EjerciciosT4.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 4

1 Encuentra funciones $a, b \in C(I)$ de modo que t, t^2 sean soluciones de una ecuación lineal $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a, b \in C(I)$. Discute si el intervalo I puede ser toda la recta real o no.

2 Encuentra un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $3x'' - 2x' - 8x = 0$ (Indicación: busca soluciones de la forma $e^{\lambda t}$). Por el método de variación de constantes, encuentra la solución general de la ecuación

$$3x'' - 2x' - 8x = \cosh(t)$$

3 Encuentra la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x},$$

sabiendo que dos soluciones de la ecuación homogénea son $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$.

4 Se considera la ecuación

$$(1+t)x'' - (1+2t)x' + tx = te^t.$$

Se pide:

a) comprueba que $z_0(t) = e^t$ es una solución particular de la ecuación homogénea.

b) Efectúa el cambio $x = uz_0$ en la ecuación completa para reducir su orden y poder integrarla.

5 Consideremos la ecuación

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0.$$

Encuentra una solución particular de tipo potencia ($y_1(x) = x^m$) y usa la fórmula de Liouville para encontrar la solución general.

6 Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)$ funciones en $C^k(I)$ que cumplen $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0$ para cada $t \in I$. Demuestra que existe una ecuación lineal homogénea $x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ con $a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 \in C(I)$ tal que $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)$ es un sistema fundamental. ¿Es cierta esta conclusión cuando $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(t) = 0$ para cada $t \in I$?

7 Se considera la ecuación

$$y' + y^2 + \alpha(t)y + \beta(t) = 0$$

donde $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Dada una solución $y(t)$ definida en un intervalo abierto $J \subset I$ se define

$$x(t) = ce^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

donde c es una constante y $t_0 \in J$. Demuestra que $x(t)$ es solución de una ecuación lineal y homogénea de segundo orden.

8 Se considera la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ donde $a \in C^1(I)$.

a) Dadas dos soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación anterior, demuestra que la función producto $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ es solución de la ecuación de tercer orden $z''' + 4a(t)z' + 2a'(t)z = 0$.

b) Se supone que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un sistema fundamental para la ecuación de segundo orden, demuestra que las funciones $x_1(t)^2$, $x_1(t)x_2(t)$, $x_2(t)^2$ forman un sistema fundamental de la ecuación de tercer orden. Indicación: prueba la identidad

$$\det\begin{pmatrix} v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 \\ 2v_1v_2 & 2w_1w_2 & v_2w_1 + v_1w_2 \\ v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 \end{pmatrix} = (w_1v_2 - v_1w_2)^3.$$

9 Demuestra que las funciones $f_j(t) = |t-j|$, $j = 1, \dots, n$ son l.i. en $I =]0, \infty[$. Indicación: las funciones f_j son derivables en cada intervalo $]0,1[$, $]1,2[$,...

10 a) Encuentra dos funciones $f_1, f_2 \in C^1(I)$ que sean linealmente independientes (l.i.) en I mientras que sus derivadas son linealmente dependientes.

b) Demuestra que si $f_1, f_2, \dots f_n \in C^1(I)$ son funciones tales que $f_0, f_1, \dots, f_n$ son l.i. entonces $f_1', f_2', \dots, f_n'$ son también l.i. La notación f_0 se emplea para la función constante $f_0(t) = 1$.

11 a) Dada la ecuación del oscilador armónico $x'' + \omega^2 x = 0$ con $\omega > 0$, demuestra que las funciones $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ forman un sistema fundamental.

b) Consideramos ahora el oscilador forzado $x'' + \omega^2 x = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$, donde $\Omega > 0$ es un número real. Demuestra que esta ecuación admite una solución del tipo $x(t) = a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)$ si $\Omega \neq \omega$.

c) Resuelve la ecuación $x'' + \omega^2 x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(\Omega_i t + \phi_i)$ cuando $\omega \neq \Omega_i$ para cada i.

d) ¿Cómo son las soluciones en el caso $\Omega_i = \omega$ para algún i?

12 Se considera la ecuación $x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t}$ donde $a_0, \dots, a_{k-1}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son constantes. Encuentra la condición necesaria y suficiente para que la ecuación admita una solución del tipo $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$.

