ResumenT4.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RESUMEN T4: LA ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN SUPERIOR

$$\boxed{\overbrace{x^{k)} + a_{k-1}(t)\, x^{k-1)} + a_{k-2}(t)\, x^{k-2} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x}^{L[x]} = b(t)}$$

$k \geq 1$: orden de la ecuación.

- $>$ si $b(t) = 0 \rightarrow$ Ec. homogénea
- $>$ si $b(t) \neq 0 \rightarrow$ Ec. completa

Teorema de existencia y unicidad:

Dadas funciones continuas $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$. Existe una solución al problema:

$$\left.\begin{array}{l} x^{k)} + a_{k-1}(t)\, x^{k-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b(t) \\ x(t_0) = \alpha_0,\ x'(t_0) = \alpha_1, \dots, x^{k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1} \end{array}\right\} \text{(PVI)}$$

Espacio vectorial de las funciones:

$F = F(I, \mathbb{R}) \equiv$ conjunto de todas las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $f \in F$ y $g \in F$
- $(\lambda f)(t) = \lambda\, f(t)$ $\quad \Rightarrow$ F es un espacio vectorial real

▷ Independencia lineal: $f_1, \dots, f_n \in F(I, \mathbb{R})$ son lineal. independientes si se verifica:

$$\boxed{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}$$

▶ PROPOSICIÓN:

$f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, n funciones derivables hasta el orden $n-1$. Se supone que para algún $t \in I$:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ & \dots & \\ f_1^{n)}(t) & \dots & f_n^{n)}(t) \end{vmatrix}}_{\text{Determinante Wronskiano} = W(f_1, \dots, f_n)(t)} \neq 0 \Rightarrow f_1, \dots, f_n \text{ son lin. indep en } F$$

El operador diferencial:

Dados $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el operador

$$L[x] = x^{k)} + a_{k-1}(t)\, x^{k-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x$$ que actúa sobre $x(t)$

$$\Rightarrow \boxed{L[x] = b(t)}$$

La ecuación lineal homogénea:

$$\boxed{L[x] = 0}$$

Donde L es un operador lineal $\begin{cases} L[x+y] = L[x] + L[y] \\ L[\lambda x] = \lambda L[x] \end{cases}$

consideramos Z = conjunto de sol. de la ec. lineal homogénea, entonces:

$$\boxed{Z = \ker L = \{x \in C^k(I) : L[x] = 0\}}$$

▸ **PROPOSICIÓN**: $\boxed{\dim Z = k}$

TEOREMA $\boxed{\text{Sistema fundamental} \equiv \text{base de } Z}$

Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$. son equivalentes:

i) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ es un sistema fundamental.

ii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

iii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$

NOTA: En un sist. fundamental el Wronskiano $\neq 0$ siempre

Fórmula de Liouville:

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$, entonces:

$a_{k-1} = 0$
$\Rightarrow$ Wronskiano $= cte$.

$$\boxed{W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)ds}}$$

· Derivada de un determinante: suma de k determinantes, en cada uno se deriva una fila.

La ecuación completa:

$$\underbrace{x^{k)} + a_{k-1}(t)x^{k-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x}_{L[x]} = b(t) \qquad a_i, b \in \mathbb{R}$$

1. Estructura del conjunto de soluciones:

Si sist. compatible $\Rightarrow$ soluciones dadas por:

Sol particular + sol de la homog.

$Z = \{$sol de la ec $x\} = \boxed{L^{-1}[b] = \{x : L[x] = b\} = x^* + \ker L}$

donde $L[x^*] = b$ sol. particular.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

(E) $x'' + x = t^2$

1. Homogénea:

$x'' + x = 0 \; \begin{cases} \varphi_1(t) = \cos(t) \\ \varphi_2(t) = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$

sol de la homogénea:

$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② Sol particular:

$x'' + x = t^2$

Buscamos un polinomio de gr 2 $\Rightarrow$ $x(t) = At^2 + Bt + C$

Sustituimos

$2A + At^2 + Bt + C = t^2$

> Igualamos los coeficientes $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \Rightarrow C = -2 \end{cases}$

Sol particular:

$x(t) = t^2 - 2$

Solución general ($x(t) = x^* + \ker L$)

$x(t) = t^2 - 2 + c_1\cos(t) + c_2\operatorname{sen}(t)$

② PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

Si $L[x_i] = b_i$ $i = 1, \dots, n$ Entonces una combinación lineal de estas soluciones:

$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ es una sol de } L[x] = b \text{ con } b = \sum \lambda_i b_i}$

Ej. $x'' + x = 5t^2 + 3t$

> Dividimos:

$\begin{cases} x'' + x = 5t^2 \to x^*_1 = t^2 - 2 \\ x'' + x = 3t \to x^*_2 = 1/10\, e^{3t} \end{cases} \Rightarrow x^* = (t^2 - 2) + \frac{1}{10} e^{3t}$

El método de coef. indeterminados $\begin{cases} \text{polinomios} ✓ \\ \text{exponenciales} ✓ \\ \text{trigonométricas} ✓ \end{cases}$ $(\log x)$ ✗

Variación de las constantes:

Método para resolver una ecuación completa. Empezamos por gr 2 y extendemos.

