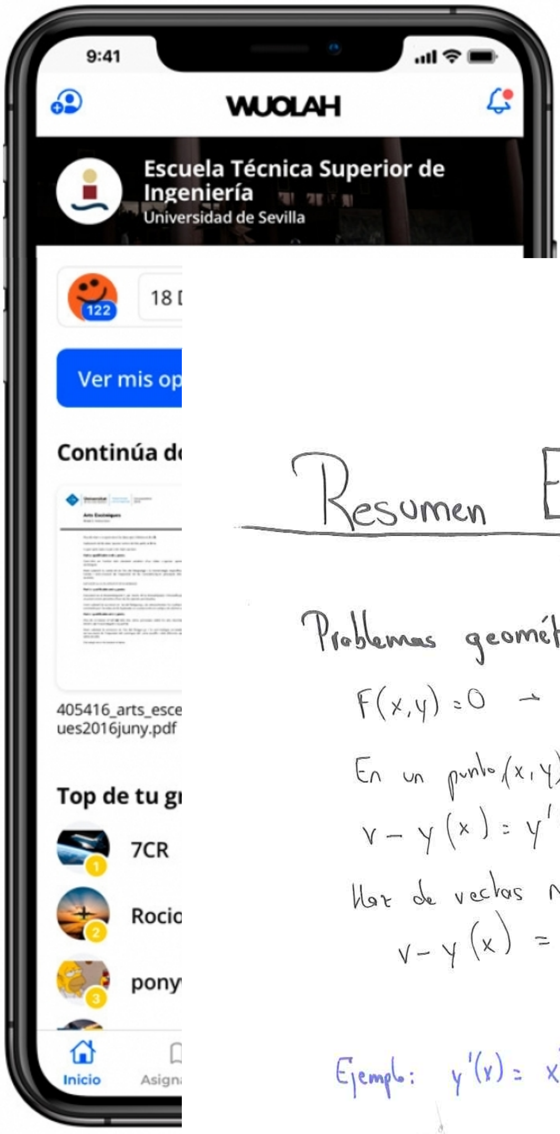
Ecuaciones-resumen.pdf

Asmilex

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada



Resumen Ecuaciones Diferenciales

Problemas geométricos: haz de rectas tangentes a una curva.

$F(x,y)=0 \rightarrow y(x)=\dots$

En un punto (x,y), la recta tangente es:

$v - y(x) = y'(x)(u-x)$

Haz de rectas normales:

$$v - y(x) = \frac{-1}{y'(x)}(u-x) \iff y'(x)(v-y(x)) = -(u-x)$$

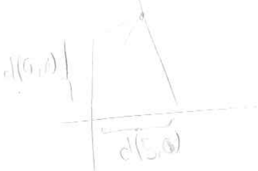
Ejemplo: $y'(x) = x^2 + y^2(x)$. $d(0,A) = d(B,0)$

$A = (0, y - xy')$

tangente: $v - y = y'(u-x) \overset{u=0}{\Longrightarrow} v = -y'\cdot x + y$

normal: $y'\cdot(v-y) = -(u-x) \overset{v=0}{\Longrightarrow} u = x + y\cdot y'$

$B = (x+yy', 0)$



Misma distancia $\Rightarrow y - xy' = x + yy' \iff y' = \dfrac{y-x}{y+x}$

Ejemplo: Identifica la curva que pasa por $(1,1)$ y todas sus rectas pasan por $(0,0)$

Condición: $u, v = 0$ normal

$y'(0-y) = x - 0 \iff -yy' = x$. Pasa por $(1,1)$

Integrar con respecto de $x \Rightarrow x^2 + y^2 = -2c \underset{\substack{x=1 \\ y(1)=1}}{\Longrightarrow} x^2 + y^2 = 2$

Sistemas planos: Tomamos

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

Dada una sol del sistema plano, llamamos **órbita** de la solución a $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

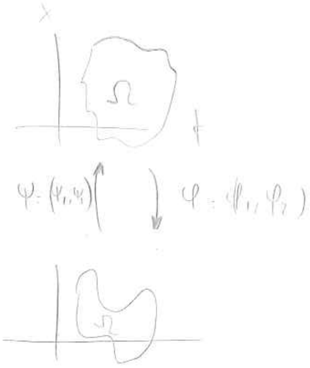
Ejemplo: $(\cos(t), -\operatorname{sen}(t)) \rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x)} = \frac{-x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