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

RELACIÓN - T4:

~~relación T4~~

5 Considere la ecuación: $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$

Encuentra una solución particular de tipo potencia ($y_1(x) = x^m$)
y usa la formula de Liouville para encontrar la sol. general.

$$y'' - \frac{7}{x}y' + 16x^2 y = 0 \qquad I =]0,+\infty[\text{ ó }]-\infty,0[$$

Buscamos $y(x) = x^m$

Sustituimos:

$$x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$$

$$x^2 (m-1) m x^{m-2} - 7 x m x^{m-1} + 16 x^m = 0$$

$(x=1)$

$$(m-1)m - 7m + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{m=4} \text{ doble}$$

Usamos el Wronskiano para $y_2(x)$? (Formula de Liouville $W(t_0)$??)

$$\begin{vmatrix} x^4 & y_2(x) \\ 4x^3 & y'(x) \end{vmatrix} = 1 \cdot e^{\int_1^t 7/s\, ds} \qquad W(\varphi_1,\dots,\varphi_k)(t) = W(t_0)\, e^{\int a_{k-1}(s)ds}$$

↳ valor que queramos.

$$x^4 y'(x) - 4x^3 y(x) = e^{7\ln(x)} \over x^7$$

$$y'(x) = \frac{4}{x} y + x^3$$

$$y(x) = e^{\int 4/x\, dx} \left(K + \int e^{-\int 4/x\, dx} x^3 dx \right) = x^4 \left(K + \int x^{-4} x^3 dx\right) =$$

$$= x^4 K + x^4 \ln(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = \hat{K} + x^4 \ln(x)}$$

3 Encuentra la sol general de la ecuación:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}$$

sabiendo que la sols de la homogenea son $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$

Veamos si son un sistema fundamental:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ \varphi_2(x) = \frac{\cos x}{x} \end{cases} \qquad W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-x\operatorname{sen}^2 x - \cancel{\operatorname{sen} x \cos x} - x\cos^2 x + \cancel{\cos x \operatorname{sen} x} \right) = \frac{-x}{x^3} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$$

Resolvemos por el método de variación de ctes:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' \varphi_1 + C_2' \varphi_2 = 0 \\ C_1' \varphi_1' + C_2' \varphi_2' = b(x) \end{array}\right\} \qquad b(x) = 1/x$$

▷ Resolvemos por Cramer:

$$C_1' = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\cos x}{x} \\ 1/x & \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{W(x)} \cdot -\frac{\cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{-1/x^2} \cdot \frac{-\cos x}{x^2} = \cos x = C_1'$$

$$C_2' = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & 0 \\ \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & 1/x \end{vmatrix} = \frac{1}{W(x)} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} =$$

$$= -\operatorname{sen} x = C_2'$$

▷ Integramos para sacar C_1 y C_2

$$C_1 = \int_{t_0}^{t} \cos(s)ds \Rightarrow \boxed{C_1 = \operatorname{sen}(x)}$$

$$C_2 = \int_{t_0}^{t} -\operatorname{sen}(s)ds \Rightarrow \boxed{C_2 = +\cos(x)}$$

$$y^*(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) =$$

$$= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos(x) \frac{\cos(x)}{x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} + \frac{\cos^2(x)}{x} = \boxed{\frac{1}{x} = y^*(x)}$$

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{y^*} + \underbrace{C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}}_{L[y]} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

1 Encuentra funciones $a, b \in C(I)$ de modo que t, t^2 sean soluciones de una ec. lineal $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Discute I.

Si t y t^2 son soluciones, deben cumplir la ecuación.

$x_1(t) = t \quad x_1'(t) = 1 \quad x_1''(t) = 0 \Rightarrow 0 + a(t) + b(t)t = 0$

$x_2(t) = t^2 \quad x_2'(t) = 2t \quad x_2''(t) = 2 \Rightarrow 2 + a(t)2t + b(t)t^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a(t) + tb(t) = 0 \\ 2ta(t) + t^2 b(t) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -2ta(t) - 2t^2 b(t) = 0 \\ 2ta(t) + t^2 b(t) = -2 \\ \hline -t^2 b(t) = -2 \end{array}$$

$\boxed{b(t) = 2/t^2}$

$a(t) + t \cdot 2/t^2 = 0$

$\boxed{a(t) = -2/t}$

La ec es: $x'' - 2/t\, x' + 2/t^2\, x = 0 \qquad I =]-\infty, 0[$ ó $]0, +\infty[$

