$ .

*El número de la escala musical  $\alpha = \log_2(3) = 1'584962\dots$*

$$\begin{array}{lll} a_0 = [\alpha] = 1 & \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_0} & \alpha_0 = \frac{1}{0'584962\dots} = 1'709511291\dots \\ a_1 = [\alpha_0] = 1 & \alpha_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1} & \alpha_1 = \frac{1}{0'709511291\dots} = 1'40942084\dots \\ \alpha_2 = 2'442474596\dots & \alpha_3 = 2'2600167\dots & \alpha_4 = 3'8459060\dots \end{array}$$

Por tanto,  $\log_2(3) = [1; 1, 1, 2, 2, 3, \dots]$  y las primeras reducidas son  $R_0 = 1$ ,  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = \frac{3}{2}$ ,  $R_3 = \frac{8}{5}$ . Observamos que  $R_0 = \frac{1}{1}$  no es una mejor aproximación pero sí lo es  $R_1 = \frac{2}{1}$ . La escala de 5 notas cierra ligeramente mejor que la de 7,  $g^5 = [(\frac{3}{2})^5] = [0'94921875]$ ,  $g^5 = [(\frac{3}{2})^7] = [1'06787]$ , pero la de 7 tiene la ventaja de incluir dos notas adicionales. La siguiente reducida  $R_4 = \frac{19}{12}$  explica las doce notas de la escala, y  $R_5 = \frac{65}{41}$  indica que 41 sería un buen número de notas para una escala muy fina. Por último, con paciencia, se obtiene  $a_5 = 1$ ,  $R_6 = \frac{84}{53}$  y aparece el número 53.

*Si los hombres tuvieran un oído tan exacto que pudiera distinguir cualquier aberración por pequeña que fuera, esto afectaría a toda la música: pues dónde se encontrarían músicos capaces de ejecutar todos los sonidos tan exactamente como para que no se produzca la más mínima aberración. Casi todos los acordes les parecerían a estos hombres disonancias insoportables, mientras que oídos menos delicados los encontrarían perfectamente armónicos. Por eso es una gran ventaja para la música práctica que el sentido del oído no se haya desarrollado hasta el más alto grado de perfección, y que perdone generosamente los pequeños defectos en la ejecución. Es también cierto que, cuánto más exquisito sea el gusto del oyente, tanto más exacta debe ser la ejecución; mientras que los oyentes de gusto menos delicado se contentan con una ejecución más grosera.*

Leonard Euler, Conjetura sobre la razón de algunas disonancias generalmente aceptadas en la música.

## 4.7. Problemas

**4.1** Demuestra que la función  $u(t) = \sin t + \sin \pi t$  tiene infinitos máximos locales y no tiene un máximo global.

**4.2** Dada una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un número  $T > 0$ , se dice que  $T$  es un periodo de  $f$  si  $f(t+T) = f(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . En este ejercicio pretendemos entender la estructura del conjunto de periodos de una función continua, periódica y no constante. Demuestra:

1. Dado un periodo  $T > 0$ , existen  $\underline{t}, \bar{t} \in [0, T]$  tales que  $f(\underline{t}) \leq f(t) \leq f(\bar{t})$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .
2. El número  $T^* = \inf\{T > 0 : T \text{ es un periodo}\}$  es positivo.
3.  $T^*$  es un periodo de  $f$  (*periodo mínimo*).
4. Si  $T_1$  y  $T_2$  son periodos de  $f$  con  $nT_1 < T_2 \leq (n+1)T_1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  entonces  $T_2 - nT_1$  es un periodo de  $f$ .
5. Los únicos periodos de  $f$  son  $T^*, 2T^*, \dots, nT^*, \dots$ .
6. Calcula los periodos de la función característica de los racionales  $\chi_{\mathbb{Q}}$ .

**4.3** Se sabe que  $La = g^3$  y  $Si = g^5$  con  $g = [\frac{3}{2}]$ , además la frecuencia de  $La$  en una octava es  $440\text{Hz}$ . Calcula la frecuencia de  $Si$  en la siguiente octava (más aguda).

**4.4** *Escala temperada*. Se considera el grupo cociente  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+/\mathcal{D}$  donde  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  es el grupo multiplicativo de los reales positivos y  $\mathcal{D} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$  es el subgrupo de las potencias de 2. Encuentra un generador  $\hat{g} = [x]$  con  $x \in \mathbb{R}^+$  de un subgrupo de  $\mathcal{P}$  que sea cíclico de orden 12. Se construye la escala  $\hat{g}^0 = [1], \hat{g}^1 = [x], \dots, \hat{g}^{11} = [x^{11}]$ . ¿Qué ventajas/desventajas presenta esta escala?

**4.5** Demuestra que la función  $\phi(x) = \log_2(x)$  define un isomorfismo entre el grupo multiplicativo de los reales positivos  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  y el grupo aditivo de los reales  $(\mathbb{R}, +)$ . Además  $\phi$  induce un isomorfismo entre los respectivos grupos cocientes

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^+/\mathcal{D} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

En muchos tratados sobre música se reemplazan las frecuencias de las notas por sus logaritmos, de esta forma las multiplicaciones se reemplazan por sumas.

**4.6** Se consideran los números  $\alpha = [2; 1, 2, 2, 2, 2, \dots]$  y  $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$ . ¿Cuál de ellos es mayor?



4.7 Calcula  $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$ .

4.8 Se considera la fracción continua  $x = [1; 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$ . Demuestra que la sucesión de reducidas  $\{R_n\}$  cumple

$$R_n = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{R_{n-2}}}, \quad n \geq 2.$$

Usa lo anterior para calcular  $x$ .

4.9 Se lanza un dado un número infinito de veces y se construye la fracción continua  $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$  donde  $a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  es el resultado obtenido en el lanzamiento  $n$ . Calcula el mayor número real  $x$  que se puede encontrar por este procedimiento.

4.10 Se considera el número irracional  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ . Son equivalentes:

1.  $R_0 = \frac{a_0}{1}$  es mejor aproximación de tipo II
2.  $\alpha - [\alpha] < \frac{1}{2}$ .
3.  $a_1 \neq 1$

4.11 En las notaciones del problema anterior prueba que  $R_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$  es siempre mejor aproximación de tipo II. [Sugerencia: distingue los casos  $a_1 \neq 1$  y  $a_1 = 1$ .]

4.12 En el centro de investigación *Moonwatcher Station* hay un grupo que se dedica a la búsqueda de vida inteligente fuera de la tierra. Todos los días se emiten señales enumerando los dígitos del desarrollo decimal del número  $\pi = 3.141592\dots$  con la esperanza de recibir algún día una respuesta. La nueva becaria Penny Wyatt está en desacuerdo con ese procedimiento y propone cambiar la señal y emitir las reducidas de  $\pi$ :  $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \dots$ . Después de algún tiempo de discusiones el grupo decide aceptar la propuesta de Penny. ¿Qué argumento les ha hecho cambiar? [Sugerencia: observa con atención la mano de E.T.]