Lógica y métodos discretos.
Ejercicios de exámenes

Ejercicio 1 *Dada la sucesión* $a_n = 2^n + n$

1. *Obtén una ecuación en recurrencia lineal homogénea que cumpla.*
2. *Encuentra la solución general de la ecuación anterior.*
3. *Encuentra la solución particular que verifica* $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ *y* $a_2 = 3$.

Ejercicio 2 *Dada la sucesión* $a_n = 3^n - n$. *Obtén una ecuación en recurrencia lineal homogénea que cumpla.*

Ejercicio 3 *Dada la ecuación* $a_{n+2} + a_n = 3^n + 2a_{n+1}$. *Encuentra su solución general y una solución particular que verifique* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 2$.

Ejercicio 4 *Dada la ecuación* $x_n = 4 + x_{n-2}$ *para todo* $n \geq 2$. *Encuentra la solución que cumple* $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Ejercicio 5 *Dada la ecuación* $x_{n+2} + x_n = 2$ *para todo* $n \geq 0$. *Encuentra la solución general y* x_{56789} *para la solución que cumple* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Ejercicio 6 *La torre de Hércules tiene una escalera con 234 peldaños. Si solemos subirla saltando uno o dos peldaños, ¿de cuántas formas distintas podemos subir al faro?.*

Ejercicio 7 *Dada la ecuación* $x_n + 9x_{n-2} = 6x_{n-1} + 2^n$, *encuentra la sucesión que la verifica y cumple* $x_0 = 4$ *y* $x_1 = 14$.

Ejercicio 8 *Dadas 121 rectas del plano de forma que no hay dos paralelas ni tres concurrentes en un punto. ¿Cuántas regiones del plano determinan?*

Ejercicio 9 *Dada la ecuación* $x_n - 2 = -x_{n-2}$ *para todo* $n \geq 2$. *Encuentra la solución general y el término* a_{45678} *para la solución que cumple* $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 1$.

Ejercicio 10 *Dada la ecuación* $x_n + x_{n-2} = 3$ *para todo* $n \geq 2$. *Encuentra la solución general de dicha ecuación y el término* a_{94675} *para la solución que cumple* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 0$.

Ejercicio 11 *Dada la ecuación* $x_n + x_{n-2} = 0$ *para todo* $n \geq 2$. *Encuentra la solución general de dicha ecuación y el término* a_{94675} *para la solución que cumple* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 2$.

Ejercicio 12 *Dada la ecuación* $x_n + x_{n-2} = 0$ *para todo* $n \geq 2$. *Encuentra la solución general de dicha ecuación y el término* a_{94675} *para la solución que cumple* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 2$.

Ejercicio 13 *Dada la ecuación en recurrencia* $x_n = -x_{n-2} + 2n$ *para* $n \geq 2$:

1. *Calcula mediante la ecuación los ocho primeros términos de la sucesión que cumple* $a_0 = 3$ *y* $a_1 = 2$.
2. *Encuentra el polinomio característico y la solución general de una ecuación homógenea asociada.*
3. *Encuentra la solución particular que verifica* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 2$ *y calcula* $a_{123456789}$

Ejercicio 14 *Dada la ecuación* $x_{n+2} - x_n = 2$. *Encuentra:*

1. *la solución general de una homogénea asociada,*
2. *su solución general*
3. *y una solución particular que verifique* $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 2$.

Ejercicio 15 *Dada la ecuación en recurrencia* $x_n = 4 - x_{n-2}$ *para* $n \geq 2$:

1. *Encuentra el polinomio característico y la solución general de una ecuación homógenea asociada.*
2. *Encuentra la solución particular que verifica* $a_0 = 2$ *y* $a_1 = 2$ *y calcula* a_{231}

Ejercicio 16 *Dada la ecuación* $a_n + a_{n-2} = 2^n + 2a_{n-1}$.

1. *Encuentra su solución general*
2. *y una solución particular que verifique* $a_0 = 5$ *y* $a_1 = 5$.

