EjerciciosT1.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 1

? **1** En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ is la cantidad de materia memorizada a tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

2 Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

a) El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

b) El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

3 En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

4 Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes

$$a)\quad xy = k, \qquad b)\quad y = kx^4, \qquad c)\quad y = e^{kx}$$

Para resolver las ecuaciones que aparecen en b) y c) habrá que esperar a la siguiente lección.

5 Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

6 *a*) Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \quad \equiv \quad x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

b) Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

c) La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

7 Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0, s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada *tractriz*. Encuentre una ecuación diferencial para la misma (*indicación*: se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento).

8 Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0$$

entonces también cumple

$$(x')^2 + x^2 = c$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de $x'' + x = 0$.

9 Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = v_R + v_N \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = v_N \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

a) Explique cómo se ha obtenido este sistema

b) Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

10 Ecuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a la familia de funciones

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Idéntica cuestión para la familia $x = c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t$.

11 Dada la ecuación de Clairaut

$$x = tx' + \phi(x'),$$

encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

Se supone ahora que $\phi(x) = x^2$. Demuestre que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ también es solución. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

12 Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (seección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.

RELACIÓN - 1:

1 M cantidad total de materia a memorizar (*)
A(t) cantidad memorizada en el tpo t

$$A'(t) = \lambda (M - A(t))$$

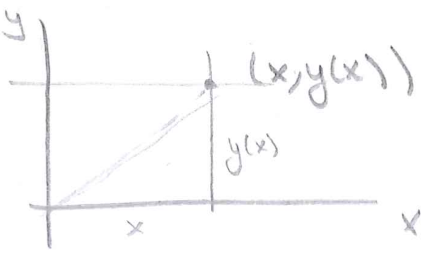
$$A'(t) = \underbrace{\lambda M}_{a} - \lambda A(t)$$

$$A'(t) = a - \lambda A(t) \qquad A'(t) = \lambda A(t)$$

$$A(t) = b e^{\lambda t}$$

$$A'(t) = a - b e^{\lambda t}$$

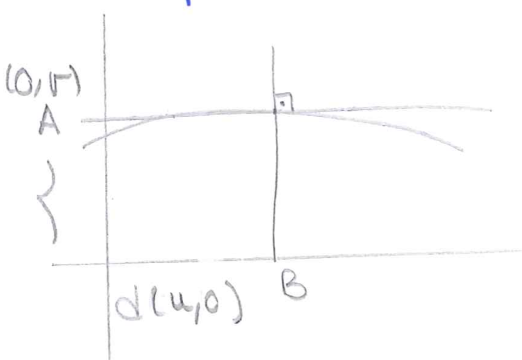
2 a) y(x) verifica que la pendiente de la recta tg en un pto es el cuadrado de la distancia del pto al origen.



$$\overset{\text{pend}}{y'(x)} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$$

$$\boxed{y'(x) = x^2+y^2}$$

b) Grafo de y(x) verifica que en cada pto que la distancia del origen al pto de corte de la recta tg con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al pto de corte de la recta normal con el eje de abcisas



$$d(A,O) = d(O,B)$$

A → Recta tg

$$r - y(x) = y'(x)(u - x) \Rightarrow u = 0$$

$$r - y(x) = y'(x)(-x)$$

$$\boxed{r = -y'(x)x + y(x)}$$

B → Recta normal

$$y'(x)(v-y(x)) = -(u-x) \qquad v=0$$

$$-y'(x)y(x) = -u + x$$

$$\boxed{u = x + y'y}$$

Imponemos $u = v$

$$-y'x + y = x + y'y$$

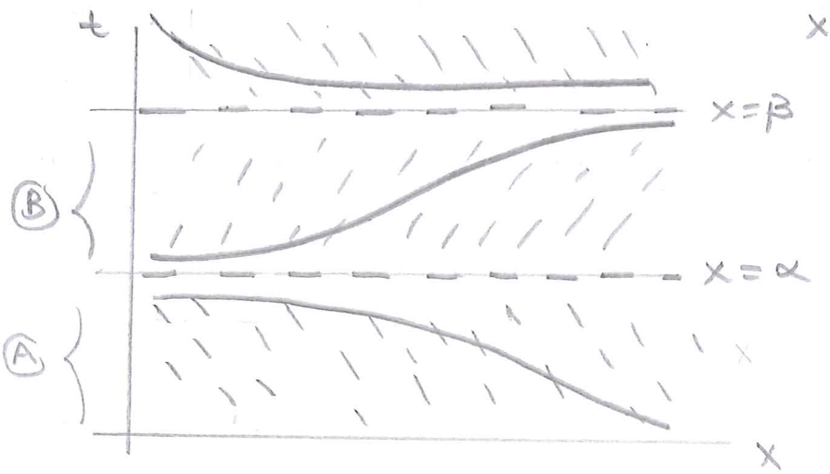
$$-y'x - y'y + y = x$$

$$y'(-x-y) + y = x$$

$$y' = \frac{x-y}{-x-y} = \boxed{\frac{y-x}{y+x} = y'}$$

3 $x' = k(x-\alpha)(\beta - x) \quad k>0, \quad \beta > \alpha > 0$

Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ $t \to \infty \Rightarrow x=0$



$$x' = k(x-\alpha)(\beta - x)$$

$$x' = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \alpha \\ x = \beta \end{matrix}$$

