Relación Tema 6

Ejercicio 1.-

Se realizan 2500 lanzamientos de una moneda correcta. Calcular la probabilidad aproximada de obtener 1/2 como frecuencia relativa de cara con un error máximo de 0,02.

$\forall i = 1, \dots, 2500$ consideramos $X_i = \begin{cases} 1 & \text{sale cara} \\ 0 & \text{sale cruz} \end{cases}$ de modo que $X_i \rightsquigarrow B(1, 1/2)$

Está claro que $S_{2500} = \sum_{i=1}^{2500} X_i$ nos proporciona la frecuencia absoluta de salir cara (al sumar 1 ó 0) y, por tanto la frecuencia relativa será $\frac{S_{2500}}{2500}$

Nos piden $P\left[\left| \frac{S_{2500}}{2500} - 1/2 \right| \leq 0'02 \right] = P\left[1/2 - 0'02 \leq \frac{S_{2500}}{2500} < 1/2 + 0'02 \right] =$

$= P[1200 \leq S_{2500} < 1300] \simeq P\left[\frac{1200-1250}{\sqrt{625}} \leq Z \leq \frac{1300-1250}{\sqrt{625}} \right] =$

Aplicando el TCL sabemos que $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \rightsquigarrow N(0,1)$

Como $S_{2500} = \sum_{i=1}^{2500} X_i \rightsquigarrow B(2500, 1/2) \Rightarrow \begin{cases} E(S_{2500}) = \frac{2500}{2} = 1250 \\ Var(S_{2500}) = \frac{2500}{4} = 625 \end{cases}$

(reproductividad)

$= P[-2 \leq Z \leq 2] = 2P[Z \leq 2] - 1$

Por tanto: $\boxed{P\left[\left| \frac{S_{2500}}{2500} - 1/2 \right| \leq 0'02 \right]} \simeq 2P[Z \leq 2] - 1 =$

$= 2 \cdot 0'97725 - 1 = \boxed{0'9545}$

Ejercicio 2.-

Calcular, aproximadamente, la probabilidad de que al lanzar 100 veces un dado la media de los puntos sea mayor que 3'7.

Sea $X \rightsquigarrow U_D(E_X)$ "uniforme discreta" con $E_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

de modo que $P[X=i] = 1/6 \quad \forall i \in E_X$

Consideramos 100 réplicas (independientes e idénticamente distribuidos) de X

La media de los 100 lanzamientos es $\frac{S_{100}}{100} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X}{100}$, de modo que nos piden calcular la $P\left[\frac{S_{100}}{100} > 3'7\right]$

Aplicando el TCL se tiene que $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \rightsquigarrow N(0,1)$

De modo que $P\left[\frac{S_{100}}{100} > 3'7\right] = P[S_{100} > 370] \simeq$

$$\simeq P\left[\underbrace{\frac{S_{100} - E(S_{100})}{\sqrt{var(S_{100})}}}_{Z \rightsquigarrow N(0,1)} > \frac{370 - E(S_{100})}{\sqrt{var(S_{100})}}\right] =$$

$$= P\left[Z > \frac{370-350}{\sqrt{291}}\right] = P[Z > 1'17164] =$$

$$\left[\begin{array}{l} E[S_{100}] = 100 \cdot E[X] = 100 \cdot \left(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right) = 350 \\ Var(S_{100}) = 100 \cdot Var[X] = 100\left[E[X^2] - (E[X])^2\right] = \\ \qquad = 100\left[15'16 - (3'5)^2\right] = 291 \end{array}\right]$$

$$= 1 - P[Z \leq 1'17] = 1 - 0'87900 = 0'121$$

Tabla N(0,1)

Por tanto,

$$\boxed{P\left[\frac{S_{100}}{100} > 3'7\right] \simeq 0'121}$$

Ejercicio 3.-

Sea $(X_1,\dots,X_{100})$ vector aleatorio en $\mathbb{R}^{100}$. Suponemos que $\forall i=1,\dots,100$ se tiene que $X_i \sim U([-1,1])$ son v.a.i.i.d, calcular, aproximadamente, la probabilidad de que el cuadrado de la distancia al origen sea menor que 40.