Ejercicio 17 *Justifica que el retículo* $(D(210), |)$ *es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:*

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad 14^* \wedge 21, \quad (6^* \vee 35)^* \vee 10, \quad ((3 \vee 10)^* \vee 2)^*.$$

Expresa los elementos 21 *y* 35 *como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos (complemento de los átomos).*

Ejercicio 18 *Dada la función booleana elemental* $f_{126} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla sus formas canónica disyuntiva y reducida disyuntiva. Encuentra también sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 19 *Dada la función booleana elemental* $f_{217} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla sus formas canónica disyuntiva y disyuntiva reducida. Encuentra las formas disyuntivas no simplificables de* f.

Ejercicio 20 *Sea* $f : \mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}$ *la función definida mediante las tablas:*

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

x	y	z	t	f
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Halla su forma disyuntiva reducida y sus formas disyuntivas no simplificables.(Puedes utilizar cualquier método incluido mapas de Karnaugh)

Ejercicio 21 *Dada la función booleana elemental* $f_{203} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Encuentra sus implicantes primos nucleares y determina, mediante el algoritmo de Petrick, sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 22 *Dada la función booleana elemental* $f_{173} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Encuentra sus implicantes primos nucleares y determina, mediante el algoritmo de Petrick, sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 23 *Dada la función booleana elemental* $f_{231} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla:*

1. *sus formas canónicas disyuntiva y conjuntiva,*
2. *sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida,*
3. *mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 24 *Dada la función booleana elemental* $f_{219} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla:*

1. *su forma canónica disyuntiva y conjuntiva,*
2. *sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida,*
3. *mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 25 *Dada la función booleana elemental* $f_{189} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla:*

1. *sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida usando FCC,*
2. *mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 26 *Dada la función booleana elemental* $f_{110} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$.

1. *Halla sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida,*
2. *calcula sus formas disyuntivas no simplificables.*

Ejercicio 27 *Utiliza el algoritmo de demolición para probar si hay un grafo de seis vértices con grados* $\{3, 1, 2, 1, 2, 1, 4\}$. *En caso de que exista, haz la reconstrucción de uno de ellos paso a paso.*

Ejercicio 28 *¿Existe un grafo de cinco vértices con grados* $2, 4, 4, 3, 3$*? En caso afirmativo representalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

Ejercicio 29 *¿Existe un grafo de siete vértices con grados* $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2$*? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

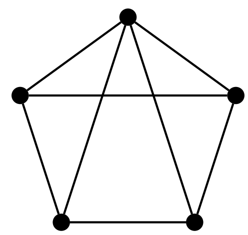
Ejercicio 30 *¿Existe un grafo de ocho vértices con grados* $1, 4, 1, 2, 2, 4, 2, 2$*? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

Ejercicio 31 *¿Existe un grafo de seis vértices con grados* $2, 3, 2, 2, 3, 2$*? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y el de reconstrucción. La reconstrucción debe representarse paso a paso y con vértices etiquetados. Cualquier otra respuesta no será válida.*

Ejercicio 32 *Encuentra, utilizando el algoritmo de demolición-reconstrucción, un grafo de cinco vértices con grados* $\{4, 2, 3, 3, 2\}$.

Ejercicio 33 *Encuentra, si existe, un grafo* G *de cuatro vértices con grados* $\{3, 2, 3, 2\}$*. Utiliza el algoritmo de demolición-reconstrucción. Calcula su polinomio cromático* $p(G, x)$*, su número cromático y de cuántas formas se puede pintar con 6 colores.*

Ejercicio 34 *Dado el grafo* G



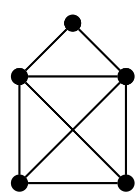
calcula su polinomio cromático $P_G(x)$ *y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar* G *con 6 colores?*

Ejercicio 35

1. *Dado el grafo* $G = K_{2,3}$ *calcula su polinomio cromático* $P_G(x)$.
2. *Halla el número cromático de* G.
3. *Calcula de cuantas formas se puede colorear* G *con 6 colores distintos.*

