# Tema 1: Sistemas dinámicos discretos
# Segunda parte: sistemas dinámicos

Lidia Fernández

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2020/21


INFINITO
MARZO
8 DE MARZO
DÍA INTERNACIONAL DE LAS MUJERES
UNIVERSIDAD DE GRANADA
Vicerrectorado de Igualdad, Inclusión y Sostenibilidad

# Contenidos

# Sistemas dinámicos discretos

## Definición

Supogamos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene al menos dos puntos y $f : I \to I$ es una función continua. Entonces al par $\{I,\ f\}$ se le denomina un sistema dinámico discreto, de primer orden, autónomo y en forma normal.

Observemos que dado un valor inicial $x_0 \in I$, podemos generar una única sucesión $\{x_k\}$ definida por evaluaciones sucesivas de $f$:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \ldots$$

Estos valores están bien definidos pues $f(I) \subset I$ y la sucesión así definida es solución de la ecuación en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

# Sistemas dinámicos discretos

## Ejemplos

1. $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k,\qquad f(x) = \frac{1}{2}x,\qquad I = \mathbb{R}$ o $I = [0,\ 1]$
2. $x_{k+1} = 3x_k + 2,\qquad f(x) = 3x\ + 2,\qquad I = \mathbb{R}$ o $I = [0, +\infty)$
3. $x_{k+1} = x_k^2,\qquad f(x) = x^2,\qquad I = \mathbb{R}$ o $I = [0, +\infty)$
4. $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{1 + x_k},\qquad f(x) = \dfrac{x}{1 + x},\qquad I = (0,\ +\infty)$

# Sistemas dinámicos discretos

La definición de sistema dinámico discreto se puede generalizar a cualquier espacio métrico.

## Definición

Supogamos que $E$ es un espacio métrico y $f : E \to E$ es una función continua. Entonces al par $\{E,\ f\}$ se le denomina un sistema dinámico discreto.

## Recordamos

Un espacio métrico es un conjunto $E$ junto con una métrica o distancia $d$, es decir, una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que verifica:

1. $d(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in E$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in E$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in E$

En este capítulo nos centraremos fundamentalmente en sistemas dinámicos definidos en intervalos de la recta real.

# Sistemas dinámicos discretos

## Notación

Para denotar las sucesivas iteradas de $f$ usaremos la notación

$$
\begin{aligned}
f^0 &= \text{identidad} \\
f^1 &= f \\
f^2 &= f \circ f \\
f^3 &= f \circ f \circ f \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Y de este modo

$$x_k = f^k(x_0), \quad k = 0, 1, \dots$$

# Sistemas dinámicos discretos

- Si la función de evolución $f$ es lineal o afín ya hemos visto cómo calcular la solución general de la ecuación en diferencias.
- Sin embargo, en el caso no lineal no es posible en general obtener una expresión explícita de las soluciones.
- En este caso nos dedicaremos a un estudio cualitativo de las soluciones. Estudiaremos en particular su comportamiento asintótico.

# Sistemas dinámicos discretos

## Definición

Dado un SDD $\{E,\ f\}$ y un $x_0 \in E$, la sucesión definida por

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots,\ f^k(x_0), \ldots\}$$

se denomina órbita o trayectoria del SDD $\{E, f\}$ asociada al valor inicial $x_0$, y se denota por $\gamma(E,\ f,\ x_0)$.

El conjunto de todas las órbitas asociadas al SDD $\{E,\ f\}$ y a todos los puntos $x_0 \in E$ se denomina retrato de fase.

# Sistemas dinámicos discretos

## Punto de equilibrio

Un elemento $\alpha \in E$ se dice que es un punto de equilibrio (o punto fijo o punto estacionario) del SDD $\{E,\ f\}$ si

$$\alpha = f(\alpha), \qquad \alpha \in E$$

Si tomamos como dato inicial $x_0 = \alpha$ que sea un punto de equilibrio del SDD, entonces la órbita resultante es constante y se denomina órbita estacionaria:

$$\gamma(E,\ f,\ \alpha) = \{\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \ldots\}.$$

## Nota

Si $\alpha$ es un punto de equilibrio del SDD $\{E,\ f\}$, también lo es de $\{E,\ f^k\}$ con $k \in \mathbb{N}$.