Pendiente $= 0 \Rightarrow$ Dir horizontal

(C) $\left\{ \begin{matrix} x > \beta \\ x > \alpha \end{matrix} \right\}$ $k(\underset{+}{x-\alpha})(\underset{-}{\beta - x})$ Pend neg

(A) si $\left. \begin{matrix} \beta > x \\ x < \alpha \end{matrix} \right\}$ $x' = k(\underset{-}{x-\alpha})(\underset{+}{\beta - x})$ ⊖ Pendiente neg

(B) si $\left. \begin{matrix} \beta > x \\ x > \alpha \end{matrix} \right\}$ $x' = k(\underset{+}{x-\alpha})(\underset{+}{\beta - x})$ ⊕ Pend ⊕

4 Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas:

a) $xy = K \qquad y = K/x \qquad y' = \frac{-K}{x^2}$

Eliminamos K $\Rightarrow y' = \frac{-xy}{x^2} = -y/x \qquad \Big| \quad y' = f(x,y)$

Ec tray ortogonal: $y' = \frac{x}{y} \qquad \Big| \quad \hat{y}' = -\frac{1}{f(x,y)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \int dy\, y = \int x\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C}$$

b) $y = kx^4 \; ; \; k = y/x^4$

$$y' = k4x^3 = \frac{y}{x^4}4x^3 \Rightarrow y' = \frac{4y}{x}$$

Ec trayectoria ortogonal

$$y' = -\frac{1}{\frac{4y}{x}} = -\frac{x}{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y} \Rightarrow \int 4y\,dy = -\int x\,dx$$

$$4\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \; ; \; \boxed{2y^2 = -\frac{x^2}{2} + C}$$

c) $y = e^{kx} \Rightarrow \ln(y) = kx \; ; \; k = \frac{\ln(y)}{x}$

$$y' = ke^{kx}$$

$$y' = \frac{\ln(y)}{x} e^{\ln(y)} = \frac{y\ln(y)}{x}$$

▷ Ec ortogonal

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{y\ln(y)} \; ; \; \int dy\, y\ln(y) = -\int x\,dx$$

$u = \ln(y) \quad du = \frac{1}{y}dy$

$dv = y\,dy \quad v = y^2/2$

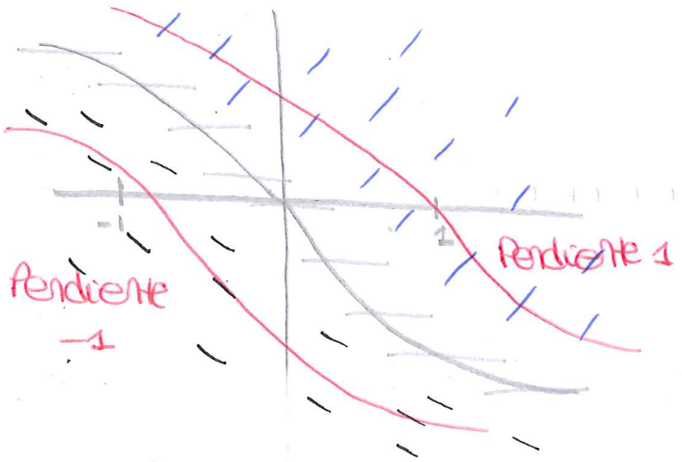
5 campo de direcciones de

$$x' = t + x^3 \qquad x(0) = 0$$

$x' = f(t,x)$

1.) Dibujamos $f(t,x)=0$ (curva donde las sol tienen deriv 0)

$t + x^3 = 0 \quad x(t) = -t^{1/3}$



nullclina => curva de pend = 0

$t+x^3 > 0$

$t+x^3 < 0$

como $(0,0) \in$ nullclina

$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$

como a la iz las pendientes son negativas y a la derecha posit

$\Rightarrow 0 =$ min local

$x'' = 1 + 3x^2 x'$

$x''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ min. local

¿Es global?

