Relación TEMA 2

Relación de ejercicios de vectores aleatorios y discretos: obtención de distribuciones marginales y condicionadas, distribución del mínimo y del máximo, momentos, etc..

---

1. Estudiar si la siguiente función es función de distribución de un vector aleatorio bidimensional:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x+2y<1 \\ 1 & \text{si} \quad x+2y \geq 1 \end{cases}$$

2. Asociadas al experimento aleatorio de lanzar un dado y una moneda no cargados, se define la variable X como el valor del dado y la variable Y, que toma el valor 0 si sale cara en la moneda, y 1 si sale cruz. Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución del vector aleatorio (X,Y).

3. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$X \vert Y$	0	1	2
0	$1/3$	$1/12$	$1/24$
1	$1/6$	$1/24$	$1/48$
2	$5/22$	$5/88$	$5/176$

Calcular la función de distribución del vector (X,Y) en los puntos $(0,0);(0,2);(1,1)$ y $(2,1)$, y la probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles.

4. La función de densidad del vector aleatorio (X,Y), donde X denota los Kg. de naranjas, e Y los Kg. de manzanas vendidos al día en una frutería está dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{400}; \quad 0<x<20; 0<y<20.$$

Determinar la función de distribución de (X,Y) y la probabilidad de que en un día se vendan, entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos.

5. La renta, X, y el consumo, Y, de los habitantes de una población, tienen por funciones de densidad

$$f_X(x) = 2-2x; \quad 0<x<1; f(y/x) = \frac{1}{x} \quad 0<y<x.$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y) y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

6. Una gasolinera tiene Y miles de litros en su depósito de gasóleo al comienzo de cada semana. A lo largo de una semana se venden X miles de litros del citado combustible, siendo la función de densidad conjunta de (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{1}{8} \quad 0<x<y<4.$$

Se pide:

a) Probar que $f(x,y)$ es función de densidad y obtener la función de distribución.

b) Probabilidad de que en una semana se venda más de la tercera parte de los litros de que se dispone al comienzo de la misma.

c) Si en una semana se han vendido 3.000 litros de gasóleo, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana hubiese entre 3.500 y 3.750 litros de combustible?

7. Sea una urna con 15 bolas rojas, 10 negras y 25 blancas. Se extraen 10 con reemplazamiento y al azar y se considera la variable aleatoria (X,Y) donde X es el número de bolas rojas, e Y es el número de bolas negras.

   a) Calcular la función masa de probabilidad conjunta del vector (X,Y).

   b) Calcular las funciones masa de probabilidad marginales de X e Y.

8. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x,y)=k, \quad (x,y)\in R,$$

   siendo R el rombo de vértices $(3,0);(0,2);(-3,0);(0,-2)$. Calcular k para que f sea una función de densidad. Hallar las distribuciones marginales y condicionadas.

9. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad:

$$f(x,y)=k, \quad x^2\leq y\leq 1, \quad \text{anulándose fuera del recinto indicado.}$$

   Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad.

   Calcular $P(X\geq Y)$.

   Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

10. Sea la función de densidad de probabilidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} k\left[\frac{xy}{2}+1\right] & 0<x<1,\ -1<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

   Calcular la función de distribución de probabilidad y las marginales.

11. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con función de densidad de probabilidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} k & 0<x+y<1;\ |y|<1; 0<x<1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

   Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad.

   Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

12. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con distribución de probabilidad uniforme sobre el triángulo de vértices $(0,0);(0,1);(1,1)$. Determinar la función de densidad de probabilidad, la función de distribución de probabilidad y las distribuciones marginales y condicionadas.

13. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1;\ x\geq 0,\ y\geq 0\}.$$

   Calcular la función de distribución conjunta.

   Calcular las funciones de densidad marginales.

   Calcular las funciones de densidad condicionadas.

14. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} k\left[\frac{xy}{2}+1\right] & 0<x<1,\ -1<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

   Se considera la transformación $Z=X-Y$, y $T=X+2Y$. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable transformada (Z,T).

15. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-x-y) & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X+2Y$, a partir del cálculo de la densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional transformada (Z,T), siendo $Z = X+2Y$, y $T = Y$.

16. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).

Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de

$$(Z,T) = (X+Y, X-Y)$$

Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).

Determinar la distribución de probabilidad de X/Y, XY, $\max(X,Y)$, y $\min(X,Y)$.

17. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional discreto, cuya función masa de probabilidad conjunta se calcula como el producto de las funciones masa de probabilidad marginales de X e Y. Las variables aleatorias X e Y se distribuyen según una Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcular la función de distribución de probabilidad marginal del máximo y del mínimo, así como la distribución conjunta del máximo y del mínimo.

18. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la densidad de probabilidad de las variables

$$Z = aX+bY, \quad T = \frac{X}{Y},$$

a partir de la densidad de probabilidad conjunta de

$$(Z,T) = (aX+bY, \frac{X}{Y}), \quad a,b>0.$$

19. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} ky^2 & -1<x\le y\le x^2<1; \quad x^2\le y\le x<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular k y obtener las funciones de distribución conjunta, marginales y condicionadas.

20. Sea (X,Y) un vector aleatorio, cuya función de densidad de probabilidad conjunta se calcula como producto de las funciones de densidad de probabilidad marginales de X e Y, siendo $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta del vector aleatorio

$$(Z,T) = (\min(X,Y), T), \quad T = \begin{cases} 0 & Y<X \\ 1 & X<Y. \end{cases}$$

21. Sea (X,Y) un vector aleatorio, cuya función de densidad de probabilidad conjunta se calcula como en el problema anterior, considerando $\lambda = \mu$. Calcular la distribución de probabilidad de $|X-Y|$, $\max(X,Y^3)$, y $\min(X^5,Y)$.

22. Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función masa de probabilidad

$$P(X=x,Y=y) = \frac{k}{2^{x+y}}, \quad x,y \in \mathbb{N}.$$

Calcular el valor de k para que la ecuación anterior defina la función masa de probabilidad de un v.a. bidimensional discreta.

Calcular las funciones masa de probabilidad marginales y condicionadas.

Calcular la función masa de probabilidad de $X+Y$ y $X-Y$.

23. El vector aleatorio (X,Y) se distribuye según una uniforme sobre el recinto:

$$R_1 = \{(x,y);\ 0 < x < y < 1\}$$

Calcular:

- Su función generatriz de momentos conjunta.
- Las distribuciones generatrices de momentos marginales.
- La covarianza de X e Y.