EjerciciosT3.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 3

1. Calcula, si es posible, una función potencial para las siguientes parejas de funciones. Especifica en cada caso el dominio en el que se trabaja.

   a) $P(x,y) = x + y^3$, $Q(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$

   b) $P(x,y) = \frac{1}{2}\sin 2x - xy^2$, $Q(x,y) = y(1-x^2)$

   c) $P(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$, $Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones, sabiendo que admiten un factor integrante que depende de una sola de las variables x, y

   a) $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

   b) $2y\cos x - xy\sin x + (2x\cos x)y' = 0$

3. Ecuentra $p, q \in \mathbb{R}$ para que la ecuación
$$-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$
admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^p y^q$. Usa dicho factor integrante para resolver la ecuación. Indica un método de resolución alternativo.

4. Encuentra una condición suficiente para que la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(xy)$. Mediante un factor integrante de este tipo, encuentra la solución general de la ecuación
$$1 + xy + y^2 + (1 + xy + x^2)y' = 0.$$

5. Dada una función $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $H = H(x,y)$, se considera el sistema Hamiltoniano asociado
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y).$$
Al tratarse de un sistema autónomo, es posible obtener la ecuación de las órbitas.

   a) Demuestra que la ecuación de las órbitas se puede escribir como
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)y' = 0$$
   y comprueba que se trata de una ecuación exacta.

   b) Se supone que $H(x,y) = x^2 + 2y^2$. Escribe el sistema, la ecuación de las órbitas y encuentra las soluciones y las órbitas.

6. Dado un dominio Ω del plano se considera un campo vectorial $B : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $B = (B_1, B_2)$, $B = B(x,y)$. Se supone $B \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Diremos que B es un campo solenoidal si se cumple
$$\text{div } B := \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0,$$
donde div es el operador divergencia.

   a) Determina los valores de las constantes a, b, c, d para los que el campo $B(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ es solenoidal.

   b) Demuestra que si el dominio Ω tiene forma de estrella entonces para cada campo solenoidal B existe una función $A \in C^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial A}{\partial x} = B_2$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$.

7 Se considera un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x, y, z)$, de clase C^1.

a) Demuestra que existe una función $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que cumple $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ si y solo si se cumplen las condiciones de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b) Generalización a $\mathbb{R}^d$.

8 Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, $F = F(x, y)$, de clase C^1. Se define la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T = T(x, y)$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\gamma(t) = (tx, t^2y)$, $t \in [0, 1]$.

a) Demuestra que T es una función de clase C^1.

b) Calcula las derivadas parciales de T.

c) Se define ahora $\tilde{T}$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\tilde{\gamma}(t) = (t^2x, ty)$, $t \in [0, 1]$. ¿Se puede asegurar que T y $\tilde{T}$ coinciden?

RELACIÓN - 3:

1 Calcula, si es posible, una función potencial para los siguientes parejas de funciones.

a) $P(x,y) = x+y^3 \quad Q(x,y) = \frac{x^2}{2}+y^2$

▷ condición de exactitud

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \qquad \frac{dP}{dy} = 3y^2 \neq \frac{dQ}{dx} = x$$

No se cumple la condición de exactitud.

b) $P(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - xy^2$ > condición de exactitud

$Q(x,y) = y(1-x^2)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy} = -2xy$$
$$\parallel$$
$$\frac{dQ}{dx} = -2xy$$

Tiene sentido Buscar un potencial u tq

$$\frac{du}{dx} = P \qquad \frac{du}{dy} = Q$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - xy^2$$

$$u = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}(2x)dx - y^2\int x\,dx = \frac{1}{4}(-\cos(2x)) - y^2\frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = (1-x^2)\varphi'(y)$$

$$(1-x^2)\varphi'(y) = (1-x^2)y$$

$$\varphi(y) = y^2/2$$

$$\boxed{u = -\frac{1}{4}\cos(2x) - y^2x^2/2 + y^2/2}$$

c) $P(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$

$Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$

▷ Condicion de exactitud

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$=$

$\exists\, u(x,y) : \frac{du}{dx} = P$ y $\frac{du}{dy} = Q$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$$

