Relación de ejercicios del Tema 5

Ejercicio 1.-

El 60% de los clientes de un almacén paga con dinero, el 30% con tarjeta y el 10% con cheques. Calcular la probabilidad de que de 10 clientes, 5 paguen con dinero, 2 con tarjeta y 3 con cheques.

Consideramos X_1 = Nº de clientes que pagan con dinero $\to p_1 = 0'6$

X_2 = " " " " tarjeta $\to p_2 = 0'3$

X_3 = " " " " " cheques $\to p_3 = 0'1$

Es evidente que $(X_1, X_2, X_3) \to M_3(10, 0'6, 0'3, 0'1)$ y

nos piden $P[X_1 = 5, X_2 = 2, X_3 = 3] = \frac{10!}{5!\cdot 2!\cdot 3!} 0'6^5 \cdot 0'3^2 \cdot 0'1^3 =$

(f.m.p. multinomial)

$\boxed{= 0'0176}$

Relación de ejercicios del Tema 5

Ejercicio 2.

Dados $X_1, \dots, X_k$ v.a. independientes con $X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ $\forall i=1,\dots,k$ y sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, probar que $(X_1, \dots, X_{k-1})$ con $n = \sum_{i=1}^{k} X_i$ sigue una distribución multinomial.

Dado que el modelo de Poisson, bajo el supuesto de independencia, es reproductivo, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$$

Por tanto $P\left[\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right] = e^{-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i} \cdot \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^n}{n!} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^n}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i}$

Como nos piden la distribución de $(X_1, \dots, X_{k-1})$ con $n = \sum_{i=1}^{k} X_i$, realmente es una distribución condicionada. Obtengamos su f.m.p.

$$P\left[X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1} / n = \sum_{i=1}^{k} X_i\right] = \frac{P\left[X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, n = \sum_{i=1}^{k} x_i\right]}{P\left[n = \sum_{i=1}^{k} X_i\right]} =$$

$$= \frac{P\left[X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, X_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right]} =$$

$$\underset{\substack{(X_1,\dots,X_k \\ \text{son independientes})}}{=} \frac{P[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P[X_{k-1} = x_{k-1}] \cdot P\left[X_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right]} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_{k-1}} \cdot \dfrac{\lambda_{k-1}^{x_{k-1}}}{x_{k-1}!} \cdot e^{-\lambda_k} \dfrac{\lambda_k^{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}}{\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)!}}{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^n}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda_k^{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}}{\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)!} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} e^{-\lambda_i} \dfrac{\lambda_i^{x_i}}{x_i!}}{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^n}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i}} = \frac{n! \prod_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{x_i} \cdot \lambda_k^{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}}{\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)! \prod_{i=1}^{k-1} x_i! \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^n} =$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdots x_{k-1}!\,\left(n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)!}\;\frac{\prod_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{x_i}\cdot\lambda_k^{\,n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i}}{\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^n} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \bullet \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^n = \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i} = \prod_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^{x_i}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{x_k} = \\ \qquad = \prod_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^{x_i}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k-1}x_i} \\ \bullet\ \lambda_k = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i \end{array}\right]$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdots x_{k-1}!\,\left(n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)!}\;\frac{\prod_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{x_i}}{\prod_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^{x_i}}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k-1}x_i}}{\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k-1}x_i}} =$$

$$= \frac{n!}{x_1!\cdots x_{k-1}!\,\left(n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)!}\cdot\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j}\right)^{x_i}\cdot\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}\right)^{n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i}$$

Si denotamos por $p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j}$ $\forall i=1,\dots,k-1$, hemos deducido que

$$P\left[X_1=x_1,\dots,X_{k-1}=x_{k-1} \Big/ \sum_{i=1}^{k}X_i=n\right] = \frac{n!}{x_1!\cdots x_{k-1}!\,\left(n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)!}\prod_{i=1}^{k-1}p_i^{x_i}\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}p_i\right)^{n-\sum_{i=1}^{k-1}x_i}$$

que es la expresión de la f.m.p. de una multinomial de parámetros n y $p_1,\dots,p_{k-1}$.

