PruebaProbabilidad-13.pdf

Lidiagm

Probabilidad

2º Grado en Matemáticas

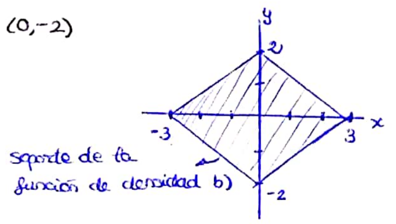
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

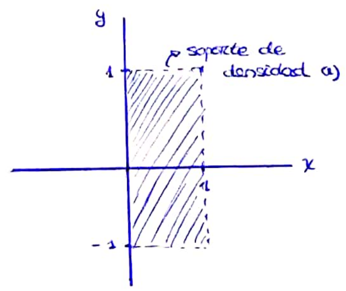
PRUEBA DE PROBABILIDAD

Ejercicio 1.- Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad de probabilidad:

a) $f(x,y) = \begin{cases} k\left[\frac{xy}{2}+1\right] & 0<x<1,\ -1<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b) $f(x,y) = k \quad (x,y) \in R$ con R el rombo de vértices $(3,0), (0,2), (-3,0), (0,-2)$





Estudiar en cada caso si las variables X e Y son independientes.

a) Vamos a calcular primero la constante k de tal forma que f sea una función de densidad de probabilidad.

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 k\left[\frac{xy}{2}+1\right] dy\,dx = \int_0^1 k\left[\frac{x}{4}+1-\frac{x}{4}+1\right] dx = \int_0^1 2k\,dx = 2x]_0^1 k = 2k = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = 1/2}$$

Veamos ahora si X e Y son independientes. ($\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$)

Calculamos para ello las respectivas marginales

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left[\frac{xy}{2}+1\right] dy = \frac{1}{2}\left(\frac{xy^2}{4}+y\right)\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}+1-\frac{x}{4}+1\right) = 1 \quad \forall x \in (0,1)$$

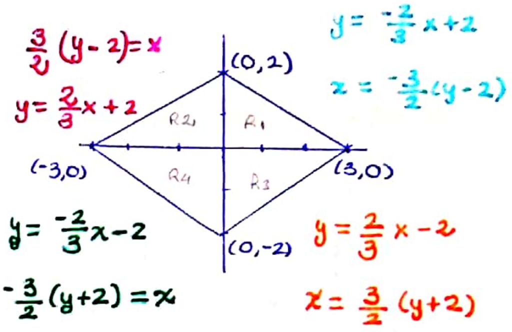
$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{xy}{2}+1\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2y}{4}+x\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{4}+1\right) = \frac{y}{8}+\frac{1}{2} = \frac{y+4}{8} \quad \forall y \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow f_X(x) f_Y(y) = 1 \cdot \frac{y+4}{8} = \frac{y+4}{8} \neq f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{2}+1\right)$$

Por tanto, podemos concluir que X e Y no son independientes.

b) Vamos a calcular primero la K igual que en el apartado anterior de tal forma que f sea una función de densidad de probabilidad.

Calculamos las rectas que forman nuestro rombo.



- Recta que pasa por los puntos (0,2)(-3,0)

$$y-2=\frac{2-0}{3+0}(x-0)$$

$$\boxed{y-2=\frac{2}{3}x}$$

- Recta que pasa por los puntos (0,2)(3,0)

$$y-2=\frac{2-0}{0-3}(x-0)$$

$$\boxed{y-2=\frac{-2}{3}x}$$

- Recta que pasa por los puntos (0,-2) y (3,0)

$$y+2=\frac{-2-0}{0-3}(x-0)$$

$$\boxed{y+2=\frac{2}{3}x}$$

- Recta que pasa por los puntos (0,-2) y (-3,0)

$$y+2=\frac{-2-0}{0+3}(x-0)$$

$$\boxed{y+2=-\frac{2}{3}x}$$

$$1=\underbrace{\int_0^3\int_0^{-2/3x+2}K\,dydx}_{R1}+\underbrace{\int_{-3}^0\int_0^{\frac{2}{3}x+2}K\,dydx}_{R2}+\underbrace{\int_0^3\int_{\frac{2}{3}x-2}^0K\,dydx}_{R3}+\underbrace{\int_{-3}^0\int_{-\frac{2}{3}x-2}^0K\,dydx}_{R4}=$$

$$=4\int_0^2\int_0^{-\frac{3}{2}y+3}K\,dxdy=3\cdot4K=12K\Leftrightarrow\boxed{1/12=K}$$

$$\int_0^{-3/2y+3}K\,dx=Kx\Big]_0^{-3/2y+3}=K\left(-\frac{3}{2}y+3\right)$$

$$\int_0^2K\left(-\frac{3}{2}y+3\right)dy=K\left[-\frac{3y^2}{4}+3y\right]_0^2=3K$$

Veamos ahora si X e Y son independientes ($\Leftrightarrow f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$) calculamos las respectivas distribuciones marginales.