Sup que hay otra t_* tq $x'(t_*)=0$

$x''(t_*) = 1 + 3x(t_*)^2 \underset{0}{\underbrace{x'(t_*)}} = 1$

todos los ptos críticos son min locales

Existe un unico pto crítico $\Rightarrow$ global

c) $g(y, y') = 0$

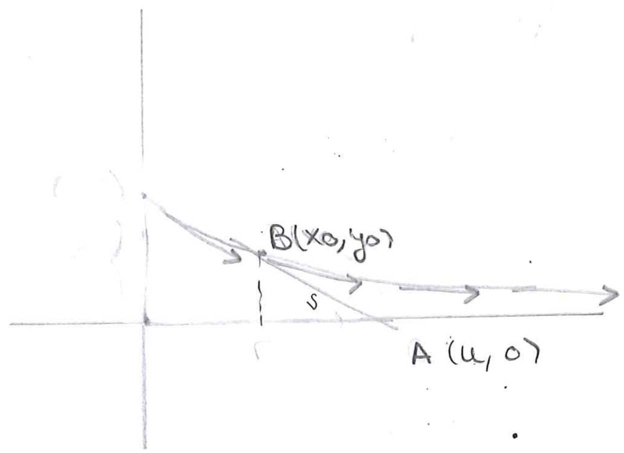
$$y'(2y+1) = -1 - x$$

$$x = -1 - y'(2y+1)$$

Sustituimos en C

$$g(y,y') \equiv (-1 - y'(2y+1))^2 + 2y^2 + 2(-1 - y'(2y+1)) + 2y - 1 = 0$$

7



(u, v)

Haz de rectas tangentes

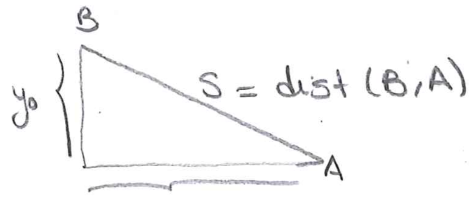
$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

A pertenece a la recta tangente y $v = 0$

$$-y_0 = y_0'(u - x_0) \qquad u = \frac{-y_0}{y_0'} + x_0$$

$$A = \left(\frac{-y_0}{y_0'} + x_0 ; 0\right)$$

$$B = (x_0, y_0)$$



$$\frac{-y_0}{y_0'} + x_0 - x_0 = \frac{-y_0}{y_0'}$$

$$S = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{-y_0}{y_0'}\right)^2}$$

$$s^2 = y_0^2 + \frac{(-y_0)^2}{(y_0')^2} \; ; \quad s^2 - y_0^2 = \frac{(-y_0)^2}{(y_0')^2} \; ; \quad y_0' = \sqrt{\frac{y_0^2}{s^2 - y_0^2}}$$

Como es $\forall (x_0, y_0) \in$ curva:

$$\boxed{y' = \sqrt{\frac{y}{s^2 - y^2}}}$$

6 a) Cuantos $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1$$

Dando su intervalo maximal de definición.

Resolvemos la ec.

$$\underbrace{2y^2}_{a} + \underbrace{2y}_{b} + \underbrace{2x + x^2 - 1}_{c} = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2\,(2x + x^2 - 1)}}{4\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x - 2x^2 + 2}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-2x^2 - 4x + 3}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{-2x^2 - 4x + 3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{-2x^2 - 4x + 3}}{2}$$

$$-2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8\cdot 3}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{-4} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$x \in \left]-1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}, -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right[$ para que sea derivable

b) Usando la deriv. implícita encuentre e.d. de la forma $y' = f(x,y)$ que admita como sol y_1 e y_2.

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1$$

Derivamos de forma implic.

$$\frac{dy}{dx} \equiv 2x + 4y\cdot y' + 2 + 2y' = 0$$

$$y'(4y + 2) = -2x - 2$$

$$y' = \frac{-2x - 2}{4y + 2} = \boxed{\frac{-1 - x}{2y + 2}}$$

$$2y + 2 = 0$$
$$y = -1 \qquad y \in \left]-\infty, -1\right[\text{ ó } \left]-1, +\infty\right[$$

18 $x(t)$ es una sol de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0$$

Entonces se cumple $(x')^2 + x^2 = c$ para alguna cte $c \in \mathbb{R}$

Encuentre una sol de $(x')^2 + x^2 = c$ que no sea sol de $x'' + x = 0$

Sup $x(t)$ sol y veamos que $x'' + x = 0$ lo es

$$\cancel{2}x'x'' + \cancel{2}xx' = 0$$

$$x'\underbrace{(x'' + x)}_{0} = 0$$

como acabamos de ver $(x')^2 + x^2$ tiene deriv $= 0$

$$\Rightarrow (x')^2 + x^2 = c$$

$\boxed{x(t) = 1}$ $c = 1$

$$(1')^2 + 1^2 = 1$$

$$1'' + 1 \neq 0$$