En conclusión:

$$\boxed{(X_1,\dots,X_{k-1}) \Big/ \sum_{i=1}^{k}X_i=n \rightsquigarrow M_{k-1}(n, p_1,\dots,p_{k-1})}$$

Ejercicio 3:

En un hotel hay 3 salas de TV que en un instante determinado, cada TV, puede sintonizar uno de 6 canales distintos, A, B, C, D, E y F, cada uno, con probabilidades $1/36$, $3/36$, $5/36$, $7/36$, $9/36$ y $11/36$ respectivamente, con independencia unas TV de otras.

(a) P[En un instante dado sintonizar B, D, y E]

(b) P[En un instante dado haya un TV sintonizando B y otro E]

(c) P[Los tres TV sintonizan F en un instante dado]

(d) P[En un instante dado no están sintonizados A, B, C ni D]

Denotamos X_A = Está sintonizado el canal A en la sala $\to p_A = 1/36$

X_B = " " B " " $\to p_B = 3/36$

X_C = " " C " " $\to p_C = 5/36$

X_D = " " D " " $\to p_D = 7/36$

X_E = " " E " " $\to p_E = 9/36$

X_F = " " F " " $\to p_F = 11/36$

Es evidente que $(X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F) \rightsquigarrow M(\underbrace{n}_{n=3 \text{ "nº de salas TV"}}; p_A, p_B, p_C, p_D, p_E, p_F)$

(a) Consideramos $(X_B, X_D, X_E) \rightsquigarrow M_3(3, p_B, p_D, p_E)$ y nos pide

$$P[X_B=1, X_D=1, X_E=1] \underset{\text{(f.m.p. multinomial)}}{=} \frac{3!}{1!\,1!\,1!\,0!}\left(\frac{3}{36}\right)^1\cdot\left(\frac{7}{36}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{36}\right)^1\cdot\left(1-\frac{19}{36}\right)^{3-3} \boxed{= 0'0243}$$

(b) Consideramos $(X_B, X_E) \rightsquigarrow M_2(3, p_B, p_E)$ y nos piden

$$P[X_B=1, X_E=1] = \frac{3!}{1!\cdot 1!\,(3-2)!}\left(\frac{3}{36}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{36}\right)^1\left(1-\frac{12}{36}\right)^{3-2} \boxed{= 0'0833}$$

(c) Consideramos $X_F \rightsquigarrow M_1(3, p_F) = B(3, p_F)$ y nos piden

$$P[X_F=3] = \frac{3!}{3!\cdot 0!}\left(\frac{11}{36}\right)^3\cdot\left(1-\frac{11}{36}\right)^{3-3} \boxed{= 0'0285}$$

(d) Consideramos $(X_A, X_B, X_C, X_D) \rightsquigarrow M_4(3, p_A, p_B, p_C, p_D)$ y nos piden

$$P[X_A=0, X_B=0, X_C=0, X_D=0] = \frac{3!}{0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\, 3!}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{3}{36}\right)^0\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{5}{36}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{36}\right)^0\left(1-\frac{16}{36}\right)^{3-0} = \left(\frac{26}{36}\right)^3 \boxed{= 0'3767}$$

Ejercicio 4

Se generan números aleatorios del 0 al 9 de forma independiente e igual probabilidad. Si se generan 12 números aleatorios:

(a) P[aparezcan 6 veces el 0, 4 veces el 1 y 2 veces el 2]

(b) Número esperado de veces que aparece el 0.

(c) P[aparezca 4 veces el 1 y 3 veces el 6]

Consideramos la v.a. X_i := Nº de veces que aparece el dígito i $\forall i = 0, \ldots, 9$

Como son equiprobables $p_i = 1/10$ $\forall i = 0, \ldots, 9$

(a) Consideramos el vector $(X_0, X_1, X_2) \rightsquigarrow M_3(12, 1/10, 1/10, 1/10)$

y nos piden $P[X_0 = 6, X_1 = 4, X_2 = 2] = \underbrace{\frac{12!}{6!4!2!0!}}_{\text{f.m.p. multinomial}} \frac{1}{10}^6 \cdot \frac{1}{10}^4 \cdot \frac{1}{10}^2 \cdot \frac{7}{10}^0$

$= 0'0000001386 = \boxed{1'386 \cdot 10^{-8}}$

(b) Nos piden $E[X_0]$

Como $X_0 \rightsquigarrow B(12, 1/10) \Rightarrow \boxed{E[X_0] = \frac{12}{10} = 1'2}$ aproximadamente se esperan 2 veces.