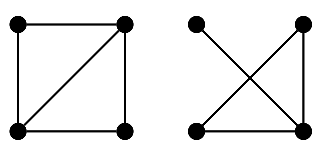
Ejercicio 36 *Dado el grafo* $G = K_{2,3}$ *calcula su polinomio cromático* $P_G(x)$*. Halla el número cromático de* G *y calcula de cuántas formas se puede colorear* G *con 6 colores distintos.*

Ejercicio 37 *Dado el grafo:*



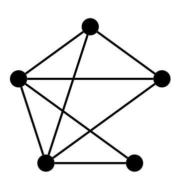
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 4 colores.

Ejercicio 38 *Dado el grafo:*



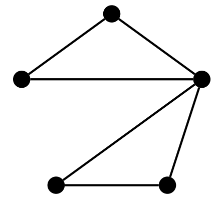
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 39 *Dado el grafo:*



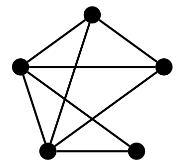
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 40 *Dado el grafo:*



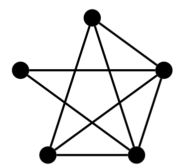
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 41 *Dado el grafo:*



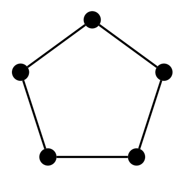
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 42 *Dado el grafo:*



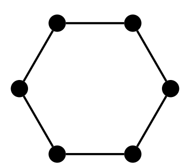
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 43 *Dado el grafo* G



calcula su polinomio cromático $p(G, x)$ *y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar* G *con 6 colores?*

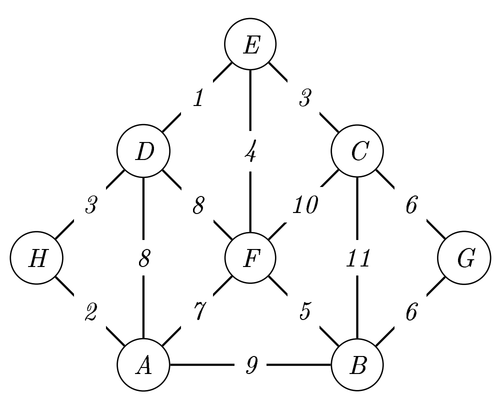
Ejercicio 44 *Dado el grafo* G



calcula su polinomio cromático $p(G, x)$ *y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar* G *con* 5 *colores?*

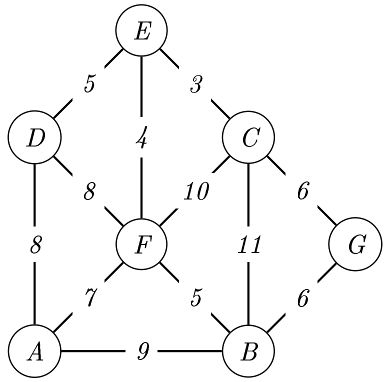
Ejercicio 45 *Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto, vértices de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?*

Ejercicio 46 *Dado el grafo ponderado:*



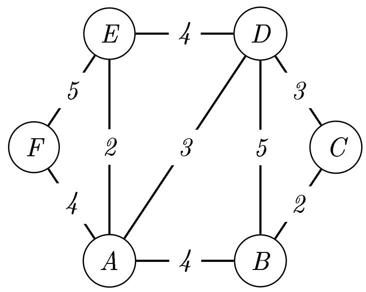
Halla utilizando el algoritmo de Kruskal un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones. Describe la aplicación del algoritmo paso a paso.