2 Encuentra un sist. fundamental de soluciones de la ecuación $3x'' - 2x' - 8x = 0$ (Busca sol de la forma $e^{\lambda t}$). Por el método de variación de ctes la sol general de:

$$3x'' - 2x' - 8x = \cosh(t)$$

Polinomio característico:

$p(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda - 8 \qquad \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Las soluciones son $e^{2t}, e^{-4/3 t}$

La sol de la homogénea: $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-4/3 t} \; : C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Calculamos la sol particular por el método de variación de ctes:

$\{e^{2t}, e^{-4/3 t}\}$ es sist. fundamental

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-4/3 t} \\ 2e^{2t} & -4/3 e^{-4/3 t} \end{vmatrix} = -4/3 e^{2/3 t} - 2e^{2/3 t} = \frac{-10}{3} e^{2/3 t} \neq 0$$

$\Rightarrow W \neq 0 \Rightarrow$ es sist. fundamental

$$\begin{cases} \varphi_1 = e^{2t} & \varphi_1' = 2e^{2t} \\ \varphi_2 = e^{-4/3 t} & \varphi_2' = -4/3 e^{-4/3 t} \end{cases}$$

$x^*(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} c_1' \varphi_1 + c_2' \varphi_2 = 0 \\ c_1' \varphi_1' + c_2' \varphi_2' = b(t) \end{array}\right\}$$

$\varphi_1 = e^{2t}$ $\quad b(t) = \cosh(t)$

$\varphi_2 = e^{-4/3 t}$

$W = -10/3 \, e^{2/3 t}$

Por Cramer:

$$c_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ b(t) & \varphi_2' \end{vmatrix} = +\frac{3}{10} e^{-2/3 t} \cdot e^{-4/3 t} \cosh(t) =$$

$$= \frac{+3}{10} e^{-2t} \cosh(t) \Rightarrow c_1 = +\int_{t_0}^{t} 3/10 \, e^{-2t} \cosh(s) ds =$$

$$= +\frac{3}{10} \int e^{-2t} \cosh(t) dt = \begin{bmatrix} u = e^{-2t} & du = -2e^{-2t} dt \\ dv = \cosh(t) dt & v = \operatorname{senh}(t) \end{bmatrix}$$

$$= +3/10 \left[e^{-2t} \operatorname{senh}(t) + 2 \int e^{-2t} \operatorname{senh}(t) dt \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-2t} & du = -2e^{-2t} \\ dv = \operatorname{senh}(t) dt & v = \cosh(t) \end{bmatrix} =$$

$$= +3/10 \left[e^{-2t} \operatorname{senh}(t) + 2 \left[e^{-2t} \cosh(t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \int e^{-2t} \cosh(t) \right] \right]$$

$$c_1 = \underbrace{+3/10 \, e^{-2t} \operatorname{senh}(t) + 3/5 \, e^{-2t} \cosh(t)}_{A} + \frac{6}{5} c_1$$

$$\boxed{c_1 = \frac{-3}{2} e^{-2t} \operatorname{senh}(t) - 3e^{2t} \cosh(t)}$$

$$c_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b(t) \end{vmatrix}$$

$x^* = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

$x(t) = x^* + \alpha[x]$

4 se considera la ecuacion: $(1+t)x'' - (1+2t)x' + tx = te^t$

a) comprueba que $z_0(t) = e^t$ sol particular de la homogenea

b) $x = u z_0$

a) $z_0(t) = e^t \quad z_0'(t) = e^t \quad z_0''(t) = e^t$

Sustituimos en la homogenea:

$$(1+t)e^t - (1+2t)e^t + te^t = 0$$

$$e^t(\cancel{1} + \cancel{t} - \cancel{1} - 2t + \cancel{t}) = 0$$

$0 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ es solucion//

b) $x = u z_0(t)$

$$x' = u'e^t + ue^t$$

$$x'' = u''e^t + u'e^t + u'e^t + ue^t = u''e^t + 2u'e^t + ue^t$$

Sustituimos:

$$(1+t)(u''e^t + 2u'e^t + ue^t) - (1+2t)(u'e^t + ue^t) + tue^t = te^t$$

$$u''e^t + \cancel{2u'e^t} + \cancel{ue^t} - \cancel{u'e^t} - \cancel{ue^t} + tu''e^t + 2\cancel{tu'e^t} + \cancel{tue^t} - 2\cancel{tu'e^t} - 2\cancel{tue^t} +$$
$$+ \cancel{te^t u} = te^t \Rightarrow u''\cancel{e^t} + tu''\cancel{e^t} + u'\cancel{e^t} = t\cancel{e^t}$$

$$(1+t)u'' + u' = t$$

<u>cambio</u>

$u'' = v'$ $\quad (1+t)v' + v = t \rightarrow$ se resuelve y se deshacen los cambios

