Relación FINAL
Relación de ejercicios de aplicación de todos los contenidos desarrollados a lo largo de todo el periodo docente.

---

1. Una gran tienda de artículos eléctricos descubre que el número X de tostadores vendidos por semana obedece a una ley de Poisson de media 10. La ganancia de cada tostador vendido es de 500 monedas. Sin embargo, un lunes se encuentran con que sólo les quedan 10 tostadores, y que a lo largo de esa semana no van a poder traer más del almacén. Determinar la distribución de las ganancias totales (en monedas) en concepto de tostadores de pan a lo largo de esa semana.

2. Se extraen n cartas, una a una con reemplazamiento, de una baraja de cartas (4 palos de 10 cartas cada uno). Si Y representa la suma de los n números que aparecen en las cartas.

   a) Calcular $P(Y = k)$

   b) Hallar la función generatriz de momentos del vector aleatorio 9–dimensional que proporciona los múltiplos de los números $1,\dots,9$ que intervienen en la suma de los n números que aparecen en las cartas.

3. Un vendedor de enciclopedias sabe que la probabilidad de obtener un cliente en cada visita es 0.3. Calcular el número medio de visitas diarias si cada día vende exactamente 10 enciclopedias. Calcular la probabilidad de que, a lo largo de un mes, no tenga que hacer más de 50 visitas diarias.

4. Sea (X,Y) el vector aleatorio cuya componente X cuenta el número de veces que sale 1, en 5 lanzamientos de un dado, e Y cuenta el número de veces que sale 6, en dichos 5 lanzamientos de un dado. Determinar si X e Y son independientes.

5. El vector aleatorio (X,Y) tiene función masa de probabilidad conjunta dada por

   $$P(X = x, Y = y) = k(x+1)(y+1),$$

   donde $x, y = 0,1,2$.

   a) Calcular el valor de k.

   b) Calcular las distribuciones marginales.

   c) Calcular las distribuciones condicionadas de X a los valores $Y = y$, para $y = 0,1,2$.

   d) Determinar si son independientes X de Y.

   e) Calcular $P(X+Y > 2$ y $P(X^2+Y^2 \leq 1)$.

   f) Distribuciones de $Z = X+Y$, y de $W = X^2+Y^2$.

6. Consideremos una urna con 3 bolas azules, 2 blancas y 1 roja. Extraemos 3 bolas sin reemplazamiento, y consideremos las variables aleatorias que nos dan el número X de bolas azules e Y el número de bolas blancas que aparecen en la extracción.

   a) Calcular la función de probabilidad conjunta.

   b) Calcular las distribuciones marginales.

   c) Calcular la distribución condicionada de X a los valores de Y.

   d) Determinar si X e Y son independientes.

7. En una jaula hay un ratón y dos pollitos. La probabilidad de que cada uno de los animales salga de la jaula en la próxima hora es de 0.3. Esperamos una hora y observamos lo que queda en la jaula.

   a) Distribución de la variable aleatoria X que cuenta el número de animales que quedan en la jaula.

b) Si Y indica el número total de patas de los animales que hay en la jaula, derivar la distribución conjunta de (X,Y) y determinar si X e Y son independientes.

c) Calcular la probabilidad de que el número de patas no supere el doble del número de animales.

8. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 24y(1-x-y),$$

si (x,y) pertenece al recinto delimitado por las rectas $x+y=1$, $x=0$, e $y=0$.

a) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria bidimensional (X,Y).

b) Calcular las funciones de densidad marginales.

c) Calcular las funciones de densidad condicionadas.

9. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de distribución uniforme en el recinto limitado por $y=x/2$, $x=2$, e $y=0$. Calcular la función de distribución.

10. Dado el intervalo $[0,1]$, se eligen al azar tres números a,b y c y con ellos construimos la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$. Calcular la probabilidad de que tenga soluciones reales.

11. Sea

$$f_{(X,Y)}(x,y) = cy\exp(x), \quad x \leq y \leq 0,$$

y cero en el resto.

Calcular c y obtener las funciones de distribución conjunta, marginales y condicionadas. Expresar y comprobar la relación que hay entre ellas.

Calcular la esperanza de Y dado $X+Y+2 \geq 0$ y la función de distribución de Y dado $X+2 \leq 0$.

12. Sean U y V variables aleatorias con igual media e igual varianza. Utilizando estas variables, obtener dos variables aleatorias incorreladas.

13. Sea

$X \mid Y$	0	3
1	0.3	0.1
2	0.1	0.5

la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y.

a) Obtener el coeficiente de correlación de estas variables.

b) Determinar la recta de regresión de Y sobre X.

c) Derivar la curva de regresión de X sobre Y y la razón de correlación asociada.

14. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 4xy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Obtener las rectas y curvas de regresión. Calcular el coeficiente de correlación lineal, las razones de correlación y el error cuadrático medio cometido al predecir cada variable según cada una de las funciones de regresión. Interpretar los resultados.

15. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,\theta]$, $\theta > 0$. Estudiar la convergencia en Ley de la variable aleatoria

$$X_{(n)} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i.$$

16. Estudiar la convergencia en ley de la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con funciónn de distribución:

$$F_{X_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-\frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq t < n \\ 1 & \text{si } n \leq t. \end{cases}$$