Tema 4

Propiedades de la medida de Lebesgue

Vamos a obtener mucha más información sobre la medida de Lebesgue de la que tenemos hasta ahora. Sobre todo, prestaremos atención a su relación con la topología usual de $\mathbb{R}^N$, así como a su comportamiento frente a ciertas transformaciones, que tienen un claro significado geométrico, como son las traslaciones, y en general, las isometrías.

4.1. Intervalos diádicos

No es difícil comprobar que todo abierto de $\mathbb{R}^N$ es unión numerable de intervalos acotados. Esto permite obtener multitud de nuevos conjuntos medibles, asunto del que hablaremos más adelante. Nos interesa ahora comprobar que de hecho, todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos acotados *dos a dos disjuntos*. Para ello usaremos un tipo especial de intervalos, que pasamos a definir.

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y un conjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^N$, escribimos $a + E = \{a + y : y \in E\}$, y vemos que $a + E$ es la imagen de E por la traslación que lleva el origen al punto a. En el caso de un intervalo acotado, está claro que $a + J \in \mathcal{J}$ para cualesquiera $J \in \mathcal{J}$ y $a \in \mathbb{R}^N$.

Para abreviar escribimos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, y para cada $n \in \mathbb{N}_0$, consideramos el intervalo $\mathbb{J}_n$ y el conjunto $\mathbb{A}_n$ dados por

$$\mathbb{J}_n = \big[0, 2^{-n}\big[^{\,N} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}_n = \big\{a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N\big\}$$

Un conjunto $J \subset \mathbb{R}^N$ es un **intervalo diádico** cuando $J = a + \mathbb{J}_n$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a \in \mathbb{A}_n$, en cuyo caso, se dice que n es el **orden** del intervalo diádico J. Necesitamos algunas propiedades sencillas de los intervalos diádicos, que vamos a comprobar.

Fijado $n \in \mathbb{N}_0$, para $a \in \mathbb{A}_n$ y $x \in \mathbb{R}^N$, vemos que $x \in a + \mathbb{J}_n$ si, y sólo si, para todo $k \in \Delta_N$, se tiene $0 \leqslant 2^n x(k) - 2^n a(k) < 1$, lo que equivale a que $2^n a(k)$, sea la parte entera de $2^n x(k)$. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, existe un único $a \in \mathbb{A}_n$ tal que $x \in a + \mathbb{J}_n$, así que los intervalos diádicos de orden n forman una partición de $\mathbb{R}^N$, es decir,

$$\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} \big(a + \mathbb{J}_n\big) \tag{1}$$

Comprobaremos ahora que, para $m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, cada intervalo diádico de orden m está contenido en un intervalo diádico de orden n, que en vista de (1) será único. Dado $b \in \mathbb{A}_m$, existe $a \in \mathbb{A}_n$ tal que $b \in a + \mathbb{J}_n$, y veremos que $b + \mathbb{J}_m \subset a + \mathbb{J}_n$. Tomando $c = b - a \in \mathbb{J}_n$, tenemos $2^m c \in \mathbb{Z}^N$, ya que $2^m b \in \mathbb{Z}^N$ y $2^m a = 2^{m-n} 2^n a \in \mathbb{Z}^N$. Fijado $x \in \mathbb{J}_m$, debemos ver que $b + x - a \in \mathbb{J}_n$, es decir, que $c + x \in \mathbb{J}_n$. Ahora bien, para cada $k \in \Delta_N$, por ser $c \in \mathbb{J}_n$, tenemos que $0 \leqslant 2^m c(k) < 2^{m-n}$, de donde, por tratarse de números enteros, deducimos que $0 \leqslant 2^m c(k) \leqslant 2^{m-n} - 1$. Como $0 \leqslant 2^m x(k) < 1$, sumando desigualdades miembro a miembro, obtenemos que $0 \leqslant 2^m \big(c(k) + x(k) \big) < 2^{m-n}$, es decir, $0 \leqslant 2^n \big(c(k) + x(k) \big) < 1$. Esto prueba que $c + x \in \mathbb{J}_n$, como se quería.

Probamos ya la propiedad de los intervalos diádicos que más nos interesa:

- *Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ es unión numerable de intervalos diádicos dos a dos disjuntos.*

Dado un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definiremos dos conjuntos $A_n \subset \mathbb{A}_n$ y $B_n \subset G$, cosa que haremos por inducción sobre n. Empezamos tomando

$$A_1 = \big\{ a \in \mathbb{A}_1 \ : \ a + \mathbb{J}_1 \subset G \big\} \qquad \text{y} \qquad B_1 = \biguplus_{a \in A_1} \big(a + \mathbb{J}_1 \big)$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, y suponiendo definidos A_k y B_k para todo $k \in \Delta_{n-1}$, tomamos

$$A_n = \left\{ a \in \mathbb{A}_n \ : \ a + \mathbb{J}_n \subset G \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right\} \quad \text{y} \quad B_n = \biguplus_{a \in A_n} \big(a + \mathbb{J}_n \big)$$

Obsérvese que, para algún $n \in \mathbb{N}$, puede ser $A_n = \emptyset$, en cuyo caso también $B_n = \emptyset$, por ser la unión de una familia vacía de conjuntos. En cualquier caso, A_n es numerable por serlo $\mathbb{A}_n$, luego B_n es una unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, veamos que $B_m \cap B_n = \emptyset$. En efecto, dado $x \in B_n$, la definición de B_n y A_n nos dice que existe $a \in \mathbb{A}_n$ tal que $x \in a + \mathbb{J}_n \subset G \setminus B_m$, luego $x \notin B_m$. Por tanto, el conjunto $G_0 = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n$, es unión numerable de intervalos diádicos dos a dos disjuntos, y la demostración se concluirá viendo que $G = G_0$. Como $B_n \subset G$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos ya que $G_0 \subset G$, luego fijado $x \in G$, bastará probar que $x \in G_0$.

Como G es abierto, usando en $\mathbb{R}^N$ la norma del máximo, G contiene a una bola abierta de centro x y un cierto radio $\delta > 0$. Tomamos entonces $n \in \mathbb{N}$ con $1/2^n < \delta/2$, y usando (1), encontramos un $a \in \mathbb{A}_n$ tal que $x \in a + \mathbb{J}_n$.

Tenemos $x - a \in \mathbb{J}_n$, de donde se deduce que $\|x - a\| < 1/2^n < \delta/2$. Para todo $y \in a + \mathbb{J}_n$ se tiene también $\|y - a\| < \delta/2$, luego $\|y - x\| \leqslant \|y - a\| + \|a - x\| < \delta$, de donde $y \in G$. Esto prueba que $a + \mathbb{J}_n \subset G$, y cabe ahora distinguir dos casos. Si $a \in A_n$, tenemos $a + \mathbb{J}_n \subset B_n$, y concluimos que $x \in a + \mathbb{J}_n \subset B_n \subset G_0$.

En otro caso, como $a + \mathbb{J}_n \subset G$ pero $a \notin A_n$, la definición de A_n nos dice que existe $k \in \mathbb{N}$ con $k < n$ tal que $\big(a + \mathbb{J}_n \big) \cap B_k \neq \emptyset$, luego existe $b \in A_k$ con $\big(a + \mathbb{J}_n \big) \cap \big(b + \mathbb{J}_k \big) \neq \emptyset$. Ahora bien, sabemos que $a + \mathbb{J}_n$ está contenido en un intervalo diádico de orden k, que tendrá intersección no vacía con $b + \mathbb{J}_k$, luego ha de coincidir con él. Como $b \in A_k$, tenemos por tanto que $a + \mathbb{J}_n \subset b + \mathbb{J}_k \subset B_k \subset G_0$, y concluimos, también en este caso, que $x \in G_0$. ■

4.2. Conjuntos de Borel

Como paso previo para estudiar las propiedades topológicas de la medida de Lebesgue, pensemos en los conjuntos medibles que podemos obtener, operando con los que ya conocemos, y aprovechando que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Acabamos de ver que todo abierto de $\mathbb{R}^N$ es unión numerable de intervalos acotados, luego es un conjunto medible. Como consecuencia, todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^N$ son medibles.

Para dar otro paso, recordemos que un subconjunto de un espacio topológico es de **tipo $\mathbf{G}_\delta$** cuando se puede obtener como intersección numerable de abiertos, y de **tipo $\mathbf{F}_\sigma$** cuando es unión numerable de cerrados. Un intervalo semiabierto $[a, b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, es un ejemplo de subconjunto de $\mathbb{R}$, que es de tipo G_δ y también de tipo F_σ, pero no es abierto ni cerrado. Por otra parte, está claro que todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$, de tipo G_δ o de tipo F_σ, es medible. El proceso puede continuar, usando operaciones numerables para obtener nuevos conjuntos medibles, y cabe preguntarse por la familia de conjuntos que se obtiene de esta forma. Vamos a definir con precisión esta familia, pero en un contexto mucho más general.