Cambios de Variable

Condiciones para usar un cambio de variable:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad , \quad \varphi: \begin{cases} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$



(H1) $\varphi: \Omega \to \hat{\Omega}$ difeomorfismo de clase C1

(H2) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua

(H3) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} f(t,x)$ y $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$ son equivalentes

Teorema de la Función Implícita:

Sea $F \in C^1$, $F: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ~~di~~ Ω abierto. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$: $F(t_0, x_0) = 0$,

$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, x: I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ abierto tal que $(t, x(t)) \in \Omega$ si $t \in I$,

$F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Ecuación de variables separadas:

$$\boxed{x' = p(t)\cdot q(x)}$$

$$\frac{dx}{dt} = p(t)\,q(x) \iff \int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\,dt \implies R(x) = P(t) + C$$

Ejemplo: $x' = t(x-1)$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \int t\,dt \iff \ln|x-1| = \frac{t^2}{2} + c$$

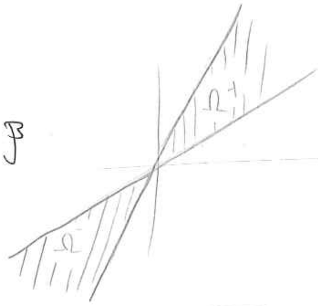
$\implies x = 1 + k\cdot e^{\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}-\{0\}$,

Si $k=0 \implies$ recuperamos $x(t) = 1 \implies x(t) = 1 + ke^{\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

A partir de ahora, mucho cuidado con los dominios. Hay que vigilarlos

Ecuaciones homogéneas:

$$\boxed{x' = h\left(\frac{x}{t}\right)}, \quad h: \underset{]\alpha,\beta[}{J} \to \mathbb{R}. \quad \text{Dominio: } \alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

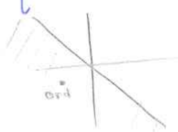


Usamos cambio de variable

$$\begin{cases} s = t \\ y = \frac{x}{t} \end{cases} \implies \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = \frac{x't - x}{t^2} = \frac{h\left(\frac{x}{t}\right)t - x}{t^2} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{p(t)} \underbrace{\left(h(y) - y\right)}_{q(y)}$$

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$. $y(-1) = -1$

Dominio: $\Omega = \{(x,y) \mid x+y<0,\ x<0\}$ por la condición



$h: \underset{(-\infty,\beta)}{J} \to \mathbb{R}$ $\quad h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} \to h(u) = \frac{u-1}{u+1}$.

Podemos tomar ~~(-1,1)~~ $(-1,\infty)$ por la condición

$\Omega = \{(x,y) \mid x<0,\ -1 < \frac{y}{x}\}$.

$$u = \frac{y}{x} \implies y = xu \implies \underset{h(u)}{y'} = 1\cdot u + x\cdot u' \implies u' = \frac{h(u)-u}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{u-1}{u+1} - u\right) =$$

$= \frac{-1}{x}\left(\frac{1+u^2}{u+1}\right)$. Es una ecuación de variables separadas. Sale que

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+1| + \arctan(u) = -\ln|x| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right| + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + c, \text{ con}$$

$c = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}$ por la condición inicial.

Ecuaciones reducibles a homogéneas:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ax+bt+c}{Ax+Bt+C}\right)}, \quad h: J =]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}, \quad a,b,c,A,B,C \in \mathbb{R}.$$

Hacemos el cambio $\varphi: \begin{cases} s = t + \xi \\ y = x + \eta \end{cases}$, con ξ, η tales que $\begin{cases} -a\eta - b\xi + c = 0 \\ -A\eta - B\xi + C = 0 \end{cases}$.