(c) Consideramos el vector $(X_1, X_6) \rightsquigarrow M_2(12, 1/10, 1/10)$ y

nos piden $P[X_1 = 4, X_6 = 3] = \frac{12!}{4! \cdot 3! \, (12-7)!} \frac{1}{10}^4 \cdot \frac{1}{10}^3 \cdot \frac{8}{10}^5 =$

$= 0'000908 = \boxed{9'08 \cdot 10^{-4}}$

Ejercicio 5.-

Sea $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función de distribución continua, y sean α_1 y α_2 números reales tales que $F(\alpha_1) = 0'3$ y $F(\alpha_2) = 0'8$. Se seleccionan 25 observaciones independientes de F. Obtener la probabilidad de que 6 valores sean menores que α_1, 10 valores estén entre α_1 y α_2 y 9 sean mayores que α_2.

Consideramos $X_1 =$ Nº de valores menores que $\alpha_1 \rightarrow p_1 = F(\alpha_1) = 0'3$

$X_2 =$ " " entre α_1 y $\alpha_2 \rightarrow p_2 = P[\alpha_1 \leq X_2 \leq \alpha_2] = F(\alpha_2) - F(\alpha_1) =$
$= 0'8 - 0'3 = 0'5$

$X_3 =$ Nº " mayores que $\alpha_2 \rightarrow p_3 = P[X_3 > \alpha_2] = 1 - F(\alpha_2) =$
$= 1 - 0'8 = 0'2$

Es evidente que $(X_1, X_2, X_3) \rightsquigarrow M_3(25; 0'3, 0'5, 0'2)$ y nos piden calcular $P[X_1 = 6, X_2 = 10, X_3 = 9] =$

$$= \frac{25!}{6!\,10!\,9!}\, 0'3^6 \cdot 0'5^{10} \cdot 0'2^9 \boxed{= 0'0059}$$

(f.m.p. multinomial)

Ejercicio 7.-

el 16% de los estudiantes son de primer grado, el 14% de segundo grado, el 38% de penúltimo grado y el 32% de último grado. Se seleccionan al azar $n=15$ estudiantes.

(a) P[al menos 8 sean de 1er grado ó 2º grado]

(b) P[al menos 7 sean de 1er ó 2º grado y al menos 7 de último grado]

Denotamos, X_1 = Número de estudiantes de 1er grado $\to p_1 = 0'16$

X_2 = " " " 2º " $\to p_2 = 0'14$

X_3 = " " " 3er " $\to p_3 = 0'38$

X_4 = " " " 4º " $\to p_4 = 0'32$

Es evidente que $(X_1, X_2, X_3, X_4) \to M_4(15, p_1, p_2, p_3)$

(a) La variable $X_1 + X_2$ contará cuantos son de 1er ó 2º grado.

Está claro que $X_1 + X_2 \rightsquigarrow B(15, p)$ donde $p = P[\text{1er grado ó 2º grado}]$

Como $X_i\ \forall i = 1, \ldots, 4$ son independientes (un alumno no puede estar en más de un curso)

se tiene que $p = P[\text{1er grado}] + P[\text{2º grado}] = 0'16 + 0'14 = 0'3$.

Por tanto $X_1 + X_2 \to B(15, 0'3)$.

así pues $P[X_1 + X_2 \geq 8] = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} 0'3^k\, 0'7^{15-k} =$

$$= \sum_{k=8}^{15} \frac{15!}{k!\,(15-k)!}\, 0'3^k \cdot 0'7^{15-k} \boxed{= 0'05}$$

(b) Consideramos $(X_1 + X_2, X_4) \rightsquigarrow M_2(15, p, p_4) = M_2(15, 0'3, 0'32)$

Nos piden $P[X_1 + X_2 \geq 7, X_4 \geq 7] =$

$$\underset{\text{f.m.p. multinomial}}{=} \sum_{\substack{x_1+x_2=7 \\ (x_1+x_2+x_4 \leq 15)}}^{15} \sum_{x_4=7}^{15} \frac{15}{(x_1+x_2)!\, x_4!\, (15-x_1-x_2-x_4)!}\, 0'3^{x_1+x_2} \cdot 0'32^{x_4} \cdot (1-0'3-0'32)^{(15-(x_1+x_2+x_4))} \boxed{= \text{¡calculadora y marcha!}}$$

Ejercicio 8

Un juego de azar tiene tres posibles resultados A, B y C con probabilidades 0'8, 0'15 y 0'05, respectivamente. Se realiza el juego 5 veces de forma independiente.

