

Juan Valentin Guerrero Cano.

⑤

$$g_n(x) = n \cdot (\cos x)^n \cdot \operatorname{sen} x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Solución:

CORRECCIÓN EJERCICIO 5 RELACIÓN 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$   $g_n$  es derivable en  $[0, \pi/2]$ .

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= -n^2 \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x + n \cdot (\cos x)^n \cdot \cos x = \\ &= -n^2 \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}^2 x + n \cdot (\cos x)^{n+1} = \\ &= n \cdot (\cos x)^{n-1} \cdot (-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \end{aligned}$$

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \cdot (\cos x)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ (-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 0 \end{cases}$$

$$-n \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow -n \operatorname{sen}^2 x = -\cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow (\tan(x))^2 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

Estudiamos monotonicidad de  $g'_n(x)$ .

$$g'_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]0, \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)[ \Rightarrow \text{creciente.}$$

$$g'_n(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right), \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow \text{decreciente.}$$

$$\text{Luego: } \max \{ g_n(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \} = g_n(\arctan(\sqrt{\frac{1}{n}})) = A.$$

Convergencia puntual.

$$\text{Si } x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow \{ g_n(x) \} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ &\Rightarrow (\cos x) \in ]0, 1[ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\cos x)^n = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{ g_n(x) \} \rightarrow 0 \text{ then.} \end{aligned}$$

Luego:  $\{g_n(x)\} \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Converge puntualmente a la función nula:

Sea  $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2}] \quad \exists m \in \mathbb{N}: \forall n \geq m \quad \arctan(\sqrt{\frac{1}{n}}) < \epsilon$

Definimos  $x_n: \begin{cases} x_n = \arctan(\sqrt{\frac{1}{n}}) & \forall n \geq m \\ x_n = 0 & \forall n < m. \end{cases}$

Entonces  $x_n \in [0, \epsilon] \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\{g_n(x) - g(x)\} =$   
 $= \{g_n(x)\} \not\rightarrow 0 \Rightarrow \{g_n\}$  no converge uniformemente  
en  $[0, \epsilon]$ . (\*  $\{g_n(x)\}$  diverge a  $+\infty$ )

Para  $n \geq m \quad \arctan(\sqrt{\frac{1}{n}}) < \epsilon$  y  $g_n$  decreciente  
en  $[\epsilon, \frac{\pi}{2}]$ .

$\{g_n(\epsilon)\} \rightarrow 0$  por la convergencia puntual  
antes estudiada.  $\Rightarrow$  Por el primer criterio de  
convergencia uniforme como tenemos que,

$$0 < g_n(x) \leq g_n(\epsilon) \Rightarrow |g_n(x)| \leq g_n(\epsilon)$$

~~y así~~ y  $\{g_n(\epsilon)\} \rightarrow 0 \Rightarrow \{g_n\}$  converge uniforme-  
mente en  $[\epsilon, \frac{\pi}{2}]$

Juan Valentin Guerrero Cano

(4)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad \forall x \in ]0,1[$$

---

Para que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converja absolutamente en  $] -1,1[$

~~debe~~  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  debe converger puntualmente;

$$|f_n| = \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| = \frac{|x^n|}{\underbrace{|1-x^n|}_{>0 \forall x \in ]0,1[}} = \frac{|x|^n}{1-x^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1-x^n} \rightarrow \text{CRITERIO COCIENTE } \{a_n\}; a_n = \frac{|x|^n}{1-x^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{1-x^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} (1-x^n)}{|x|^n (1-x^{n+1})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| (1-x^n)}{(1-x^{n+1})} = |x| \neq \text{Caso } x \in ]0,1[ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  converge puntualmente  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge absolutamente.



Sabemos que todo compacto en  $(\mathbb{R}, \tau_e)$  es de la forma  $[a, b]$ . ~~compacto en  $\mathbb{R}$~~ .

Aplicaremos el test de Weierstrass.

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{1-x^n}. \quad \text{Ecojamos un } \alpha \in ]0, 1[.$$

y un compacto  $[-\alpha, \alpha] \subset ]-1, 1[$ .

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \frac{|x|^n}{|1-x^n|} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}$  converge por la misma razón que

$\sum_{n \geq 1} \frac{|x|^n}{|1-x^n|}$  converge (CRITERIO COCIENTE).

$$\text{Luego } \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge uniformemente en } [-\alpha, \alpha],$$

el compacto definido anteriormente (además como  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $[-\alpha, \alpha] \subset ]-1, 1[$ ). Luego,

por el test de Weierstrass  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente y uniformemente en todo compacto.

\* Matizar que si el compacto es de la forma

$$\{ \alpha \} \quad \{ \alpha \} \in K \subset ]-1, 1[ \Rightarrow \text{el test de Weierstrass}$$

sigue validando la convergencia de  $\sum_{n \geq 1} f_n$  en todo compacto

$\#$  Demostremos que el término general no converge a 0, de ahí que no se produzca convergencia uniforme a 0 y por tanto la serie no converge uniformemente en  $]-1,1[$ .

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^n}{1-x^n} \right\} \quad \forall x \in ]0,1[.$$

$$\# \quad |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)|.$$

Tomando  $x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (x_n \in ]0,1[$

$$|f_n(x_n)| = \left| \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n} \neq 0 \quad \text{Por criterio de equivalencia logarítmica.}$$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n}$~~

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (1-\frac{1}{n} - 1) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{n-1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{n-1-n}{n} \right) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} \quad \text{Luego}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ no converge uniformemente en } ]-1,1[.$$

⑤

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)} = \sum_{n \geq 0} C_n (x-a)^n$$

$C_n = \frac{1}{\log(n+2)} \quad a=0$

Calculemos su radio de convergencia ( $R$ )

$$R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad R = \frac{1}{L} \quad \text{donde} \quad L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|C_n|}.$$

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\log(n+2)} \right| = \frac{1}{\log(n+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{\log(n+2)}} = 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow \text{intervalo de convergencia:}$$

$$J = ]-1, 1[$$

Luego  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  converge absolutamente en  $] -1, 1[$

y uniformemente en cada compacto  $K \subset ] -1, 1[$ .

Pero no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus ] -1, 1[$ .