Primera Entrega Grafos

Alberto Llamas González

Lógica y Métodos Discretos
1º Grado Ingeniería Informática

Relación 3 - Grafos

(3 2) ¿Son isomorfos los grafos de las figuras?

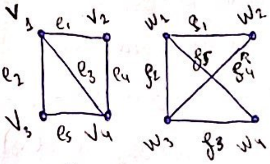


Figura 1

⟹ Sí son isomorfos porque existen 2 biyecciones $h_V: V_G \to V_{G'}$ y $h_E: E_G \to E_{G'}$ tales que para cada lado $e_i \in E$ se verifica $\gamma_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$ donde $\{u, v\} = \gamma_G(e)$ es decir:

$h_V: V_G \to V_{G'}$

$v_1 \longmapsto w_1$

$v_2 \longmapsto w_2$

$v_3 \longmapsto w_4$

$v_4 \longmapsto w_3$

$h_E: E_G \to E_{G'}$

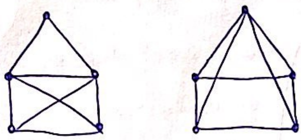
$e_1 \longmapsto f_1$

$e_2 \longmapsto f_5$

$e_3 \longmapsto f_2$

$e_4 \longmapsto f_4$

$e_5 \longmapsto f_3$



G_1 G_2

Figura 2

⟹ No son isomorfos ya que las sucesiones $D_k(G)$ son distintas

$\{D_k(G_1)\} = (0, 0, 1, 2, 2, 0, \dots)$

$\{D_k(G_2)\} = (0, 0, 0, 4, 1, 0, \dots)$

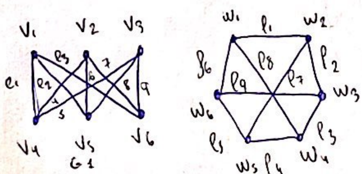


Figura 3

G_2

⟹ Sí son isomorfos:

$h_V: V_{G1} \to V_{G2}$

$v_1 \longmapsto w_1$

$v_2 \longmapsto w_5$

$v_3 \longmapsto w_3$

$v_4 \longmapsto w_2$

$v_5 \longmapsto w_6$

$v_6 \longmapsto w_4$

$h_E: E_{G1} \to E_{G2}$

$e_1 \longmapsto f_1$ $\quad e_9 \longmapsto f_3$

$e_2 \longmapsto f_6$

$e_3 \longmapsto f_8$

$e_4 \longmapsto f_7$

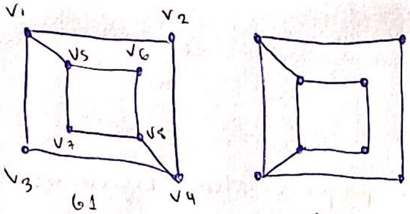
$e_5 \longmapsto f_2$

$e_6 \longmapsto f_5$

$e_7 \longmapsto f_4$

$e_8 \longmapsto f_9$

Escaneado con CamScanner

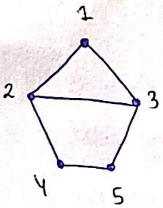


G1 G2

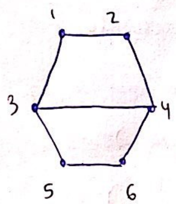
Figura 4

⇒ No son isomorfos ya que si fuesen, existiría una biyección entre los vértices y entre las aristas. Es decir, se conservarían los vértices adyacentes. En G1 podemos ver que V_5 (vértice de grado 3) es adyacente a 2 vértices de grado 2 (V_6, V_7) y a uno de grado 3 (V_1). Sin embargo, en G_2 todos los vértices de grado 3 son adyacentes a dos de grado 3 y a uno de grado 2. Por tanto, no son isomorfos.