Marginales de x.

- $f_X(x)=\int_{-2/3(x+3)}^{2/3x+2}1/12\,dy=\frac{y}{12}\Big]_{-2/3(x+3)}^{2/3x+2}=\frac{x+3}{9}\quad\forall x\in(-3,0]$

- $f_X(x) = \int_{2/3(x-3)}^{-2/3(x-3)} 1/12 \, dy = \frac{1}{12} y \Big]_{2/3(x-3)}^{-2/3(x-3)} = \frac{1}{12}\left[-\frac{2}{3}x + 2 - \frac{2}{3}x + 2\right] =$

$= \frac{1}{12}\left[-\frac{4}{3}x + 4\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{-4x+12}{3}\right] \quad \forall x \in [0,3)$

<u>Marginales de y</u>

- $f_Y(y) = \int_{-3/2y-3}^{3/2y+3} 1/12 \, dx = \frac{1}{12} x \Big]_{-\frac{3}{2}y-3}^{3/2y+3} = \frac{1}{12}[3y+6] = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} \quad \forall y \in (-2,0]$

- $f_Y(y) = \int_{3/2(y-2)}^{-3/2y+3} 1/12 \, dx = \frac{1}{12} x \Big]_{3/2(y-2)}^{-3/2y+3} = \frac{1}{12}[-3y+6] = -\frac{y}{4} + \frac{1}{2} \quad \forall y \in [0,2)$

$\Rightarrow f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \left(\frac{x+3}{9}\right)\left(\frac{y+2}{4}\right) = \frac{(x+3)(y+2)}{36} = \frac{xy+2x+3y+6}{36} \\[2ex]
2)\ \frac{x+3}{9} \cdot \left(\frac{-y+2}{4}\right) = \frac{(x+3)(2-y)}{36} = \frac{2x-xy+6-3y}{36} \\[2ex]
3)\ \frac{1}{12}\left[\frac{12-4x}{3}\right] \cdot \left(\frac{y+2}{4}\right) = \frac{(12-4x)(y+2)}{144}
\end{array}\right\} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$4)\ \frac{1}{12}\left[\frac{12-4x}{3}\right]\left(\frac{2-y}{4}\right) = \frac{(12-4x)(2-y)}{144}$$

Por tanto, podemos concluir que X e Y no son independientes.

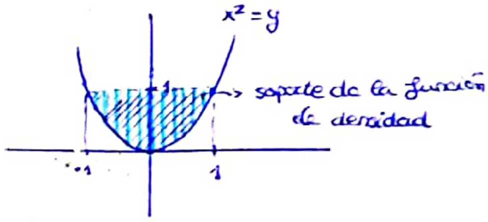
Ejercicio 2.- Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$f_{(X,Y)}(x,y) = K$ con $x^2 \leq y \leq 1$, anulándose fuera del recinto indicado.

Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

Vamos a calcular primero la K para que la función f sea una función de densidad.

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} K\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} Ky\Big]_{x^2}^{1} dx = K\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx =$$



$$= \int_{-1}^{1} k\,dx - \int_{-1}^{1} Kx^2\,dx = Kx\Big]_{-1}^{1} - K\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{4K}{3} = 1$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{K = 3/4}$

<u>Marginales</u>

- Marginal de X $\Rightarrow$ $f_X(x) = \int_{x^2}^{1} 3/4\,dy = 3/4\,y\Big]_{x^2}^{1} = \frac{3}{4}(1-x^2)$ $\quad \forall x \in (-1,1)$

- Marginal de Y $\Rightarrow$ $f_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 3/4\,dx = \frac{3}{4}x\Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{3}{4}(2\sqrt{y}) = \frac{3}{2}\sqrt{y}$ $\quad \forall y \in (0,1)$

<u>Condicionadas</u>

- Condicionada de X a los valores de Y

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{3/4}{\frac{3}{2}\sqrt{y_0}} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \qquad \left.\begin{array}{l} y_0 \in (0,1) \\ 0 < y_0 < 1 \end{array}\right] \Rightarrow x \in (-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0})$$

- Condicionada de Y a los valores de X

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{3/4}{\frac{3}{4}(1-x_0^2)} = \frac{1}{(1-x_0^2)} \qquad \left.\begin{array}{l} x_0 \in (-1,1) \\ -1 < x_0 < 1 \end{array}\right] \Rightarrow y \in (x_0^2, 1)$$

Calcular la predicción mínima cuadrática de Y dado X y el error cuadrático medio asociado.

