Análisis Matemático II
Ejercicios del Capítulo 1: La medida de Lebesgue en el espacio euclídeo.

1. **(Ejemplos de espacios medibles).** Dado un conjunto no vacío Ω,

   a) Probar que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra.

   b) Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre Ω y $E \in \mathcal{A}$ (E no vacío), podemos definir
   $$\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(E) \ .$$
   Probar que $\mathcal{A}_E$ es σ-álgebra sobre E (recibe el nombre de σ-álgebra *inducida*) y, por tanto, el par $(E, \mathcal{A}_E)$ es un espacio medible.

   c) Si $\mathcal{A}_i$ son σ-álgebras sobre Ω $\forall i \in I$, probar que también lo es $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ (I es un conjunto arbitrario de índices).

   d) Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (familia de subconjuntos de Ω), probar que existe *la menor σ-álgebra que contiene a* $\mathcal{S}$. La llamaremos "la σ-álgebra generada por la familia $\mathcal{S}$".

   e) Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea Ω' un nuevo conjunto. Sea $f : \Omega \to \Omega'$ una aplicación. Probar que $(\Omega', \{B \subseteq \Omega' : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\})$ es un espacio medible.

   f) Si $(\Omega, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la σ-álgebra generada por la topología $\mathcal{T}$ recibe el nombre de **"σ-álgebra de Borel"**, $\mathcal{B}$, y sus medibles se llaman **"borelianos"**. Dados dos espacios topológicos $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$, consideremos las correspondientes σ-álgebras generadas ($\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente). Probar que si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una función continua, entonces para todo $B \in \mathcal{B}_2$ se tiene $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_1$ (la pre-imagen de un boreliano es un boreliano). En particular, los homeomorfismos conservan los borelianos.

2. **(Ejemplos de espacios de medida).** Dado un conjunto no vacío Ω,

   a) Probar que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ es un espacio de medida, donde μ se define como la **"medida contadora"**, esto es, dado $A \subseteq \Omega$,
   $$\mu(A) = \begin{cases} \text{número de elementos de } A & (\text{si } A \text{ es finito}), \\ \\ \infty & (\text{si } A \text{ es infinito}). \end{cases}$$

   b) Probar que, fijado un elemento $\omega \in \Omega$, la terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_\omega)$ es un espacio de medida, donde δ_ω se define como la **"medida de Dirac"**: dado $A \subseteq \Omega$,
   $$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & (\text{si } \omega \in A), \\ \\ 0 & (\text{si } \omega \notin A). \end{cases}$$

c) Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $E \in \mathcal{A}$ (E no vacío), probar que la terna $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ es un nuevo espacio de medida, donde $\mathcal{A}_E$ se define como en el ejercicio 1-(b) y μ_E es la restricción de μ a $\mathcal{A}_E \subseteq \mathcal{A}$ (cualquier subconjunto medible no vacío se convierte automáticamente en un nuevo espacio de medida, llamado **"espacio de medida inducido"**).

3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^M$ y $B \subseteq \mathbb{R}^N$. Demuestre que

$$\lambda^*(A \times B) \leq \lambda^*(A)\lambda^*(B).$$

4. Probar que la σ-álgebra de Lebesgue, $\mathcal{M}$, es la mayor σ-álgebra que contiene a los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.

5. Probar que la existencia de conjuntos no-medibles equivale a la no aditividad de la medida exterior, λ^*.

6. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $N < M$. Probar que $f(A)$ es de medida cero.

7. Sea $a, u, v \in \mathbb{R}^2$ y sea P el paralelogramo

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x, y) = a + tu + sv,\ t, s \in \cup 0; 1]\}.$$

Probar que si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(t, s) = tu + sv$ entonces
$\lambda(P) = |detT|$ =base $\times$ altura.

Deducir de lo anterior el área del triángulo, del círculo y de la elipse.

8. Sea $a, u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y sea P el paralelepípedo

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y, z) = a + tu + sv + rw,\ t, s, r \in [0, 1]\}.$$

Probar que si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $T(t, s, r) = tu + sv + rw$ entonces
$\lambda(P) = |detT|$ =área de la base $\times$ altura.

9. Calcule el el volumen del cilindro, de la esfera y del elipsoide.