el cuadrado de la distancia al origen del vector $(X_1,\dots,X_{100}) =$
$= \langle (X_1,\dots,X_{100}),(X_1,\dots,X_{100})\rangle = \sum_{i=1}^{100} X_i^2$. Por tanto nos piden $P[\sum_{i=1}^{100} X_i^2 < 40]$

Si consideramos la sucesión $\tilde{X}_i = X_i^2$ $\forall i=1,\dots,100$, podemos reescribirla como $P[S_{100}<40]$

Está claro que $\tilde{X}_i$ son v.a.i.i.d de modo que por el TCL, se tiene que $\frac{S_{100}-E(S_{100})}{\sqrt{var(S_{100})}} \xrightarrow[L]{} Z \sim N(0,1)$

Así pues $P[S_{100}<40] \simeq P[\underbrace{Z}_{N(0,1)} < \frac{40-E[S_{100}]}{\sqrt{var(S_{100})}}] =$

• $E[S_{100}] = \cancel{E(\sum_{i=1}^{100} E(X_i^2))} = E[\sum_{i=1}^{100} X_i^2] = 100\, E[X_i^2] =$

$= 100\int_{-1}^{1} x^2 \underbrace{f(x)}_{\substack{1/2 \\ \text{p.q } X_i \sim U([-1,1])}} dx = 50\int_{-1}^{1} x^2\, dx = 50\left(\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{100}{3} = 100\, E[X]$

• $Var[S_{100}] \left(= E[S_{100}^2] - E[S_{100}]^2\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{100} X_i^2\right) =$

$= 100 \cdot var(X_i^2) = 100\left[E[X_i^4] - (E[X_i^2])^2\right] =$

$= 100\left[\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2} dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 100\left[\left(\frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{9}\right] =$

$= 100\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right] = \frac{100}{45}(9-5) = \frac{400}{45}$

$= P\left[Z < \frac{40-\frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{400}{45}}}\right] = P\left[Z < \frac{6'6}{4}\right] = P[Z<1'66] = 0'95154$

Por tanto, $\boxed{P[\sum_{i=1}^{100} X_i^2 < 40] = 0'95154}$

Ejercicio 4.-

Elección entre dos candidatos A y B. Se seleccionan aleatoria e independientemente ~~[illegible]~~ $\underline{n}$ personas del censo y se les pregunta su elección. Si la probabilidad de que seleccionen al candidato A es $\underline{p}$, obtener el tamaño mínimo de personas, $\underline{n}$, para que la frecuencia relativa de votantes de A en la muestra difiera de $\underline{p}$ menos de 0,001 con probabilidad mayor o igual de 0'99.

Siguiendo la filosofía del ejercicio 1, considero $X_i = \begin{cases} 1 & \text{eligen A} \\ 0 & \text{eligen B} \end{cases}$

de modo que $X_i \rightsquigarrow B(1, p)$ $\forall i = 1, \dots, n$. De este modo la frecuencia relativa es $\frac{S_n}{n}$ y la probabilidad que nos piden se escribe como $P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0'001\right] = 0'99$

Supuesto $\underline{n}$ suficientemente grande aplicamos el TCL, de modo que $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} Z \rightsquigarrow N(0,1)$

Como $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow B(n, p) \Rightarrow E(S_n) = np$ y $Var(S_n) = np(1-p)$

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0'001\right] = P\left[p - 0'001 < \frac{S_n}{n} < p + 0'001\right] =$$

$$= P\left[n(p - 0'001) < S_n < n(p + 0'001)\right] \underset{TCL}{\simeq}$$

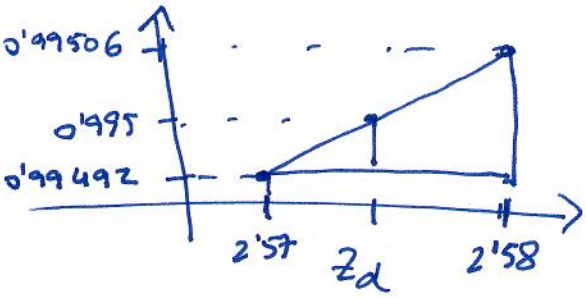
$$\simeq P\left[\frac{n(p - 0'001) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \underset{N(0,1)}{Z} < \frac{n(p + 0'001) - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] =$$

$$= P\left[\frac{-0'001 \cdot n}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z < \frac{0'001 \cdot n}{\sqrt{np(1-p)}}\right] =$$

$$= 2P\left[Z \leq \frac{0'001 \cdot n}{\sqrt{np(1-p)}}\right] - 1 = 0'99 \Rightarrow P\left[Z < \underbrace{\frac{0'001 \cdot n}{\sqrt{np(1-p)}}}_{z_\alpha}\right] = 0'995$$