Calcular P[Nunca obtenga el resultado C ni más de una vez el B]

Consideramos X_1 = Nº de veces que obtiene el resultado A $\to p_1 = 0'8$

X_2 = Nº de veces que obtiene el resultado B $\to p_2 = 0'15$

X_3 = Nº de veces que obtiene el resultado C $\to p_3 = 0'05$

Es evidente que $(X_1, X_2, X_3) \rightsquigarrow M_3(5; 0'8, 0'15, 0'05)$ y nos piden $P[X_3 = 0, X_2 \leq 1]$

Sabemos que $(X_3, X_2) \rightsquigarrow M_2(5, 0'05, 0'15)$, por tanto

$$P[X_3 = 0, X_2 \leq 1] \underset{\substack{\text{(f.m.p. multinomial)}\\ x_3=0 \text{ y } x_2=0,1}}{=} \sum_{x_2=0}^{1} \frac{5!}{0!\, x_2!\, (5-x_2)!} 0'05^0 \cdot 0'15^{x_2} (1-0'05-0'15)^{5-x_2} =$$

$$= \underbrace{\frac{5!}{0!\,0!\,5!} 0'05^0 \cdot 0'15^0 \cdot 0'8^5}_{x_2=0\ (x_3=0)} + \underbrace{\frac{5!}{0!\,1!\,4!} 0'05^0 \cdot 0'15^1\, 0'8^{5-1}}_{x_2=1\ (x_3=0)} =$$

$$= 0'32768 + 0'3072 = \boxed{0'6349}$$

Ejercicio 9

Sea $(X,Y) \rightsquigarrow N_2(\mu, \Sigma)$ con $\mu = (\overset{\mu_1}{5}, \overset{\mu_2}{8})$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & 7'2 \\ 7'2 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 = 16 \\ \sigma_2^2 = 9 \\ \rho = 0'6 \end{pmatrix}$

Calcular $P[5 < Y < 11 / X = 2]$.

En la normal bivariante sabemos que las distribuciones condicionadas son normales unidimensionales, de hecho,

$$Y/X=2 \rightsquigarrow N\left(\underset{8}{\mu_2} + \underset{0'6}{\rho} \frac{\overset{3}{\sigma_2}}{\underset{4}{\sigma_1}} (\underset{2}{x_1} - \underset{5}{\mu_1}),\ \underset{9}{\sigma_2^2}(1-\rho^2)\right) = N(6{,}65\,;\, 5'76)$$

Por tanto

$$P[5 < Y < 11 / X=2] \underset{\text{(Tipificamos)}}{=} P\left[\frac{5-6'65}{\sqrt{5'76}} \le \underset{N(0,1)}{Z} \le \frac{11-6'65}{\sqrt{5'76}}\right] =$$

(Recordar el Tema 1)

$$= P[-0'6875 \le Z \le 1'8125] = P[Z \le 1'8125] - P[Z \le -0'6875] =$$

$$= P[Z \le 1'81] - (1 - P[Z \le 0'68]) = 0'96485 - (1 - 0'75175) =$$

(Redondeo al 2º decimal por utilizar la tabla $N(0,1)$ suministrada en PRADO en el Tema 1)

$$\boxed{= 0'7166}$$

Ejercicio 10.-

Calcular la distribución de probabilidad de $X+Y$ para $(X,Y) \sim N_2\left((\mu_1,\mu_2),\Sigma\right)$ con $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

Sabemos que la distribución de probabilidad de una v.a. queda determinada por su F.G.M (si existe).

