ResumenT5.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RESUMEN-T5: SISTEMAS LINEALES

$\boxed{x' = A(t)x + b(t)}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A: I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ $\quad b: I \to \mathbb{R}^N$ (continuas)

$A(t) = (a_{ij}(t))$ $\quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Problema de variables iniciales: (PVI)

Si al problema anterior le añadimos una condición inicial:

$$(1)\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad t_0 \in I,\ x_0 \in \mathbb{R}^N$$

$$A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N}) \text{ y } b \in C(I, \mathbb{R}^N)$$

Teorema de existencia y unicidad:

En las condiciones anteriores, el problema (1) tiene una única solución $\boxed{x \in C^1(I, \mathbb{R}^N)}$

▷ COMENTARIOS:

(i) Es un resultado global: la solución está definida en el mismo intervalo I que los coeficientes.

(ii) En la lección anterior probamos el caso $N = 1$.

(iii) El Teorema de existencia y unicidad para la ec. de orden K es un corolario: Dado el problema

$$\begin{cases} y^{k)} + a_{k-1}(t)y^{k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = \beta(t) \\ x(t_0) = \gamma_0,\ x'(t_0) = \gamma_1, \dots, x^{k-1)}(t_0) = \gamma_{k-1} \end{cases}$$

Definimos la nueva incógnita (vectorial)

$x = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{k-1)} \end{pmatrix}$ y llegamos al problema equivalente (1) con $N = K$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \end{pmatrix}$$

Preliminares:

1. Normas matriciales:

Norma fija en $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ y la norma matricial asociada:

dada $A \in \mathbb{R}^{N\times N} \Rightarrow$ $\boxed{\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}}$

1) $\|I\| = 1$, I matriz identidad

Ver ej apuntes.

2) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ $x \in \mathbb{R}^N$

3) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$: $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$

2. Integral vectorial:

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $f = f(t)$, con coordenadas $f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

definimos su integral como el vector de $\mathbb{R}^N$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1 dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n dt \end{pmatrix}}$$

i) $A\left(\int_a^b f dt\right) = \int_a^b A f dt$ si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$

ii) $\left\| \int_a^b f dt \right\| \leq \int_a^b \|f\| dt$

3. Convergencia Uniforme:

A veces validez ∞

Dado I intervalo y $\varphi: I \to \mathbb{R}^N$, definimos $\boxed{\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\|}$

Dada una sucesión de funciones $f_n: I \to \mathbb{R}^N$

$$\boxed{\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f: I \to \mathbb{R}^N \quad \text{si} \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0}$$

i) funciona bien con las integrales: si $[a,b] \subset I$ $\quad f_n \xrightarrow{c.u} f$ en $I \Rightarrow$

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$$

ii) Va bien con la continuidad: si $f_n: I \to \mathbb{R}^N$ continua para cada $n \in \mathbb{N}$

y $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$ en $I \Rightarrow f$ es continua en I

iii) No va bien con las derivadas

▷ EL CRITERIO DE WEIERESTRASS

Sup. que $\sum_{n\geq 0} M_n$ es una serie convergente de nºs positivos y se cumple que $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq M_n$ $\forall t \in I$. Entonces:

$$\boxed{\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f} \text{ en } I \text{ para algún } f: I \to \mathbb{R}^N$$

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Dem del PVI :

Hecho en los apuntes de clase: Pág 3 → Pág 5

Debemos destacar los iterantes de Picard.

Iterantes de Picard : ⇒ Para dem que una suces. converge unif a una sol del PVI

$$\boxed{\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} \quad \text{PVI} \qquad \begin{array}{l} A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N}) \\ b \in C(I, \mathbb{R}^N) \end{array} \qquad t_0 \in I,\ x_0 \in \mathbb{R}^N$$

•) Sea $J \subset I$ compacto $\Rightarrow \alpha = \max_J \|A(t)\| \quad \beta = \max_J \|b(t)\|$

•) Integramos la ec en $[t_0,t]$ $\Rightarrow \int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + b(s)]ds$

Empezamos a calcular:

Propiedad

① $\|x_1 - x_0\| = \|\int_{t_0}^t [A(s)x_0 + b(s)]ds\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)x_0 + b(s)\|ds$

$\leq \int_{t_0}^t \big(\underbrace{\|A(s)\|}_{\leq\alpha}\|x_0\| + \underbrace{\|b(s)\|}_{\leq\beta}\big)ds \leq \int_{t_0}^t (\alpha\|x_0\| + \beta)ds \leq$