$\rightarrow$

$\Rightarrow$



Tma Thales

$$\frac{0'99506 - 0'99492}{2'58 - 2'57} = \frac{0'995 - 0'99492}{z_\alpha - 2'57}$$

$$z_\alpha = 2'57 + \frac{0'00008}{0'014} \Rightarrow \boxed{z_\alpha = 2'576}$$

y por tanto $\dfrac{0'001 \cdot n}{\sqrt{n p (1-p)}} = 2'576 \Rightarrow \dfrac{(0'001 \cdot n)^2}{n p (1-p)} = (2'576)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{0'000001}{p(1-p)} \cdot n = 7'596 \Rightarrow \boxed{n = 7595536 \cdot p(1-p)}$$

"El tamaño mínimo de muestra depende de la probabilidad p"

Ejercicio 5.-

el 0'5% de la población padece una enfermedad.
Una prueba para detectar la enfermedad da positivo con probabilidad 0'99 en los individuos enfermos y da negativo en los individuos sanos también con probabilidad 0'99

(a) P[Enfermo/Prueba Positiva]

Sea E el suceso estar enfermo $\Rightarrow P[E] = 0'005$

Sea S el suceso estar sano $\Rightarrow P[S] = 1 - 0'005 = 0'995$

Sea + el suceso que la prueba de positivo (enfermo)

Sea — el suceso que la prueba de negativo (sano)

sabemos que $P[+/E] = 0'99 = P[-/S]$, por tanto $P[+/S] = 1 - P[-/S] = 0'01$

Nos piden $P[E/+] \underset{\text{Tma. Bayes}}{=} \dfrac{P[+/E]\cdot P[E]}{P[+/E]\cdot P[E] + P[+/S]\cdot P[S]} =$

$$= \frac{0'99\cdot 0'005}{0'99\cdot 0'005 + 0'01\cdot 0'995} = \frac{0'00495}{0'00495+0'00995}$$

$\Rightarrow \boxed{P[E/+] = 0'332}$

(b) Calcular aproximadamente el número mínimo de personas, "n", con resultado positivo que deben de ser elegidas de forma aleatoria e independiente para asegurar una proporción de personas realmente enfermas inferior a 1/2 con probabilidad mayor o igual a 0'95

Seguimos con la filosofía del ejercicio 4 ya que la proporción se entiende como la frecuencia relativa.

Consideramos por tanto $X_i = \begin{cases} 1 & \text{Resultado + que esté E } (E/+) \\ 0 & \text{———} \end{cases}$,

está claro que $X_i \sim B(1, p = P[E/+] = 0'332)$ y lo que nos piden $P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0\right] = P\left[\frac{S_n}{n} < 1/2\right] = 0'95$

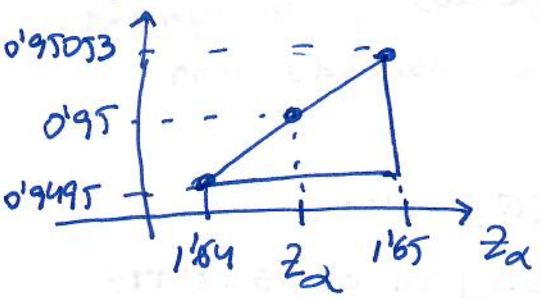
$\Rightarrow P[S_n < n/2] = 0'95$

aplicando el TCL, $P[S_n < n/2] \simeq P\left[\underset{N(0,1)}{Z} < \dfrac{\frac{n}{2} - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}}\right] =$

↪

$$\Rightarrow P\Bigg[Z < \overbrace{\frac{n/2 - 0'332\,n}{\sqrt{n \cdot 0'4708}}}^{z_\alpha}\Bigg] = 0'95$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \to B(n,p) \Rightarrow E(S_n) = n\cdot p \text{ y } Var(S_n) = n\cdot p(1-p)$$