Dado un conjunto no vacío Ω, es inmediato comprobar que la intersección de cualquier familia no vacía de σ-álgebras en Ω, es también una σ-álgebra en Ω. Para una familia de conjuntos $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, es obvio que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$, luego podemos considerar la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{T}$. De esta forma obtenemos una σ-álgebra $\mathcal{A}$, que contiene a $\mathcal{T}$ y está contenida en todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{T}$, la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$.

El caso particular más interesante se presenta cuando Ω es un espacio topológico y $\mathcal{T}$ es la topología de Ω, es decir, la familia de todos los subconjuntos abiertos de Ω. La σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$ recibe el nombre de **σ-álgebra de Borel** de Ω, cuyos elementos se conocen como **conjuntos de Borel** en Ω. Esta nomenclatura se usa en honor del matemático y político francés E. Borel (1871-1956), director de la tesis de Lebesgue, que estudió en profundidad los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que hoy llevan su nombre.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, que es el que nos interesa, denotaremos siempre por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$. Conviene destacar otra familia de conjuntos que también la engendra.

- *La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$ coincide con la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$.*

Llamando $\mathcal{A}$ a la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{J}$, sabemos que $\mathcal{A}$ contiene a la familia de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$, de donde deducimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Para la otra inclusión, partimos de un hecho evidente: todo intervalo acotado en $\mathbb{R}$ se puede expresar como intersección numerable de intervalos abiertos. Usando el producto cartesiano, se obtiene claramente el mismo resultado en $\mathbb{R}^N$, con lo que todo intervalo acotado es un conjunto de Borel, es decir, $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}$. Deducimos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, como se quería. ■

Intuitivamente, la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ es la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ a la que en principio se puede llegar, a partir de los conjuntos abiertos, mediante operaciones numerables. Sin embargo, conviene aclarar que $\mathcal{B}$ es muy complicada desde el punto de vista constructivo. No hay un método explícito, para obtener todos los conjuntos de Borel a partir de los abiertos.

A pesar de lo recién comentado, es posible probar que todos los conjuntos de Borel tienen determinadas propiedades, usando solamente la definición de $\mathcal{B}$. Concretamente, si todos los conjuntos abiertos, o bien todos los intervalos acotados, tienen cierta propiedad, y los conjuntos con tal propiedad forman una σ-álgebra, está claro que dicha σ-álgebra contiene a $\mathcal{B}$, luego todos los conjuntos de Borel tienen la propiedad en cuestión. Para destacar la propiedad que más nos interesa, como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra que contiene a los conjuntos abiertos, deducimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, es decir, todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles. En sentido opuesto, veremos más adelante que todo conjunto medible guarda una relación directa con conjuntos de Borel muy sencillos.

Con la misma idea antes comentada, probamos ahora una propiedad de los conjuntos de Borel que nos será útil.

- *Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces se tiene que $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por tanto, los homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ preservan los conjuntos de Borel.*

Considerando la familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B} \}$, se trata de probar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Se comprueba rutinariamente, sin dificultad, que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, luego bastará ver que $\mathcal{A}$ contiene a la topología de $\mathbb{R}^N$. Para todo abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, se tiene que $\varphi^{-1}(G)$ es abierto en E, ya que φ es continua, luego $\varphi^{-1}(G) = H \cap E$ donde H es un abierto de $\mathbb{R}^N$. Por tanto, $\varphi^{-1}(G) \in \mathcal{B}$ y esto prueba que $G \in \mathcal{A}$, como se quería.

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es un homeomorfismo, lo recién demostrado puede usarse para la función continua $\varphi = f^{-1}$, y claramente obtenemos que $f(B) \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, es decir, que f preserva los conjuntos de Borel. ■

4.3. Propiedades topológicas

Para profundizar en la relación entre medida y topología, probamos ahora una propiedad de la medida exterior de Lebesgue que se deduce fácilmente de resultados anteriores.

- *Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, se tiene:* $\lambda^*(E) = \inf \{ \lambda(G) : E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \}$.

Fijado $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, sea β el ínfimo que aparece en el enunciado. Si $E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N$, usando que λ^* es creciente, se tiene $\lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$, de donde $\lambda^*(E) \leqslant \beta$. Para probar la otra desigualdad, podemos suponer que $\lambda^*(E) < \infty$. Fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe una sucesión $\{J_n\}$ de intervalos abiertos acotados, tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$$

El conjunto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, es abierto, con $E \subset G$, y como λ es σ-subaditiva, tenemos

$$\beta \leqslant \lambda(G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concluimos que $\beta \leqslant \lambda^*(E)$, como se quería. ■

Deducimos claramente una primera propiedad topológica de la medida de Lebesgue, que se conoce como **regularidad exterior**. Por así decirlo, la medida de un conjunto medible puede obtenerse "por fuera", usando los conjuntos abiertos que lo contienen:

- *Para todo* $E \in \mathcal{M}$ *se tiene:* $\lambda(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\}$.

Obtenemos ahora una importante caracterización de los conjuntos medibles:

- *Para un conjunto* $E \subset \mathbb{R}^N$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) E *es medible*
  - (ii) *Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un abierto* $G \subset \mathbb{R}^N$*, tal que* $E \subset G$ *y* $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
  - (iii) *Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un cerrado* $F \subset \mathbb{R}^N$ *tal que* $F \subset E$ *y* $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
  - (iv) *Existe un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^N$*, de tipo* F_σ*, tal que* $A \subset E$ *y* $\lambda^*(E \setminus A) = 0$
  - (v) *Existe un conjunto* $B \subset \mathbb{R}^N$*, de tipo* G_δ*, tal que* $E \subset B$ *y* $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

Probamos que (i) equivale a (ii) y (v) por una parte, y a (iii) y (iv) por otra.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $E_n = E \cap [-n, n]^N$ con lo que E_n es medible, y observamos que $\lambda(E_n) \leqslant \lambda\big([-n, n]^N\big) = (2n)^N < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, el resultado anterior permite obtener un abierto $G_n \subset \mathbb{R}^N$ con $E_n \subset G_n$ y $\lambda(G_n) < \lambda(E_n) + \varepsilon/2^n$. Tenemos entonces que $\lambda(E_n) + \lambda(G_n \setminus E_n) = \lambda(G_n) < \lambda(E_n) + \big(\varepsilon/2^n\big)$, y deducimos que $\lambda(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$, ya que $\lambda(E_n) < \infty$. Tomando $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, tenemos $E \subset G = G^\circ$ y $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$, con lo que basta usar que λ es creciente y σ-subaditiva:

$$\lambda^*(G \setminus E) = \lambda(G \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

$(ii) \Rightarrow (v)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando la hipótesis (ii) obtenemos un abierto $G_n \subset \mathbb{R}^N$ que verifica $E \subset G_n$ y $\lambda^*(G_n \setminus E) < 1/n$. El conjunto $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, es de tipo G_δ, con $E \subset B$. Pero además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $B \setminus E \subset G_n \setminus E$, de donde, por ser λ^* creciente, deducimos que $\lambda^*(B \setminus E) \leqslant \lambda^*(G_n \setminus E) < 1/n$. Por tanto, $\lambda^*(B \setminus E) = 0$ y tenemos (v).

$(v) \Rightarrow (i)$. Por una parte, B es de tipo G_δ, luego $B \in \mathcal{M}$. Pero por otra, como $\lambda^*(B \setminus E) = 0$, también sabemos que $B \setminus E \in \mathcal{M}$, luego $E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{M}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Como $\mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$, y ya sabemos que $(i) \Rightarrow (ii)$, usamos (ii) con $\mathbb{R}^N \setminus E$ en lugar de E. Para cada $\varepsilon > 0$, obtenemos así un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $\mathbb{R}^N \setminus E \subset G$, y verificando que $\lambda(G \cap E) = \lambda\big(G \setminus (\mathbb{R}^N \setminus E)\big) < \varepsilon$. Entonces $F = \mathbb{R}^N \setminus G$ es cerrado, con $F \subset E$ y verifica que $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E \cap G) < \varepsilon$. Por tanto, $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$ y hemos probado (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de (iii) obtenemos un cerrado $F_n \subset E$ con $\lambda^*(E \setminus F) < 1/n$. El conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, es de tipo F_σ, con $A \subset E$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $E \setminus A \subset E \setminus F_n$, de donde $\lambda^*(E \setminus A) \leqslant \lambda^*(E \setminus F_n) < 1/n$. Por tanto, $\lambda^*(E \setminus A) = 0$ y tenemos (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Como A es de tipo F_σ, tenemos $A \in \mathcal{M}$, y de $\lambda^*(E \setminus A) = 0$ deducimos que también $E \setminus A \in \mathcal{M}$, luego $E = A \bigcup (E \setminus A) \in \mathcal{M}$. ■

Lo más útil del resultado anterior es saber que todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ verifica el resto de las afirmaciones del enunciado. Se puede aproximar por conjuntos abiertos que lo contienen, o por cerrados contenidos en él, aproximación que es mucho más precisa, si usamos conjuntos de tipo G_δ o F_σ. En particular tenemos $A \subset E \subset B$ donde A y B son conjuntos de Borel bien fáciles de construir, tales que $\lambda(B \setminus A) = 0$.

