EjerciciosT2.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 2

1 Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

2 En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P'(t) = P(t)\left[\alpha - \beta P(t)\right]$$

y la ecuación de Gompertz

$$P'(t) = P(t)\left[\alpha - \beta \ln P(t)\right],$$

siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

3 Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t-x).$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

4 Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que

$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g,$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k > 0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0) = 0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

5 Calcule la solución de la ecuación

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

que verifica $y(0) = 1$.

6 Resuelva los siguientes problemas lineales

a) $x' + 3x = e^{-3t}, x(1) = 5$

b) $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}, x(2) = 0$

c) $x' = (\cosh t)x + \sinh t, x(0) = 1$

7 Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $a(t) \geq c > 0$ para todo t y

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes)

8 La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problema de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \qquad x(0) = 1.$$

9 Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

10 Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

11 Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t, y = \lambda^2 x$, con $\lambda > 0$.

12 Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.

RELACIÓN 2

1

$$x' = \frac{t-5}{x^2} = p(t)\,q(x) = (t-5)\,\frac{1}{x^2}$$

$p : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad q : J \longrightarrow \mathbb{R}$

Única restricción $x \neq 0 \Rightarrow D = \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\end{cases}$

Resolvemos por variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = (t-5)\,\frac{1}{x^2} \Rightarrow \int x^2 dx = \int (t-5)dt$$

$$\frac{x^3}{3} = t^2/2 - 5t + C$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{3\left(t^2/2 - 5t\right)}}$$

Dominio : $D = \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ \text{ó} \\ \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\end{cases}$

2

logística: $P'(t) = P(t)\,[\alpha - \beta P(t)]$ (1)

Gompertz: $P'(t) = P(t)\,[\alpha - \beta \ln P(t)]$ (2)

$P(t)$ población a tiempo t de una especie $\quad \alpha, \beta > 0$

$P(0) = 100$

(A) $P'(t) = P(t)\,[\alpha - \beta P(t)] = p(t)\,q(x)$

Variables separadas

Integral racional

$$\frac{dP}{dt} = P[\alpha - \beta P] \Rightarrow \int \frac{1}{P(\alpha - \beta P)} dP = \int dt$$

(*)

$$\frac{1}{P(\alpha-\beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P}$$

$A\alpha = 1 \Rightarrow A = 1/\alpha$

$1 = A(\alpha - \beta P) + BP \Rightarrow -A\beta P + BP = 0 \Rightarrow B = \beta/\alpha$

$$(*) = \int \frac{1/\alpha}{p} dp + \frac{1}{\alpha}\int \frac{\beta/\alpha}{\alpha-\beta p} dp =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ln(p) - \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha-\beta p| = 1t + k$$

Despejamos p

$$\ln|p| - \ln|\alpha-\beta p| = \alpha t + k$$

$$\ln\left(\frac{p}{\alpha-\beta p}\right) = \alpha t + \hat{k}$$

$$\frac{p}{\alpha-\beta p} = e^{\alpha t}\cdot \underbrace{e^{\hat{k}}}_{H}$$

$$p = (\alpha-\beta p)\, e^{\alpha t} H$$

$$p = \alpha e^{\alpha t} H - H\beta p e^{\alpha t}$$

$$p(1 + H\beta e^{\alpha t}) = H\alpha e^{\alpha t}$$

$$\boxed{p = \frac{H\alpha e^{\alpha t}}{1+\beta e^{\alpha t} H}}$$

Añadimos $p = \frac{\alpha}{\beta}$

(B) $p'(t) = p(t)[\alpha - \beta \ln p(t)]$

$$p' = p(\alpha - \beta \ln p)$$

Sol constantes
$p = 0$
$p = e^{\alpha/\beta}$

Variables separadas

$$\frac{dp}{dt} = p(\alpha - \beta \ln p)$$

$$\int \frac{1}{p(\alpha - \beta\ln(p))} dp = \int dt$$

3) $x' = \cos(t-x)$

Pruebe con el cambio $y = t - x \Rightarrow$ variables separadas

$\varphi: \begin{cases} y = t - x \\ s = t \end{cases}$ $\quad y' = 1 - x' \ ; \quad x' = 1 - y'$

$\psi: \begin{cases} x = t - y \\ t = s \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{ds} = \underbrace{1 - x'}_{y'} = 1 - \cos(y)$

Variables separadas $\dfrac{dy}{ds} = 1 - \cos(y)$

$\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(y)} dy = \int ds$

$\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(y)} = -\operatorname{cotg}(y/2)$

$\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(y)} = \operatorname{tg}(y/2)$

$\|$

$-\operatorname{cotg}(y/2) + c = t$

$\boxed{y = 2\operatorname{arcotg}(c-t)}$

Deshacemos el cambio

$x = t - y = \boxed{t - 2\operatorname{arcotg}(k-t) = x}$

4) $v(t)$ velocidad en el tpo t. la ec. de Newton

$v' + \dfrac{k}{m} v^2 = g$ $\quad \begin{cases} m: \text{masa} \\ g: \text{cte de gravit.} \\ k > 0 \end{cases}$

$v(0) = 0$

$v'(t) = g - \dfrac{k}{m} v^2(t)$ Ec. de var separadas

$\dfrac{dv}{dt} = g - k/m\, v^2 \ ; \quad \displaystyle\int \frac{1}{g - k/m\, v^2} dv = \int dt$

$$\frac{1}{g - k/m\, v^2} =$$

5

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1} \qquad y(0) = 1$$

Reducible a homogenea

$$\varphi = \begin{cases} s = x + \xi \\ t = y + \eta \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{podemos aplicar el cambio.}$$

$$\varphi = \begin{cases} x = s - \xi \\ y = t - \eta \end{cases}$$

$$y' = \frac{s - \xi + t - \eta - 3}{s - \xi - t + \eta - 1} = \frac{s + t + (-\xi - \eta - 3)}{s - t + (-\xi + \eta - 1)}$$