Calculémosla:

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{tX+tY}\right] = M_{X,Y}(t,t) = e^{\overbrace{t(\mu_1+\mu_2)}^{\mu} + \frac{t^2}{2}\overbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)}^{\sigma^2}}$$

En consecuencia $\boxed{X+Y \sim N(\mu,\sigma^2) \text{ con } \begin{cases} \mu = \mu_1+\mu_2 \\ \sigma^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}}$

Ejercicio 14

Determinar una condición sobre θ de modo que las variables $W = X\cos\theta + Y\operatorname{sen}\theta$ y $Z = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta$ sean independientes siendo $(X,Y) \sim N_2(\mu, \Sigma)$

Consideramos $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{si } \operatorname{sen}\theta \neq 0,\ \cos\theta \neq 0}$

Está claro que $(W,Z) = (X,Y)A$ y $\det A = -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \neq 0$, de modo que el rango de A es máximo.

Por tanto $(W,Z) \sim N_2(\mu A, A^t \Sigma A)$

Como (W,Z) sigue una normal bidimensional, sabemos que los conceptos de independencia e incorrelación son equivalentes. Por tanto para buscar la condición de independencia es suficiente con suponer que $\operatorname{Cov}(W,Z) = 0$

Calculamos su matriz de covarianzas $A^t \Sigma A$

$$A^t\Sigma A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2\cos\theta + \rho\sigma_1\sigma_2\operatorname{sen}\theta & \sigma_1^2\cos\theta - \rho\sigma_1\sigma_2\operatorname{sen}\theta \\ \rho\sigma_1\sigma_2\cos\theta + \sigma_2^2\operatorname{sen}\theta & \rho\sigma_1\sigma_2\cos\theta - \sigma_2^2\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2\cos^2\theta + \rho\sigma_1\sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho\sigma_1\sigma_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\theta & \sigma_1^2\cos^2\theta - \rho\sigma_1\sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho\sigma_1\sigma_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\theta \\ \underbrace{\sigma_1^2\cos^2\theta - \cancel{\rho\sigma_1\sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \cancel{\rho\sigma_1\sigma_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} - \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\theta}_{= \operatorname{cov}(W,Z)} & \text{¡No me hace falta!} \end{pmatrix}$$

Por tanto $\operatorname{cov}(W,Z) = \sigma_1^2\cos^2\theta - \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right| = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arctg}(\sigma_1/\sigma_2)}$$

Ejercicio 12

Sea $(X;Y) \rightsquigarrow N_2(\mu, \Sigma)$ de modo que $\mu = (2/3, 2)$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 9$ y la curva de regresión de Y sobre X es $y = \frac{3(x+2)}{4}$. Obtener el coeficiente de correlación y calcular $P[X > 3 / y = 3]$

- Como $(X;Y) \rightsquigarrow N_2(\mu, \Sigma)$ entonces $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ell\sigma_1\sigma_2 \\ \ell\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6\ell \\ 6\ell & 9 \end{pmatrix}$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y = \mu_2 + \ell \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

Sustituyendo: $y = 2 + \frac{3}{2}\ell\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{3}{2}\ell x - \ell \Rightarrow y = \frac{3}{2}\ell x + 2 - \ell$

Como nos dicen que $y = \frac{3(x+2)}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}$ igualamos coeficientes y obtenemos que:

$$\frac{3}{2}\ell = \frac{3}{4} \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}$$

$$2 - \ell = \frac{6}{4} \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ ¡cierto}$$

Por tanto el coeficiente de correlación es $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$

De modo que $(X,Y) \rightsquigarrow N_2\left((2/3, 2), \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\right)$

- $P[X > 3 / y = 3] = ?$

Es una probabilidad condicionada.

Sabemos que $X/y=3 \rightsquigarrow N\left(\underset{2/3}{\mu_1} + \underset{1/2}{\ell}\, \frac{\overset{2}{\sigma_1}}{\underset{3}{\sigma_2}}(\overset{3}{y} - \overset{2}{\mu_2}),\ \underset{4}{\sigma_1^2}(1-\ell^2)\right) = \underline{\underline{N(1,3)}}$

Por tanto:

$$P[X > 3 / y = 3] \underset{(\text{Tipifico})}{=} P\left[\underset{N(0,1)}{Z} > \frac{3-1}{\sqrt{3}}\right] = P[Z > 1'16] = 1 - P[Z \leq 1'16] =$$

$$\underset{[\text{Tabla } N(0,1)]}{=} 1 - 0'87698 \boxed{= 0'12302}$$

Ejercicio 13

Sea $(X,Y) \sim N(\mu, \Sigma)$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que $X+Y$ y $X-Y$ sean independientes.