Conviene resaltar que los papeles de los abiertos y los cerrados no se pueden intercambiar. Por ejemplo, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$, pero $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene abiertos no vacíos. A su vez, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, pero el único conjunto cerrado que contiene a $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$, que verifica $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$.

La aproximación por conjuntos cerrados se complementa con el siguiente resultado, que relaciona la medida de cualquier conjunto medible con la de sus subconjuntos compactos.

- *Para todo* $E \in \mathcal{M}$ *se tiene:* $\lambda(E) = \sup\big\{\lambda(K) \,:\, K \text{ compacto}, \ K \subset E\big\}$.

Todo compacto $K \subset E$ verifica que $\lambda(K) \leqslant \lambda(E)$, de donde se deduce una desigualdad. La otra es obvia cuando $\lambda(E) = 0$, y para probarla en el otro caso, dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $\rho < \lambda(E)$, bastará encontrar un compacto $K \subset E$, tal que $\lambda(K) > \rho$.

Tomamos $\varepsilon > 0$ con $\rho + \varepsilon < \lambda(E)$ y usamos el resultado anterior para obtener un conjunto cerrado $F \subset E$, verificando que $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$, de hecho $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$, ya que $E \setminus F \in \mathcal{M}$. Vemos entonces que $\lambda(F) > \rho$, pues en otro caso se tendría $\lambda(E) = \lambda(F) + \lambda(E \setminus F) \leqslant \rho + \varepsilon$, contradiciendo la elección de ε. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos ahora $K_n = F \cap [-n, n]^N$, vemos que K_n es compacto con $K_n \subset E$. Además, es claro que $\{K_n\} \nearrow F$, y la continuidad creciente de λ nos dice que $\{\lambda(K_n)\} \nearrow \lambda(F) > \rho$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(K_m) > \rho$, y basta tomar $K = K_m$. ■

Ha aparecido aquí la otra propiedad topológica clave de la medida de Lebesgue, que es la que se conoce como **regularidad interior**. La medida de un conjunto medible puede también calcularse "por dentro" usando los conjuntos compactos contenidos en él.

Usando los dos tipos de regularidad probaremos ahora un importante resultado, acerca de la unicidad de la medida de Lebesgue. Para explicarlo en el caso $N = 2$, sabemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ extiende la noción intuitiva de área de un rectángulo, luego nos da una definición coherente del área de un conjunto medible. Pues bien, vamos a probar ahora que, si queremos extender la noción de área de un rectángulo, obteniendo una medida, la de Lebesgue es la única opción.

Primer teorema de unicidad. *Si* $\mathcal{A}$ *es una* σ*-álgebra, con* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$*, y* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *una medida, tal que* $\mu(J) = \lambda(J)$ *para todo intervalo diádico* $J \subset \mathbb{R}^N$*, entonces* $\mu(E) = \lambda(E)$ *para todo* $E \in \mathcal{A}$*. En particular,* λ *es la única medida definida en* $\mathcal{M}$*, que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados.*

Demostración. Dado un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, existe una sucesión $\{J_n\}$ de intervalos diádicos, tal que $G = \biguplus_{n=1}^{\infty} J_n$. Usando entonces que λ y μ son funciones σ-aditivas, obtenemos

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) = \lambda(G)$$

Para un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, tomamos un intervalo abierto acotado I que contenga a K, y observamos que

$$\mu(K) + \mu(I \setminus K) = \mu(I) = \lambda(I) = \lambda(K) + \lambda(I \setminus K) \tag{2}$$

Como $I \setminus K$ es abierto, tenemos $\mu(I \setminus K) = \lambda(I \setminus K)$, y de (2) deducimos que $\mu(K) = \lambda(K)$, puesto que $\lambda(I \setminus K) \leqslant \lambda(I) < \infty$. Lo que queda es usar la regularidad exterior e interior de λ.

Fijado $E \in \mathcal{A}$, para todo compacto $K \subset E$ y todo abierto $G \subset \mathbb{R}^N$ con $E \subset G$, tenemos

$$\mu(E) \leqslant \mu(G) = \lambda(G) \qquad \text{y} \qquad \lambda(K) = \mu(K) \leqslant \mu(E) \tag{3}$$

De la primera desigualdad deducimos que

$$\mu(E) \leqslant \inf\left\{ \lambda(G) \,:\, E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} = \lambda(E)$$

mientras que la segunda desigualdad de (3) nos dice que

$$\lambda(E) = \sup\left\{ \lambda(K) \,:\, K \text{ compacto } K \subset E \right\} \leqslant \mu(E)$$

Así pues, $\mu(E) = \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$, como queríamos demostrar. La segunda afirmación del enunciado es consecuencia obvia de la primera. ■

4.4. Propiedades geométricas

Vamos a estudiar el comportamiento de la medida de Lebesgue frente a transformaciones que tienen un claro significado geométrico. Como primer paso, probamos que la medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones.

- *Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y todo $x \in \mathbb{R}^N$, se tiene: $\lambda^*(x+E) = \lambda^*(E)$.*

Es evidente que al trasladar un intervalo acotado se obtiene otro con la misma medida, es decir, para todo $I \in \mathcal{J}$ se tiene que $x+I \in \mathcal{J}$ con $\lambda(x+I) = \lambda(I)$.

Si ahora $\{I_n\}$ es una sucesión de intervalos acotados que recubren a E, es claro que la sucesión $\{x+I_n\}$ recubre al conjunto $x+E$, luego se tiene

$$\lambda^*(x+E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(x+I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$$

Como la sucesión $\{I_n\}$ era arbitraria, deducimos que $\lambda^*(x+E) \leqslant \lambda^*(E)$. Esta desigualdad puede usarse para el vector $-x$ en vez de x, y el conjunto $x+E$ en lugar de E, con lo que se obtiene $\lambda^*(E) = \lambda^*(-x+x+E) \leqslant \lambda^*(x+E)$, y tenemos la igualdad buscada. ■

Deducimos fácilmente que las traslaciones preservan los conjuntos medibles y su medida.

- *La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, es decir, para $E \in \mathcal{M}$ y $x \in \mathbb{R}^N$, se tiene que $x+E \in \mathcal{M}$, con $\lambda(x+E) = \lambda(E)$.*

Para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene claramente que $W \cap (x+E) = x + \big((-x+W) \cap E\big)$, así como $W \setminus (x+E) = x + \big((-x+W) \setminus E\big)$. Del resultado anterior, al ser $E \in \mathcal{M}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda^*(W) &= \lambda^*\big(-x+W\big) = \lambda^*\big((-x+W) \cap E\big) + \lambda^*\big((-x+W) \setminus E\big)\\ &= \lambda^*\big(W \cap (x+E)\big) + \lambda^*\big(W \setminus (x+E)\big)\end{aligned}$$

Esto prueba que $x+E \in \mathcal{M}$, y vemos que $\lambda(x+E) = \lambda^*(x+E) = \lambda^*(E) = \lambda(E)$. ■

Es frecuente decir que la invariancia por traslaciones *caracteriza* a la medida de Lebesgue, afirmación que requiere dos salvedades, pues estrictamente hablando, no es cierto que λ sea la única medida definida en $\mathcal{M}$ e invariante por traslaciones. Por una parte, sabemos que el número de elementos es una medida, definida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, e invariante por traslaciones, cuya restricción a $\mathcal{M}$ tiene poco que ver con la medida de Lebesgue. Por otra, fijado $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, es claro que $\rho\lambda$ es una medida invariante por traslaciones, que sólo coincide con la de Lebesgue cuando $\rho = 1$. Así pues, la invariancia por traslaciones sólo puede caracterizar a la medida de Lebesgue, salvo un factor de proporcionalidad, e imponiendo alguna condición adicional, para excluir medidas como el número de elementos, que responden a ideas muy alejadas de la medida de Lebesgue. Ambos objetivos se consiguen fácilmente imponiendo una normalización, es decir, concretado la medida que debe tener un conjunto dado. Por comodidad usaremos el intervalo diádico $\mathbb{J}_0 = [0,1[^N$, que a partir de ahora denotamos simplemente por $\mathbb{J}$. Pues bien, vamos a comprobar que la invariancia por traslaciones, junto con la condición $\lambda(\mathbb{J}) = 1$, sí caracteriza a la medida de Lebesgue.

Se puede también trabajar en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$, lo que tendrá utilidad más adelante. Para ello conviene observar que las traslaciones son homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$, luego preservan los conjuntos de Borel.