Nos queda de la forma $y' = a \cdot h\left(\dfrac{y+c}{\lambda y + C}\right) + b$, con $(A,B) = \lambda \cdot (a,b)$

Ecuaciones lineales:

$$\boxed{x' = a(t)x + b(t)}, \quad a,b: I \to \mathbb{R} \text{ continuas}$$

•) Ecuación lineal homogénea:

$$\boxed{x' = a(t)\cdot x} \Rightarrow x(t) = K\cdot e^{A(t)}, \text{ con } K \in \mathbb{R}, \quad A(t) = \int a(t)\,dt$$

Ejemplo: $x' = \dfrac{x}{t} = \left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot x$, con $x(-1) = 2$. Tomamos $I = (-\infty, 0)$ por la cond. ini.

$$x(t) = K\cdot e^{\int \frac{1}{t}dt} = K\cdot e^{\ln(-t)} = -K\cdot t \overset{\text{cond ini}}{\Longrightarrow} x(t) = -2t.$$

•) Ecuación lineal completa:

$$\boxed{x' = a(t)x + b(t).} \Rightarrow \underbrace{K\cdot e^{A(t)}}_{\text{homogénea}} + \underbrace{e^{A(t)}\cdot\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\,b(s)\,ds}_{\text{particular de la completa}}.$$

Fórmula de Variación de Constantes

Ejemplo: $x' = x+1$, $x(1) = 3$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\text{Homogénea: } x' = x \Rightarrow x = Ke^{t} \\ \cdot\text{Particular: } x(t) = -1 \text{ cte} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = K\cdot e^{t} - 1 \overset{\text{cond ini}}{\Longrightarrow} x(t) = \dfrac{4}{e}e^{t} - 1$

También se puede usar la fórmula y ya. Aunque si sacas una particular, es más cómodo.

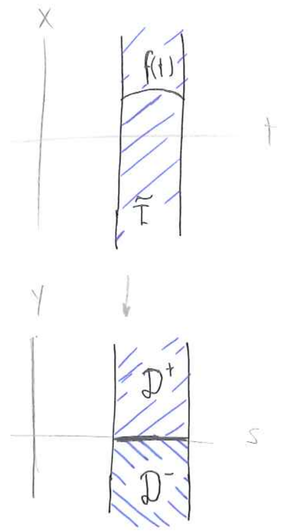
Ecuación de Ricarti:

$$\boxed{x'(t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)}, \quad \text{con } a,b,c: I \to \mathbb{R} \text{ continuas}$$

$\tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$, $\tilde{D} = \tilde{I} \subset \mathbb{R}$.

Si f es una solución particular:

$$\varphi: \tilde{D} \to D \quad \varphi(t,x) \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x - f(t)} \\ s = t \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{y} + f(t) \\ t = s \end{array} \right\} = \psi(s,y)$$



$$\tilde{D}^+ = \{(t,x) \mid x > f(t)\} \xrightarrow{\varphi} D^+ = \{(s,y) \mid y > 0\}$$

$$\tilde{D}^- = \{(t,x) \mid x < f(t)\} \longrightarrow D^- = \{(s,y) \mid y < 0\}$$

Obtenemos que $y' = -\big(2a(t)f(t) + b(t)\big)y - a(t)$, la cual es lineal. Se resuelve y se deshace el cambio de variable.

Ejemplo: $x' = -x^2$ $f(t)$

.) Particular: $x(t) = 0$

$y = \frac{1}{x-0}$; $y' = \frac{-x'}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$. Integramos:

$y(x) = t + c \Rightarrow x = \frac{1}{t+c}$, $c \in \mathbb{R}$.

También se puede hacer con $f(t) = \frac{1}{t}$:

$$y = \frac{1}{x - \frac{1}{t}} \; ; \; x = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Rightarrow x' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{t^2} = -x^2 = -\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{t}\right)^2$$

$$\frac{-y'}{y^2} - \frac{1}{t} = \frac{-1}{y^2} - \frac{2}{y} - \frac{1}{t^2} \iff 1 + \frac{2}{t}y$$. Deshacer el cambio y resolver.

Debe salir lo mismo.