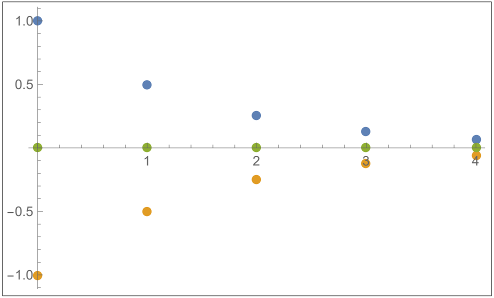
# Sistemas dinámicos discretos

## Ejemplos

1. $I = \mathbb{R}$, $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k$
2. $I = \mathbb{R}$, $x_{k+1} = 3x_k + 2$
3. $I = \mathbb{R}$, $x_{k+1} = x_k^2$
4. $I = (0,\ +\infty)$, $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{1 + x_k}$

# Representaciones gráficas de un SDD en $I$: trayectoria

En el eje de abcisas se representan los número enteros positivos $0, 1, 2, \ldots$ y en el eje de ordenadas los distintos valores de $x_n, n \geq 0$



# Representaciones gráficas de un SDD en $I$: gráfico cobweb o en escalera

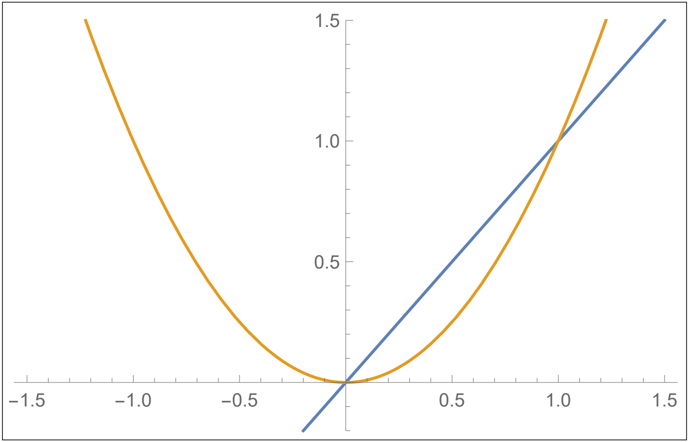
Para representar un SDD mediante un gráfico Cobweb o gráfico en escalera:

En el cuadrado $I \times I$ se representa la función $f(x)$ y la bisectriz del primer cuadrante $x$. Una vez fijado $x_0$ se representa $x_1$ procediendo como sigue:

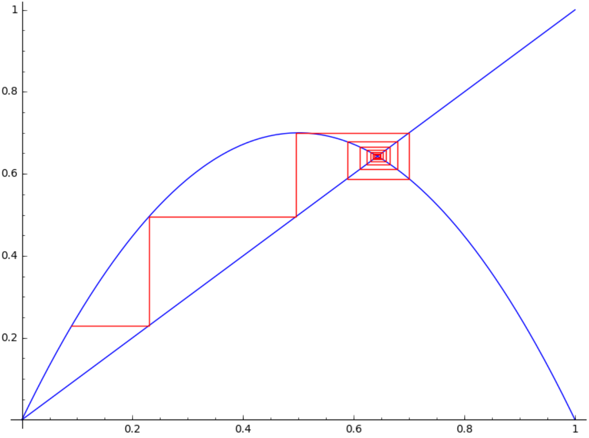
1. Desde la abscisa $x_0$ trazamos una vertical hasta la curva $y = f(x)$
2. Desde la curva trazamos la horizontal hasta encontrar la recta $y = x$
3. Finalmente trazamos la vertical hasta el eje de abscisas obteniendo el valor $x_1$

Repetimos este proceso tantas veces como sea necesario para calcular tantos términos de la sucesión $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$, como consideremos adecuado.

# Representaciones gráficas de un SDD en $I$: gráfico cobweb o en escalera



# Un diagrama Cobweb



- La órbita asociada a un punto de equilibrio constituye una solución constante de la ecuación en diferencias.
- Si dado $x_0 \in E$ existe un $k$ tal que $f^k(x_0) = \alpha = f(\alpha)$, su correspondiente órbita se dice que es eventualmente estacionaria:

$$\gamma(E,\ f,\ x_0) = \{x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \dots,\ f^{k-1}(x_0),\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \dots\}$$

- Buscar puntos de equilibrio de un SDD $(I, f)$es equivalente a buscar las intersecciones de la recta $y = x$ y la gráfica de $f$ que estén contenidas en el subconjunto $I \times I$ del plano $xy$.
- Si $\alpha$ es un punto de equilibrio del SDD $\{E,\ f\}$, también lo será del SDD $\{E, f^n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

# Estabilidad

## Definición

Un punto de equilibrio $\alpha$ del SDD $\{E,\ f\}$ se dice que es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que: si $d(x_0, \alpha) < \delta$ y $x_k = f^k(x_0),\ k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica

$$d(x_k, \alpha) < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el contrario, el punto de equilibrio $\alpha$ se dice inestable si no es estable.