- *Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^N$. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es una medida invariante por traslaciones, verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$, entonces $\mu(E) = \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$.*

Fijado $n \in \mathbb{N}$, los intervalos diádicos de orden n forman una partición de $\mathbb{R}^N$, y cada uno de ellos está contenido en otro de orden 0, que puede ser $\mathbb{J}$, o tener intersección vacía con $\mathbb{J}$. Por tanto, $\mathbb{J}$ es la unión de los intervalos diádicos de orden n que contiene. Llamando k al número de tales intervalos, tenemos $\mathbb{J} = \biguplus_{j=1}^{k} (a_j + \mathbb{J}_n)$, donde $a_j \in \mathbb{A}_n$ para todo $j \in \Delta_k$. Como λ y μ son finitamente aditivas e invariantes por traslaciones, deducimos que

$$1 = \mu(\mathbb{J}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(a_j + \mathbb{J}_n) = k\,\mu(\mathbb{J}_n) \qquad \text{y análogamente,} \qquad 1 = \lambda(\mathbb{J}) = k\,\lambda(\mathbb{J}_n)$$

Como $\lambda(\mathbb{J}_n) = 1/2^{nN}$, la segunda igualdad nos dice que $k = 2^{nN}$, pero lo que importa es saber que $\mu(\mathbb{J}_n) = \lambda(\mathbb{J}_n)$. Como todo intervalo diádico de orden n se obtiene a partir de $\mathbb{J}_n$ mediante una traslación, deducimos que $\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico de orden n, lo cual es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, μ y λ coinciden en la familia de todos los intervalos diádicos, luego por el primer teorema de unicidad, coinciden en $\mathcal{A}$, como se quería. ■

Probaremos un resultado análogo al anterior, evitando el protagonismo del intervalo $\mathbb{J}$. Si admitimos un factor de proporcionalidad, la condición $\mu(\mathbb{J}) = 1$ se puede debilitar, exigiendo sólo que $\mu(\mathbb{J}) < \infty$, hipótesis que a su vez se puede reformular, para que no involucre a $\mathbb{J}$. Se obtiene así la caracterización más útil de la medida de Lebesgue, que es la siguiente.

Segundo teorema de unicidad. *Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones, tal que $\mu(G) < \infty$ para algún abierto no vacío $G \subset \mathbb{R}^N$. Entonces existe $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(E) = \rho\, \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Para usar el resultado anterior, la clave está en comprobar que $\mu(\mathbb{J}) < \infty$. Fijado $a \in G$, como las traslaciones son homeomorfismos, vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, el conjunto $U_x = x - a + G$ es abierto con $x \in U_x$ y $\mu(U_x) = \mu(G) < \infty$. Fijado ahora un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, la familia de conjuntos $\{U_x : x \in K\}$ es un recubrimiento de K por abiertos, del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Por tanto, existe un conjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} U_x$, y como μ es finitamente subaditiva, obtenemos claramente que $\mu(K) \leqslant \sum_{x \in F} \mu(U_x) < \infty$. Por ser $\overline{\mathbb{J}}$ compacto, tenemos $\mu(\mathbb{J}) \leqslant \mu\big(\overline{\mathbb{J}}\big) < \infty$, y distinguimos ahora los dos casos que pueden darse.

Si $\mu(\mathbb{J}) = 0$, será $\mu(a + \mathbb{J}) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^N$, pero sabemos que $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_0} (a + \mathbb{J})$ y el conjunto $\mathbb{A}_0 = \mathbb{Z}^N$ es numerable, luego $\mu(\mathbb{R}^N) = 0$. Se tiene entonces que $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, con lo que basta tomar $\rho = 0$.

En otro caso, tomando $\rho = \mu(\mathbb{J}) \in \mathbb{R}^+$, definimos $\mu_1(E) = \mu(E)/\rho$ para todo $E \in \mathcal{M}$, obteniendo una medida $\mu_1 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, que es invariante por traslaciones, con $\mu_1(\mathbb{J}) = 1$. En vista del resultado anterior, concluimos que $\mu_1(E) = \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$, o lo que es lo mismo, $\mu(E) = \rho\, \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$. ■

Generalizando la invariancia por traslaciones, vamos a probar que, de hecho, la medida de Lebesgue es invariante por isometrías, para la distancia euclídea.

Empezaremos describiendo las isometrías mencionadas, mediante el siguiente resultado:

- *Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0) = 0$, entonces T es lineal.*

La clave está en observar que la distancia euclídea permite caracterizar el punto medio de cualquier segmento. Más concretamente, usando la norma euclídea, para $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ se tiene:

$$z = \frac{x+y}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \|z - x\| = \|z - y\| = \frac{\|y - x\|}{2}$$

La implicación hacia la derecha es obvia, y para la otra, usamos la igualdad del paralelogramo con los vectores $z - x$ y $z - y$, obteniendo

$$\|2z - (x+y)\|^2 + \|y - x\|^2 = 2\|z - x\|^2 + 2\|z - y\|^2 = \|y - x\|^2$$

de donde deducimos que $z = (x+y)/2$.

Como T preserva las distancias, deberá preservar el punto medio de cualquier segmento. De hecho, si $x, y \in \mathbb{R}^N$ y $z = (x+y)/2$, se tiene

$$\|T(z) - T(x)\| = \|z - x\| = (1/2)\|y - x\| = (1/2)\|T(y) - T(x)\|$$

y análogamente $\|T(z) - T(y)\| = (1/2)\|T(y) - T(x)\|$, de donde deducimos que $T(z)$ es el punto medio del segmento de extremos $T(x)$ y $T(y)$. Tenemos por tanto:

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x)+T(y)}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Tomando $y = 0$, como $T(0) = 0$, obtenemos $T(x/2) = T(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. La igualdad anterior nos dice entonces que

$$T(x+y) = 2T\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\,\frac{T(x)+T(y)}{2} = T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

Considerando ahora el conjunto $\Lambda = \{r \in \mathbb{R} \,:\, T(rx) = rT(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N\}$, para obtener la linealidad de T, bastará comprobar que $\Lambda = \mathbb{R}$. Para $r, s \in \Lambda$, de (4) se deduce claramente que $r+s \in \Lambda$, así como que $-r \in \Lambda$. Como $1 \in \Lambda$, una obvia inducción nos dice que $\mathbb{N} \subset \Lambda$, luego también tenemos $-n \in \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde deducimos que $\mathbb{Z} \subset \Lambda$. Además, dados $r, s \in \Lambda$ con $s \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ vemos que $sT\big((r/s)x\big) = T\big(rx\big) = rT\big(x\big)$, o lo que es lo mismo, $T\big((r/s)x\big) = (r/s)T\big(x\big)$, de modo que $r/s \in \Lambda$. De $\mathbb{Z} \subset \Lambda$ deducimos por tanto que $\mathbb{Q} \subset \Lambda$.

Por otra parte, fijado $x \in \mathbb{R}^N$, como T es una función continua, la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, definida por $\phi(r) = T(rx) - rT(x)$ para todo $r \in \mathbb{R}$, también es continua. Vemos por tanto que el conjunto $\Lambda_x = \{r \in \mathbb{R} : T(rx) = rT(x)\} = \phi^{-1}(\{0\})$ es cerrado. Puesto que $\Lambda = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^N} \Lambda_x$, deducimos que Λ también es cerrado, y de $\mathbb{Q} \subset \Lambda$ obtenemos $\Lambda = \mathbb{R}$, como se quería. ■

Si ahora $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es cualquier isometría, siempre para la distancia euclídea, podemos definir $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por $T(x) = S(x) - S(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, y evidentemente T también es una isometría, que verifica $T(0) = 0$, luego T es lineal. Puesto que $S(x) = T(x) + S(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, vemos que S es la composición de una isometría lineal con una traslación. Como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, para obtener su invariancia por isometrías, bastará trabajar con las isometrías lineales.

Teorema. *La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea.*

Demostración. Como se ha dicho, basta trabajar con una isometría lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, que claramente es biyectiva. Por tanto, T es un homeomorfismo, así que preserva los conjuntos de Borel. Esto nos permite definir una función $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ escribiendo

$$\mu(A) = \lambda\big(T(A)\big) \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

con lo que $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. Como T es biyectiva, usando que λ es σ-aditiva, vemos muy fácilmente que μ también lo es, con lo que μ es una medida.

La linealidad de T nos permite ahora comprobar que μ es invariante por traslaciones. De hecho, para $A \in \mathcal{B}$ y $x \in \mathbb{R}^N$, vemos claramente que

$$\mu(x+A) = \lambda\big(T(x+A)\big) = \lambda\big(T(x)+T(A)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \mu(A)$$

Si G es la bola abierta para la distancia euclídea, centrada en el origen y de radio 1, al ser T una isometría con $T(0)=0$, se tiene claramente que $T(G) = G$, luego $\mu(G) = \lambda(G) \in \mathbb{R}^+$. En particular G es un conjunto abierto no vacío, tal que $\mu(G) < \infty$.