Ejercicio 47 *Dado el grafo ponderado:*



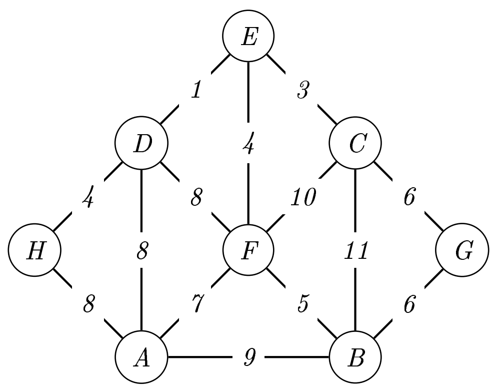
Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Describe el algoritmo paso a paso.

Ejercicio 48 *Dado el grafo ponderado*



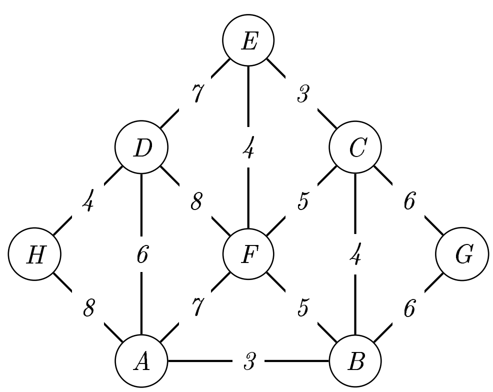
Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador de peso mínimo. Detalla el orden de las elecciones y describe la aplicación del algoritmo paso a paso.

Ejercicio 49 *Dado el grafo ponderado:*



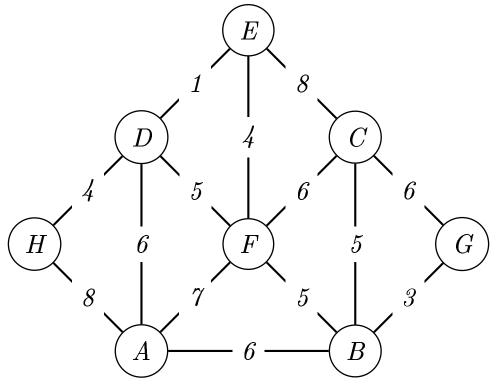
Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

Ejercicio 50 *Dado el grafo ponderado:*



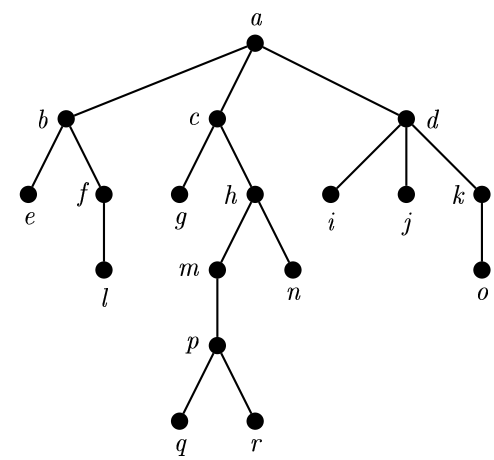
Halla utilizando el algoritmo de Kruskal un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

Ejercicio 51 *Dado el grafo ponderado:*



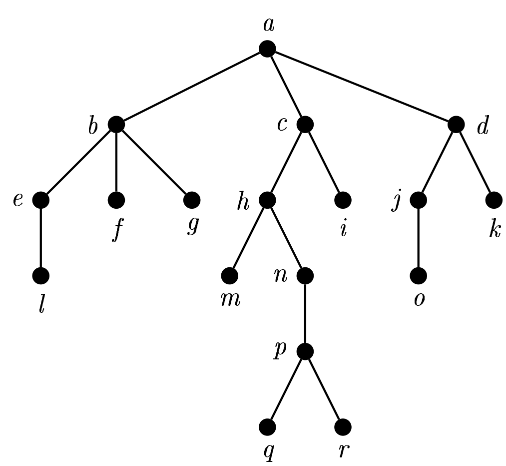
Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

Ejercicio 52 *Dado el grafo*



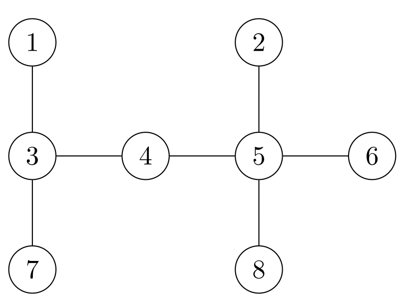
Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlo en preorden, postorden, inorden, top-down y bottom-up.