Ecuaciones Exactas

Condición de exactitud:

Sean $P, Q \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$ tales que existe $U \in C^1(\Omega)$ que verifica:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Entonces, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

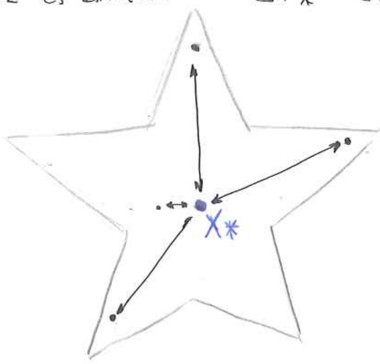
Ejemplo: $3x^2+y + (4y^3+x)y' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 3x^2+y \\ Q(x,y) = 4y^3+x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{se verifica condición}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P = 3x^2+y \xRightarrow{\text{integrar}} x^3 + xy + \varphi(y) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q = 4y^3+x \Rightarrow y^4 + xy + \psi(x) \end{array}\right. \Rightarrow U: x^3+xy+y^4 = C, \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ cte.}$$

Dominio estrellado:

Se dice que un dominio Ω es estrellado si $\exists x_* \in \Omega$ tal que $\forall x \in \Omega$, $[x_*, x] \subset \Omega$



Segmentos contenidos en el propio conjunto; no se salen

Estrategias:

$\bullet)\ \mu(x,y) = m(x) \quad = \quad e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}}$

$\bullet)\ \mu(x,y) = m(y) \quad = \quad e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}}$

$\bullet)\ \mu(x,y) = m(x^2+y^2)$: $\qquad \xi = x^2+y^2$

$\mu_y = m'(x^2+y^2)\cdot 2y$
$\mu_x = m'(x^2+y^2)\cdot 2x$ $\Rightarrow m'(\xi)\,2y\,P(x,y) - m'(\xi)\,2x\,Q(x,y) = m(\xi)(Q_x - P_y)$;

$$\frac{m'(\xi)}{m(\xi)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = f(\xi)$$

$$\Rightarrow m(\xi) = e^{F(\xi)}, \quad \text{con} \quad F'(\xi) = f(\xi)$$

Todas se hacen prácticamente igual

$\bullet)\ \mu(x,y) = m(x+y)$

Ejemplo: $x+y - (y-x)y' = 0$

$P = x+y$
$Q = y-x$ $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Factor integrante: $\mu(x,y) = m(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{-1-1}{2y(x+y) - 2x(y-x)} = \frac{-1}{x^2+y^2} = f(\xi)$

$\Rightarrow F(\xi) = -\log(x^2+y^2)$; $\quad m' = f(\xi)\cdot m$;

$$m(\xi) = e^{-\log(\xi)} = e^{-\log(x^2+y^2)} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Si queremos que tenga la forma $y(x)$, la condición del TFI nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

y, por hipótesis, se verifica. Por tanto: podemos encontrar una solución $y(x)$ de

$$y'(x) = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Ejemplo: $y^2 + 2x + (5y^4 + 2xy)y' = 0$

$P(x,y) = y^2 + 2x$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$Q(x,y) = 5y^4 + 2xy$

$Q(0,3) = 5 \cdot 3^4 \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = y^2 + 2x \underset{\text{integrar}}{\Rightarrow} u(x,y) = x^2 + xy^2 + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + xy^2 + y^5 = 3^5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 5y^4 + 2xy \Rightarrow u(x,y) = y^5 + xy^2 + \varphi(x)$$

Factores integrantes:

Decimos que $\mu \in C^1(\Omega)$ es un factor integrante si

1.- $\mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

2.- $\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

Condición para que esto ocurra:

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y) \equiv \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q = \mu \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

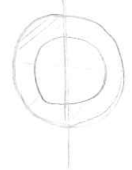
ecuación del factor integrante

Si Ω es estrellado, $z_* = 0$, $\gamma(\lambda) = (\lambda x, \lambda y)$, entonces

$$U(x,y) = \int_0^1 \langle (P(\lambda x, \lambda y), Q(\lambda x, \lambda y)), (x,y) \rangle \, d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \langle (P \circ \gamma(1), Q \circ \gamma(1)), \gamma'(\lambda) \rangle \, d\lambda$$

Ejemplo: cumple cond. de exactitud pero no tiene potencial

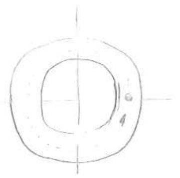


$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4 \right\}$$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y-x^2}{(x+y)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Tomamos $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\lambda \mapsto (\cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda)$$



$$I = \int_0^{2\pi} \langle (P(\gamma(\lambda)), Q(\gamma(\lambda))), \gamma'(\lambda) \rangle \, d\lambda =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda \, d\lambda = 2\pi \neq 0$$ $\Rightarrow$ no tiene potencial. Esto es por no ser estrellado.

