Capítulo 1

Teoremas de convergencia

Sumario

Es sabido que la integración no tiene un buen comportamiento en los procesos de convergencia. El objetivo de esta lección es ver que tales anomalías desaparecen cuando imponemos ciertas condiciones bien de monotonía bien de dominación. La parte final está dedicada a la obtención de importantes consecuencias de los teoremas de convergencia: estudiamos la relación con la integral de Riemann, los espacios $\mathcal{L}^p$ y dos subespacios de éstos que son densos y la derivabilidad de las integrales dependientes de un parámetro. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.0.1. Teorema de la convergencia monótona.

El objeto de esta lección en abundar sobre el ambiente en el que existe un buen comportamiento entre la integral y los procesos de convergencia.

Sí hemos visto precedentes de buena avenencia para la integral de cuando hemos considerado cierta condición de monotonía de la sucesión de funciones, baste recordar el T.C.M.p (Teorema **??**). Nuestro primer objetivo es seguir ahondando en esta circunstancia.

Teorema 1.0.1. *(Beppo-Levi 1906) (Teorema de la convergencia monótona)(T.C.M.) Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión* **monótona** *de funciones* **integrables** *en E. Si la sucesión $\{\int_E f_n \, d\lambda\}$ de las integrales está* **acotada**, *entonces existe una función f integrable en E que es límite puntual c.p.d. de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y se tiene que*

$$\int_E f \, d\lambda = lim\{\int_E f_n \, d\lambda\}.$$

Nota 1.0.2. Nótese que si g es límite puntual c.p.d. de la sucesión $\{f_n\}$ del Teorema anterior, entonces los mismos argumentos prueban que también $g \in \mathcal{L}(E)$ y $\int_E g \, d\lambda = lim\{\int_E f_n \, d\lambda\}$.

Como consecuencia del T.C.M. veamos que las funciones integrables en el sentido de Riemann son también integrables en el sentido de Lebesgue.

Corolario 1.0.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces*

f es integrable en el sentido de Riemann si, y sólo si, f es continua c.p.d.

En caso afirmativo, $f \in L([a,b])$ y además

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Este resultado justifica que a partir de ahora Si $I = [a,b]$ y f es una función integrable en $[a,b]$ escribamos $\int_a^b f(x)dx$ en lugar de $\int_I f \, d\lambda$.

1.0.2. Teoremas de la convergencia dominada.

En esta sección nos interesamos por condiciones de dominación. Comenzamos con el siguiente resultado importante:

Proposición 1.0.4. *(Lema de Fatou)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones **medibles no negativas** *en E. Si la* **sucesión** $\{\int_E f_n \, d\lambda\}$ **de las integrales tiene límite inferior finito**, *entonces existe una función f integrable en E tal que $f = \underline{lim}_n\{f_n\}$ c.p.d y*

$$\int_E f \, d\lambda \leq \underline{lim}_n\{\int_E fn \, d\lambda\}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n = Inf\{f_{n+k};\ k \in \mathbb{N}\}$. En virtud de la Proposición **??**, las nuevas funciones son medibles (no negativas) y claramenente forman una sucesión creciente. Puesto que $\int_E g_n \, d\lambda \leq Inf\{\int_E f_{n+k} \, d\lambda;\ k \in \mathbb{N}\}$, deducimos que $\int_E g_n \, d\lambda \leq \underline{lim}_n \int_E f_n \, d\lambda (< +\infty)$, y por tanto que $g_n \in \mathcal{L}(E)$ para todo n y la sucesión

$\{\int_E g_n \, d\lambda\}$ está acotada. Aplicando el T.C.M. encontramos una función $f \in \mathcal{L}(E)$ que es límite puntual c.p.d. de la sucesión $\{g_n\}$ y verifica que

$$\int_E f \, d\lambda = lim_n\{\int_E g_n \, d\lambda\} \leq \underline{lim}_n \int_E f_n,$$

y por tanto, para concluir basta observar que $f = lim_n g_n = \underline{lim_n} f_n$ c.p.d.