Comprobadas todas sus hipótesis, podemos ya usar el segundo teorema de unicidad, para obtener una constante $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, tal que $\mu(A) = \rho\, \lambda(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$. Pero usando de nuevo que $\mu(G) = \lambda(G) \in \mathbb{R}^+$, obtenemos que $\rho = 1$. En resumen, hemos probado que

$$\lambda\big(T(A)\big) = \lambda(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B} \tag{5}$$

Vemos de esta forma que la restricción de λ a $\mathcal{B}$ es invariante por T, pero no que λ lo sea. Debemos probar la igualdad análoga, para todo conjunto medible $E \in \mathcal{M}$, viendo previamente que $T(E) \in \mathcal{M}$, cosa que no es del todo evidente. La clave para ello consiste en aproximar E por conjuntos de Borel.

Fijado $E \in \mathcal{M}$, sabemos que existen $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $A \subset E \subset B$ y $\lambda(B \setminus A) = 0$, con lo que $\lambda(E) = \lambda(A)$. Entonces $T(A) \subset T(E)$, y tomando $Z = T(E) \setminus T(A)$, por ser T biyectiva, tenemos que $Z = T(E \setminus A) \subset T(B \setminus A)$.

Como $B \setminus A \in \mathcal{B}$, vemos en (5) que $\lambda\big(T(B \setminus A)\big) = 0$, luego $\lambda^*(Z) \leqslant \lambda^*\big(T(B \setminus A)\big) = 0$. Esto implica, como bien sabemos, que $Z \in \mathcal{M}$ con $\lambda(Z) = 0$. Como $T(A) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, deducimos que $T(E) \in \mathcal{M}$, ya que $T(E) = T(A) \uplus Z$. De esta última igualdad, usando otra vez (5), obtenemos finalmente que $\lambda\big(T(E)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \lambda(A) = \lambda(E)$.

Como $E \in \mathcal{M}$ era arbitrario, ahora sí hemos probado que λ es invariante por T ■

4.5. Los conjuntos de Cantor

En lo que sigue, vamos a presentar algunos ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, y en especial de $\mathbb{R}$, que contestan preguntas naturales sobre la medida de Lebesgue y, en algunos casos, pueden resultar sorprendentes.

Recordemos que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}^N$ tiene medida nula. Para $N > 1$, es fácil comprobar que el recíproco no es cierto:

- *Si $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$ es un conjunto de medida nula.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo acotado $I_n = \big[-n, n\big]^{N-1} \times \{0\}$ verifica que $\lambda(I_n) = 0$. Puesto que $\{I_n\} \nearrow H_0$ donde $H_0 = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, la continuidad creciente de λ nos dice que el hiperplano H_0 verifica $\lambda(H_0) = 0$. Para cualquier otro hiperplano afín $H \subset \mathbb{R}^N$, existe una isometría $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, composición de un cambio de base ortonormal con una traslación, tal que $T(H_0) = H$, luego $\lambda(H) = 0$, ya que λ es invariante por isometrías. ■

Aunque no sea tan fácil, también en $\mathbb{R}$ podemos encontrar conjuntos de medida nula que no son numerables. El conjunto ternario de Cantor es probablemente el ejemplo más sencillo. Generalizando su construcción, vamos a conseguir toda una gama de conjuntos, interesantes por otros motivos.

Llamaremos **sucesión admisible** a toda sucesión $a = \{a_n\}$ de números reales que, tomando por comodidad $a_0 = 1$, verifique:

$$0 < a_n < \frac{a_{n-1}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para abreviar la notación, escribiremos también $\rho_n = a_{n-1} - a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A cada sucesión admisible vamos a asociar una familia numerable de intervalos compactos, que no vendrá dada como una sucesión, sino que estará numerada de forma que quede clara la construcción iterativa que da lugar a dichos intervalos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, usaremos el conjunto producto cartesiano $U_n = \{0,1\}^n$, formado por todas las n-uplas de ceros y unos, es decir, por todas las aplicaciones de Δ_n en $\{0,1\}$. Según convenga, usaremos los elementos de U_n de una u otra forma. A cada $u \in U_n$ asociamos el intervalo compacto $J(u)$, definido por

$$J(u) = \big[m(u)\,,\, m(u) + a_n\big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k \quad \forall u \in U_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

A partir de estos intervalos, definimos ahora:

$$K_n(a) = \bigcup_{u \in U_n} J(u) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a) \tag{7}$$

donde resaltamos la dependencia de la sucesión admisible a que hemos usado en la definición. Se dice que $C(a)$ es el **conjunto de Cantor** asociado a la sucesión a. Para estudiar con más comodidad sus propiedades, aclararemos la relación entre los intervalos que aparecen en (6).

Conviene pensar que dichos intervalos aparecen en sucesivas *generaciones*, entendiendo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima generación viene dada por $\big\{ J(u) : u \in U_n \big\}$, una familia de 2^n intervalos compactos, todos ellos de longitud a_n. Veremos ahora la relación que guardan entre sí los intervalos de cada generación, así como la relación entre una generación y la siguiente.

Para $n = 1$ tenemos $U_1 = \{0,1\}$, y los intervalos de la primera generación son

$$J(0) = \big[0\,,\, a_1\big] \qquad \text{y} \qquad J(1) = \big[1 - a_1\,,\, 1\big]$$

Como $a_1 < 1/2$, observamos que hemos subdividido el intervalo $[0\,,\,1]$ en la forma

$$\big[0\,,\,1\big] = J(0) \ \biguplus \ \big]\,a_1\,,\, 1 - a_1\,\big[\ \biguplus \ J(1) \tag{8}$$

y al suprimir el intervalo abierto central, de longitud $1 - 2a_1 > 0$, nos queda el conjunto $K_1(a)$, unión de dos intervalos compactos disjuntos, de longitud a_1.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, usando una construcción análoga con cada uno de los 2^n intervalos que forman la n-ésima generación, veremos que se obtienen los 2^{n+1} intervalos de la siguiente.

Para ello, usamos la relación entre los conjuntos U_n y U_{n+1}. Cada $u \in U_n$ es una n-upla de ceros y unos, a la que podemos añadir una última componente, obteniendo las $(n+1)$-uplas dadas por $(u,0) = \big(u(1), u(2), \ldots, u(n), 0\big)$ y $(u,1) = \big(u(1), u(2), \ldots, u(n), 1\big)$. Está claro que de esta forma aparecen todos los elementos de U_{n+1}, es decir:

$$U_{n+1} = \big\{ (u,0) : u \in U_n \big\} \biguplus \big\{ (u,1) : u \in U_n \big\}$$

Para $u \in U_n$, en (6) vemos por una parte que $\min J(u,0) = m(u,0) = m(u) = \min J(u)$, y por otra que $\max J(u,1) = m(u,1) + a_{n+1} = m(u) + \rho_{n+1} + a_{n+1} = m(u) + a_n = \max J(u)$. Además, se tiene que $\max J(u,0) = m(u) + a_{n+1} < m(u) + \rho_{n+1} = m(u,1) = \min J(u,1)$, donde hemos usado que $\rho_{n+1} - a_{n+1} = a_n - 2a_{n+1} > 0$. En resumen, hemos comprobado que

$$J(u) = J(u,0) \biguplus \, \big] m(u) + a_{n+1}, m(u) + \rho_{n+1} \big[\, \biguplus J(u,1) \tag{9}$$

Como habíamos anunciado, cada intervalo de la n-ésima generación, $J(u)$ con $u \in U_n$, se ha subdividido en tres intervalos consecutivos, y al suprimir el intervalo abierto central, que tiene longitud $a_n - 2a_{n+1} > 0$, quedan en los extremos dos intervalos compactos disjuntos, de longitud a_{n+1}, que pertenecen a la $(n+1)$-ésima generación: $J(u,0)$ y $J(u,1)$.

Comprobamos por inducción que los intervalos de cada generación son dos a dos disjuntos, es decir, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$K_n(a) = \biguplus_{n \in U_n} J(u) \tag{10.n}$$

Vemos en (8) que $J(0) \cap J(1) = \emptyset$, luego se tiene (10.1). Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos $(10.n)$ para probar $(10.n+1)$. Para $v_1, v_2 \in U_{n+1}$ con $v_1 \neq v_2$, tenemos $v_1 = (u_1, \delta_1)$ y $v_2 = (u_2, \delta_2)$, donde $u_1, u_2 \in U_n$ y $\delta_1, \delta_2 \in \{0,1\}$, y vemos en (9) que $J(v_1) \subset J(u_1)$ y $J(v_2) \subset J(u_2)$. En el caso $u_1 \neq u_2$, usando la hipótesis $(10.n)$, tenemos $J(v_1) \cap J(v_2) \subset J(u_1) \cap J(u_2) = \emptyset$. En otro caso, escribiendo $u = u_1 = u_2$, se tendrá $\delta_1 \neq \delta_2$, con lo que $\{v_1, v_2\} = \{(u,0), (u,1)\}$, y vemos en (9) que $J(v_1) \cap J(v_2) = \emptyset$. Así pues, se verifica $(10.n+1)$, y por inducción, hemos probado $(10.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos ya obtener fácilmente las primeras propiedades de los conjuntos de Cantor.