Acotamos por J (longitud finita)

$\leq (\alpha\|x_0\| + \beta)|J| = C$

② $\|x_2 - x_1\| = \|\int_{t_0}^t [A(s)x_1 + \cancel{b(s)}]ds - \int_{t_0}^t [A(s)x_0 + \cancel{b(s)}]ds\|$

$= \|\int_{t_0}^t A(s)[x_1(s) - x_0]ds\| \leq |\int_{t_0}^t \underbrace{\|A(s)\|}_{\leq\alpha} \underbrace{\|x_1 - x_0\|}_{\leq C} ds| \leq$

OJO Aquí lo dejamos

$\leq \alpha C |t - t_0|$

. . .

$$\boxed{\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| < \alpha^n C \frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in J}$$

Ahora, aplicamos **CRITERIO DE WEIERESTRASS**

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq M_n = \alpha^n C \frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

$\sum M_n$ convergente por el crit del cociente $\left(\frac{M_{n+1}}{M_n} \to 0\right)$

$\Rightarrow \boxed{\{x_n\} \xrightarrow{c.u} x}$ en J

Para dem que es sol comprobamos que verifica $\begin{cases} x' = Ax + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Sistemas Homogéneos: $\boxed{x' = A(t)x}$ (1)

Definimos un operador $\Rightarrow$ $\boxed{L[x] = x' - A(t)x}$: $L \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$

$L : (I, \mathbb{R}^N) \longrightarrow (I, \mathbb{R}^N)$

L es lineal y $\boxed{Z = \{\text{sol de } (1)\} = \ker L}$

- **LEMA**: $\dim \ker L = N$ $\qquad Z \cong \mathbb{R}^N$ $\qquad \phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^N$, $x(t) \longmapsto x(t_0)$

  Es un isomorfismo $\rightarrow$ biyección.

- **PROPOSICIÓN**:

  Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ soluciones, son equivalentes:

  1) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ base de Z

  2) $\det(\varphi_1(t) \dots, \varphi_N(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$ $\quad$ ← Wronskiano

  3) $\exists t_0 \in I$: $\det(\varphi_1(t_0) \dots \varphi_N(t_0)) \neq 0$

Coeficientes constantes:

$$\boxed{x' = Ax \quad : A \in M_{N \times N}}$$

- Solución:

  λ valor propio de A

  v vect propio asociado a λ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = e^{\lambda t} v}$

↳ VALOR PROPIO COMPLEJO:

$x' = Ax$

λ valor propio complejo
v vector propio asociado $\Big\}$ $\varphi_1 = \text{real}(e^{\lambda t} v)$, $\varphi_2 = \text{compleja}(e^{\lambda t} v)$

Ej. $x' = Ax$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = \pm i \Rightarrow \lambda = i$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\varphi(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \operatorname{sen} t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ i \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$

REAL $\qquad$ I

Matriz Solución:

Dados soluciones $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in Z$, definimos la matriz solución:

$$\boxed{\phi(t) = (\varphi_1(t) | \cdots | \varphi_N(t))}$$

· Una matriz sol. se llama **fundamental** si:

$\boxed{\det(\phi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Z = \{ \phi(t) C : C \in \mathbb{R}^N \}}$

Dada una matriz sol, su derivada: $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$

Deriv. de una función matricial:

Dada $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ definimos

$$\Psi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\Psi(t+h) - \Psi(h)]$$

▷ En la práctica:

$$\boxed{\Psi(t) = (\Psi_{ij}(t)) \Rightarrow \Psi'(t) = (\Psi_{ij}'(t))}$$

▷ Propiedad: $A, B : I \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$

$$(A(t) \cdot B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

OJO con el orden pq son matrices

• **LEMA**: Sea $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ de clase C^1. Son equivalentes:

i) $\phi(t)$ es una matriz solución

ii) $\phi'(t) = A(t)\phi(t) \quad \forall t \in I$

Matriz Fundamental:

Def: Una matriz fundamental es una matriz solución con $\det \neq 0$ $\boxed{\phi(t)}$

Def: Una matriz fundamental principal en t_0 $\left(\boxed{\Psi(t)}\right)$ es una m.f. ϕ tal que $\det(t_0) = I$

Si conocemos la matriz fundam. principal en $t_0 = \Psi$, la solución del PVI con $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = \Psi(t) x_0}$

- **LEMA**: Sup que $\phi(t)$ m.f. y $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matriz cte con $\det(C) \neq 0$

$$\boxed{\phi(t)C \text{ también m. fund.}}$$

- **COROLARIO**:

si $\phi(t)$ es una matriz fundamental cualquiera, la m.f. en t_0

$$\boxed{\varphi(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)}$$ (Es única para cada t_0)

