Análisis Matemático II
Ejercicios del Capítulo 1: La integral de Lebesgue.

1. Sean $E, \Omega \in \mathcal{M}$, con $E \subseteq \Omega$ y sean $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ funciones medibles. Demuestre que la función $h : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ g(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus E \end{cases}$$

es medible.

2. Sean $\Omega \in \mathcal{M}$ y $f_n, f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ funciones medibles tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(\{\omega \in \Omega : \; f(\omega) \neq f_n(\omega)\}) < \frac{1}{2^n}.$$

Pruebe que $\{f_n\}$ converge a f c.p.d.

[Indicación: Para cada natural n, considérese

$$A_n = \{\omega \in \Omega; \; f(\omega) \neq f_n(\omega)\} \quad \text{y} \quad B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Pruebe que si $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ entonces $\mu(B) = 0$ y que $\{f_n\}$ converge a f en B^C.]

3. Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una función integrable. Pruebe que

$$f = 0 \; c.p.d. \iff \int_E f = 0, \; \forall E \in \mathcal{M}.$$

4. Sea $\Omega \in \mathcal{M}$ y sea $f : \Omega \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Sea $\mu : \mathcal{M}_\Omega \to [0, \infty]$ la aplicación definida por $\mu(E) = \int_E f$, para cada $E \in \mathcal{M}_\Omega$. Pruebe que μ es una medida en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{M}_\Omega)$ tal que $\mu(Z) = 0$ para todo conjunto $Z \subseteq \Omega$ con medida de Lebesgue $\lambda(Z) = 0$.

5. Sea $f \colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Demuestre las propiedades siguientes.

   a) Para cada $a \in \mathbb{R}^N$, la función $x \mapsto f(x - a)$ es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x - a)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

   b) Para cada biyección lineal $T \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, la función $x \mapsto f(T(x))$ es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(T(x))dx \;=\; |\det(T)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$$

c) Sea E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y $h : E \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa, sea $a \in \mathbb{R}^N$ y $T \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ biyección lineal. Pruebe que

   c-a) $\displaystyle\int_{E+a} h(x-a)dx \;=\; \int_E h(x)dx.$

   c-b) $\displaystyle\int_{T^{-1}(E)} h(T(x))dx \;=\; |\det(T)|^{-1}\int_E h(x)dx.$

6. Sean $\Omega \in \mathcal{M}$ y $f_n, f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles no negativas tales que $f_n \leq f$ c.p.d. Supongamos además que $f_n(x) \to f(x)$ c.p.d. en Ω. Demuestra que

$$\lim \int_\Omega f_n \;=\; \int_\Omega f.$$

7. Sean $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ y sea $f :]\alpha, \beta[\to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Demuestra que

$$\lim \int_{a_n}^{b_n} f \;=\; \int_\alpha^\beta f$$

para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en $]\alpha, \beta[$ tales que $\{a_n\} \to \alpha$ y $\{b_n\} \to \beta$.

8. Considérese, para cada n, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2\ \chi_{[1/(n+1),1/n]}$.
Estudie la convergencia puntual y compare $\int \lim f_n$ con $\lim \int f_n$.

9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que f es integrable y que

$$\lim \int_E |f - f_n| = 0.$$

En particular, pruebe que $\lim \int_E f_n = \int_E f$. Dé un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

10. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E que converge uniformemente a una función f. Pruebe que f es integrable y que

$$\lim \int_E |f - f_n| = 0.$$

En particular, pruebe que $\lim \int_E f_n = \int_E f$. Dé un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

11. Calcule $\lim \int f_n$ para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones de $]0, 1[$ en $\mathbb{R}$:

   a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

   b) $f_n(x) = (1/n)\ \log(x+n)e^{-x}cos(x)$.

c) $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$.

12. Para cada natural n, se consideran la funciones $g_n = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}$ y $f_1 = g_1$ y $f_n = g_n - g_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

13. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y f una función integrable en E. Pruebe que

$$n\lambda(\{x \in E : \ f(x) \geq n\}) \longrightarrow 0.$$

¿Es cierta la anterior afirmación para funciones medibles positivas? En caso negativo, dé un contraejemplo.