$$u = \int \sqrt{x+y}\, dx + \int \sqrt{x-y}\, dx =$$

$$= \int (x+y)^{1/2} dx + \int (x-y)^{1/2} dx =$$

$$= \frac{(x+y)^{3/2}}{3/2} + \frac{(x-y)^{3/2}}{3/2} + \varphi(y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dy} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} + \varphi'(y) \\ \frac{du}{dy} = Q = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{array}\right\} \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = cte$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{(x+y)^{3/2}}{3/2} + \frac{(x-y)^{3/2}}{3/2} + cte}$$

2 a) $\underbrace{6xy}_{P(x,y)} + \underbrace{(4y+9x^2)}_{Q(x,y)}\, y' = 0$

$$\frac{dP}{dx} = 6y \neq \frac{dQ}{dy} = 4$$

Buscamos hacerla exacta con un factor integrante $\mu(x)$

$\mu(x) = m(x)$ $\quad \mu_y = 0$ $\quad \mu_x = m'(x)$

$$\boxed{\mu_y P - \mu_x Q = \mu (Q_x - P_y)}$$

$$-Qm'(x) = m(x)(Q_x - P_y)$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \boxed{\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)}$$

$$\frac{dP}{dy} = 6x \qquad \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{6x - 18x}{4y + 9x^2} = f(x,y) \ !!$$

$$\frac{dQ}{dx} = 18x$$

Veamos $m(y) = \mu$

$\mu(x,y) = m(y)$ $\quad \mu_x = 0$ $\quad \mu_y = m'(x)$

$$P\mu_y - \cancel{Q\mu_x} = \mu(Q_x - P_y)$$

$$\frac{m'(y)}{m(y)} = \boxed{\frac{Q_x - P_y}{P} = f(y)}$$

$$\frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{12x}{6xy} = \frac{2}{y} = f(y)$$

$$\frac{m'(y)}{m(y)} = f(y) \ ; \ \ln(m(y)) = F(y)$$

$$m(y) = e^{F(y)} = e^{2\ln(y)} = \boxed{y^2 = m(y)}$$

Multipliquemos la ec por el factor integrante: $m(y) = y^2$

$$y^2(6xy) + y^2(4y + 9x^2)\,y' = 0$$

$$\underset{P(x,y)}{6xy^3} + \underset{Q(x,y)}{(4y^3 + 9x^2y^2)}\,y' = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = 18xy^2 \qquad \frac{du}{dx} = P$$

$$\frac{dQ}{dx} = 18xy^2 \qquad \frac{du}{dy} = Q$$

$$\frac{du}{dx} = 6xy^3 \Rightarrow u = \int 6xy^3\,dx = 6y^3\frac{x^2}{2} =$$

$$= 3y^3x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = \cancel{9x^2y^2} + \varphi'(y)$$

$$\frac{du}{dy} = 4y^3 + \cancel{9x^2y^2}$$

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

$$\varphi(y) = \frac{4}{4}y^4 = y^4$$

$$\boxed{u = 3y^3x^2 + y^4}$$

$\boxed{3}$ $-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \mu(x,y) = (x^p y^p)\, m$

multiplico por el factor integrante

$$\underbrace{x^p y^{q+2}}_{P} + \underbrace{(x^{p+2} y^q + x^{p+1} y^{q+1})}_{Q}\, y' = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy} = (q+2)\, x^p y^{q+1}$$

$$\frac{dQ}{dx} = (p+2)\, x^{p+1} y^q + (p+1)\, x^p y^{q+1}$$

Igualamos

$$(q+2)\, x^p y^{p+1} = (p+2)\, x^{p+1} y^p + (p+1)\, x^p y^{p+1}$$

$$q+2 = p+1 \qquad \boxed{q = -1}$$

$$p+2 = 0 \rightarrow \boxed{p = -2}$$

$$-(x^{-2} y) + (y^{-1} + x^{-1})\, y' = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -x^{-2} y \qquad u = -y \int x^{-2} dx = +y \cdot x^{-1} + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = \varphi'(y) + \cancel{x^{-1}} = y^{-1} + \cancel{x^{-1}}$$