Ejercicio 53 *Dado el grafo*



Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlo en bottom-up order.

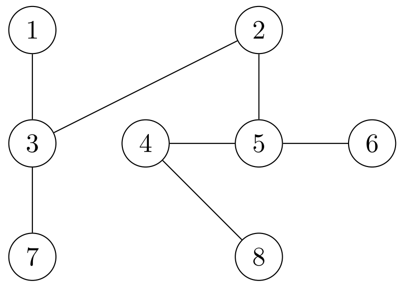
Ejercicio 54 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,1,5,7,4) y determina el código de Prüfer del árbol etiquetado*



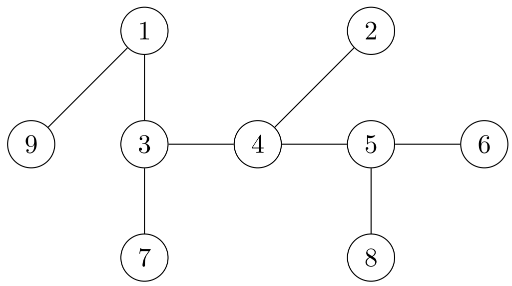
Ejercicio 55 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,3,3,5,5,7)*

Ejercicio 56 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,2,1,2,1,2).*

Ejercicio 57 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,2,1,5,7,4) y determina el código de Prüfer del árbol*

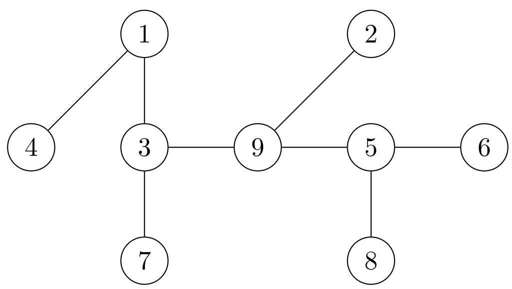


Ejercicio 58 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,1,5,7,4,8) y determina el código de Prüfer del árbol*



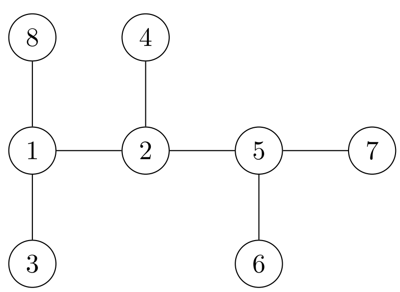
Ejercicio 59 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,1,4,4,4,7,7).*

Ejercicio 60 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,2,3,3,3,5,5) y determina el código de Prüfer del árbol*

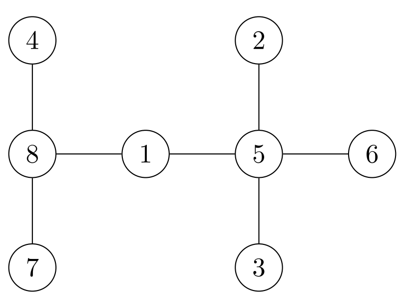


Ejercicio 61 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,2,5,5,7,7).*

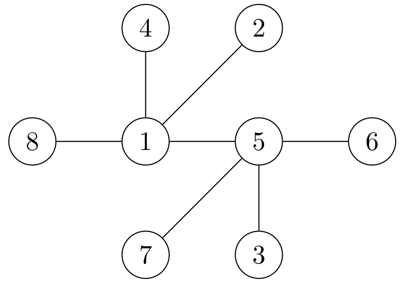
Ejercicio 62 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (5,5,8,5,1,8) y determina el código de Prüfer del árbol*



Ejercicio 63 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (5,2,5,2,6,7) y determina el código de Prüfer del árbol*