- *Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$ es compacto, tiene interior vacío, y verifica que $\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n \to \infty} 2^n a_n$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos en $(10.n)$ que $K_n(a)$ es unión de 2^n intervalos compactos, dos a dos disjuntos, de longitud a_n, luego $K_n(a)$ es compacto, con $\lambda\big(K(a)\big) = 2^n a_n$. Además, para cada $v \in U_{n+1}$ se tiene que $v = (u,0)$, o bien $v = (u,1)$, donde $u \in U_n$, con lo que de (9) se deduce que $J(v) \subset J(u) \subset K_n(a)$, luego tenemos $K_{n+1}(a) \subset K_n(a)$.

También $C(a)$ es compacto, por ser intersección de compactos, pero de hecho hemos visto que $\{K_n(a)\} \searrow C(a)$. Como $\lambda\big(K_1(a)\big) = 2a_1 < \infty$, podemos usar la continuidad decreciente de λ, para obtener que $\big\{ 2^n a_n \big\} \searrow \lambda\big(C(a)\big)$.

Dado un intervalo no vacío $I \subset C(a)$, probaremos que $\lambda(I) = 0$, con lo que $C(a)$ tendrá interior vacío.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos $I \subset K_n(a)$, luego existe $u \in U_n$ tal que $I \cap J(u) \neq \emptyset$. Tanto $J(u)$ como $K_n(a) \setminus J(u)$ son cerrados en $\mathbb{R}$, luego tanto $I \cap J(u)$ como $I \setminus J(u) = I \cap \big(K_n(a) \setminus J(u)\big)$ son cerrados en I para la topología inducida. Puesto que I es conexo, al ser $I \cap J(u) \neq \emptyset$, se tiene $I \setminus J(u) = \emptyset$, es decir, $I \subset J(u)$. Deducimos que $\lambda(I) \leqslant \lambda\big(J(u)\big) = a_n$, pero esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{a_n\} \to 0$, luego $\lambda(I) = 0$ como se quería. ■

Observamos que todo conjunto de Cantor $C(a)$ verifica que $0 \leqslant \lambda\big(C(a)\big) \leqslant 2a_1 < 1$. Todos los valores indicados son factibles como pasamos a comprobar:

- *Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$, existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$.*

Fijado $\rho \in [0, 1[$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos $a_n = \dfrac{\rho}{2^n} + \dfrac{1-\rho}{3^n}$, con lo que $a_0 = 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$a_n = \frac{\rho}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1-\rho}{3 \cdot 3^{n-1}} < \frac{\rho}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1-\rho}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{2}$$

luego $a = \{a_n\}$ es una sucesión admisible, y tomando $C_\rho = C(a)$, el resultado anterior nos dice que $\lambda(C_\rho) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\rho + (1-\rho)(2/3)^n\big) = \rho$. ■

El conjunto de Cantor C_0, asociado a la sucesión admisible $\{1/3^n\}$, es el que se usa con más frecuencia. Se le llama **conjunto ternario de Cantor** y hemos visto que $\lambda(C_0) = 0$.

Para comprobar otras propiedades importantes de los conjuntos de Cantor, describiremos de manera explícita los elementos de cada uno de ellos, usando el conjunto $\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de todas las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$, es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos.

- *Dada una sucesión admisible $a = \{a_n\}$, y tomando $a_0 = 1$, sea $\rho_n = a_{n-1} - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, definiendo*

$$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \qquad \forall\, u \in \mathbb{U} \tag{11}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$.

Usaremos una estimación del resto de la serie que aparece en (11). Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_0 - a_n = 1 - a_n$$

y como $\{a_n\} \to 0$, deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k = a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dada una sucesión $u \in \mathbb{U}$, y fijado $n \in \mathbb{N}$, vemos entonces que

$$\sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k \leqslant T_a(u) \leqslant \sum_{k=1}^{n} u(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k = \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k + a_n \tag{12}$$

En vista de (6), las desigualdades anteriores nos dicen que $T_a(u) \in J(u_n)$, donde $u_n \in U_n$ es la restricción de u a Δ_n. Vemos en (7) que $T_a(u) \in K_n(a)$, lo cual es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $T_a(u) \in C(a)$. Debemos comprobar que la aplicación $T_a : \mathbb{U} \to C(a)$ es biyectiva.

La inyectividad se deduce claramente de la siguiente implicación, que volverá a ser útil más adelante. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\eta_n = \text{mín}\,\{a_{k-1} - 2a_k : k \in \Delta_n\} > 0$ se tiene

$$u, v \in \mathbb{U}, \quad |T_a(v) - T_a(u)| < \eta_n \quad \Longrightarrow \quad u(k) = v(k) \ \ \forall k \in \Delta_n \qquad (13.n)$$

lo que probaremos por inducción sobre n.

En el caso $n = 1$, para $u, v \in \mathbb{U}$ con $u(1) \neq v(1)$, debemos ver que $|T_a(v) - T_a(u)| \geqslant \eta_1$. Podemos suponer que $u(1) = 0$ y $v(1) = 1$, pues en otro caso bastaría intercambiar u y v. Entonces (12) nos dice que $T_a(u) \leqslant a_1$ y $T_a(v) \geqslant \rho_1$, luego $T_a(v) - T_a(u) \geqslant \rho_1 - a_1 = \eta_1$, lo que demuestra (13.1).

Dado $n \in \mathbb{N}$, y suponiendo que se verifica $(13.n)$, debemos ahora probar que también se verifica $(13.n+1)$. Sean pues $u, v \in \mathbb{U}$, tales que $|T_a(u) - T_a(v)| < \eta_{n+1}$. Como $\eta_{n+1} \leqslant \eta_n$, de $(13.n)$ deducimos que $u(k) = v(k)$ para todo $k \in \Delta_n$, y suponemos $u(n+1) \neq v(n+1)$, para llegar a una contradicción. De nuevo podemos suponer que $u(n+1) = 0$ y $v(n+1) = 1$, intercambiando en otro caso u y v. Entonces, al usar (12) obtenemos

$$T_a(u) \leqslant \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k + a_{n+1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k + \rho_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} v(k)\,\rho_k \leqslant T_a(v)$$

Deducimos que $T_a(v) - T_a(u) \geqslant \rho_{n+1} - a_{n+1} \geqslant \eta_{n+1}$, lo cual es una contradicción. Así pues, tenemos $(13.n+1)$, y esto prueba, por inducción, que se verifica $(13.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La inyectividad de T_a es ahora inmediata, pues si $u, v \in \mathbb{U}$ verifican que $T_a(u) = T_a(v)$, podemos usar $(14.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obteniendo que $u(k) = v(k)$ para todo $k \in \Delta_n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $u = v$.

Fijado ahora $x \in C(a)$, construiremos por inducción, una sucesión $u \in \mathbb{U}$, de tal forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga

$$\sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k + a_n \qquad (14.n)$$

Puesto que $\{a_n\} \to 0$, tendremos $T_a(u) = x$, con lo que T_a será sobreyectiva.

Como $x \in K_1(a) = J(0) \uplus J(1)$, podemos tomar $u(1) \in \{0,1\}$ de forma que $x \in J\big(u(1)\big)$, y en vista de (6), tenemos (14.1). Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que ya hemos definido $u(k)$ para todo $k \in \Delta_n$ de forma que se verifica $(14.n)$. En vista de (6), se tiene entonces $x \in J(u_n)$, donde $u_n \in U_n$ viene dada por $u_n(k) = u(k)$ para todo $k \in \Delta_n$. Como $x \in K_{n+1}(a)$, de (9) deducimos claramente que se ha de tener $x \in J(u_n, 0)$, o bien $x \in J(u_n, 1)$. En el primer caso definimos $u(n+1) = 0$, y en el segundo $u(n+1) = 1$, para conseguir en ambos casos que se tenga $x \in J(u_{n+1})$, donde $u_{n+1} \in U_{n+1}$ viene dada por $u_{n+1}(k) = u(k)$ para todo $k \in \Delta_{n+1}$. Usando de nuevo (6), vemos que se verifica $(14.n+1)$. Esto completa la definición inductiva de la sucesión $u \in \mathbb{U}$ que verifica $(14.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluyendo la demostración. ■

El resultado anterior da una definición directa de los conjuntos de Cantor. Concretamente, con la misma notación usada en el enunciado, se tiene que $C(a) = T_a(\mathbb{U})$, es decir,

$$C(a) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \ : \ u \in \mathbb{U} \right\}$$

En el caso del conjunto ternario de Cantor C_0, se tiene $\rho_n = 2/3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$C_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u(n)}{3^n} \ : \ u \in \mathbb{U} \right\}$$

Tenemos así una descripción muy intuitiva de C_0, como el conjunto de todos los números del intervalo $[0,1]$ que admiten un desarrollo ternario, en el que sólo aparecen los dígitos 0 y 2, no involucra la cifra 1.