$$\varphi(y) = \ln(y)$$

$$\boxed{u = y/x + \ln(y)}$$

4 $P(x,y) + Q(x,y)y'$ $\quad \mu(x,y) = m(xy)$

$\mu_x = y\, m'(xy) \qquad \mu_y = x\, m'(xy)$

$P\mu_y - Q\mu_x = \mu (Q_x - P_y)$

$Px\, m'(xy) - Qy\, m'(x,y) = m(xy)(Q_x - P_y)$

$$\frac{m'(xy)}{m(xy)} = \boxed{\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = f(xy)}$$

$$\underbrace{1+xy+y^2}_{P} + \underbrace{(1+xy+x^2)}_{Q}y' = 0$$

$Q_x = y + 2x$

$P_y = x + 2y$

$$\frac{y+2x-x-2y}{x+\cancel{x^2y}+\cancel{xy^2}-y-\cancel{xy^2}-\cancel{yx^2}} =$$

$$= \frac{x-y}{x-y} = 1 = f(xy)$$

$$\frac{m'(xy)}{m(xy)} = f(xy) \Rightarrow m(xy) = \int \frac{1}{f(xy)} m'(xy) = e^{F(xy)}$$

$$\boxed{m(xy) = e^{xy}}$$

Multiplicamos por $m(xy)$

$$\underbrace{(e^{xy} + xye^{xy} + y^2e^{xy})}_{P} + \underbrace{(e^{xy} + e^{xy}xy + x^2e^{xy})}_{Q}y' = 0$$

$$\frac{du}{dx} = e^{xy} + xye^{xy} + y^2e^{xy}$$

$$u = \int e^{xy}dx + y\int xe^{xy}dx + y^2\int e^{xy}dx =$$

$$= \frac{1}{y}e^{xy} + y\left[\frac{x}{y}e^{xy} - \frac{1}{y}\int e^{xy}dx\right] + y^2\frac{1}{y}e^{xy} + \varphi(y)$$

$$\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{xy}dx & v = \frac{1}{y}e^{xy} \end{bmatrix}$$

$$= \cancel{\frac{1}{y}e^{xy}} + xe^{xy} - \cancel{\frac{1}{y}e^{xy}} + ye^{xy} + \varphi(y)$$

$$= (x+y)e^{xy} + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = Q = e^{xy}(\cancel{1} + xy + x^2)$$

$$\|$$

$$\frac{du}{dy} = \cancel{e^{xy}} + xe^{xy}(y+x) + \varphi'(y)$$

$$\cancel{yxe^{xy}} + \cancel{x^2e^{xy}} + \varphi'(y) = \cancel{e^{xy}yx} + \cancel{x^2e^{xy}}$$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = cte$$

$$\boxed{u(x,y) = (x+y)e^{xy} + cte}$$

5 b) $H(x,y) = +x^2 + 2y^2$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dy} = 4y \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dH}{dx} = -2x$$

$$\begin{cases} x'' = 4y' = -8x \\ x(t) = A\cos(\sqrt{8}t) + \\ + B\,\text{sen}(\sqrt{8}t) \\ y(t) = \frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = \end{cases}$$

$$= \frac{1}{y}(-\sqrt{8}A\,\text{Sen}(\sqrt{8}t) + \sqrt{8}B\cos(\sqrt{8}t))$$

Ec de las orbitas:

$$\frac{dH}{dx} + \frac{dH}{dy}y' = 0$$

$$2x + 4y)y' = 0 \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \text{ condición de exactitud } \checkmark$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad u = x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = \varphi'(y) = 4y \Rightarrow y = 2y^2$$

$$\boxed{u = x^2 + 2y^2} \qquad \boxed{x^2 + 2y^2 = C}$$

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\frac{dH}{dx}}{dH/dy} \Rightarrow \frac{dH}{dx}(x,y) + \frac{dH}{dy}(x,y)y' = 0$$