## Definición

En el caso de un intervalo real, un punto de equilibrio $\alpha$ del SDD $\{I,\ f\}$ se dice que es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que: si $|x_0 - \alpha| < \delta$ y $x_k = f^k(x_0),\ k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

# Estabilidad

## Ejemplos

1. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ \dfrac{1}{2}x+1\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha=2)$ estable.

   $\alpha=2$ es el único punto fijo de $f$. La solución general de la ecuación $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+1$ es $x_k=(x_0-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k+2$.
   Entonces, $|x_k-2|=|x_0-2|\left(\frac{1}{2}\right)^k\leq|x_0-2|,\ \forall k$
   $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(=\varepsilon)$ t. q. si $|x_0-2|<\delta$, entonces $|x_k-2|\leq|x_0-2|<\varepsilon$.

2. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ -x\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha=0)$ estable.

   $\alpha=0$ es el único punto fijo de $f$. Además, la solución de la ecuación $x_{k+1}=-x_k$ es $x_k=(-1)^kx_0$ por lo que $|x_k|=|x_0|,\ \forall k$.
   $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(=\varepsilon)$ t. q. si $|x_0|<\delta$, entonces $|x_k|=|x_0|<\varepsilon$.

# Estabilidad

## Ejemplos

3. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ 2x+1\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = -1)$ inestable.

   $\alpha = -1$ es el único punto fijo de $f$.
   Además, la solución de la ecuación $x_{k+1} = 2x_k + 1$ es
   $x_k = (x_0+1)2^k - 1$ por lo que $|x_k + 1| = |x_0 + 1|2^k,\ \forall k$.
   Tomamos por ejemplo $\varepsilon = 1 > 0$, tenemos que probar que $\forall\delta > 0$ $\exists x_0 \neq -1$ y $\exists k > 0$ tales que $|x_0 + 1| < \delta$ y $|x_k + 1| > \varepsilon$.

   Tomamos $x_0 = -1 + \dfrac{\delta}{2}$ y vemos que $|x_0 + 1| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$

   $|x_k + 1| = |x_0 + 1|\, 2^k = \delta\, 2^{k-1} > 1$ para cualquier $k > -\dfrac{\log(\delta)}{\log(2)} + 1$.

# Estabilidad

## Definición

Un punto de equilibrio $\alpha$ del SDD $\{E,\ f\}$ se dice que es un atractor global si para cualquier $x_0 \in I$ y $x_k = f^k(x_0)$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha.$$

## Ejemplos

1. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ \frac{1}{2}x+1\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = 2)$ estable que es un atractor global.
2. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ -x\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = 0)$ estable que no es un atractor global.

# Estabilidad

## Definición

Un punto de equilibrio $\alpha$ del SDD $\{E,\ f\}$ se dice que es un atractor (local) si existe $\eta > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in E$ con $d(x_0, \alpha) < \eta$ y $x_k = f^k(x_0)$, se verifica

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha.$$

## Definición

Un punto de equilibrio $\alpha$ del SDD $\{E,\ f\}$ se dice que es (localmente) asintóticamente estable si es estable y atractor local.

## Nota

Si $\alpha$ es un atractor local del SDD $\{E, f\}$, también es un atractor local de $\{E, f^n\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

# Estabilidad

**Teorema**

Dado el SDD $\{I, f\}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\alpha$ un punto de equilibrio del SDD, entonces se cumple:

$$\alpha \text{ es un atractor (local) } \Rightarrow \alpha \text{ es estable.}$$

**Consecuencia**

Dado el SDD $\{I, f\}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces se cumple:

$$\alpha \text{ es un atractor (local) } \Rightarrow \alpha \text{ es (localmente) asintóticamente estable.}$$

# Estabilidad

Para demostrar el teorema usamos el siguiente lema:

## Lema

Sea $\{I, f\}$ un SDD donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.
Si $\alpha$ es un atractor local y $\alpha$ es un punto interior a $I$, por definición, existe un entorno $(\alpha - \eta, \alpha + \eta) \subset I$ tal que si $x_0 \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$ y $x_k = f^k(x_0)$, se verifica $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = \alpha$.