$u' = v$

7 $y' + y^2 + \alpha(t)y + \beta(t) = 0$

Dada una sol $y(t)$ def en el intervalo abierto $J \subset I$ se define

$$x(t) = c e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

Dem que $x(t)$ es solución de una ec. lineal y homogénea de segundo orden

$$x(t) = c e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

$$x'(t) = c \left(\int_{t_0}^{t} y(s)ds\right)' e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds} = c y(t) e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

$$x''(t) = c y'(t) e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds} + c y^2(t) e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

$$\left(y' = -y^2 - \alpha(t) y - \beta(t) \right)$$

$$x''(t) = c e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds} \left[-y^2 - \alpha(t) y - \beta(t) \right] + c y^2(t) e^{\int_{t_0}^{t} y(s)ds}$$

$$= -\alpha(t) \underbrace{y c e^{\int}}_{x'} - \beta(t) \underbrace{c e^{\int}}_{x}$$

$$\boxed{x'' = -\alpha(t) x' - \beta x} \quad \text{Ec de } 2^{\circ} \text{ orden}$$

8 Se considera la ecuación: $x'' + a(t)x = 0$ $\quad a \in C^1(I)$

a) Dados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ec. anterior, Demuestra que $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ es sol de la ec de tercer orden

$$z''' + 4a(t)z' + 2a'(t)z = 0$$

$$z = x_1 x_2 \rightarrow z' = x_1' x_2 + x_1 x_2'$$

$$z'' = x_1'' x_2 + x_1' x_2' + x_1' x_2' + x_1 x_2'' = x_1'' x_2 + 2x_1' x_2' + x_1 x_2''$$

$$z''' = x_1''' x_2 + \underline{x_1'' x_2'} + \underline{2(x_1'' x_2' + x_1' x_2'')} + x_1' x_2'' + x_1 x_2''' =$$

$$= x_1''' x_2 + x_1 x_2''' + 3x_1'' x_2' + 3x_1' x_2''$$

> Sustituimos: $z''' + 4a(t)z' + 2a'(t)z = 0$

Recordamos: $x'' + a(t)x = 0 \to x'' = -ax$

$x''' = -a'x - ax'$

$[y_1'''y_2 + y_1y_2''' + 3y_1''y_2' + 3y_1'y_2''] + 4a[y_1''y_2 + 2y_1'y_2' + y_1y_2''] +$

$+ 2a'[y_1y_2] = 0$

Sustituyo $x''' = -a'x - ax'$

9 Demuestra que las funciones $f_j(t) = |t-j|$ $j = 1, \dots, n$ son linealmente independientes en $I =]0,\infty[$.

(f_j derivables en $]0,1[$, $]1,2[$ ...)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) = 0 \quad \forall t \in]0,1[\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (i-t) = 0$$

> Derivando:

$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \to \lambda_1(1-t) + \lambda_2(2-t) + \dots + \lambda_n(n-t) = 0$$

$t \in (1,2)$ $\lambda_1(t-1) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(i-t) = 0$

$\lambda_i - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$

$\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0$

11 a) Dada la ecuación del oscilador armónico

$x'' + w^2 x = 0 \quad w > 0$, demuestra que las funciones $\cos wt$, $\operatorname{sen} wt$ forman un sist. fundamental.

$\varphi_1 = \cos wt \qquad \varphi_1' = w \operatorname{sen} wt \qquad \varphi_1'' = -w^2 \cos wt$

$\varphi_2 = \operatorname{sen} wt \qquad \varphi_2' = -w \cos wt \qquad \varphi_2'' = -w^2 \operatorname{sen} wt$

$$\begin{vmatrix} \cos wt & \operatorname{sen} wt \\ w \operatorname{sen} wt & -w \cos wt \end{vmatrix} = w \neq 0$$

$\Longrightarrow$ sist fundamental.

b) $x'' + w^2 x = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad \Omega > 0$

Dem. que admite una sol del tipo:

$x(t) = a \cos(\Omega t) + b \operatorname{sen}(\Omega t) \quad$ si $\Omega \neq w$

Deriv y sustituye.