Forzamos:

$$\begin{cases} -\xi - \eta - 3 = 0 \\ -\xi + \eta - 1 = 0 \end{cases} \qquad \varphi := \begin{cases} x = s + 2 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

$$-2\xi - 4 = 0 \Rightarrow \xi = -2 \quad y \quad \eta = -1$$

$$y' = t' = \frac{s+t}{s-t}$$

$$t' = \frac{1 + t/s}{1 - t/s} = h(t/s) \text{ Homogenea}$$

cambio de variable $u = t/s$

$$h'(u) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{p(s)} \underbrace{[h(u) - u]}_{q(u)} \quad \text{Variables separadas}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{s}(h(u) - u) \; ; \quad \int \frac{1}{s} ds = \underbrace{\int \frac{1}{h(u) - u} du}_{A}$$

$$Ⓐ = \int \frac{1}{\underbrace{\frac{1+u}{1-u} - u}_{\frac{1+\cancel{u}-\cancel{u}+u^2}{1-u}}} du = \int \frac{1-u}{1+u^2} du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1+u^2| + \operatorname{arctg}(u)$$

$$\ln|s| = \underbrace{-1/2 \ln|1+u^2|}_{} + \operatorname{arctg}(u) + k$$

$$-1/2 \ln|1+u^2| = -1/2 \ln\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right) = -1/2 \ln\left(\frac{t^2+s^2}{s^2}\right)$$

$$= -1/2\left(\ln(t^2+s^2) - \ln(s^2)\right) = -\left[\ln\sqrt{t^2+s^2} - \ln(s)\right]$$

$$\cancel{\ln(s)} = -\ln\sqrt{t^2+s^2} + \cancel{\ln(s)} + \operatorname{arctg}(t/s) + k$$

$$\ln\sqrt{t^2+s^2} = \operatorname{arctg}(t/s) + k \qquad \begin{cases} s = x-2 \\ t = y-1 \end{cases}$$

$$\ln\sqrt{(y-1)^2+(x-2)^2} = +\operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{x-2}\right) + k$$

$$-\ln\sqrt{y^2+x^2-4x-2y+5} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{x-2}\right) + k$$

$y(0) = 1 \qquad x=0,\ y=1$

$$-\ln\sqrt{1-2+5} = \operatorname{arctg}\left(\cancel{0/-2}\right) + k \quad \to 0$$

$$\boxed{-\ln(2) = k}$$

6 Resuelve los siguientes problemas lineales

a) $x' + 3x = e^{-3t} \qquad x(1) = 5$

$x' = \underbrace{-3}_{a(t)}x + \underbrace{e^{-3t}}_{b(t)}$ Ec lineal completa

Cambio de variable $\varphi: \begin{cases} s = t \\ y = \varphi(t)\, x \end{cases}$

$$x(t) = k e^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(s)} b(s)\, ds \qquad A(t) = \int a(t)dt$$

$\int -3dt = -3t$

$$x(t) = k e^{-3t} + e^{-3t} \int_1^t \underbrace{e^{3s} e^{-3s}}_{e^0 = 1} ds = k e^{-3t} + t e^{-3t}$$

$x(1) = 5 \Rightarrow k e^{-3} + e^{-3} = 5$

$e^{-3}(k+1) = 5 \; ; \; k + 1 = 5e^3 \; ; \; \boxed{k = 5e^3 - 1}$

$$x(t) = (5e^3 - 1)e^{-3t} + te^{-3t} = \boxed{e^{-3t}(5e^3 - 1 + t)}$$

b) $x' - x/t = \frac{1}{1+t^2} \qquad x(2) = 0$

$x' = \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} x + \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{b(t)} \qquad A(t) = \ln|t| \qquad \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$

$$x(t) = k \underbrace{e^{\ln(t)}}_{t} + \underbrace{e^{\ln(t)}}_{t} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$\log(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$$x(t) = kt + t\left(\log(t) - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)$$

$x(2) = 0 \Rightarrow \cancel{2}k + \cancel{2}\left(\log(2) - \tfrac{1}{2}\log(5)\right) = 0$

$k + \log(2) - \log(5^{1/2}) = 0$

$$\boxed{k = -\log(2/5^{1/2})}$$

c) $x' = (\cosh t)\, x + \operatorname{senh}(t) \quad x(0) = 1$

7 $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuos con $a(t) \geq c > 0 \quad \forall t$
y $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$

Dem que todos los soluciones de la ecuación $x' = -a(t)\,x + b(t)$ tienden a 0 cuando $t \longrightarrow +\infty$

Fórmula de variación de ctes

$$x(t) = \cancel{k e^{-A(t)}} + \cancel{e^{-A(t)}} \underbrace{\int_0^t e^{A(s)} b(s)\,ds}$$

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds > ct \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\int_0^t e^{A(s)} b(s)\,ds}{e^{A(t)}} \quad \Delta$$

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = +\infty \qquad +\infty$$

1) Si $A \not\longrightarrow \infty$ ya lo tenemos

2) Si $A \to \infty$ Aplicamos L'H

$$= \frac{\infty}{\infty} \overset{LH}{=} \frac{\cancel{e^{A(t)}}\, b(t)}{\cancel{e^{A(t)}}\, a(t)} = \frac{b(t) \to 0}{a(t) \not\to 0} \longrightarrow 0_{//}$$

acotado por c