Entonces:

1. $f(x) < x, \qquad \forall x \in (\alpha, \alpha + \eta)$
2. $f(x) > x, \qquad \forall x \in (\alpha - \eta, \alpha)$
3. $f^n(x) < x, \qquad \forall x \in (\alpha, \alpha + \eta),\ n \in \mathbb{N}$
4. $f^n(x) > x, \qquad \forall x \in (\alpha - \eta, \alpha),\ n \in \mathbb{N}$

¿Qué se podría decir si $\alpha$ es un extremo del intervalo?

# Demostración del lema

En primer lugar observamos que no puede existir otro punto fijo de $f$ en el intervalo $(\alpha-\eta,\alpha+\eta)$ así que $f(x)\neq x$ para cualquier $x\in(\alpha-\eta,\alpha+\eta)$.
Veamos que $f(x)<x$ en $(\alpha,\alpha+\eta)$:
Supongamos que no es cierto, es decir, supongamos que existe $x\in(\alpha,\alpha+\eta)$ con $f(x)>x$. Entonces pueden ocurrir dos cosas:

1. $f(x)>x$, $\forall x\in(\alpha,+\infty)\cap I$.
   En este caso, dado $x_0\in(\alpha,\alpha+\eta)$, la sucesión $\{x_k\}$ sería creciente y no podría converger a $\alpha$.
2. $\exists\bar{\alpha}$ punto fijo de $f$ y $f(x)>x$ $\forall x\in(\alpha,\bar{\alpha})$
   En este caso, si dado $x_0\in(\alpha,\alpha+\eta)$ se tiene que $x_k\in(\alpha,\bar{\alpha})$ para cualquier $k$, la sucesión volvería a ser creciente y no convergería a $\alpha$.
   Por tanto, debe existir $k$ tal que $x_k=f^k(x_0)>\bar{\alpha}$.
   Como $\bar{\alpha}\in(f^k(\alpha),f^k(x_0))$, por el teorema del valor intermedio:
   $\exists\bar{x_0}\in(\alpha,x_0]$ tal que $f^k(\bar{x_0})=\bar{\alpha}$.
   La sucesión $\{\bar{x}_k=f^k(\bar{x_0})\}$ no convergería a $\alpha$.

La segunda se prueba de forma similar (se deja como ejercicio) y las dos últimas son consecuencia directa de las dos primeras y de que $\alpha$ sea un atractor local para el SDD $\{I,f^n\}$.

# Demostración del teorema

Partimos de que $\alpha$ es un atractor local y que es un punto interior a $I$. El razonamiento cuando $\alpha$ es un extremo del intervalo es más sencillo y se deja como ejercicio.
$\exists\ (\alpha-\eta, \alpha+\eta) \subset I$ tal que si $x_0 \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta)$, entonces $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \alpha$.

Queremos ver que es estable, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } x_0 \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta) \Rightarrow x_k \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)\ \ \forall k$$

Tomamos $0 < \varepsilon < \eta$, por ser $f$ continua en $\alpha$:
$\exists \delta > 0$ (se toma $\delta < \varepsilon$) tal que si $x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ entonces $f(x) \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$

Supongamos que $x_0 \in (\alpha, \alpha+\delta)$ (en el otro caso se razona de forma similar). Por el lema anterior, sabemos que $x_k = f^k(x_0) < x_0$ para cualquier $k$.
Tendríamos entonces demostrado que $\boxed{x_k < \alpha + \epsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}}$.

# Demostración del teorema

Entonces pueden ocurrir dos cosas:

1. $x_k > \alpha\ \forall k$. Entonces $\alpha < x_k = f^k(x_0) < x_0 < \alpha + \delta < \alpha + \varepsilon$ y estaría demostrado.
2. $\exists k_1$ mínimo tal que $x_{k_1} \leq \alpha$.
   Si $x_{k_1} = \alpha$, entonces $x_k = \alpha$ para cualquier $k > k_1$ y estaría probado.
   Si $x_{k_1} < \alpha$ (lema anterior para $f^k$).
   $\Rightarrow$ para $k = 1, \ldots, k_1 - 1$, se tiene $\alpha < x_k < x_0 < \alpha + \delta < \alpha + \varepsilon$.
   Además, como $x_{k_1 - 1} \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, por continuidad de $f$,
   $x_{k_1} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.
   Como $x_{k_1} < \alpha$, entonces $x_k = f^{k-k_1}(x_{k_1}) > x_{k_1},\ \forall k$ y por tanto
   $\boxed{x_k > \alpha - \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}}$.

