MODELOS DE COMPUTACIÓN

RELACION DE PROBLEMAS 3

1. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o libres de contexto. Justificar las respuestas.

   - $\{0^i b^j \mid i = 2j \text{ ó } 2i = j\}$
   - $\{uu^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*, |u| \leq 1000\}$
   - $\{uu^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*, |u| \geq 1000\}$
   - $\{0^i 1^j 2^k \mid i = j \text{ ó } j = k\}$

2. Determinar qué lenguajes son regulares o libres de contexto de los siguientes:

   a) $\{u0u^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*\}$

   b) Números en binario que sean múltiplos de 4

   c) Palabras de $\{0,1\}^*$ que no contienen la cabcadena 0110

3. Determinar qué lenguajes son regulares y qué lenguajes son libres de contexto entre los siguientes:

   a) Conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ en las que cada 1 va precedido por un número par de ceros.

   b) Conjunto $\{0^i 1^2 j 0^{i+j} | i, j \geq 0\}$

   c) Conjunto $\{0^i 1^j 0^{i*j} | i, j \geq 0\}$

4. Determina si los siguientes lenguajes son regulares. Encuentra una gramática que los genere o un reconocedor que los acepte.

   a) $L_1 = \{0^i 1^j \,:\, j < i\}$.

   b) $L_2 = \{001^i 0^j 11 \,:\, i, j \geq 1\}$.

   c) $L_3 = \{010u \,:\, u \in \{0,1\}^*, u \text{ no contiene la subcadena } 010\}$.

5. Sea el alfabeto $A = \{0, 1, +, =\}$, demostrar que el lenguaje

$$ADD = \{x = y + z \,|\, x, y, z \text{ son números en binario, y } x \text{ es la suma de } y \text{ y } z\}$$

   no es regular.

6. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no:

a) $L = \{uvu^{-1}$ tal que $u, v \in \{0,1\}^*\}$.

b) L es el lenguaje sobre el alfabeto $\{0,1\}$ formado de las palabras de la forma $u0v$ donde u^{-1} es un prefijo de v.

c) L es el lenguaje sobre el alfabeto $\{0,1\}$ formado por las palabras en las que el tercer símbolo empezando por el final es un 1.

7. Obtener autómatas finitos determinísticos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$.

   - Palabras en las que el número de 1 es múltiplo de 3 y el número de 0 es par.
   - $\{(01)^{2i} \mid i \geq 0\}$
   - $\{(0^{2i}1^{2i}) \mid i \geq 0\}$

8. Dar una expresión regular para la intersección de los lenguajes asociados a las expresiones regulares $(\mathbf{01}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$ y $(\mathbf{10}+\mathbf{0})^*$. Se valorará que se construya el autómata que acepta la intersección de estos lenguajes, se minimice y, a partir del resultado, se construya la expresión regular.

9. Construir un Autómata Finito Determinista Minimal que acepte el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ de todas aquellas palabras que verifiquen simultaneamente las siguientes condiciones

   a) La palabra contiene un número par de a's

   b) La longitud de la palabra es un múltiplo de 3.

   c) La palabra no contiene la subcadena abc.

10. Encontrar un AFD minimal para el lenguaje

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

11. Para cada uno de los siguientes lenguajes regulares, encontrar el autómata minimal asociado, y a partir de dicho autómata minimal, determinar la gramática regular que genera el lenguaje:

    - a^+b^+
    - $a(a+b)^*b$

12. Considera la gramática cuyas producciones se presentan a continuación y donde el símbolo inicial es S:

$$S \rightarrow xN|x$$

$$N \rightarrow yM|y$$

$$M \rightarrow zN|z$$

- Escribe el diagrama de transiciones para ab AFD que acepte el lenguaje $L(G)$ generado por G.
- Encuentra una gramática regular por la izquierda que genere ese mismo lenguaje $L(G)$.
- Encuentra el AFD que acepte el complementario del lenguaje $L(G)$.

13. Determinar autómatas minimales para los lenguajes $L(M_1) \cup L(M_2)$ y $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$ donde,

- $M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta_1, q_0, \{q_2\})$ donde

δ_1	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_2	q_1	q_1	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

- $M_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta_2, q_0, \{q_2\})$

δ_2	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_1	q_2	q_2	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

14. Dado el conjunto regular representado por la expresion regular $a^*b^* + b^*a^*$, construir un autómata finito determinístico minimal que lo acepte.

15. Sean los lenguajes:

   - $L_1 = (01 + 1)^*00$
   - $L_2 = 01(01 + 1)^*$

   construir un autómata finito determinístico minimal que acepte el lenguaje $L_1 \setminus L_2$, a partir de autómatas que acepten L_1 y L_2.