14. Pruebe que la función $\frac{sen(x)}{x}$ es integrable en el intervalo $[0,1]$ y que

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

15. Pruebe que la función e^{x^2} es integrable en el intervalo $[0,1]$ y que

$$\int_0^1 e^{x^2 dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

16. Justifique, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

   a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

   b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$, $(a, b > 0)$ y deduzca que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = ln(2).$$

   c) $\int_0^{\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}$, $(a, b > 0)$.

17. Sean I, J dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando:

   a) Para cada $t \in I$, la función $x \longmapsto f(t, x)$ es integrable en J.

   b) Para cada $x \in J$, la función $t \longmapsto f(t, x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

   c) La función $x \longmapsto |\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}|$ está dominada por una función integrable en J.

   d) Sea $g : I \longrightarrow J$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

Pruebe que, para $a \in J$, la función

$$F(t) := \int_a^{g(t)} f(t,x)dx$$

es derivable en I y que, para cada $t \in I$,

$$F'(t) := \int_a^{g(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} dx + f(t, g(t))g'(t).$$

18. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

   a) $F(x) = \int_a^x sen^3(t)\ dt.$

   b) $F(x) = \int_3^{x^2} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2}\ dt$

   c) $F(x) = \int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s} ds} 1/(sen^2(t^2)+1)\ dt$

   d) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2(t)}\ dt.$

   e) $F(x) = \int_a^b \frac{t}{1+t^2+sen(t)}\ dt$

   f) $F(x) = \int_a^b \frac{tx}{1+t^2+sen(t)}\ dt$

19. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\ dx,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\ \cos^3 x\ dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\ \log(\operatorname{sen} x)\ dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\ dx.$$

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}., \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\cosh x}.$$

$$\int_2^3 \frac{1+2x-x^2}{x^4-4x^3+7x^2-6x+2} dx., \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}., \qquad \int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}. \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}.$$

20. Pruebe que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = arcsen(2/3) - arcsen(7/12)$, $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + ln(\frac{2}{1+e})$.

b) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \pi/2$, $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \pi/6$.

c) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}dx = (3\pi + ln2)/10$, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}dx = (\sqrt{3}\pi/12)$.

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \pi/2$, $\int_{-\pi}^{+\pi} cos^2(x)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} sen^2(x)dx = \pi$.

e) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}cos(\beta x)dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}sen(\beta x)dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ $(\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R})$.

f) $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} |sen(x)|^3dx = 4/3$.

g) $\int_0^{\pi/2} sen^2(x)cos^2(x)dx = \pi/16$, $\int_0^1 (1-x^{2/3})xdx = 1/8$.

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$, $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = ln(1+\sqrt{2})$.

i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}$ $(y > 0)$, $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi$, $\int_0^1 ln(x)dx = -1$.

j) $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2})dy = \frac{2ln(x)}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$.

21. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones:

    a) $\frac{sen(x)}{x}$ en $]0, \pi]$.

    b) $x^a e^{-bx}(a \in \mathbb{R}, b > 0)$ en $\mathbb{R}^+$.

    c) $x/(e^x - 1)$ en $\mathbb{R}^+$.

    d) $x^a ln(x)(a \in \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^+$.

    e) $1/\sqrt{x}\ sen(1/x)$ en $]0, 1[$.

    f) $x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a, b \in \mathbb{R})$ en $]0, 1[$.

    g) $ln(x)ln(1+x)$ en $]0, 1[$.

    h) $x^a sen(x)(a \in \mathbb{R})$ en $]1, +\infty[$.

22. Justifique, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

    a) $\lim \int_0^1 \frac{nxln(x)}{1+n^2x^2}dx = 0$.

    b) $\lim \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx = 0$.

    c) $\lim \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx = 0$.

23. Calcule $lim_n \int_0^{+\infty} f_n$ para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones de $[0, +\infty[$ en $\mathbb{R}$:

    a) $f_n(x) = \frac{n^{3/2}sen(x)}{1+n^2x^2}$.

    b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}}$.

    c) $f_n(x) = \frac{sen(\frac{x}{n})}{(1+\frac{x}{n})^n}$.

24. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

    a) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x} dx \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.
    b) $F(t) = \int_0^{\pi} \log(1+t\cos x) dx \quad \forall t \in]-1,1[$.
    c) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{1+x^2} dx \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

25. Pruebe que la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

es derivable. Utilizar el método de integración por partes en la expresión de F' para obtener $F'(t) = -tF(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $t \longmapsto F(t)e^{t^2/2}$ tiene derivada nula. Por último concluya, usando el Teorema del valor medio, que

$$F(t) = Ce^{-t^2/2}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$

26. Demuestre que:

    - Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ la función $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x} e^{-tx}$ es integrable en $\mathbb{R}^+$.
    - La función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

    $$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x} e^{-tx} \, dx \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

    es derivable en $\mathbb{R}^+$ y $f'(t) = \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t} \ (t \in \mathbb{R}^+)$.
    - $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$
    - Como conclusión, obténgase una expresión explícita simplificada para $f(t)$.

27. Calcúlense las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_I \operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{sen}^2 y \ d(x,y), \ I = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

    b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2} \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1]$.

    c) $\displaystyle\int_I y \log x \ d(x,y), \ I = [1,e] \times [1,e]$.

    d) $\displaystyle\int_I x^3 \ y^3 \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1]$.

    e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2} \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1]$.

    f) $\displaystyle\int_I x \log(xy) \ d(x,y), \ I = [2,3] \times [1,2]$.

g) $\displaystyle\int_I y\cos(xy)\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[1,2].$

28. Sea $f: A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

    a) $f(x,y)=1$ siendo A la región limitada por $y^2=x^3, \quad y=x$.
    b) $f(x,y)=x^2$ siendo A la región limitada por $xy=16, y=x, y=0, x=8$.
    c) $f(x,y)=x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1)$.
    d) $f(x,y)=x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.
    e) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2=x, x=0, y=1$.
    f) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2}, y=x$.
    g) $f(x,y)=xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x, x=1$.
    h) $f(x,y)=xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2=1$ y el eje OX.
    i) $f(x,y)=4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$
    j) $f(x,y)=e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y=x$, $x=2$ y el eje x

29. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

    a) $f(x,y)=1-x-y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x+y\leq 1\}$
    b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2+y^2\leq 1\}$
    c) $f(x,y)=x+y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2\leq y\leq 2x^2\}$
    d) $f(x,y)=x^2\ y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$
    e) $f(x,y)=y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq r^2\}$
    f) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1, x^2+y^2\leq 2x\}$
    g) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq \pi/2\}$
    h) $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$
    i) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$
    j) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$
    k) $f(x,y)=x\ y,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$
    l) $f(x,y)=x^2\ y,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\}$
    m) $f(x,y)=x,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2-2x\geq 0\}$

30. Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

    a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad A = \bar{B}((0,0),1)$
    b) $f(x,y) = y, \quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) : \quad y \geq 0\}$
    c) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \bar{B}((1,0),1)$
    d) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

31. Calcúlense las siguientes integrales dobles:

    a) $f(x,y) = x, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 2x\}$
    b) $f(x,y) = x\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x,y \geq 0\}$
    c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}), \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^3 \leq x \leq y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0\}$
    d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y, \ x+y \geq 1, \ x^2+y^2 \leq 1\}$
    e) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x^2+y^2)^2 \leq 4(x^2-y^2), \ x \geq 0\}$
    f) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 2y, \ x^2+y^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$

32. **Área de la cardioide.** La curva en $\mathbb{R}^2$, cuya ecuación en coordenadas polares viene dada por $\rho = 2a(1+cos\theta)$ ($a \in \mathbb{R}^+$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se llama una cardioide. Sea $E = \{(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 < \rho \leq 2a(1+cos\theta)\}$. Calcúlese $\lambda(E)$.

33. Calcule el volumen de la región A definida por:

    a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2+y^2+z^2 \leq r^2, \quad x^2+y^2-ry \leq 0\}$.
    b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \geq 1, \quad x^2+y^2 \leq 2, \quad z(x^2+y^2) \leq 1, \quad z \geq 0\}$.
    c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}$.
    d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.
    (e) **Bóveda de Viviani** $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ (x-1/2)^2+y^2 \leq 1/4\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z\}\}$.
    (f) **cucurucho de helado invertido**

    $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2+y^2 \leq (1-z)^2, \ x^2+y^2 \leq z/2, \ z \leq 1\}.$$

    (g) **Volumen del toro** de radios r y R (flotador).
    h) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z, \ x^2+y^2 \leq \frac{z}{2}\}$.
    i) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 3, \ x^2+y^2-z^2 \leq 1, \ 0 \leq z\}$.
    j) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x,y,z, \ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} < 1\}$.