$\neq 0$ Th F I

6 Ω campo vectorial $B : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$B = (B_1, B_2)$, $B = B(x,y)$

$B \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. B campo senosoidal si se cumple:

$$\operatorname{div} B := \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0$$

Ahora la condición de exactitud

a) $B(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ solenoidal.

b) si Ω estrellado y B solenoidal $\Big\} \Rightarrow \exists A \in C^2(\Omega) : \frac{\partial A}{\partial x} = B_2 \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$

potencial

(A) B solenoidal $\Leftrightarrow$ $a + d = 0$

$\operatorname{div} B := a + d$

(B) Defino $B^\perp(x,y) = (B_2(x,y), -B_1(x,y))$

$B^\perp$ cumple la condición de exactitud

$\frac{\partial B_2}{\partial y} = -\frac{\partial B_1}{\partial x}$ Es cierto por ser solenoidal

$\Rightarrow \exists A \in C^2(\Omega) : \frac{\partial A}{\partial x} = B_2$ y $\frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$

$$\boxed{\nabla A = B^\perp}$$

(B) Profesor:

(P,Q) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \exists u : \frac{\partial u}{\partial x} = P \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$

$$u(x,y) = x \int P(\lambda x, \lambda y)\, d\lambda + y \int Q(\lambda x, \lambda y)\, d\lambda$$

$$A(x,y) = x \int_0^1 B_2(\lambda x, \lambda y)\, d\lambda - y \int_0^1 B_1(\lambda x, \lambda y)\, d\lambda$$

Ahora se hacen las deriv parciales como en la dem

7 $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $F = (F_1, F_2, F_3)$ $F = F(x, y, z) \in C^1$

a) Dem $\exists u \in C^2(\mathbb{R}^3)$: $\frac{du}{dx} = F_1$ $\frac{du}{dy} = F_2$ $\frac{du}{dz} = F_3$ sii se cumplen las condiciones de exactitud:

$$\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx}, \quad \frac{dF_1}{dz} = \frac{dF_3}{dx}, \quad \frac{dF_2}{dz} = \frac{dF_3}{dy}$$

b) Generalización a $\mathbb{R}^d$:

8) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : F = (F_1, F_2)\ ,\ F = F(x,y) \in C^1$

Definimos la función $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : T = T(x,y)$

$\gamma(t) = (tx, t^2y) : t \in [0,1]$ une el origen con (x,y)

a) $T(x,y) = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt = \int_0^1 \langle F(tx, t^2y), (x, 2ty) \rangle\, dt$

$\gamma'(t) = (x, 2ty)$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$= \int_0^1 [x F_1(tx, t^2y) + 2ty F_2(tx, t^2y)]\, dt$

Para ser C^1 tienen que $\exists$ derivadas parciales y ser continuas:

$\frac{dT}{dx} = \int_0^1 \left[F_1(tx, t^2y) + x \frac{dF_1}{dx}(tx, t^2y)\, t + \frac{dF_2}{dx}(tx, t^2y)\, t \cdot 2ty\right] dt$

Funciones continuas $\Downarrow$ $\frac{dT}{dx}$ continua

¿ $\frac{d}{dx}[F_1(tx, t^2xy)] = \frac{dF_1}{dx} \cdot t + \frac{dF_1}{dy} \cdot t^2y$

$\frac{dT}{dy}$ se hace igual y es continua $\Rightarrow \boxed{T \in C^1}$

b) Hecho en (a)

c) $\tilde{\gamma}(t) = (t^2x, ty) \Rightarrow$ Sólo si el campo es conservativo

Contraej:

$\tilde{T}(x,y) = \int_0^1 \langle F(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) \rangle\, dt =$

$F(x,y) = (x,y)$ campo no conservativo

$= \int_0^1 \langle \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle\, dt =$

$= \int_0^1 (t^2x, ty) \cdot (2tx, y)\, dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$