Ejercicio 64 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,6,6,1,5,6) y determina el código de Prüfer del árbol*



Ejercicio 65 *Utiliza los polinomios de Gegalkine para estudiar la validez de:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c).$$

Ejercicio 66 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas llamé me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan"*
- *B: "Las ranas no vuelan y A es mendaz"*
- *C: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy mendaz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Ejercicio 67 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas llamé me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan y B es mendaz"*
- *B: "Las ranas no vuelan y C es mendaz"*
- *C: "Las ranas vuelan y A es mendaz"*
- *A: "C es mendaz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Ejercicio 68 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella los gatos ladraban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de decir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre los gatos me encontré con tres nativos A, B, y C y les pregunté "¿Ladran los gatos en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Los gatos no ladran y C es mendaz"*
- *B: "Los gatos ladran si, y sólo si, yo soy mendaz"*
- *C: "Los gatos ladran y A es veraz"*

Dí que puedes concluir sobre los gatos y cada uno de los nativos planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones polinómicas en $\mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 69 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de decir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy veraz"*
- *B: "Las ranas no vuelan"*

- *C: "Las ranas vuelan y A es veraz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y cada uno de los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Ejercicio 70 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$\{d \to a,\ b \to c,\ \neg(\neg a \to b),\ \neg c \to b\} \vDash \neg(c \to \neg d)$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Ejercicio 71 *Estudia si la siguientes afirmación es cierta o no. En caso de no serlo, encuentra un mundo en que sea falsa.*

$$\{c \to (a \vee d),\ (a \wedge b) \to c\} \vDash b \to (\neg c \to a).$$

Ejercicio 72 *Estudia utilizando Davis-Putnam*

$$((e \vee a) \wedge \neg b) \to c,\ \neg c \wedge (a \vee e) \models b \vee d$$

En caso que no sea cierta, encuentra los mundos en que no se cumple.

Ejercicio 73 *Estudia utilizando Davis-Putnam la consecuencia lógica*

$$\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b \vDash (b \to \neg c) \wedge (c \to a)$$

En caso que no sea cierta, encuentra los mundos en que no se cumple.

Ejercicio 74 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \vDash c \vee d$$

es verdadera o falsa. En el caso de que sea falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Ejercicio 75 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d \vDash \neg(a \wedge \neg d)$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Ejercicio 76 *Estudia utilizando resolución si la afirmación:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c)$$

es verdadera o falsa.

Ejercicio 77 *Estudia utilizando resolución si la afirmación:*

$$d \to \neg a,\ a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d \vDash \neg b \wedge c$$

es verdadera o falsa.

Ejercicio 78 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d \vDash a \wedge \neg d$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Ejercicio 79 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x Q(x) \to \forall x \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$
2. $\exists x P(x) \to \exists x (Q(x) \to \neg L(x,y))$

Ejercicio 80 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x(\forall x Q(x) \to \exists y (P(y) \wedge S(x,y)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \forall y \exists x (Q(x) \to \neg L(x,y)))$

Ejercicio 81 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x(\forall x P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x,y)))$

Ejercicio 82 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x(\forall x Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg L(x,y)))$

Ejercicio 83 *Halla una forma prenexa, de Skolem y clausulada de la sentencias, con el menor número de cuantificadores posibles:*

1. $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists x Q(x)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x,y)))$

Ejercicio 84 *Halla una forma prenexa, de Skolem y clausulada de la sentencias, con el menor número de cuantificadores posibles e indicando las equivalencias que utilizas:*

1. $\neg\exists x P(x) \vee (\forall x Q(x) \to \neg\exists y \forall x R(x,y))$
2. $\forall x P(x) \to (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \neg\forall u Q(u)))$

Ejercicio 85 *Encuentra el conjunto de cláusulas cuya insatisfacibilidad sea equivalente a la validez de la consecuencia lógica:*

$$\{\exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \to R(x,y))),\ \forall x(Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y)),\ \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \to T(x))\} \models \exists x(T(x) \wedge Q(x)).$$