Ecuación diferencial exacta:

Supongamos que la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ tiene una cond. ini. $y(x_0) = y_0$.

Pedimos que se cumpla que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

Podemos tomar una bola $B((x_0,y_0), r) \subset \Omega$ que es estrellada. Así, podemos encontrar U tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, de forma que $\underbrace{U(x_0,y_0)}_{C} = U(x,y)$

Teorema:

Sea Ω un dominio estrellado, $P, Q \in C^1(\Omega)$ que satisfacen la condición de exactitud en Ω.

Entonces, existe $U \in C^1(\Omega)$ tal que

$$\frac{dU}{dx} = P \quad , \quad \frac{dU}{dy} = Q \text{ en } \Omega .$$

Es decir, con que verifiquen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en Ω, podemos encontrar esa U.

Potencial:

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \mapsto (F_1(x,y), F_2(x,y))$. Se dice que el campo de fuerzas tiene potencial si existe $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla U = F$. Es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

En tal caso, se denomina **campo de fuerzas conservativo.**

Trabajo:

Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$; $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino/trayectoria. Definimos el trabajo del campo de fuerzas a lo largo de γ como:

$$T = \int_a^b < F(\gamma(t)) , \gamma'(t) > dt$$

Si F es conservativo:

$$T = \int_a^b < \nabla U (\gamma(t)), \gamma'(t)> dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(\gamma(t))\right) dt = \underline{U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))}$$

~~Si U es~~

Tema 4

Ecuación Lineal de Orden Superior:

$$x^{k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0 x = b(t)$$

Teorema de Existencia y Unicidad:

Dadas funciones continuas $a_0, \dots, a_{k-1}, b : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$,

existe una única solución del problema:

$$\left.\begin{aligned} x^{k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + a_0 x &= b(t) \\ x(t_0) &= \alpha_0 \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= \alpha_{k-1} \end{aligned}\right\}, \quad x \in C^1(I)$$

Este es el problema de valores iniciales.

Espacio de funciones:

$F(I, \mathbb{R})$.

- Si $f, g \in F(I, \mathbb{R}) \Rightarrow (g+f)(t) = g(t) + f(t)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda t) = \lambda f(t)$

Tenemos que $(F(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Decimos que $f_1, \dots, f_n \in F(I, \mathbb{R})$ son independientes si una combinación lineal igualada a 0 hace que los escalares se anulen.

Wronskiano:

Llamamos $W(f_1, \dots, f_n)(t)$ al siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)'}(t) & \dots & f_n^{(n-1)'}(t) \end{vmatrix}$$

con $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Si $W(f_1 \dots f_n) \neq 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ son independientes.

Ejemplo:

$$W(1, t, \dots, t^n) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^n \\ 0 & 1 & & n t^{n-1} \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n! \end{vmatrix} = n!! \neq 0$$

Ejemplo:

$$W(\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2)) = \begin{vmatrix} \cos(t^2) & \operatorname{sen}(t^2) \\ -2t \operatorname{sen}(t^2) & 2t\cos(t^2) \end{vmatrix} = 2t \neq 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0$$

El Operador diferencial:

$$L[x] = x^{k'} + a_{k-1} x^{(k-1)'} + \dots + a_1 x' + a_0 x, \text{ con } a_i \in I.$$

Este operador puede recibir cualquier función lo suficientemente derivable. Además, es lineal:

$$L[x+y] = L[x] + L[y]$$

$$L[\lambda x] = \lambda L[x].$$

Si consideramos Z como el conjunto de soluciones de la ecuación:

$$Z = \ker(L) = \{ x \in C^k(I) \mid L[x] = 0 \}.$$

Tenemos que

$$\dim Z = k$$

Ejemplo:

$$x'' + x = 0$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \text{sen}(t) \\ x_2(t) = \cos(t) \end{cases} \Rightarrow W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \text{sen} & \cos \\ \cos & -\text{sen} \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Lin. independ.}$$

$$Z = \{ x(t) \mid x(t) = k_1 \,\text{sen}(t) + k_2 \cos(t) \}$$

Teorema:

Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$. Son equivalentes:

(i) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ es un sistema fundamental

(ii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(iii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$

Llamamos a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ sistema fundamental si es una base de Z.