FÓRMULA DE JACOBI-LIOUVILLE

Si $\phi(t)$ es matriz solución de $x' = A(t)x$, $t_0 \in I$. Entonces

$$\boxed{\det(\phi(t)) = \det\phi(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{traza}(A(s))ds}}$$

ECUACIÓN LINEAL COMPLETA:

$$x' = A(t)x + b(t)$$

$\boxed{Lx = x' - A(t)x}$: $\boxed{Z = \{\text{soluciones } y = x^* + \ker L}$

Donde $x_* \rightarrow$ sol. particular.

▷ Resolución:

MÉTODO DE VARIACIÓN DE CTES:

$$x(t) = \phi(t)c(t) \Longrightarrow c(t) = \int \phi^{-1}(t)b(t)dt$$

Solución particular:

$$\boxed{x_* = \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t)\, b(t)dt}$$

▷ FÓRMULA DE VAR. DE CTES:

Sol general: $\boxed{x(t) = \phi(t)c(t) + \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\, b(t)dt}$

SOL. DEL PVI: $x(t_0) = x_0$

$$\boxed{x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int \phi^{-1}(t)b(t)dt}$$

Exponencial de una matriz:

$$\boxed{e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}} \qquad A \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- **LEMA:**

Sea $\{M_n\}$ una sucesión de matrices en $\mathbb{R}^{N\times N}$ tales que la serie numérica $\{\|M_n\|\}$ es convergente. Entonces, la serie matricial $\sum M_n$ también es convergente. Además:

$$\boxed{\left\| \sum M_n \right\| \leq \sum \|M_n\|}$$

En nuestro caso: $M_n = \frac{1}{n!} A^n \Rightarrow \|M_n\| = \boxed{\frac{1}{n!}\|A^n\| \leq \frac{1}{n!}\|A\|^n}$

$$\sum \|M_n\| \leq \boxed{\sum \frac{1}{n} \|A\|^n = e^{\|A\|}}$$

$$\boxed{\|e^A\| \leq e^{\|A\|}}$$

Ejemplos:

1. Matriz diagonal: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad e^A = \sum \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^n}{n!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum \frac{\lambda_n^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

2. Matriz nilpotente: $A^n = (0)$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1/3! \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1/2 \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema mfp en 0:

Dada $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boxed{\phi(t) = e^{At}}$ es la matriz fundamental principal en cero de $\boxed{x' = Ax.}$

- NOTA 1: $x' = Ax$
  $x(0) = x_0$ es $x(0) = x_0 e^{At}$ Dem: apuntes pág 10

- NOTA 2: la matriz fundamental principal en t_0 es

$$\boxed{e^{A(t-t_0)}} \Rightarrow \text{EJ 5: Relación 6}$$

▸ Propiedades: $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$

- $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$
- $AB = BA \Rightarrow A e^B = e^B A$

Cálculo de la matriz exponencial:

PROPIEDAD: $\boxed{A = PBP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^BP^{-1}}$

▸ CASO 1: A diagonalizable en $\mathbb{R}$

$A = PDP^{-1}$: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}}$

$$\boxed{e^{At} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}P^{-1}}$$

▸ CASO 2: A diagonalizable en $\mathbb{C}$

Igual que en el caso anterior, $Pe^{Dt}P^{-1}$ mult. de matrices complejas con resultado real. (Relación 6 ej 4)

▸ CASO 3: A no diagonalizable

▸ FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz por bloques:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Si A matriz de orden 2 no diagonalizable:

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$$

$e^A = Pe^DP^{-1}$

Valores propios $\Rightarrow (A-\lambda I)^2 v = 0$

Si A matriz de orden 3 no diagonalizable:

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $ma = 3$ $mg = 1$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $ma = 3$ $mg = 2$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $ma = 3$ $mg = 3$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS:

- coef ctes $A \in M_n(\mathbb{R})$
  - sin PVI $x(t) = e^{\lambda t}v$ exponencial
  - PVI $\Rightarrow x(t) = \Psi(t)x_0$
  - ↳ si hubiera mult. varia FORMA JORDAN
- No ctes $A = A(t)$
  - sin PVI: encontrar ϕmf
  - con PVI: $x(t) = \Psi(t)x_0$
  - No hay mét para ϕmf si lo preg en el examen nos la dará o explicará cómo sacarla (Rel 5: 4,5)