16. Dados los alfabetos $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{0,1\}$ y el homomorfismo f de A^* en B^* dado por:

    - $f(0) = 00, \quad f(1) = 01, \quad f(2) = 10, \quad f(3) = 11$

    Sea L el conjunto de las palabras de B^* en las que el número de símbolos 0 es par y el de símbolos 1 no es múltiplo de 3. Construir un autómata finito determinista que acepte el lenguaje $f^{-1}(L)$.

17. Determinar una autómata finito determinístico minimal para el el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a,b,c\}$ dado por la expresión regular $b(a+b)^* + cb^*$.

18. Determinar si las expresiones regulares siguientes representan el mismo lenguaje:

    a) $(b + (c+a)a^*(b+c))^*(c+a)a^*$

    b) $b^*(c+a)((b+c)b^*(c+a))^*a^*$

    c) $b^*(c+a)(a^*(b+c)b^*(c+a))^*a^*$

    Justificar la respuesta.

19. Construir un autómata finito determinista minimal que acepte el conjunto de palabras sobre el alfabeto $A = \{0,1\}$ que representen números no divisibles por dos ni por tres.

20. Determinar una expresión regular para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    - Palabras en las que el tercer símbolo es un 0.
    - Palabras en las que el antepenúltimo símbolo es un 1.

    Construir un autómata finito minimal que acepte la intersección de ambos lenguajes.

21. Construir autómatas finitos minimales para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    a) Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{00,11\}^2$.

    b) Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{0011, 1100\}$.

22. - Construye una gramática regular que genere el siguiente lenguaje:

$$L_1 = \{u \in \{0,1\}^* \mid \text{ el número de 1's y el número de 0's en } u \text{ es par}\}$$

- Construye un autómata que reconozca el siguiente lenguaje:

$$L_2 = \{0^n 1^m \mid n \geq 1, m \geq 0, n \text{ múltiplo de } 3, m \text{ par}\}$$

- Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_1 \cup L_2)$.

23. Sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

    a) Construye una gramática regular que genere el lenguaje L_1 de las palabras u tales que:

    - Si $|u| < 5$ entonces el número de 1's es impar.
    - Si $|u| \geq 5$ entonces el número de 1's es par.
    - u tiene al menos un símbolo 1.

    b) Construye un autómata que reconozca el lenguaje L_2 dado por:

    $$L_2 = \{0^n 1^m \,:\, n \geq 0, m \geq 1, m \text{ es múltiplo de } 6\}$$

    c) Diseña el AFD mínimo que reconozca el lenguaje $(L_1 \cup L_2)$.

24. Encuentra para cada uno de los siguientes lenguajes una gramática de tipo 3 que lo genere o un autómata finito que lo reconozca:

    - $L_1 = \{u \in \{0, 1\}^* \,:\, u \text{ no contiene la subcadena } 'abab'\}$
    - $L_2 = \{0^i 1^j 0^k \,:\, i \geq 1, k \geq 0,\ i \text{ impar}, k \text{ múltiplo de } 3 \text{ y } j \geq 2\}$.

    Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_2 \cap L_1)$.

25. Dado el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, encuentra:

    a) Un AFD que reconozca las palabras en las que cada $'c'$ va precedida de una $'a'$ o una $'b'$.

    b) Una expresión regular que represente el lenguaje compuesto por las palabras de longitud impar en las que el símbolo central es una $'c'$.

    c) Una gramática regular que genere las palabras de longitud impar.

26. Construir autómatas finitos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$:

    a) L_1: palabras del lenguaje $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^*(\mathbf{b} + \mathbf{c})^*$.

    b) L_2: palabras en las que nunca hay una $'a'$ posterior a una $'c'$.

c) $(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$

¿Qué podemos concluir sobre L_1 y L_2?

27. Si $f : \{0,1\}^* \to \{a,b,c\}^*$ es un homomorfismo dado por $f(0) = aab, f(1) = bbc$, dar autómatas finitos deterministas minimales para los lenguajes L y $f^{-1}(L)$ donde $L \subseteq \{a,b,c\}^*$ es el lenguaje en el que el número de símbolos a no es múltiplo de 4.

28. Si L_1 es el lenguage asociado a la expresión regular $01(01+1)^*$ y L_2 el lenguaje asociado a la expresión $(1+10)^*01$, encontrar un autómata minimal que acepte el lenguaje $L_1 \setminus L_2$.

