ResumenT2.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

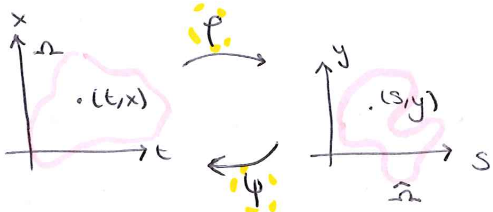
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RESUMEN T2 : CAMBIOS DE VARIABLE

Dada la ec. diferencial : $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t,x)}$

y el cambio : $\begin{cases} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{cases}$ del plano (t,x) al $(s,y) \Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dy} = \hat{f}(s,y)}$

Suponemos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ al cambio del dominio abierto y conexo $\Omega \to \hat{\Omega}$ y $\psi(\psi_1, \psi_2)$ el cambio inverso



Cambio de $f(t,x) \to \hat{f}(s,y)$

sea $f = f(t,x)$ conocida y definida en Ω, suponemos :

↳ $x = x(t)$ solución de $x' = f(t,x)$

Y derivamos las funciones compuestas :

- $s(t) = \varphi_1(t, x(t)) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_1}{dx}(t,x)\, x'$ $x' = f(t,x)$
- $y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_2}{dx}(t,x)\, f(t,x)$

Ahora hacemos

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\varphi_2}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_2}{dx}(t,x) f(t,x)}{\frac{d\varphi_1}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_1}{dx}(t,x) f(t,x)} = \hat{f}(s,y)$$

(con $(t,x) = \psi(s,y)$, $f(\psi(s,y))$)

Como buscamos una ec. en las variables (s,y), usamos $(t,x) = \psi(s,y)$

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ y cambio de variable $\begin{cases} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \\ \varphi : \Omega \longrightarrow \hat{\Omega} \end{matrix} \right)$

llamamos $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ al inv $\begin{cases} t = \psi_1(s,y) \\ x = \psi_2(s,y) \end{cases}$

Derivamos el cambio de variable y donde aparezca $x' \Rightarrow f(t,x)$

HIPÓTESIS QUE SE DEBEN CUMPLIR

H1 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

H2 $\varphi : \Omega \to \hat{\Omega}$ difeomorfismo de $C^1 \Rightarrow$ de C^1 y con inversa ψ de C^1

H3 $\frac{d\varphi_1}{dt}(t,x) + \frac{d\varphi_1}{dx}(t,x)\cdot f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(t,x)$ y $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$ equivalentes

Cálculo de primitivas

- Teorema del cálculo: si $p: I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds$ es una función de clase C^1 que cumple $P'(t) = p(t)$

t_0: cualquier pto de I que se haya fijado

Un método para resolver ec. dif.

1. Tenemos una ecuación: $x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$
2. Buscamos un cambio de variable: $\begin{cases} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = p(s)$
3. Resolvemos la ec. en y
4. Deshacemos el cambio

Ec de VARIABLES SEPARADAS:

$$\boxed{x' = p(t)\,q(x)}$$

$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$

Donde $p: I \to \mathbb{R}$ y $q: J \to \mathbb{R}$ continuos con intervalos abiertos.

- Dominio $D = I \times J$
- Resolución:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \Rightarrow \frac{dx}{q(x)} = p(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(x) = P(x) + C$$

↳ De aquí despejamos $x(t)$

OJO - Si $x_* \in J$ es un cero de $q(x)$: $q(x_*) = 0 \Rightarrow x(t) = x_*$ es solución.
Al separar las variables perdemos esta solución por dividir $\times$ $q(x)$

Ec. HOMOGÉNEAS:

$$\boxed{x' = h(x/t)}$$

$u = x/t$; $x = tu$

$x' = tu' + u$

$h(u) = tu' + u$; $u' = \frac{1}{t}(h(u) - u)$

Donde $h: J \to \mathbb{R}$ continua definida en $J =]\alpha, \beta[$: $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$

La función $h(x/t)$ continua en $t \neq 0$ y $\alpha < x/t < \beta$

- Dos posibles dominios:
  - $\Omega^+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, \alpha < x/t < \beta\}$
  - $\Omega^- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t < 0; \alpha < x/t < \beta\}$
- Resolución: Utilizamos el cambio:

$\begin{cases} y = x/t \\ s = t \end{cases} \Rightarrow$ Transforma la ec en una de variables separadas $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t\frac{dx}{dt} - x}{t^2} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{p(t)} \underbrace{[h(y) - y]}_{q(y)}$

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Ec. inducibles a homogéneas

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ax+bt+c}{Ax+Bt+C}\right)} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

Donde $h: J \to \mathbb{R}$ continua en intervalo abierto y $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$

Utilizamos el cambio de variable: $\begin{cases} s = t - \xi \\ y = x - \eta \end{cases}$

Hacemos el cambio y buscamos ξ y η que simplifiquen la ec:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ay - a\eta + bs - b\xi + c}{Ay - A\eta + Bs - B\xi + C}\right) \quad \text{haciendo} \begin{cases} a\eta + b\xi = c \\ A\eta + B\xi = C \end{cases}$$

obtenemos: $\displaystyle \frac{dy}{ds} = h\left(\frac{ay+bs}{Ay+Bs}\right) \to$ Ec. homogénea