Th. Thales

$$\frac{0'95053 - 0'9495}{1'65 - 1'64} = \frac{0'95 - 0'9495}{z_\alpha - 1'64}$$

$$z_\alpha = 1'64 + \frac{0'0005}{0'103} \Rightarrow \underline{z_\alpha = 1'645}$$

y por tanto $\dfrac{n/2 - 0'332\,n}{\sqrt{n \cdot 0'4708}} = 1'645$

$$\frac{(0'168\cdot n)^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\cdot(0'4708)^2} = (1'645)^2$$

$$n = \frac{(1'645)^2 \cdot (0'4708)^2}{(0'168)^2}$$

$$n = 21'25$$

$\boxed{\text{Por tanto deben de cogerse como mínimo 22 personas con resultado positivo para asegurar lo pedido.}}$

Ejercicio 6 .-

Una empresa necesita adquirir al menos 100 vehículos.

Hay dos tipos de coches: tipo A ($p = 0'4$) y tipo B ($p = 0'6$).

Un coche tipo A supera la prueba con probabilidad 1/3 y un coche tipo B la supera con probabilidad 2/3.

ⓐ Probabilidad de que un coche elegido al azar supere la prueba.

Sea S = Suceso superar la prueba sea el tipo de coche que sea.

Tenemos que:

$$P(\text{Tipo A}) = 0'4$$
$$P[\text{Tipo B}] = 0'6 \qquad ¿\, P(S)\, ?$$
$$P[S/\text{Tipo A}] = 1/3$$
$$P[S/\text{Tipo B}] = 2/3$$

Es un problema de aplicación del Teorema de la probabilidad total.

$$\boxed{P(S)} = P(S/\text{Tipo A}) \cdot P(\text{Tipo A}) + P(S/\text{Tipo B}) \cdot P(\text{Tipo B}) =$$
$$= 1/3 \cdot 0'4 + \frac{2}{3} \cdot 0'6 = \boxed{0'53}$$

ⓑ Calcular el número de coches que deben de examinarse para cubrir las necesidades de la empresa con probabilidad mayor o igual a $0'90147$.

Siguiendo la filosofía de otros ejercicios consideramos la familia de v.a. i.i.d. $X_i = \begin{cases} 1 & \text{supera la prueba} \\ 0 & \text{no supera la prueba} \end{cases}$

de modo que $X_i \sim B(1, p = P[S]) = B(1, 0'53)$

Consideramos ahora $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ que contabilizará el número de coches que superan la prueba.

Nos piden satisfacer las necesidades de la empresa, esto es, adquirir más de 100 coches, es decir: ¿$P[S_n \geq 100]$?

Aplicamos el TCL, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$ $\quad \begin{pmatrix} E(S_n) = 0'53 \cdot n \\ Var(S_n) = 0'2491 n \end{pmatrix}$

Por tanto $P[S_n \geq 100] \underset{TCL}{\simeq} P\Big[\underset{N(0,1)}{Z} \geq \underbrace{\dfrac{100 - 0'53 \cdot n}{\sqrt{0'2491\, n}}}_{Z_\alpha}\Big] = 0'90147$

$\Rightarrow P[Z \leq Z_\alpha] = 1 - 0'90147$ (No está en la Tabla $N(0,1)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P[Z \leq -Z_\alpha] = 0'90147$ (Sí está en la Tabla $N(0,1)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow -Z_\alpha = 1'29 \Rightarrow Z_\alpha = -1'29 \Rightarrow \boxed{\dfrac{100 - 0'53n}{\sqrt{0'2491n}} = -1'29}$ $\Rightarrow$ (*)

$\Rightarrow (100 - 0'53n)^2 = 0'4145n \Rightarrow 10000 - 106'4145n + 0'2809n^2 = 0$

$$n = \frac{106'4145 \pm \sqrt{(106'4145)^2 - 11236}}{0'5618} = \frac{106'4145 \pm 9'3832}{0'5618} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \begin{cases} \dfrac{115'7977}{0'5618} = \boxed{206'119} & \text{¡Este satisface (*)!} \\ \dfrac{97,0313}{0'5618} = \cancel{172'715} & \end{cases}$$

En conclusión, deben examinarse unos 207 coches para satisfacer las necesidades de la empresa.