Se sigue la misma filosofía que para el ejercicio 11

Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Está claro que si denominamos $U = X+Y$ y $V = X-Y$, se tiene que $(U,V) = (X,Y)A$ y además el rango de A es 2 (máximo) porque $\det A = -2 \neq 0$.

Por tanto $(U,V) \sim N_2(\mu A, A^t \Sigma A)$. En este contexto, U y V son independientes $\Leftrightarrow$ Incorrelados $\Leftrightarrow \operatorname{cov}(U,V) = 0$

Obtengamos la expresión de la matriz de covarianzas de (U,V)

$$A^t \Sigma A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 & \rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 & \rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 & \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_U^2 & \operatorname{cov}(U,V) \\ \operatorname{cov}(U,V) & \sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\boxed{X+Y \text{ y } X-Y \text{ son independientes}}$ si y sólo si $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\boxed{(X \text{ e } Y \text{ tienen igual varianza})}$

Ejercicio 14.-

Sea $(X,Y) \sim N_2(\mu, \Sigma)$ con las siguientes características:

(i). Mediana de X es 1

(ii). $Var(X) = Var\, Y$

(iii). $\rho_{X,Y} = 0'5$

(iv). $ECM = 1$

(v). $P[X \leq -1 / Y=1] = 0'06681$

Determinar μ y Σ donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var\, X & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var\, Y \end{pmatrix}$

De (i) $\Rightarrow \boxed{\mu_1 = 1}$ p.q en la normal univariante $M_e = M_o = \mu$

De (ii) y (iii) $\Rightarrow \rho_{X,Y} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var X \cdot Var Y}} \Leftrightarrow \boxed{cov(X,Y) = 0'5 \cdot Var(X)}$

(var X = Var Y)

De (iv) $\Rightarrow ECM = Var\, X\,(1 - \rho^2) = 1 \Rightarrow Var\, X = \dfrac{1}{0'75} \Rightarrow \boxed{Var[X] = 1'\hat{3}}$

¡Da igual la recta de regresión p.q $Var(X) = Var\, Y$!

De (V), sabemos que $X/_{Y=1} \sim N\left(\overset{1}{\mu_1} + \overset{0'5}{\rho}\,\overset{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}\,(\overset{1}{x_2} - \mu_2),\ \overset{1'\hat{3}}{\sigma_1^2}\,\overbrace{(1-\rho^2)}^{0'75}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow X/_{Y=1} \sim N(1 + 0'5 - 0'5\mu_2,\ 1) = N(1'5 - 0'5\mu_2,\ 1)$

Sabemos que $P[X \leq -1/_{Y=1}] = P\left[Z \leq \dfrac{-1-(1'5-0'5\mu_2)}{1}\right] =$

(Tipifico)

$= P[Z \leq \underbrace{0'5\mu_2 - 2'5}_{Z_\alpha}] = 0'06681 \Rightarrow P[Z \leq Z_\alpha] = \underbrace{0'06681}_{\text{Este valor}} \Rightarrow$

(no está en N(0,1))

$\Rightarrow P[Z \leq -Z_\alpha] = 1 - 0'06681 = 0'93319 \Rightarrow -Z_\alpha = 1'5 \Rightarrow$

(Por simetría de la normal)

Tabla N(0,1)

$\Rightarrow 2'5 - 0'5\mu_2 = 1'5 \Rightarrow 1 = 0'5\mu_2 \Rightarrow \boxed{\mu_2 = 2}$

Recapitulando, $\boxed{(X,Y) \sim N(\mu, \Sigma) \text{ con } \mu = (1,2) \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 1'\hat{3} & 0'\hat{6} \\ 0'\hat{6} & 1'\hat{3} \end{pmatrix}}$