## Teorema (Estabilidad asintótica local)

Si $\alpha$ es un punto de equilibrio del SDD $\{I,\ f\}$ y $f \in \mathcal{C}^1$, entonces:

1. Si $|f'(\alpha)| < 1$ entonces $\alpha$ es (localmente) asintóticamente estable.
2. Si $|f'(\alpha)| > 1$ entonces $\alpha$ es inestable.

Demostración:

1. Supongamos que $|f'(\alpha)| < 1$, tenemos que probar que:

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall x_0 \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I,\ \lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha.$$

Como $f'$ es continua, $\exists \eta > 0$ y $\exists r < 1$ tales que

$$|f'(x)| \leq r < 1, \quad \forall x \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$$

Por el teorema del valor medio, si $x, y \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$, entonces $\exists x^* \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$

$$\begin{aligned} & f(x) - f(y) = f'(x^*)\,(x - y) \\ \Rightarrow\ & |f(x) - f(y)| = |f'(x^*)|\,|x - y| \leq r\,|x - y| \end{aligned}$$

Demostración (cont.):

Si tomamos cualquier $x_0 \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$,

$$|f(x_0) - \alpha| = |f(x_0) - f(\alpha)| \leq r\,|x_0 - \alpha| < \delta \;\Rightarrow\; x_1 = f(x_0) \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$$

De forma recurrente se demuestra que $x_k \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$. Además:

$$|x_k - \alpha| = |f^k(x_0) - f^k(\alpha)| \leq r\,|f^{k-1}(x_0) - f^{k-1}(\alpha)| \leq \cdots \leq r^k\,|x_0 - \alpha|$$

Como $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$, entonces $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$.

2. Supongamos que $|f'(\alpha| > 1$. Veamos que $\alpha$ es inestable, es decir:

$$\exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in I \text{ y } k > 0 \text{ tales que } |x_0 - \alpha| < \delta,\; |x_k - \alpha| > \varepsilon$$

Por ser $f'$ continua $\exists m > 1$ y $\exists \varepsilon > 0$ tales que:

$$|f'(x)| \geq m > 1, \quad \forall x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

Demostración (cont.):

Si tomamos cualquier $\delta > 0$ y utilizando el teorema del valor medio igual que en el apartado anterior podemos ver que:
para $x_0 \neq \alpha$, $x_0 \in (\alpha - \bar{\delta}, \alpha + \bar{\delta})$ donde $\bar{\delta} = \text{mín}(\delta, \varepsilon)$, no puede ocurrir que $x_k \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\ \forall k$.

Si $x_k \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon),\ \ \forall k$, entonces:

$$|x_k - \alpha| = |f^k(x_0) - f^k(\alpha)| \geq m\,|f^{k-1}(x_0) - f^{k-1}(\alpha)| \geq \\ \cdots \geq m^k\,|x_0 - \alpha|$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} m^k = +\infty$, $\exists k > 0$ tal que $|x_k - \alpha| > \varepsilon$

## Ejemplos

1. $\boxed{x_{k+1} = 2\,x_k}$ $\quad f(x) = 2x \quad$ Punto de equilibrio $\alpha = 0$.
   - $f'(0) = 2 > 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ es inestable.

2. $\boxed{x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\,x_k}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}x \quad$ Punto de equilibrio $\alpha = 0$.
   - $f'(0) = \dfrac{1}{2} \in (-1, 1) \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ es asintóticamente estable.
     ¿Es un atractor global?

3. $\boxed{x_{k+1} = x_k^2 + 5\,x_k + 3}$
   - Puntos de equilibrio $\alpha = -1$ y $\alpha = -3$.
   - $f(x) = x^2 + 5x + 3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + 5$.
   - $f'(-1) = 3 > 1 \;\Rightarrow\; \alpha = -1$ es inestable.
     $f'(-3) = -1 \;\Rightarrow$ el criterio no decide.