Ejercicio ~~12~~ 7.-

Sea X = longitud de vida (en horas) de una pieza de cierta máquina tal que $f_X(x) = e^{1-x}$, $x>1$. Cada vez que una pieza falle se sustituye por otra con las mismas características y con longitudes de vida independientes.
Calcular aproximadamente el número de piezas de recambio para garantizar el funcionamiento al menos 1000 horas con probabilidad mayor que 0'95.

Considero $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i.d como la v.a. X

Cada elemento de esta sucesión computa las horas de vida de una máquina.
Por tanto $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ computa el tiempo de vida en horas de n-máquinas, de modo que lo que nos están pidiendo calcular es $P[S_n \geq 1000] \geq 0'95$

Estamos en las condiciones del TCL (v.a.i.i.d con $E[X_i^2]<\infty$)
de modo que $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$

- $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\,E[X] = n\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = n\int_1^{\infty} x e^{1-x}\,dx =$

$\underset{\text{(Int. partes)}}{=} \left| \begin{matrix} u=x & du=1 \\ dv= & v=-e^{1-x} \end{matrix} \right| = n\left[\left(-xe^{1-x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{1-x}dx \right] =$

$= n\left[0 + 1 + \left(-e^{1-x}\right]_1^{+\infty} \right] = n[1+1] = \boxed{2n}$

$\left(\lim_{x\to+\infty} -xe^{1-x} = 0\right)$

- $Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n\,Var[X] = n\left[E[X^2] - E[X]^2\right] = (*)$

- $E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} x^2 e^{1-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u=x^2 & du=2x \\ dv=e^{1-x} & v=-e^{1-x} \end{matrix} \right| =$

$$= \left(-x^2e^{1-x}\right]_1^{\infty} + 2\overbrace{\int_1^{+\infty} x e^{1-x}\,dx}^{2 \Rightarrow \text{(Hecho antes)}} =$$

$$= +1 + 2(2) = +5$$

Por tanto $Var(S_n) = n\left(+5 - 2^2\right) = n$

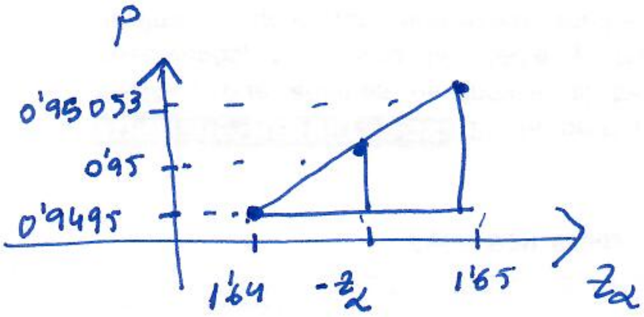
En conclusión:

$$P[S_n \geq 1000] \underset{TCL}{\simeq} P\left[Z \geq \frac{1000 - 2n}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= 0'95 \Leftrightarrow 1 - P\left[Z \leq \frac{1000-2n}{\sqrt{n}}\right] = 0'95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\Big[Z \leq \underbrace{\frac{1000-2n}{\sqrt{n}}}_{z_\alpha}\Big] = 0'05 \Leftrightarrow$$ (0,05 no está en las tablas de la N(0,1))

$$\Leftrightarrow P[Z \leq -z_\alpha] = 0'95$$ Como no está en la tabla interpolamos



Th. Thales

$$\frac{0'95053 - 0'9495}{1'65 - 1'64} = \frac{0'95 - 0'9495}{z_\alpha - 1'64}$$

$$\Rightarrow -z_\alpha = 1'64 + \frac{0'0005}{0'103} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -z_\alpha = 1'6448 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_\alpha = -1'6448 \Rightarrow$$

$$\frac{1000-2n}{\sqrt{n}} = -1'6448$$

$$(1000-2n)^2 = 1'6448^2 n$$

$$1000000 - 4000n + 4n^2 - 2'7053n = 0$$

$$4n^2 - 4002'7053n + 1000000 = 0$$

$$n = \frac{4002'7053 \pm \sqrt{4002'7053^2 - 16.000.000}}{8}$$

$\boxed{518'73}$ ¡este es la raíz positiva!

... luego 549 aprox.