Necesitamos calcular para ello la $E[Y/X]$, así como $ECM(\varphi_{opt}(X))$

$$E[Y/X=x] = \int_{x^2}^{1} y\, f_{Y/X=x}(y)\,dy = \int_{x^2}^{1} y \frac{1}{(1-x^2)}\,dy = \frac{1}{1-x^2} \left.\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} = \boxed{\frac{1+x^2}{2} = \varphi_{opt}(X)}$$

$$E[Y^2/X=x] = \int_{x^2}^{1} y^2 f_{Y/X=x}(y)\,dy = \frac{1}{1-x^2}\int_{x^2}^{1} y^2\,dy = \frac{1}{1-x^2}\left.\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} = \frac{x^4+x^2+1}{3}$$

$$Var(Y/X) = E[Y^2/X] - (E[Y/X])^2 = \frac{x^4+x^2+1}{3} - \frac{(1+x^2)^2}{4} = \frac{4(x^4+x^2+1)-3(1+2x^2+x^4)}{12} =$$

$$= \frac{4x^4+4x^2+4-3-6x^2-3x^4}{12} = \frac{x^4-2x^2+1}{12}$$

$$ECM(\varphi_{opt}(X)) = E[Var(Y/X)] = \int_{-1}^{1} \frac{x^4-2x^2+1}{12}\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)(1-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(x^4-x^6-2x^2+2x^4+1-x^2)\,dx = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(3x^4-x^6-3x^2+1)\,dx = \frac{1}{16}\left.\left(\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-3\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{32}{35} = \frac{2}{35}$$

Ejercicio 3.- Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal, con medias uno y dos respectivamente, varianzas uno y componentes independientes.

a) Calcular la expresión de la función de densidad de probabilidad conjunta del vector $(U,V) = (aX+bY,\ cY-dX)$

Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix}$ y $\mu = (\mu_1,\mu_2) \Rightarrow \mu A = (\mu_1,\mu_2)\begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=}$

medias por hipótesis son 1 y 2 respectivamente

$$= (1,2)\begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix} = (a+2b,\ -d+2c)$$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ (como las componentes son independientes sabemos que $\rho = 0$ y $\sigma_1^2 = 1 = \sigma_2^2$ (varianzas 1)

esta matriz se transforma en: $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, $A^T\Sigma A = \begin{pmatrix} a & b \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & -ad+bc \\ -ad+bc & d^2+c^2 \end{pmatrix}$

$$(u,v) \to \mathcal{N}((\mu A, A^T \Sigma A)) = \mathcal{N}\left((a+2b, -d+2c), \begin{pmatrix} a^2+b^2 & -ad+bc \\ -ad+bc & d^2+c^2 \end{pmatrix}\right)$$

En este caso, la función de densidad viene dada por:

→ expresión general

$$f_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi [\det \Sigma]^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right)}$$

Por tanto, $f_{(u,v)}(u,v) = \dfrac{1}{2\pi \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+c^2}\sqrt{1-\frac{bc-ad}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+c^2}}}} \exp\left(-\dfrac{1}{2\left(1-\frac{(bc-ad)^2}{(a^2+b^2)(d^2+c^2)}\right)}\right)\Bigg[$

$$\rho \sigma_u \sigma_v = -ad+bc$$

$$\rho \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+c^2} = -ad+bc$$

$$\boxed{\rho = \frac{-ad+bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+c^2}}}$$

$$\left[\frac{(u-a-2b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(v+d-2c)^2}{d^2+c^2} - 2\frac{-ad+bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+c^2}}\left(\frac{u-a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{v+d-2c}{\sqrt{d^2+c^2}}\right)\right]$$

b) Dar la curva de regresión mínimo cuadrática de U sobre V y porcentaje de varianza explicada por dicha curva.