# Estabilidad

## Caso $f(\alpha) = \alpha$, $f'(\alpha) = 1$

En este caso se puede probar que:

- Si $f$ es de clase 2 y $f''(\alpha) \neq 0$, entonces $\alpha$ es inestable.
- Si $f$ es de clase 3 y $f''(\alpha) = 0$, entonces:
  - $f'''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$ es asintóticamente estable.
  - $f'''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ es inestable.

Demostración como ejercicio.

## Ejercicios

Calcula los puntos de equilibrio y estudia su estabilidad:

- $x_{n+1} = \dfrac{10\, x_n^2}{9 + x_n^2}$
- $x_{k+1} = \mu\, x_k(1 - x_k)$, $\mu > 0$ $I = [0, 1]$ (ecuación logística).

# Ciclos

Dada la ecuación en diferencias $x_{n+1} = -x_n + 4$, si partimos de $x_0 = 3$, observamos que la solución de dicha ecuación es $x_n = (-1)^n + 2$, es decir, se correspondería con la órbita:

$$\{3, 1, 3, 1, 3, \dots\}$$

Estamos en el caso de una orbita periódica de periodo 2.

## Definición

Un ciclo de orden $s$ u órbita periódica de periodo $s$ o $s$-ciclo es un conjunto de $s$ puntos distintos del intervalo $I$, $\{\alpha_0.\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{s-1}\}$, que verifican

$$\alpha_1 = f(\alpha_0),\ \alpha_2 = f(\alpha_1), \dots, \alpha_{s-1} = f(\alpha_{s-2}),\ \alpha_0 = f(\alpha_{s-1})$$

En este caso a $s$ se le llama periodo de la órbita u orden del ciclo.

- Si elegimos como dato inicial $x_0 = \alpha_0$, entonces la órbita correspondiente $\gamma(I, f, \alpha_0)$ tiene un comportamiento periódico:

$$\gamma(I,\ f,\ \alpha_0) = \{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s-1},\ \alpha_0,\ \ldots\}$$

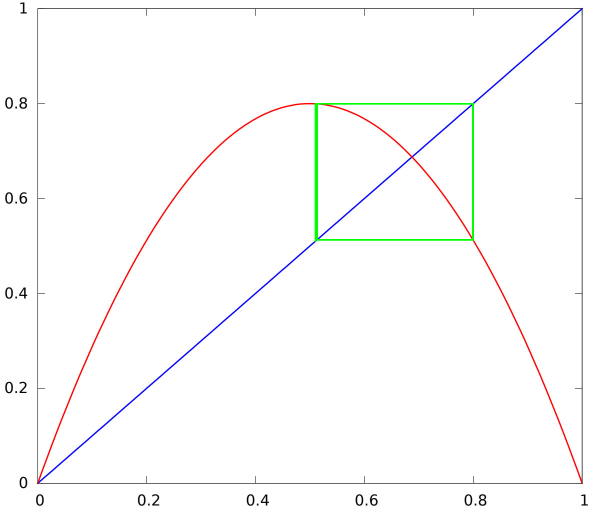
- De forma más general, una órbita de $\{I,\ f\}$ se dirá eventualmente periódica si existen $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{s-1}$, distintos entre si, y un $h \in \mathbb{N}$ tales que

$$x_h = \alpha_0,\ x_{h+1} = \alpha_1, \ldots, x_{h+s} = \alpha_0.$$

- Las órbitas periódicas de periodo mínimo $s$ (si existen) están constituidas por valores que resuelven la ecuación $\{x \in I : f^s(x) = x\}$ pero que no son soluciones de las $s-1$ ecuaciones $\{x \in I : f^h(x) = x\},\ h = 1, 2,\ \ldots,\ s-1.$

- Todas estas definiciones son igualmente válidas en cualquier espacio métrico $E$.

# Un ciclo para la ecuación logística con $\mu = 3.2$



# Ejemplos

1. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ 2x\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = 0)$ y no tiene órbitas periódicas.

2. El SDD lineal $\{\mathbb{R},\ -x\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = 0)$ e infinitas órbitas periódicas de periodo 2: $\{x_0, -x_0\}$.

3. El SDD no lineal $\{\mathbb{R}^+,\ 1/x\}$ tiene exactamente un punto de equilibrio $(\alpha = 1)$ e infinitas órbitas periódicas de periodo 2: $\{x_0, x_0^{-1}\}$.