3.3 Expresa en forma matricial los grafos



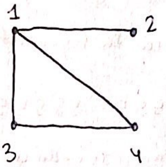
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



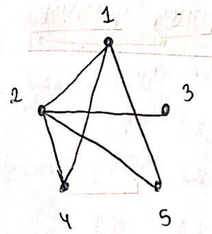
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) Representa gráficamente los grafos cuyas matrices de adyacencia son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



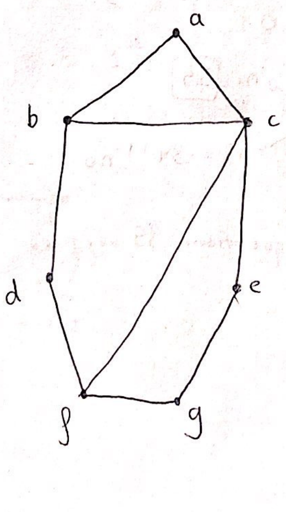
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(3.5) Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g:

1. a habla inglés
2. b habla inglés y español
3. c habla inglés, italiano y ruso
4. d habla japonés y español
5. e habla alemán e italiano
6. f habla francés, japonés y ruso
7. g habla francés, y alemán.

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando, si es necesario a otra persona como intérprete?



Cada par de personas no podrían comunicarse si fuera necesario usando a otra persona como intérprete, pero sí usando más de un intérprete.

Por ejemplo, si d y e se quisieran comunicar necesitarían a b y c o f y g

3.9 ¿Existe algún grafo regular de grado cinco con 25 vértices?

Debemos ver si es gráfica la siguiente sucesión

55555 55555 55555 55555 55555

aplicando Havel-Hakimi, se reduce a

44444 44444 44444 44444

siguiendo aplicando el teorema

3333 3333 3333 3333

222 222 222 222

11 11 11 11

0 0 0 0

↳ es gráfica ⇒ Sí existe dicho grafo

3.10 ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

En un grafo completo, el nº de lados es

$$2\ell = n(n-1) \Rightarrow \ell = \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego

$$2\ell = n^2 - n \iff n^2 - n - 1190 = 0$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1190)}}{2} = \frac{1 \pm 69}{2} \begin{cases} \rightarrow n_1 = \boxed{35} \\ \rightarrow n_2 = -34 \text{ !! no} \end{cases}$$

Existe un grafo completo con 595 lados, uno que tiene 35 vértices

(3.14) Determina cuáles de las secuencias siguientes son gráficas, y para aquellas que lo sean encuentra una realización concreta:

- 2, 4, 4, 3, 3

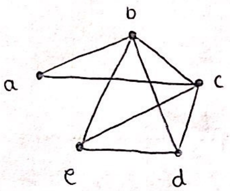
A	B	C	D	E
2	~~4~~	4	3	3
1	0	~~3~~	2	2
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

pivote B, elegimos A, C, D, E

pivote C, elegimos A, D, E

pivote D, elegimos E

→ sí es secuencia gráfica



- 2, 2, 3, 2, 2, 3

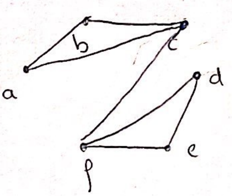
a	b	c	d	e	f
2	2	~~3~~	2	2	3
1	1	0	1	2	~~3~~
1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

pivote c, elijo a, b, d

pivote f, elegimos b, d, e

pivote a, elegimos e

→ Sí es secuencia gráfica



- 4, 4, 3, 2, 2, 1

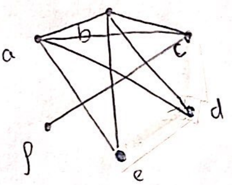
a	b	c	d	e	f
$\cancel{4}$	4	3	2	2	1
0	$\cancel{3}$	2	1	1	1
0	0	$\cancel{1}$	0	0	1
0	0	0	0	0	0

pivote a, elegimos b, c, d, e

pivote b, elegimos c, d, e

pivote c, elegimos f

⇒ Sí es gráfica



- 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 : No es una sucesión gráfica ya que hay un número de la sucesión que es igual al nº de elementos no nulos

- 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2

a	b	c	d	e	f	g
$\cancel{6}$	5	5	4	3	3	2
0	$\cancel{5}$	4	3	2	2	1
0	0	$\cancel{3}$	2	1	1	1
0	0	0	$\cancel{1}$	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