■

Teorema 1.0.5. *(Teorema de la convergencia dominada)(T.C.D.)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones **integrables** *en E.* **Si** *la sucesión $\{f_n\}$* **converge puntualmente a una función f en E y existe una función g integrable en E tal que $|f_n| \leq g$, entonces** *la función f es integrable y*

$$lim\{\int_E |f_n - f| \, d\lambda\} = 0.$$

En consecuencia

$$\int_E f \, d\lambda = lim\{\int_E f_n \, d\lambda\}.$$

Demostración. Es claro que $|f| \leq g$ y por tanto que $f \in \mathcal{L}(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n = 2g - |f - f_n|$. En consecuencia

$$\underline{lim}_n \int_E g_n \, d\lambda = \underline{lim_n}\{\int_E 2g - |f - f_n| \, d\lambda\} \leq \int_E 2g \, d\lambda < +\infty.$$

Aplicando el Lema de Fatou y teniendo en cuenta que $\underline{lim_n}\{2g - |f - f_n|\} = 2g$, se tiene que

$$\int_E 2g \, d\lambda = \int_E \underline{lim_n}\{2g - |f - f_n|\} \, d\lambda \leq \underline{lim_n}\{\int_E 2g - |f - f_n| \, d\lambda\} \leq \int_E 2g \, d\lambda - \overline{lim}_n\{\int_E |f - f_n| \, d\lambda\},$$

luego $\overline{lim}_n\{\int_E |f - f_n| \, d\lambda\} \leq 0$. En particular,

$$0 \geq \overline{lim}_n\{\int_E |f - f_n| \, d\lambda\} \geq \underline{lim_n}\{\int_E |f - f_n| \, d\lambda\} \geq 0,$$

y por tanto $lim_n\{\int_E |f - f_n| \, d\lambda\} = 0$. Finalmente, puesto que

$$0 \leq |\int_E f \, d\lambda - \int_E f_n \, d\lambda| \leq \int_E |f - f_n| \, d\lambda,$$

deducimos, tomando límites en n, que $\int_E f \, d\lambda = lim_n \int_E f_n \, d\lambda$.

■

Nota 1.0.6. Combinando ambos teoremas (TCM y TCD), deducimos que también las funciones cuyo valor absoluto es impropiamente integrable en el sentido de Riemann quedan bajo control.

Sea $I =]\alpha,\beta[$, admitiendo que α puede ser $-\infty$ y β a su vez $+\infty$. Se dice que f una función **localmente integrable** (resp. localmente R-integrable) en I si es integrable (resp. integrable en el sentido de Riemann) en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I. Recuérdese (véase [?, Definición 7.37]) que f se dice ser "impropiamente" integrable, en el sentido de Riemann, en I cuando para cualesquiera dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de puntos de I convergiendo respectivamente a α y β, la sucesión de integrales $\{\int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx\}$ es convergente. En tal caso, se define

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx = lim_n\{\int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx\}.$$

Así, teniendo en cuenta [?, Proposición 7.50], veamos que si f es localmente R-integrable entonces $|f|$ **es impropiamente integrable en I si, y sólo si,** $f \in \mathcal{L}(I)$, y en tal caso

$$\int_I |f|\ d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)|\ dx.$$

En efecto, sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente convergiendo a α y sea $\{b_n\}$ una sucesión creciente convergiendo a β. Es claro que la sucesión de funciones creciente $\{|f|\chi_{[a_n,b_n]}$ converge a la función $|f|$. Si $|f|$ es impropiamente integrable en I, entonces, teniendo en cuenta el Corolario 1.0.3, la sucesión de integrales $\{\int_I |f|\chi_{[a_n,b_n]}\ d\lambda\} = \{\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\ dx\}$ converge (luego está acotada). Aplicando el T.C.M., la sucesión de integrales converge a $\int_I |f|\ d\lambda$, la función $|f| \in \mathcal{L}(I)$.

Recíprocamente, es obvio que para cualesquiera $a, b \in I$, $|f|\chi_{[a,b]} \le |f|$. Además, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sendas sucesiones de puntos de I, convergiendo a α y β respectivamente, es claro que la sucesión de funciones integrables $\{|f|\chi_{[a_n,b_n]}\}$ converge a la función $|f| \in \mathcal{L}(I)$. En virtud del T.C.D., téngase en cuenta de nuevo el Corolario 1.0.3), se tiene que la sucesión sucesión de integrales $\{\int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx\} = \{\int_I |f|\chi_{[a_n,b_n]}\ d\lambda\}$ es convergente a $\int_I |f|\ d\lambda$. ■

1.0.3. Teorema de la convergencia absoluta

.

Veamos qué ocurre con el signo integral y el signo de la sumatoria, esto es, ¿cuándo permutan ambos signos? Conideremos, para cada natural n, las funciones $g_n = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}$, $f_1 = g_1$ y $f_n = g_n - g_{n-1}$ para todo $n \ge 2$. Nótese que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n \ne \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

En efecto, la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n\ge1} f_n$ coincide con la sucesión $\{g_n\}$, y por tanto, la suma de dicha serie es 0 para todo $x \in [0,1]$, en consecuencia, $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = 0$. Por otra parte,

$$\int_0^1 f_n = \int_0^1 g_n - g_{n-1} = arctg(\sqrt{n}) - arctg(\sqrt{n-1}),$$

y la serie telescópica $\sum_{n\geq 1} arctg(\sqrt{n}) - arctg(\sqrt{n-1})$ converge a $\pi/2$.