4. El SDD no lineal $\{[0,1],\ \mu x(1-x)\}$ donde $\mu \in \mathbb{R}$ posee una órbita eventualmente estacionaria si $x_0 = 1$: $\{1, 0, 0,\ \ldots\}$.

# Estabilidad de los ciclos

Puesto que los puntos de una órbita periódica de periodo $s$ son puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$, para estudiar la estabilidad de una órbita periódica basta estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$.

Sea $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}$ un $s$–ciclo para el SDD $\{I,\ f\}$, si algún $\alpha_j$ es un punto fijo estable para $\{I,\ f^s\}$, entonces todos los $\alpha_i$ con $i \neq j$ son también estables como puntos fijos de $\{I,\ f^s\}$.

## Proposición

Supongamos $f : I \to I,\ f \in C^1(I)$ y que $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}$ es un $s$–ciclo para el SDD $\{I,\ f\}$. Entonces
i) Si $|f'(\alpha_0)f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_{s-1})| < 1$ el ciclo es asintóticamente estable.
ii) Si $|f'(\alpha_0)f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_{s-1})| > 1$ el ciclo es inestable.

# Algunos ejemplos de ciclos

## Ejercicios

1. Para los siguientes SDD comprueba que tienen un 2-ciclo y estudia su estabilidad:
   - $\{\mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\}$
   - $\{\mathbb{R}, x^2 - 0.85\}$
2. Calcula un 2-ciclo, un 3-ciclo y un 4-ciclo para la ecuación logística $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$ si $\mu = 3.82843$.
3. Con ayuda de un ordenador comprueba numéricamente que si en la ecuación logística tomamos $\mu = 3.70165$ con $x_0 = 0.7042$ aparece un 7-ciclo.

# Ejemplo: la ecuación logística

Recordemos que la ecuacion logística $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$ con $\mu > 0$ aparecía en modelos de poblaciones por lo que siempre es necesario que $x_k \geq 0$. Para que esto ocurra, es necesario considerar el sistema definido en el intervalo $[0, 1]$. En realidad lo que hacemos es reparametrizar para quedarnos en el intervalo $[0, 1]$.

Por otro lado, la función $f(x) = \mu x(1 - x)$ alcanza su máximo valor en el punto $x = \dfrac{1}{2}$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\mu}{4}$ por lo que para que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ es necesario que $\mu \leq 4$.

Vamos a estudiar entonces la ecuación:

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k), \qquad 0 < \mu \leq 4.$$

# Ejemplo: la ecuación logística

Para el SDD no lineal $\{[0,1],\ \mu x(1-x)\}$ los puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación $\mu x(1-x)=x$ que son $x=0$ y $x=\dfrac{\mu-1}{\mu}$.

Estabilidad: $f(x)=\mu x(1-x)$, $f'(x)=\mu(1-2x)$ y $f''(x)=-2\mu$.

Como $f'(0)=\mu$, observamos que:

- Si $\boxed{\mu<1}$, $|f'(0)|<1$ $\Rightarrow x=0$ es a.e.
- Si $\boxed{\mu>1}$, $|f'(0)|>1$ $\Rightarrow x=0$ es inestable.
- Si $\boxed{\mu=1}$, $f'(0)=1$ y $f''(0)=-2\neq 0 \Rightarrow x=0$ es inestable.

Como $f'((\mu-1)/\mu)=2-\mu$, notamos $p=(\mu-1)/\mu$ y observamos que:

- Si $\boxed{1<\mu<3}$, $|f'(p)|<1$ $\Rightarrow p$ es a.e.
- Si $\boxed{\mu<1}$ o $\boxed{\mu>3}$, $|f'(p)|>1$ $\Rightarrow p$ es inestable.
- Si $\boxed{\mu=1}$, $f'(p)=1$ y $f''(p)=-2\neq 0$ $\Rightarrow p$ es inestable.
- Si $\boxed{\mu=3}$, $f'(p)=-1$. Veremos más adelante que $p$ es a.e.