La curva de regresión mínimo cuadrática de U sobre V viene dada por:

$$E(U/V=v) = \mu_u + \rho \frac{\sigma_u}{\sigma_v}(v-\mu_v)$$

En este caso será:

$$a+2b + \frac{-ad+bc}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{d^2+c^2}} \frac{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{d^2+c^2}}(v+d-2c) =$$

$$= a+2b + \frac{bc-ad}{d^2+c^2}(v+d-2c)$$

Además sabemos que a la proporción de varianza explicada por la regresión se le llama coeficiente de determinación.

$$\rho^2_{u,v} = \eta^2_{u/v} = \eta^2_{v/u} = \rho\frac{\sigma_u}{\sigma_v}\rho\frac{\sigma_v}{\sigma_u} = \rho^2 = \frac{(bc-ad)^2}{(a^2+b^2)(d^2+c^2)}$$

Ejercicio 4.- El 26% de los trabajadores de una empresa, en Argentina, poseen nacionalidad francesa, el 14% son de nacionalidad italiana, el 18% poseen nacionalidad portuguesa y el 42% poseen nacionalidad argentina.

Se seleccionan al azar 15 trabajadores de dicha empresa:

a) Calcular la probabilidad de que al menos 7 sean de nacionalidad francesa o portuguesa.

X_F: nº de trabajadores de nacionalidad francesa. $P(X_F) = 0'26$

X_I: nº de trabajadores de nacionalidad italiana. $P(X_I) = 0'14$

X_P: nº de trabajadores de nacionalidad portuguesa. $P(X_P) = 0'18$

X_A: nº de trabajadores de nacionalidad argentina. $P(X_A) = 0'42$

$(X_F, X_P) \rightsquigarrow M_2(15; 0'26, 0'18)$

- $P[X_F + X_P \geq 7] = \sum_{\substack{x_F + x_P \geq 7 \\ x_F, x_P \in \{1, \dots 15\}^2}} \frac{15!}{x_F! \, x_P! \, (15 - x_F - x_P)!} (0'26)^{x_F} (0'18)^{x_P} (1 - 0'44)^{15 - x_F - x_P} =$

$= 0'5164$

Otra forma de razonarlo es:

Sea F el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador de nacionalidad francesa en una extracción al azar y P el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador de nacionalidad portuguesa. Por tanto la probabilidad de seleccionar a un trabajador de nacionalidad francesa o portuguesa en una extracción al azar es:

$$P(F \cup P) = P(F) + P(P) - P(F \cap P) = P(F) + P(P) = 0'26 + 0'18 = 0'44$$

Sea X_1: nº de trabajadores de Francia o Portugal, y donde $X_1 \sim B(15, 0'44)$.

- $P(X_1 \geq 7) = 1 - P(X_1 < 7) = 1 - P(X_1 \leq 6) = \boxed{0'516522}$

$P(X_1 = 0) = \binom{15}{0} 0'44^0 (1 - 0'44)^{15} = 0'000167\,04$

$P(X_1 = 1) = \binom{15}{1} 0'44 \; (1 - 0'44)^{15-1} = 0'00197$

$P(X_1 = 2) = \binom{15}{2} 0'44^2 \; (1 - 0'44)^{15-2} = 0'01083$

$P(X_1 = 3) = \binom{15}{3} 0'44^3 \; (1 - 0'44)^{15-3} = 0'036866$

$P(X_1 = 4) = \binom{15}{4} 0'44^4 \; (1 - 0'44)^{15-4} = 0'086899$

$P(X_1 = 5) = \binom{15}{5} 0'44^5 \; (1 - 0'44)^{10} = 0'15021$

$$P(X_1=6) = \binom{15}{6} 0'44^6 (1-0'44)^9 = 0'196703$$

b) Calcular la probabilidad de que al menos 4 sean de nacionalidad italiana o portuguesa, y al menos 9 sean de nacionalidad argentina.

$(X_I + X_P, X_A) \rightsquigarrow M_3(15; 0'14, 0'18, 0'42)$

$$P[X_I + X_P \geq 4, X_A \geq 9] = \sum_{\substack{x_I+x_P\geq 4 \\ x_I,x_P\in\{1,\dots,15\}^2}} \sum_{\substack{x_A\geq 9 \\ x_A\in\{1,\dots,15\}}} \frac{15!}{x_I!\, x_P!\, x_A!\,(15-x_I-x_P-x_A)!} \cdot$$

$$\cdot (0'14)^4 \cdot (0'18)^4 \cdot (0'42)^9 (1-0'74)^{15-\sum_{i=1}^{2}(x_i-x_j)} = 0'0442$$