Por otra parte, el resultado anterior nos habla de la "cantidad de elementos" que tienen los conjuntos de Cantor. Con más propiedad, recordemos que dos conjuntos son **equipotentes** cuando existe una aplicación biyectiva de uno sobre otro, lo que intuitivamente significa que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Es claro que esta relación binaria entre conjuntos es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, es una relación de equivalencia. El resultado anterior nos dice que todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{U}$, pero conviene además comprobar que $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$. Para ello, aunque no sea estrictamente necesario, podemos usar el siguiente resultado básico en teoría de conjuntos.

Teorema de Cantor-Bernstein. *Si X e Y son conjuntos, tales que existen dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$, entonces X e Y son equipotentes.*

Demostración. Considerando la aplicación $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida por

$$F(A) = X \setminus h\big(Y \setminus g(A)\big) \qquad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

probaremos que existe un conjunto $Z \in \mathcal{P}(X)$ tal que $F(Z) = Z$.

Para ello usamos la familia de conjuntos $\mathcal{H} = \big\{ A \in \mathcal{P}(X) : A \subset F(A) \big\}$ y llamamos Z a la unión de todos los elementos de $\mathcal{H}$. Por definición de $\mathcal{H}$, se tiene entonces que

$$Z = \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{H}} F(A) = F(Z), \qquad \text{luego} \qquad F(Z) \subset F\big(F(Z)\big)$$

La segunda inclusión nos dice que $F(Z) \in \mathcal{H}$, luego $F(Z) \subset Z$, y junto con la primera inclusión, obtenemos que $F(Z) = Z$, como queríamos.

La definición de F nos dice que $X \setminus Z = X \setminus F(Z) = h\big(Y \setminus g(Z)\big)$, y como h es inyectiva, obtenemos que $X \setminus Z$ es equipotente a $Y \setminus g(Z)$. Por otra parte, Z es equipotente a $g(Z)$, ya que g es inyectiva. Teniendo en cuenta que $X = Z \uplus (X \setminus Z)$, y que $Y = g(Z) \uplus \big(Y \setminus g(Z)\big)$, al ser Z equipotente a $g(Z)$ y $X \setminus Z$ equipotente a $Y \setminus g(Z)$, concluimos claramente que X es equipotente a Y. ■

Hablando intuitivamente, podemos ya comprobar que todo conjunto de Cantor tiene tantos elementos como $\mathbb{R}$.

- *El conjunto $\mathbb{U}$, y por tanto todos los conjuntos de Cantor, son equipotentes a $\mathbb{R}$.*

Usando cualquier sucesión admisible a, la biyección $T_a : \mathbb{U} \to C(a)$ definida en (11) sirve como aplicación inyectiva de $\mathbb{U}$ en $\mathbb{R}$, luego usando el teorema anterior, basta encontrar una aplicación inyectiva $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, para lo que usaremos dos hechos bien conocidos.

Por una parte, definiendo por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es claro que se obtiene una aplicación biyectiva $f : \mathbb{R} \to]\,0\,,\,1\,[$. Por otra, usando el desarrollo binario de los números reales, obtenemos una aplicación inyectiva de $]\,0\,,\,1\,[$ en $\mathbb{U}$. Más concretamente, para cada $x \in]\,0\,,\,1\,[$, podemos escribir $x = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n(x)}{2^n}$ donde $c_n(x) \in \{0,1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definiendo $g(x) = \{c_n(x)\}$ para todo $x \in]\,0\,,\,1\,[$, es obvio que la aplicación $g :]\,0\,,\,1\,[\to \mathbb{U}$ es inyectiva. Tomando $h = g \circ f$ tenemos la aplicación inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{U}$ que buscábamos. ■

Como habíamos anunciado al principio, el conjunto ternario de Cantor C_0 es un ejemplo de conjunto de medida nula en $\mathbb{R}$, que no es numerable, sino equipotente a $\mathbb{R}$. Del resultado anterior deducimos muy fácilmente otro hecho interesante:

- *Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes.*

La clave está en observar que $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{U}$. Para comprobarlo, dadas dos sucesiones $u, v \in \mathbb{U}$ basta definir $\phi(u,v) \in \mathbb{U}$, escribiendo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\big(\phi(u,v)\big)(2n-1) = u(n) \qquad \text{y} \qquad \big(\phi(u,v)\big)(2n) = v(n)$$

Es evidente que de esta forma se obtiene una biyección $\phi : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{U}$.

Como $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{U}$, vemos que $\mathbb{R}^2$ es equipotente a $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, y por tanto a $\mathbb{U}$, luego también a $\mathbb{R}$. Por inducción, veremos que $\mathbb{R}^n$ es equipotente a $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, cosa que es obvia para $n = 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$, y admitiendo que $\mathbb{R}^n$ es equipotente a $\mathbb{R}$, vemos claramente que $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R}^2$, luego también a $\mathbb{R}$. Finalmente, dados $p, q \in \mathbb{N}$, vemos que $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes, ya que ambos son equipotentes a $\mathbb{R}$. ■

Cualquier hiperplano $H \subset \mathbb{R}^N$, con $N > 1$, es un conjunto de medida nula, equipotente a $\mathbb{R}^{N-1}$, luego también a $\mathbb{R}^N$. Deduciremos información sobre la cantidad de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$. De manera coloquial, en $\mathbb{R}^N$ hay tantos conjuntos medibles como conjuntos.

- *El conjunto $\mathcal{M}$, de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$, es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.*

Fijamos un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, que sea equipotente a $\mathbb{R}^N$, y verifique que $\lambda(E) = 0$. Por ejemplo, E puede ser cualquier hiperplano cuando $N > 1$, o el conjunto ternario de Cantor cuando $N = 1$. Para todo $A \in \mathcal{P}(E)$ se tiene que $\lambda^*(A) \leqslant \lambda(E) = 0$, luego $A \in \mathcal{M}$. Así pues, tenemos que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{M}$. De ser $\mathbb{R}^N$ equipotente a E, deducimos obviamente que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es equipotente a $\mathcal{P}(E)$, es decir, existe una aplicación biyectiva de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ sobre $\mathcal{P}(E)$, que se puede ver como una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ en $\mathcal{M}$. Por otra parte tenemos $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, luego existe una obvia aplicación inyectiva de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Basta ahora usar el teorema de Cantor-Bernstein, para concluir que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ son equipotentes. ■

El resultado anterior nos podría hacer sospechar que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ son medibles. Por el contrario, pronto probaremos que en $\mathbb{R}^N$ también abundan los conjuntos no medibles. Previamente concluimos nuestro estudio de los conjuntos de Cantor, probando que todos ellos son idénticos como espacios topológicos:

- *Todos los conjuntos de Cantor son homeomorfos.*

Dadas dos sucesiones admisibles $a = \{a_n\}$ y $b = \{b_n\}$, y escribiendo $a_0 = b_0 = 1$, definimos $\rho_n = a_{n-1} - a_n$ y $r_n = b_{n-1} - b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces sendas aplicaciones biyectivas $T_a : \mathbb{U} \to C(a)$ y $T_b : \mathbb{U} \to C(b)$, definidas para $u \in \mathbb{U}$ por

$$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \qquad \text{y} \qquad T_b(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,r_n$$

Por tanto, la aplicación $\Phi = T_b \circ T_a^{-1} : C(a) \to C(b)$ es biyectiva y vamos a ver que Φ es un homeomorfismo. Como $C(a)$ y $C(b)$ son compactos, bastará probar que Φ es continua.

Dado $\varepsilon > 0$, fijamos $n \in \mathbb{N}$ con $b_n < \varepsilon$, y tomamos $\delta = \eta_n = \min\left\{ a_{k-1} - 2a_k \,:\, k \in \Delta_n \right\}$. Para $x, y \in C(a)$ con $|x - y| < \delta$ probaremos que $\left|\Phi(x) - \Phi(y)\right| < \varepsilon$.

Tomando $u = T_a^{-1}(x)$ y $v = T_a^{-1}(y)$ tenemos $u, v \in \mathbb{U}$ con $\left|T_a(u) - T_a(v)\right| < \delta = \eta_n$, lo que nos permite usar la implicación $(14.n)$ para obtener que $u(k) = v(k)$ para todo $k \in \Delta_n$. Se tiene entonces que

$$\left|\Phi(x) - \Phi(y)\right| = \left|T_b(u) - T_b(v)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \big(u(k) - v(k)\big)\, r_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \big(u(k) - v(k)\big)\, r_k\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u(k) - v(k)\right| r_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k = b_n < \varepsilon$$

y esto prueba directamente que Φ es uniformemente continua. ■

4.6. Conjuntos no medibles

Al parecer, Lebesgue conocía la existencia de subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}^N$, pero nunca la demostró. El matemático italiano G. Vitali (1875-1932) fue el primero en publicar, en 1905, una demostración de la existencia de un subconjunto no medible de $\mathbb{R}$. Su razonamiento, que también es válido en $\mathbb{R}^N$, nos va a permitir obtener una amplia colección de conjuntos no medibles, que a veces se conocen como *conjuntos de Vitali.*

Teorema. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$, con medida exterior estrictamente positiva, contiene un conjunto no medible.*

Demostración. Dado $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ verificando que $\lambda^*(A) > 0$, podemos escribir $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $A_n = A \cap [-n, n]^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando entonces que λ^* es σ-subaditiva, se tiene que $\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(A_m) > 0$.