# Ejemplo: la ecuación logística

Para el SDD no lineal $\{[0,1],\ \mu x(1-x)\}$ los puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación $\mu x(1-x) = x$, es decir, las raíces del polinomio de segundo grado

$$\mu x(1-x) - x = -\mu x^2 + (\mu - 1)x \tag{1}$$

Los 2-ciclos están generados por las soluciones de la ecuación $f(f(x)) = x$, esto es, las raíces del polinomio de cuarto grado

$$\begin{aligned} &\mu^2 x(1-x)\,(1-\mu x(1-x)) - x \\ &= -\mu^3 x^4 + 2\,\mu^3 x^3 - \mu^3 x^2 - \mu^2 x^2 + \mu^2 x - x \end{aligned} \tag{2}$$

# Ejemplo: la ecuación logística

Puesto que todo punto de equilibrio genera un 2-ciclo (trivial), el polinomio (1) divide al polinomio (2) y los 2-ciclos no triviales se corresponden con las raíces del polinomio cociente

$$q(x) = \mu^2 x^2 - \mu\,(\mu + 1)x + \mu + 1.$$

Como el discriminante
$\Delta = \mu^2(\mu + 1)^2 - 4\mu^2(\mu + 1) = \mu^2(\mu + 1)(\mu - 3) > 0$ sólo para $\mu > 3$, la ecuación logística sólo posee un 2-ciclo propio cuando $\mu > 3$ que vendrá dado por

$$\left\{ \alpha_0 = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\,\mu}, \alpha_1 = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\,\mu} \right\}$$

# Ejemplo

Para el SDD no lineal $\{[0,1],\ \mu(x-x^2)\}$ para $\mu > 3$, los 2-ciclos están generados por las soluciones de la ecuación $f(f(x)) = x$, que vienen dadas por

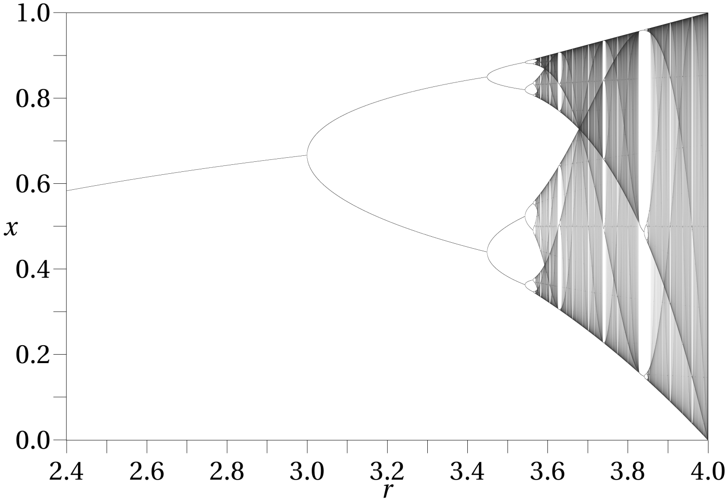
$$\left\{\alpha_0 = \frac{\mu+1-\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\,\mu}, \alpha_1 = \frac{\mu+1+\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\,\mu}\right\}$$

Dado que $f'(x) = \mu(1-2x)$, la condición $|f'(\alpha_0)f'(\alpha_1)| < 1$ quedará

$$|f'(\alpha_0)f'(\alpha_1)| = |-\mu^2 + 2\,\mu + 4| < 1$$

lo cual se verifica para $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$.
Para ver lo que ocurre para otros valores de $\mu$, se puede ver por ejemplo la página: https://vicmat.com/la-ecuacion-logistica-caos/

# Diagrama de bifurcación para la ecuación logística



# Aplicación: estrategias de pesca

La dinámica de una población de peces sin agentes externos y adecuadamente normalizada viene descrita por la ecuación

$$x_{k+1} = 1.5x_k - 0.5x_k^2$$

El término $1.5x_k$ representa el crecimiento y el término $0.5x_k^2$ representa la competencia intraespecífica.
Se proponen dos estrategias de pesca:

1. Pescar una cantidad fija $b$ de peces cada año.
2. Pescar una fracción $r \in (0, 1)$ del total de peces en cada año.

Desde el punto de vista de la sostenibilidad, ¿cuál es la mejor estrategia?

# Contenidos

# Referencias


- F. Brauer, C. Castillo–Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,* Second Ed., Springer–Verlag, New York, 2012.
- P. Cull, M. Flahive, R. Robson, *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, 2005.
- S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer–Verlag, New York, 2005.
- R. Ortega, *Modelos matemáticos*, Universidad de Granada, 2013.
- E. Salinelli, F. Tomarelli, *Discrete Dynamical Models*, Springer International Publishing Switzerland, 2014.