34. **Sólidos de revolución generados por un giro alrededor del eje** OY. Sea $E \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ un conjunto medible. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in E\}$$

o (sólido de revolución obtenido al girar el conjunto E contenido en el plano XY en torno al eje OY). Probar que S es medible y que

$$\lambda(S) = 2\pi \int_E x d(x,y).$$

35. Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

36. Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, $x \in [0,\pi]$, cuando ésta gira en torno al eje x.

37. Hállese el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2+9}$.

38. Una bola de madera de radio 9 cm es taladrada con una broca de radio 1 cm. Si la apertura ha completado un eje de la bola, ?'cuánto material de la bola ha sido eliminado con la broca?

39. Calcúlense las siguientes integrales triples:

    a) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, d(x,y,z),\ I = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

    b) $\displaystyle\int_A z\ e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2) \le z^2,\ z \ge 0,\ z \le 1\}.$

    c) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\}.$

    d) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z^2 \ge x^2+y^2,\ z\ge 0,\ z \le 3\}.$

    e) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \right)^n d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ $(n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$.

    f) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2,\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$

    g) $f(x,y,z) = z,\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\}$

    h) $f(x,y,z) = x^2,\ A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1,\ 4z^2 \ge 3(x^2+y^2)\}$

    i) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2}\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le x^2+y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\}$

    j) $f(x,y,z) = z,\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2 \le z\}$

    k) $f(x,y,z) = z^2,\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\}$

40. Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}dx=\sqrt{2\pi/a}$, donde $a>0$.

41. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones en el conjunto A correspondiente y calcule su integral:

    a) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

    b) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x^2\le y\}$

    c) $f(x,y,z)=z,\quad A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1, z\ge 0\}$

    d) $f(x,y)=\exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\ge 0,\ x+y\le 2\}$

42. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones:

    a) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(\alpha>0)$.

    b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{sen(x)sen(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(1<\alpha<2)$.

43. Estudie la integrabilidad de las siguientes funciones en el conjunto que se indica:

$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega=\mathbb{R}^2$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2>1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega=\mathbb{R}^3$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2<1\}$
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$	$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2>1\}$
e^{-xy}	$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1<x,\ 0<y<\dfrac{1}{x}\}$
$(x-y)e^{-(x-y)^2}$	$\Omega=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$
$\dfrac{e^{x+y}}{x-y}$	$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<y<x,\ 0<x<1\}$

44. Demuestre que si $1<\alpha<2$, entonces la función

$$\frac{\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

es integrable en $\mathbb{R}^2$.

45. Calcule la medida de los siguientes conjuntos:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : x = a + \sum_{k=1}^{N} t_k e_k,\ 0 \leq t_k \leq 1,\ k = 1, \ldots, N\right\},$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : x = a + \sum_{k=1}^{N} t_k e_k,\ 0 \leq t_k,\ \sum_{k=1}^{N} t_k \leq 1,\ k = 1, \ldots, N\right\},$$

donde $a, e_1, \ldots, e_N \in \mathbb{R}^N$.

46. Pruebe que $lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{sen(x)}{x} dx = \pi/2$.

Indicaciones:

a) Pruebe, usando los Teoremas de Fubini y Tonelli, que la función $F(x; y) = e^{-xy} senx$ es integrable en $]0, n[\times]0, +\infty[$ y que

$$\int_0^n \frac{sen(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} [\int_0^n e^{-xy} sen(x)dx]dy.$$

b) Para cada natural n, sea $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(y) = \int_0^n e^{-xy} sen(x)dx.$$

Pruébese, integrando por partes, que $\{f_n(y)\}$ converge a $\frac{1}{1+y^2}$. Pruebe además que $|f_n(y)| \leq \frac{3}{1+y^2},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Deduzca finalmente, utilizando el teorema de la convergencia dominada que $lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{sen(x)}{x} dx = \pi/2$.

47. Pruebe que la función

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

es integrable en $\mathbb{R}^+\times]0, 1[$ y deduce que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{\cos x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

48. Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{d(x, y)}{(1 + x^2 y)(1 + y)} = \frac{\pi^2}{4}$$

y deduzca que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Deduzca de esto último que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$