Fórmula de Liouville:

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in Z$, entonces

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\,ds}$$

Para todo $t_0, t \in I$.

Ejemplo:

$$x'' - \frac{2}{t^2} x = 0, \quad I = \mathbb{R}^+$$

$x(t) = at^2 + bt + c$. La proponemos por la forma de la eq.

$$\underbrace{2a}_{x''} - \frac{2}{t^2} \underbrace{(at^2 + bt + c)}_{x} = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 0 \Rightarrow \varphi(t) = t^2.$$

Como no conocemos otra solución, utilizamos la F.L.:

$$W(\varphi,\psi) = W_0 \cdot e^{-\int 0 \, ds} = W_0.$$

a_{k-1}

Imponemos que $W_0 \neq 0$. Entonces:

$$\begin{vmatrix} t^2 & \psi \\ 2t & \psi' \end{vmatrix} = W_0 \quad ; \quad \psi'(t)t^2 - 2t\psi(t) = W(\varphi,\psi)(t_0).$$

Podemos poner el valor de W_0 que queramos para el t_0 que queramos. Por ejemplo:

Fijamos $t_0 = 1$, $W_0 = 7$:

$$\psi'(t)t^2 - 2\psi(t)t = 7 \iff \psi(t) = c_* \cdot t^2 + \frac{7}{3t}.$$

Podemos coger de c_* lo que queramos. Únicamente nos interesa $\frac{7}{3t}$. Incluso podemos obviar el escalar $\frac{7}{3}$.

De esta forma, el sistema fundamental sería

$$\begin{cases} \varphi(t) = t^2 \\ \psi(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow x(t) = c_1 \cdot t^2 + c_2 \cdot \frac{1}{t}.$$

La ecuación lineal completa

$$(*) \quad x^{k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b(t), \qquad a_i, b \in I$$

•) Estructura de las soluciones:

$$Z = \{\text{Soluciones de } (*)\} = L^{-1}[b] = x^* + \operatorname{Ker}(L),$$

donde $L[x^*] = b$ (solución particular)

Ejemplo:

$$x'' + x = t^2$$

• Homogénea: $x'' + x = 0 \Rightarrow \varphi_1(t) = \cos(t), \quad \varphi_2(t) = \operatorname{sen}(t)$

• Particular: $x(t) = At^2 + Bt + C$. Método de los coeficientes indeterminados.

Proponemos una solución análoga a lo que aparece en b. No garantiza una solución.

$\Rightarrow \quad 2A + At^2 + Bt + C = t^2 \iff A = 1, \quad C = -2, \quad B = 0$

$\Rightarrow \quad x_p = t^2 - 2.$

Solución final: $x(t) = t^2 - 2 + c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Variación de Constantes:

Para orden 2:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Una solución tiene la forma

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

para la particular. φ_1 y φ_2 vienen dadas por la homogénea. El sistema

$$\left.\begin{aligned} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 &= 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' &= b(t) \end{aligned}\right\}$$

nos permite hallar las incógnitas c_1' y c_2':

$$c_1' = \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ b(t) & \varphi_2' \end{vmatrix} \Rightarrow c_1 = -\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)\,\varphi_2(s)}{W(\varphi_1, \varphi_2)(s)}\,ds$$

$$c_2' = \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b(t) \end{vmatrix} \Rightarrow c_2 = +\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)\,\varphi_1(s)}{W(\varphi_1, \varphi_2)(s)}\,ds$$

mediante Cramer. $W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

La solución final es:

$$x(t) = \underbrace{K_1 \cdot \varphi_1 + K_2 \cdot \varphi_2}_{\text{homogénea}} + \underbrace{c_1(t) \cdot \varphi_1 + c_2(t) \cdot \varphi_2}_{x_p}$$

