EjerciciosT52.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 6

1 En este ejercicio probaremos un resultado sobre independencia lineal para funciones que son productos de polinomios y exponenciales. Lo haremos en tres pasos:

a) Demuestra que si $p(t)$ es un polinomio no nulo, $\alpha \neq 0$ es un número y $m = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\frac{d^m}{dt^m}\left[p(t)e^{\alpha t}\right] = q(t)e^{\alpha t},$$

donde $q(t)$ es otro polinomio no nulo.

b) Se supone que $p_1, \ldots, p_r$ son polinomios y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números distintos entre sí($\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$). Entonces si la identidad

$$p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + p_r(t)e^{\alpha_r t} = 0$$

es válida en algún intervalo I se cumplirá

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \cdots \equiv p_r \equiv 0.$$

c) Dados números naturales $n_1, \ldots, n_r$ las funciones

$$e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \ldots, t^{n_1}e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_r t}, te^{\alpha_r t}, \ldots, t^{n_r}e^{\alpha_r t}$$

son linealmente independientes en I.

2 Se considera el operador diferencial

$$L[y] = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ son números reales.

a) Demuestra, para cada $m \geq 0$, la identidad

$$L\left[t^m e^{\lambda t}\right] = \left[\sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} t^{m-h} p^{(h)}(\lambda)\right] e^{\lambda t}$$

donde $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

b) Utiliza esta identidad y el ejercicio anterior para obtener un sistema fundamental de la ecuación $L[y] = 0$. Se distinguirá el caso de raíces complejas.

c) Resuelve la ecuación

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

d) Se pasa la ecuación del apartado anterior a un sistema $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^5$, por el cambio $x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', x_4 = y''', x_5 = y^{(4)}$. Diseña dos posibles estrategias para calcular e^{At}. ¿Cuál sería más conveniente?.

3 ¿Es cierta la identidad $e^A e^B = e^{A+B}$ para matrices arbitrarias $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$?

4 Calcula e^A para las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

5 Dada $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se considera el sistema $x' = Ax$.

a) Prueba que $e^{(t-t_0)A}$ es matriz fundamental principal en $t = t_0$.

b) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

c) Se considera ahora el problema de valores iniciales $x' = Ax + b(t),\ x(t_0) = x_0$ donde $b : I \to \mathbb{R}^N$ es una función continua. Prueba que la solución está dada por la fórmula

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

6 Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ define $\mathrm{sen}(A)$ y $\cos(A)$. Calcula $\cos\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

RELACIÓN-6: relación-6

4 calcula e^A para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & b_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$x' = Ax \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}$

▷ Diagonalizamos A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{vmatrix} = a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + b^2 =$$
$$= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2+b^2)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{-b^2}}{1} \Rightarrow \lambda = a \pm bi \quad \text{Raíces complejas}$$

$\underline{\lambda = a + bi}$

$$\begin{pmatrix} -ib & b \\ -b & -ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = a - bi}$

$$\begin{pmatrix} ib & b \\ b & ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad |P| = -i - i = -2i$

$$P^{-1} = \frac{-1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/i \\ 1 & -1/i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}$$