Otra forma de razonarlo es:

Sea I el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador de nacionalidad italiana en una extracción al azar y P el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador de nacionalidad portuguesa. Por tanto, la probabilidad de seleccionar a un trabajador de nacionalidad italiana o portuguesa en una extracción al azar es:

$$P(I\cup P) = P(I)+P(P)-P(I\cap P) = P(I)+P(P) = 0'14+0'18 = 0'32$$

Sea $X=(X_1,X_2)$ un vector aleatorio discreto, donde:

- X_1: nº de trabajadores de Italia o Portugal
- X_2: nº de trabajadores de Argentina

$(X_1,X_2) \sim M_3(15; 0'32, 0'42)$

$$P(X_1\geq 4, X_2\geq 9) = P(X_1=4, X_2=9) + P(X_1=5, X_2=9) + P(X_1=4, X_2=10) +$$
$$+ P(X_1=6, X_2=9) + P(X_1=4, X_2=11) + P(X_1=5, X_2=10) =$$
$$= \frac{15!}{4!\,9!\,2!} 0'32^4 \cdot 0'42^9 \cdot 0'26^2 + \frac{15!}{5!\,9!\,1!} 0'32^5 \cdot 0'42^9 \cdot 0'26 + \frac{15!}{4!\,10!\,1!} 0'32^4 \cdot 0'42^{10} \cdot 0'26 +$$
$$+ \frac{15!}{6!\,9!\,0!} 0'32^6 \cdot 0'42^9 \cdot 0'26^0 + \frac{15!}{4!\,11!\,0!} 0'32^4\, 0'42^{11} \cdot 0'26^0 + \frac{15!}{5!\,10!\,0!} \cdot 0'32^5 \cdot 0'42^{10} \cdot 0'26^0 =$$

$$= \boxed{0'044519}$$

c) Se abre una nueva sucursal en Francia con una plantilla de 20 trabajadores seleccionados de forma independiente. Calcular la predicción mínimo cuadrática del número de trabajadores con nacionalidad francesa que formarán parte de dicha plantilla, dado que 10 trabajadores de esta nueva sucursal poseen nacionalidad argentina. Calcular la razón de correlación asociada a dicha predicción.

- $x_A = 10$ en $n = 20$ trabajadores.
- Sea F el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador Francés en una extracción al azar y A el suceso aleatorio de seleccionar a un trabajador de nacionalidad argentina. Por tanto, $P(F) = 0'26$ y $P(A) = 0'42$.

Queremos calcular la predicción mínimo cuadrática del nº de trabajadores franceses que formarán parte de la plantilla.

- Vamos a calcular para ello la curva (recta) de regresión de x_F / x_A.

$$\boxed{x_F = \frac{n p_F}{1 - p_A} - \frac{p_F}{1 - p_A} x_A = \frac{20 \cdot 0'26}{1 - 0'42} - \frac{0'26}{1 - 0'42} \cdot 10 = \frac{130}{29} = 4'48276}$$

- Las razones de correlación (coinciden con el coeficiente de determinación) vienen dados por:

$$\boxed{\eta_{x_F/x_A}} = \eta_{x_A/x_F} = \rho^2_{x_A x_F} = \frac{p_A p_F}{(1 - p_A)(1 - p_F)} = \frac{0'26 \cdot 0'42}{(1 - 0'42)(1 - 0'26)} = \frac{273}{1073} =$$

$$= \boxed{0'2544268}$$

Ejercicio 5.- Probar la siguiente propiedad

$$Var(X) = Var(E(X/Y)) + E(Var(X/Y))$$

$$Var(X) \overset{\text{definición de varianza}}{=} E[(X - E[X])^2] \underset{\substack{\text{propiedades de la}\\ \text{esperanza}}}{=} E[E[(X - E[X])^2/Y]] \underset{\substack{\text{Desarrollo del cuadrado}\\ \text{de una diferencia}}}{=} E[E[(X^2 + (E[X])^2 - 2XE[X])/Y]] =$$

$$= E[E[X^2/Y] + (E[X])^2 - 2E[X]E[X/Y]] = E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2 + (E[X/Y])^2 +$$

$$+ (E[X])^2 - 2E[X]E[X/Y]] = E[Var(X/Y) + (E[X/Y])^2 + (E[X])^2 - 2E[X]E[X/Y]] =$$

$$= E[Var(X/Y)] + E[(E[X/Y] - E[X])^2] = E[Var(X/Y)] + Var(E[X/Y]).$$