▷ Ec. de grado 2:

$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$

Sea $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ un sist fundamental de la ec. homogénea, las sol de la homogénea son de la forma $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$: c_1, c_2 ctes.

Buscamos la sol particular de la completa:

$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$

$x'(t) = c_1'(t)\varphi_1(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + c_2(t)\varphi_2'(t)$

$c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0$ Lo imponemos

$$x''(t) = c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_2(t)\varphi_2''(t)$$

> Imponemos que sea sol de la completa: $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$

$$c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' + a_1(t)(c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2') + $$
$$+ a_0(t)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = b(t)$$

$$c_1(\underbrace{\varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_0\varphi_1}_{0}) + c_2(\underbrace{\varphi_2'' + a_1\varphi_2' + a_0\varphi_2}_{0}) +$$
$$+ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t)$$

φ_1 y φ_2 sol de la homogénea.

$$\Rightarrow \quad c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t)$$

Por lo tanto, tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t) \end{array}\right\}$$ vemos como incógnitas c_1' y c_2'

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = W \neq 0$$ Por ser $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ un sist fundamental

$\Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado $\Rightarrow$ Se puede resolver.

> Para resolverlo usamos Cramer:

$$c_1' = \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ b(t) & \varphi_2' \end{vmatrix} = \frac{-b(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}$$

$$c_2' = \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b(t) \end{vmatrix} = \frac{b(t)\varphi_1(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}$$

> Integramos para sacar c_1 y c_2

$$\Rightarrow \quad x^*(t) = \overbrace{\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{b(s)\varphi_2(s)}{W(s)}ds\right)}^{c_1}\varphi_1(t) + \overbrace{\left(\int_{t_0}^{t}\frac{b(s)\varphi_1(s)}{W(s)}ds\right)}^{c_2}\varphi_2(t)$$

sol particular de la ec. completa.

▷ Extensión a un orden superior:

$x'''(t) + a_2x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = b(t)$ $\quad \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ sist fund.

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + c_3'\varphi_3 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_3'\varphi_3' = 0 \\ c_1'\varphi_1'' + c_2'\varphi_2'' + c_3'\varphi_3'' = b(t) \end{array}\right\}$$ Resolvemos por Cramer.

La ec. homogénea de coef ctes:

$$\underbrace{x^{k)} + a_{k-1}x^{k-1)} + \dots + a_0 x}_{L[x]} = 0 \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}$$

> Buscamos sol. del tipo $e^{\lambda t}$

$$L[e^{\lambda t}] = \lambda^k e^{\lambda t} + a_{k-1}\lambda^{k-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} =$$

$$= \underbrace{(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{p(\lambda) \equiv \text{polinomio característico}} e^{\lambda t} = 0$$

Por cada raíz del polinomio tendremos una solución:

1. Si tenemos $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ (Reales y $\neq$)

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_i = e^{\lambda_i t}}$$

2. $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow$ Una sol compleja $\Rightarrow$ conjugado tmbn es sol.

$$\lambda = a + bi \Rightarrow x(t) = e^{(a+bi)t}$$

Aplicamos Fórmula de Moivre:

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

$$x(t) = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)$$

Propiedad: Si $x(t)$ es una sol compleja $L[x]=0$, entonces la parte real y la imaginaria son sol reales

$$\boxed{x_1(t) = e^{at}\cos bt \qquad x_2(t) = e^{at}\operatorname{sen}(bt)}$$

3. Raíces múltiples

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} t^{n-h} e^{\lambda t} p^{n)}(\lambda)$$

e^{2t} es doble $\begin{cases} e^{2t} = \varphi_1 \\ te^{2t} \end{cases}$

$t^2 e^{2t}$

4. Compleja y doble

λ: compleja y doble $\rightarrow e^{\lambda t}, \; te^{\lambda t}$

$\lambda = a + bi$

$$\boxed{te^{\lambda t} = e^{at}(t\cos bt + ti \operatorname{sen} bt)}$$