Ec. lineal:

$$\boxed{x' = a(t)x + b(t)}$$

Donde $a, b: I \to \mathbb{R}$ continuos en el intervalo abierto

· Dominio $D = \underset{t}{I} \times \underset{x}{\mathbb{R}}$

1. Ecuación lineal homogénea:

En este caso $b(t) = 0 \Rightarrow \boxed{x' = a(t)x}$

Por lo que aplicamos variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a(t)dt \Rightarrow \ln|x(t)| = A(t) + K \Rightarrow x(t) = e^{A(t)}e^{K}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{A(t)}K}$$

Donde: $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, $t_0 \in I$ fijo

2. Ecuación lineal completa

Ahora $b(t) \neq 0 \Rightarrow \boxed{x'(t) = a(t)x + b(t)}$

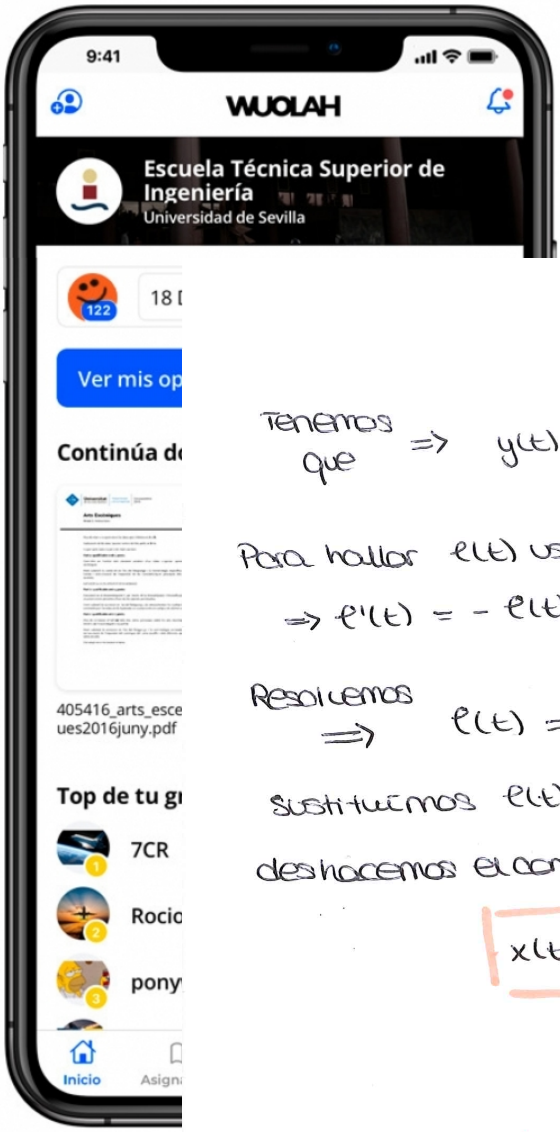
Usamos el cambio de variable: $\ell \begin{cases} s = t \\ y = \ell(t)x \end{cases}$ con $\ell(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

cuya inversa es $\varphi = \begin{cases} t = s \\ x = y/\ell(s) \end{cases}$

Derivamos el cambio de variable:

$$y' = \ell'(t)x + \ell(t)x' = \ell'(t)x + \ell(t)[a(t)x + b(t)] =$$

$$= \underbrace{[\ell'(t) + \ell(t)a(t)]x}_{\text{Imponemos } = 0} + \ell(t)b(t) \Rightarrow \text{Tenemos que} \Rightarrow$$



Tenemos que $\Rightarrow$ $y(t) = \int_{t_0}^{t} e(s)b(s)ds + k$, $k \in \mathbb{R}$

Para hallar $e(t)$ usamos que $e'(t) + e(t)a(t) = 0$

$\Rightarrow e'(t) = -e(t)a(t) \Rightarrow \frac{de}{dt} = -e(t)a(t) \Rightarrow \int \frac{de}{e} = \int a(t)dt$

Resolvemos $\Rightarrow$ $e(t) = e^{-A(t)}$ ($A(t)$ primitiva de $a(t)$)

Sustituimos $e(t)$ en $y(t) = \int_{t_0}^{t} e(s)b(s)ds$, resolvemos y deshacemos el cambio $\Rightarrow$ despejamos $x(t)$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{k e^{A(t)}}_{\text{sol general homog}} + \underbrace{e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s) ds}_{\text{sol particular de la complete}}}$$

Ec. de RICATTI:

$$\boxed{x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)}$$

Donde $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en el intervalo abierto I.

Usamos el cambio de variable $\begin{cases} s = t \\ y = \frac{1}{x - f(t)} \end{cases}$ cuya inversa es

$\boxed{f(t) \text{ sol particular}}$

$\varphi : \begin{cases} t = s \\ x = f(t) + 1/y \end{cases}$ derivando la función $x = f(t) + 1/y$

obtenemos: $x' = f'(t) - \frac{y'}{y^2}$

$a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = a(t)\left[f(t) + \frac{1}{y}\right]^2 + b(t)\left[f(t) + 1/y\right] + c(t)$

Como $f(t)$ solución: $f' = af^2 + bf + c$ y llegamos a

$\boxed{y' = -(2a(t)f(t) + b(t))y - a(t)}$ $\rightarrow$ Ec lineal

$\Rightarrow$ solucionamos por variables separadas y deshacemos el cambio