Si abreviamos escribiendo $B = A_m \subset A$, tenemos $\lambda^*(B) > 0$, con la ventaja de que B está acotado, y bastará probar que B contiene un conjunto no medible, pues entonces A también lo contendrá.

Usaremos que $\mathbb{Q}^N$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$, lo que nos permite considerar el grupo cociente $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N/\mathbb{Q}^N$ y la aplicación cociente $q : \mathbb{R}^N \to \mathcal{H}$, que es sobreyectiva. Usando el conjunto $q(B) \subset \mathcal{H}$, el axioma de elección nos dice que existe una aplicación $\phi : q(B) \to B$ tal que $q\big(\phi(h)\big) = h$ para todo $h \in q(B)$. Dicho de manera más intuitiva, lo que hacemos es elegir, para cada clase de equivalencia $h \in q(B)$, un elemento $\phi(h)$ del conjunto $h \cap B$, que no es vacío. Nos interesa la imagen de ϕ, el conjunto $W = \phi\big(q(B)\big)$. Observamos que $W \subset B$, y en particular W está acotado, pero además W tiene dos propiedades clave, de las que deduciremos que no es medible.

En primer lugar, para todo $b \in B$, tenemos $q(b) = h \in q(B)$, pero también $q\big(\phi(h)\big) = h$, luego $b - \phi(h) = r \in \mathbb{Q}^N$, de donde $b = r + \phi(h) \in r + W$. Por tanto, $B \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^N} (r+W)$.

Por otra parte, si $r,s \in \mathbb{Q}^N$ verifican que $(r+W) \cap (s+W) \neq \emptyset$, tendremos $w_1, w_2 \in W$ tales que $r + w_1 = s + w_2$, de donde $q(w_1) = q(w_2)$. Escribiendo $w_1 = \phi(h_1)$ y $w_2 = \phi(h_2)$ con $h_1, h_2 \in q(B)$, tenemos entonces $h_1 = q(w_1) = q(w_2) = h_2$, de donde $w_1 = w_2$ y, por tanto, $r = s$. Así pues, los conjuntos de la forma $r+W$ con $r \in \mathbb{Q}^N$ son dos a dos disjuntos.

Fijamos ahora una sucesión acotada $\{r_n\}$ de elementos de $\mathbb{Q}^N$, verificando que $r_m \neq r_n$ para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$. Como W está acotado, el conjunto $C = \biguplus_{n=1}^{\infty} \big(r_n + W\big)$ también lo está. Suponemos ahora que W es medible, para llegar a una contradicción.

Para cada $r \in \mathbb{Q}^N$, como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, de $W \in \mathcal{M}$ deducimos que $r + W \in \mathcal{M}$ con $\lambda(r+W) = \lambda(W)$. Como consecuencia tenemos $C \in \mathcal{M}$, así como $\lambda(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(r_n + W) = \infty\lambda(W)$. Como C está acotado, también tenemos $\lambda(C) < \infty$, luego $\lambda(W) = 0$. Pero entonces $\lambda(r+W) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}^N$ y, como $\mathbb{Q}^N$ es numerable, de $B \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^N} (W+r)$, deducimos que $\lambda^*(B) = 0$, lo cual es una contradicción. ■

Del resultado anterior deduciremos dos consecuencias relevantes. En primer lugar, veamos que los subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}^N$ abundan tanto como los medibles.

- *El conjunto* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ *es equipotente a* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Fijamos un conjunto $E \in \mathcal{M}$, equipotente a $\mathbb{R}^N$, con $\lambda(E) = 0$. Como $\lambda^*(\mathbb{R}^N \setminus E) = \infty$, existe un conjunto no medible $W \subset \mathbb{R}^N \setminus E$. Para cada $A \in \mathcal{P}(E)$, el conjunto $A \uplus W$ no puede ser medible, pues si lo fuese, también lo sería $(A \uplus W) \setminus E = W$. Podemos por tanto definir una aplicación $A \mapsto A \uplus W$, de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$, que es inyectiva, pues si $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ verifican que $A_1 \uplus W = A_2 \uplus W$, se tiene que $A_1 = (A_1 \uplus W) \cap E = (A_2 \uplus W) \cap E = A_2$.

Como $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es equipotente a $\mathcal{P}(E)$, de lo anterior deducimos que existe una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$. Como es obvio que también existe una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, el teorema de Cantor-Bernstein nos permite concluir que dichos conjuntos son equipotentes. ■

A pesar de los resultados anteriores, podríamos decir que nadie ha visto nunca, y nadie podrá nunca ver, un subconjunto no medible de $\mathbb{R}^N$. Para explicar esta afirmación, observamos que, en la demostración del teorema anterior, hemos usado el axioma de elección, con lo que hemos probado la existencia de un conjunto no medible W, que en realidad no conocemos, pues no se ha definido explícitamente. Hoy día se sabe que no es posible probar la existencia de conjuntos no medibles, usando los axiomas habituales de la Teoría de Conjuntos, excluido el axioma de elección. En la práctica esto significa que, siempre que conocemos un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, es decir, siempre que tenemos una definición explícita del mismo, sin usar el axioma de elección, podemos tener la seguridad de que dicho conjunto es medible, sin perjuicio de que, en cada caso concreto, debamos comprobarlo con todo rigor.

Como segunda consecuencia del teorema anterior, probaremos la existencia de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$, que no son conjuntos de Borel. Para poder hacerlo en general, y no sólo en el caso $N = 1$, conviene asociar a cada conjunto de Cantor, un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ que se comporta de forma similar.

Si $C(a)$ es el conjunto de Cantor asociado a la sucesión admisible $a = \{a_n\}$, consideramos el conjunto $\widetilde{C}(a) = C(a) \times [0,1]^{N-1}$ que también es compacto. Recordemos la definición del conjunto $C(a)$, según la cual se tiene

$$C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a), \qquad \text{luego} \qquad \widetilde{C}(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(K_n(a) \times [0,1]^{N-1} \big)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $K_n(a)$ era la unión de 2^n intervalos compactos en $\mathbb{R}$, dos a dos disjuntos, de longitud a_n, luego $K_n(a) \times [0,1]^{N-1}$ es unión de 2^n intervalos compactos, ahora en $\mathbb{R}^N$, dos a dos disjuntos y de medida a_n. Deducimos que $\lambda\big(K_n(a) \times [0,1]\big) = 2^n a_n$, y usando la continuidad decreciente de λ, concluimos que $\lambda\big(\widetilde{C}(a)\big) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$. Así pues, la medida de $\widetilde{C}(a)$ en $\mathbb{R}^N$ coincide con la de $C(a)$ en $\mathbb{R}$. Todo está ya preparado para probar el siguiente resultado.

- *Existen subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ que no son conjuntos de Borel.*

Sea C un conjunto de Cantor con medida estrictamente positiva y C_0 el conjunto ternario de Cantor, que tiene medida nula. Usaremos los correspondientes subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, que vienen dados por $\widetilde{C} = C \times [0,1]^{N-1}$ y $\widetilde{C_0} = C_0 \times [0,1]^{N-1}$, y como hemos visto verifican que $\lambda\big(\widetilde{C}\big) > 0$ y $\lambda\big(\widetilde{C_0}\big) = 0$. Sabemos que C y C_0 son homeomorfos, de donde obviamente deducimos que también existe un homeomorfismo $\Phi : \widetilde{C} \to \widetilde{C_0}$. Por ser $\lambda^*\big(\widetilde{C}\big) > 0$, sabemos que existe un conjunto $W \subset \widetilde{C}$ tal que W no es medible. Sin embargo, el conjunto $E = \Phi(W)$ sí es medible, ya que $\lambda^*(E) \leqslant \lambda^*\big(\widetilde{C_0}\big) = 0$, y probaremos que E no es un conjunto de Borel.

En efecto, viendo Φ como una función continua de $\widetilde{C}$ en $\mathbb{R}^N$, podemos usar un resultado probado anteriormente, acerca de la estabilidad de los conjuntos de Borel. Si fuese $E \in \mathcal{B}$, deduciríamos que $\Phi^{-1}(E) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Pero esto no es posible, puesto que $\Phi^{-1}(E) = W \notin \mathcal{M}$. Por tanto, $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$, como queríamos demostrar. ■

Nótese que, en la demostración anterior, los conjuntos E y W son homeomorfos. Esto prueba que la medibilidad no es una propiedad topológica, pues un conjunto medible puede ser homeomorfo a otro que no lo es.