Pues bien, como consecuencia de la combinación de los teoremas T.C.M. y T.C.D. podemos saber algún contexto en el que tales signos permutan.

Teorema 1.0.7. *(Teorema de la convergencia absoluta)(T.C.A.)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones **integrables** *en E. Si* **la serie** $\sum_{n\geq 1}(\int_E |f_n|\ d\lambda)$ **converge** *entonces la* **la serie** $\sum_{n\geq 1} f_n$ **converge absolutamente** *en un subconjunto E_1 de E, cuyo complemento es de medida nula, y*

$$lim_n\{\int_{E_1} |\sum_{k=n}^{+\infty} f_k|\ d\lambda\} = 0.$$

En consecuencia, $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\chi_{E_1} \in \mathcal{L}(E)$ y

$$\int_E (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\chi_{E_1}\ d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty}(\int_E f_n\ d\lambda).$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considero la sucesión $\{G_n\}$ de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n|$. Es claro que $\{G_n\}$ es una sucesión creciente de funciones integrables en E. Además,

$$\int_E G_n\ d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_E |f_k|\ d\lambda \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(\int_E |f_n|\ d\lambda) < \infty.$$

En virtud del T.C.M. existe una función G integrable en E que es límite puntual c.p.d. de la sucesión de funciones $\{G_n\}$ verificando que

$$\int_E G\ d\lambda = lim\{\int_E G_n\ d\lambda\}.$$

Dado que $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| = G(x) \in \mathbb{R}$ c.p.d. en E, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente cp.d. en E. Sean ahora $E_1 = \{x \in E;\ \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| < \infty\}$ y $\{F_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$. Es claro que, para cada $x \in E_1$,

$$|F_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq G(x).$$

Sea $F : E_1 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En virtud el T.C.D. $F \in L(E_1)$ y $lim_n\{\int_{E_1} |\sum_{k=n}^{+\infty} f_k| = 0$. En particular,

$$\int_E F\chi_{E_1}\ d\lambda = \int_{E_1} F\ d\lambda = lim_n\{\int_{E_1} F_n\ d\lambda\} = lim_n \sum_{k=1}^{n}\{\int_{E_1} f_k\ d\lambda\} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{E_1} f_k\ d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_E f_k\ d\lambda.$$

∎

Nota 1.0.8. Nótese que en el caso en que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ sea puntualmente convergente en E, entonces, los mismos argumentos prueban que

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} (\int_E f_n \; d\lambda).$$

Algunos ejercicios propuestos mostrarán la potencia del T.C.A.

1.0.4. Integrales dependiendo de un parámetro

Como otra aplicación de los teoremas de convergencia consideramos las llamadas integrales dependiendo de un parámetro.

Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$. Considérese una función $f : A \times E \to \mathbb{R}$. Asociada a ésta definimos, para cada $t \in A$, la función $f_t : E \to \mathbb{R}$ mediante la expresión $f_t(x) = f(t, x)$ y, para cada $x \in E$, la función $f^x : A \to \mathbb{R}$ mediante la expresión $f^x(t) = f(t, x)$. En todo lo que sigue supondremos que $f_t \in \mathcal{L}(E)$ para todo $t \in A$ y consideraremos una nueva función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_E f_t \; d\lambda.$$

El objetivo de esta sección es el de encontrar condiciones sobre la función f que nos aseguren distintas propiedades analíticas de la función φ.

Proposición 1.0.9. *Sean X, E, f y φ como arriba. Si*

1. *para cada $x \in E$, la función f^x definida por $f^x(t) = f(t, x)$ tiene límite (resp. es continua) en un punto $a \in A'$ (resp. $a \in A$) y*
2. *existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tal que $|f(t, x)| \leq g(x)$ para todo $t \in A$ y $x \in E$,*

entonces φ tiene límite (resp. es continua) en a y

$$lim_{t\to a}(\int_E f(t, x) \; d\lambda) = \int_E (lim_{t\to a} f(t, x)) \; d\lambda.$$

Demostración. Sea $a \in A'$ y sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de A, distintos de a que converge al propio a. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n(x) = f(t_n, x)$ para todo $x \in E$. Obsérvese que, para cada $x \in E$,

$$lim_n\{f_n(x)\} = lim_n\{f(t_n, x)\} = lim_{t\to a} f(t, x) := h(x).$$

Además

$$|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x).$$

Aplicando ahora el T.C.D. la función h es integrable y

$$\int_E lim_{t\to a} f_t \; d\lambda = \int_E h \; d\lambda = lim_n \int_E f_n \; d\lambda = lim_n \int_E f_{t_n} \; d\lambda,$$

esto es

$$\int_E lim_{t\to a} f_t \; d\lambda = lim_{t\to a}\int_E f_t \; d\lambda.$$

Con respecto a la continuidad, basta cambiar $lim_{t\to a} f(t,x)$ por $f(a,x)$ y razonar de igual manera.