29. Sean los alfabetos $A_1 = \{a,b,c,d\}$ y $A_2 = \{0,1\}$ y el lenguaje $L \subseteq A_2^*$ dado por la expresión regular $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$, calcular una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$ donde f es el homomorfismo entre A_1^* y A_2^* dado por

$$f(a) = 01, \qquad f(b) = 1, \qquad f(c) = 0, \qquad f(d) = 00$$

30. Obtener un autómata finito determinista para el lenguaje asociado a la expresión regular: $(\mathbf{01})^+ + (\mathbf{010})^*$. Minimizarlo.

31. Dado el lenguaje L asociado a la expresión regular $(01 + 011)^*$ y el homomorfismo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ dado por $f(0) = 01, f(1) = 1$, construir una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$.

32. Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A_1 = \{0,1,2\}$:

    a) L dado por el conjunto de palabras en las que cada 0 que no sea el último de la palabra va seguido por un 1 y cada 1 que no sea el último símbolo de la palabra va seguido por un 0.

    b) Considera el homomorfimos de A_1 en $A_2 = \{0,1\}$ dado por $f(0) = 001$, $f(1) = 100$, $f(2) = 0011$. Dar una expresión regular para $f(L)$.

    c) Dar una expresión regular para LL^{-1}.

33. Dados los lenguajes

$$L_1 = \{0^i 1^j \mid i \geq 1,\ j \text{ es par y } j \geq 2\}$$

y

$$L_2 = \{1^j 0^k \mid k \geq 1,\ j \text{ es impar y } j \geq 1\}$$

encuentra:

a) Una gramática regular que genere el lenguaje L_1.

b) Una expresión regular que represente al lenguaje L_2.

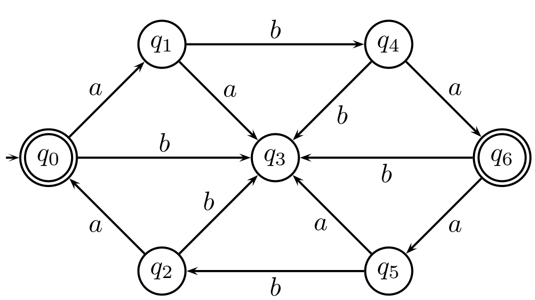
c) Un autómata finito determinista que acepte las cadenas de la concatenación de los lenguajes, $L_1 L_2$. Aplica el algoritmo para minimizar este autómata.

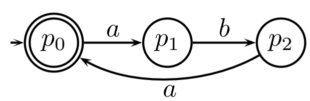
34. Determinar si los siguientes autómatas finitos aceptan el mismo lenguaje justificando la respuesta ($\rightarrow$ y $*$ indican el estado inicial y estado final respectivamente; los estados se indican con letras mayúsculas). Justificar la respuesta.

	0	1
→ A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

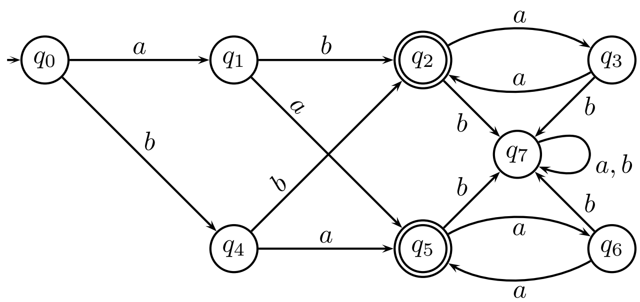
	0	1
→ A	G	C
B	B	A
C	D	B
*D	A	D
G	B	D

35. Comprobar si los siguientes autómatas son equivalentes:





36. Minimizar el autómata:



37. Si L_1, L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces la *mezcla perfecta* de estos lenguajes se define como el lenguaje

$$\{w \mid w = a_1 b_1 \dots a_k b_k \text{ donde } a_1 \dots a_k \in L_1, b_1 \dots b_k \in L_2, a_i, b_i \in A\}$$

Demostrar que si L_1 y L_2 son regulares, entonces la mezcal perfecta de L_1 y L_2 es regular.

38. Si L es un lenguaje, sea $L_{1/2}$ el conjunto de palabras que son las mitades de palabras de L, es decir $L_{1/2} = \{x : \exists y \in A^*, \text{ con } |x| = |y|, xy \in L\}$ y $L_{-1/3}$ el conjunto de palabras en las que se ha suprimido el tercio central de una palabra de L, es decir $L_{-1/3} = \{xz : \exists y \in A^* \text{ con } |x| = |y| = |z|, xyz \in L\}$.

Demostrar que si L es regular, entonces $L_{1/2}$ también lo es, pero que $L_{-1/3}$ no es necesariamente regular.