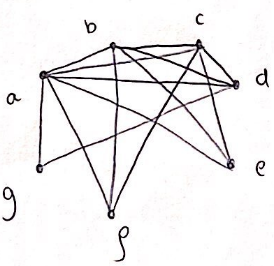
pivote a, cogemos b, c, d, e, f, g

pivote b, elegimos c, d, e, f

pivote c, elegimos d, e, f

pivote d, elegimos g

⇒ Sí es gráfica



Escaneado con CamScanner

- 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1

a	b	c	d	e	f	g
~~6~~	6	5	4	3	3	1
0	~~5~~	4	3	2	2	0

$\Rightarrow$!! 5 es > que el nº de elementos no nulos

$\Rightarrow$ NO es gráfica

- 1, 4, 1, 2, 2, 4, 2, 2

a	b	c	d	e	f	g	h
1	~~4~~	1	2	2	4	2	2
1	0	1	1	1	~~3~~	1	2
~~1~~ 0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	~~1~~	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

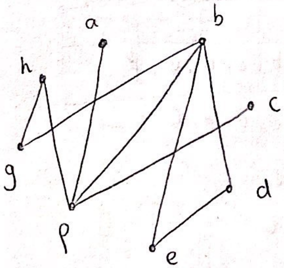
pivote b, elegimos d, e, f, g

pivote f, elegimos e, g, h

pivote a, elegimos c

pivote d, elegimos h

$\Rightarrow$ Sí es gráfica



• 1, 5, 1, 4, 2, 4, 2, 3

a	b	c	d	e	f	g	h
1	$\cancel{5}$	1	4	2	4	2	3
1	0	1	$\cancel{3}$	1	3	1	2
1	0	1	0	1	$\cancel{2}$	0	1
0	0	0	0	$\cancel{1}$	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

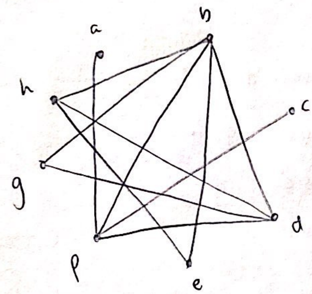
pivote b, elegimos d, f, g, h, e

pivote d, elegimos f, g, h

pivote f, elegimos a, c

pivote e, elegimos, h

=> Sí es gráfica



• 5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2

a	b	c	d	e	f	g	h
$\cancel{5}$	5	4	4	4	4	2	2
0	$\cancel{4}$	3	3	3	3	2	2
0	0	$\cancel{2}$	2	2	2	2	2
0	0	0	1	1	$\cancel{2}$	2	2
0	0	0	$\cancel{1}$	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	$\cancel{1}$	1
0	0	0	0	0	0	0	0

pivote a, elegimos b, c, d, e, f

pivote b, elegimos c, d, e, f

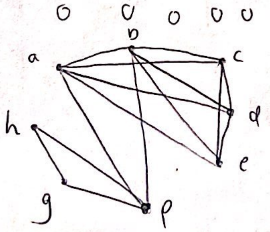
pivote c elegimos d, e

pivote f, elegimos g, h

pivote d, elegimos e

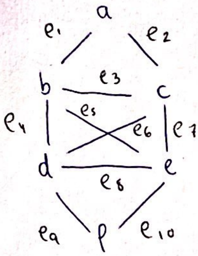
pivote g, elegimos h

=> Sí es gráfica



3.15 Encuentra un camino de Euler para los grafos:

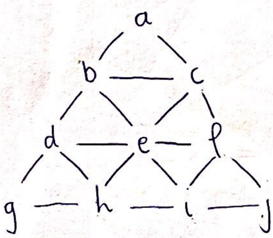
Mediante Fleury:



Como todos los vértices son de grado par elegimos uno cualquiera: a. Aplicamos Fleury:

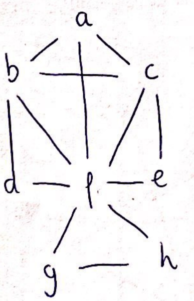
S_V: [a, b, d, f, e, c, b, e, d, c, a]

$$\underbrace{S_E : [e_1, e_4, e_9, e_{10}, e_7, e_3, e_5, e_8, e_6, e_2]}_{\text{Camino de Euler cerrado}}$$



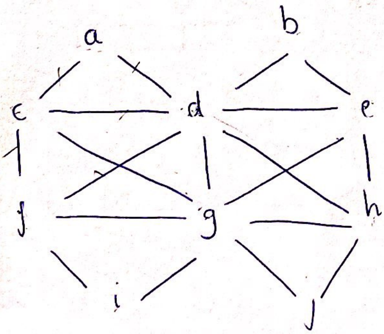
Todos los vértices son de grado par luego ∃ un camino de Euler. Por Fleury:

S_v = [g, h, i, j, f, c, a, b, d, e, b, c, e, f, i, e, h, d, g]



Hay 2 vértices de grado impar, luego ∃ un camino de Euler. Por Fleury:

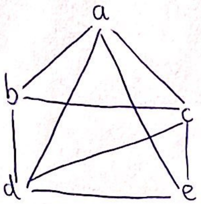
S_v = [a, b, d, f, e, c, a, f, b, c, f, g, h, f]



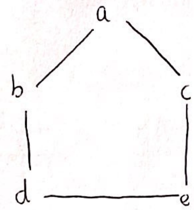
Hay 2 vértices de grado impar, luego ∃ un camino de Euler. Por Fleury:

S_v = [d, a, c, f, d, c, g, f, i, g, d, b, e, h, d, e, g, h, j, g]

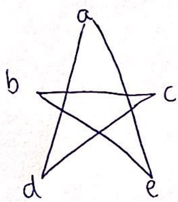
3.23 Determina cuales de los siguientes grafos son planos



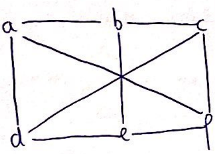
homeomorfismo →



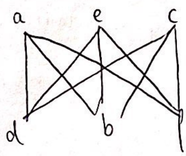
Isomorfo a → K_5 luego NO es PLANO



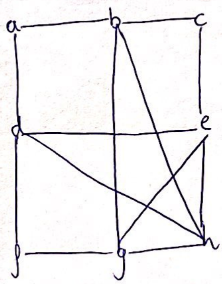
- ES PLANO ya que como tiene 5 vértices no podemos contraerlo a un subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$
- Tampoco es isomorfo a K_5



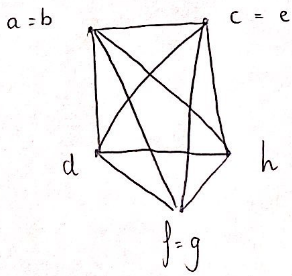
→



→ No es plano ya que es isomorfo a $K_{3,3}$



→ Se puede contraer a K_5



NO ES PLANO

3.26 Sea un grafo plano y conexo con 9 vértices de grados dos (tres veces), tres (3 veces), 4 (2 veces) y 5. ¿Cuántos lados hay? ¿Y caras?

Lados: Sabemos que la suma de los grados es 2 veces el nº de lados

$$\sum_{i=1}^{9} gr(v_i) = 2l = 28 \iff l = 14 \rightarrow \underline{\text{Hay 14 lados}}$$

Caras: Aplicamos la fórmula de Euler para grafos planos conexos

$$v + c - l = 2 \iff c = -v + l + 2 = 16 - 9 = 7$$

Hay 7 caras

3.24 Demuestra que cualquier grafo con cuatro vértices o menos siempre es plano

Por Kuratowski sabemos que un grafo es plano $\iff$ ningún subgrafo puede contraerse a K_5 ni a $K_{3,3}$ y por tanto como un grafo con 4 vértices nunca va a poder ser isomorfo a K_5 y $K_{3,3}$, siempre va a ser plano.