■

Con idéntica argumentación podemos probar que

Proposición 1.0.10. *Sea $X = I$ un intervalo de números reales y sean E, f, φ como arriba. Si*

1. *Para cada $x \in E$, la función f^x es derivable en I,*
2. *Existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tal que $|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(t,x)| = |(f^x)'(t)| \leq g(x)$ para todo $t \in I, x \in E$,*

entonces φ es derivable en I y para cada $a \in I$,

$$\varphi'(a) = \int_E \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(a,x) \; d\lambda.$$

Demostración. Sea $a \in I$ y sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de I, distintos de a que converge al propio a. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n(x) = \frac{f(t_n,x)-f(a,x)}{t_n-a}$ para todo $x \in A$. Fijemos $x \in E$. Es claro que la sucesión $\{g_n(x)\}$ converge a la función $h := x \mapsto \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(a,x)$ y se sabe, por el teorema del Valor Medio, que existe $t_{x,n} \in I$ tal que $g_n(x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(t_{x,n}, x)$. Así por hipótesis, $|g_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in E$ y todo n. Por otra parte,

$$\frac{\varphi(t_n)-\varphi(a)}{t_n-a} = \frac{\int_E f(t_n,x)\; d\lambda - \int_E f(a,x)\; d\lambda}{t_n-a} = \int_E g_n \; d\lambda.$$

Aplicando de nuevo el T.C.D., obtenemos que la función h es integrable y

$$\varphi'(a) = lim_n\{\int_E g_n \; d\lambda\} = \int_E lim_n\{g_n\} \; d\lambda = \int_E \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(a,x)\; d\lambda.$$

■

1.0.5. Relación de ejercicios

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles y f, g dos funciones medibles. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\{f_n\}$ converge c.p.d a f y a g c.p.d. entonces $f = g$ c.p.d.

   b) Si $\{f_n\}$ converge c.p.d a f y $f = g$ c.p.d. entonces $\{f_n\}$ converge c.p.d a g

2. Considérese, para cada n, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2\, \chi_{[1/(n+1),1/n]}$. Estudie la convergencia puntual y compare $\int lim f_n$ con $lim \int f_n$.

3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que f es integrable y que
$$lim \int_E |f - f_n| = 0.$$
Dé un ejemplo donde se vea que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

4. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E que converge uniformemente a una función f. Pruebe que f es integrable y que
$$lim \int_E |f - f_n| = 0.$$
Dé un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

5. Calcule $lim \int f_n$ para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones de $]0, 1[$ en $\mathbb{R}$:

   a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
   b) $f_n(x) = (1/n)\ log(x + n)e^{-x}cos(x)$.
   c) $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$.

6. Para cada natural n, se consideran la funciones $g_n = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}$ y $f_1 = g_1$ y $f_n = g_n - g_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Pruebe que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

7. Para cada natural n, y para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $f_n(x) = a_n sen(nx)+b_n cos(nx)$, donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números reales. Pruebe que si la sucesión $\{f_n\}$ converge c.p.d. a uno en $[0, 2\pi]$ entonces la sucesión $\{|a_n| + |b_n|\}$ no está acotada.

8. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y f una función integrable en E. Pruebe que
$$n\lambda(\{x \in E :\ f(x) \geq n\}) \longrightarrow 0.$$
¿Es cierta la anterior afirmación para funciones medibles positivas? En caso negativo, dé un contraejemplo.

9. Pruebe que la función $\frac{sen(x)}{x}$ es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y que
$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

10. Pruebe que la función e^{x^2} es integrable en el intervalo $[0,1]$ y que

$$\int_0^1 e^{x^2 dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

11. Justifique, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

    a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

    b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}, (a,b>0)$ y deduzca que

    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = ln(2).$$

    c) $\int_0^{\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}, (a,b>0)$.

12. Sean I, J dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando:

    a) Para cada $t \in I$, la función $x \longmapsto f(t,x)$ es integrable en J.

    b) Para cada $x \in J$, la función $t \longmapsto f(t,x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

    c) La función $x \longmapsto |\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}|$ está dominada por una función integrable en J.

    d) Sea $g : I \longrightarrow J$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

    Pruebe que, para $a \in J$, la función

    $$F(t) := \int_a^{g(t)} f(t,x)dx$$

    es derivable en I y que, para cada $t \in I$,

    $$F'(t) := \int_a^{g(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} dx + f(t, g(t))g'(t).$$