Se puede extender a orden superior haciendo sucesivas derivadas:

$$x^{k} + \dots + a_0 x = b(t) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} c_i' \varphi_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} c_i' \varphi_i^{(k-2)'} = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} c_i' \varphi_i^{(k-1)'} = b(t) \end{array}\right\}$$

Principio de superposición

Si $L[x_i] = b_i$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ es solución de $L[x]$

con $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

Ejemplo:

$$x'' + x = 5t^2 + e^{3t}.$$

Particular: $\begin{cases} x'' + x = 5t^2 \rightarrow x_p^{(1)}(t) = 5(t^2-2) \\ x'' + x = e^{3t} \rightarrow x_p^{(2)}(t) = \frac{1}{10} e^{3t} \end{cases}$

Solución final: $x(t) = k_1 \cos(t) + k_2 \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{10} e^{3t} + 5(t^2-2)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

La ecuación homogénea de coeficientes constantes

$$L[X] = x^{k'} + a_{k-1} x^{(k-1)'} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b(t), \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}.$$

Buscamos soluciones del tipo $e^{\lambda t}$:

$$L[e^{\lambda t}] = \underbrace{\left(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0\right)}_{\substack{\shortparallel \\ p(\lambda), \text{ polinomio característico.}}} \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Necesitamos K raíces para hallar la solución:

1) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \varphi_i = e^{\lambda_i \cdot t}$. Cada raíz solución real nos proporciona una solución

2) Si $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = a + bi$, $b \neq 0$. La solución que nos da es:

$$x(t) = e^{at} \cdot \left(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt) \right).$$

Pero, por una propiedad, tanto $Re(x)$ como $Im(x)$ son soluciones. Por tanto:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{at} \cos(bt) \\ x_2(t) = e^{at} \operatorname{sen}(bt) \end{cases}$$

Ejemplo:

$$x'' + w^2 x = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + w^2 \cdot \lambda^0 = \lambda^2 + w^2. \qquad p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{-w^2} \Rightarrow \lambda = \pm wi.$$

Por tanto:

$$x(t) = e^{0 \cdot t} \left(\cos(wt) + i \operatorname{sen}(wt) \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \cos(wt) \\ x_2(t) = \operatorname{sen}(wt) \end{cases}$$

Si la raíz compleja λ tiene multiplicidad m, entonces son soluciones

$$\begin{cases} t^j e^{at} \operatorname{sen}(bt) \\ t^j e^{at} \cos(bt) \end{cases}, \text{ con } j = 0, \dots, m-1$$

Ejemplo:

$$x^{5)} - x^{4)} + 2x''' - 2x'' + x' - x = 0 \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

$$\lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \quad (a = 0,\ b = 1)$$

$$\Rightarrow \text{son soluciones} \begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow e^{1 \cdot t} \\ \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \cos(1 \cdot t) \\ \operatorname{sen}(1 \cdot t) \\ t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases} \end{cases}$$

Tema 5: Sistemas Lineales

$$x' = A(t)\cdot x + b(t)\text{, donde}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ continua, $b: I \to \mathbb{R}^n$ continua, $A = \left(a_{ij}(t) \right)$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Teorema:

Si $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y todo es continuo, entonces, existe una única solución $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

Herramientas que se necesitan para demostrar este teorema:

.) Norma matricial: si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\|A\| = \max \left\{ \|A\| x \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}\text{, con } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Propiedades de la norma:

i) $\|I\| = 1$

ii) $\|Av\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$

iii) $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$

.) Convergencia uniforme: $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, definimos $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\|$.

Decimos que $f_n: I \to \mathbb{R}^n$, $f_n \xrightarrow{cu} f$ si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Propiedades interesantes:

i) $f_n \xrightarrow{cu} f$ en I, $[a,b] \subset I \Rightarrow \int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow{cu} \int_a^b f(t)dt$

ii) Si $f_n: I \to \mathbb{R}$, f_n continuas y $f_n \xrightarrow{cu} f \Rightarrow f$ continua

iii) La cu no se conserva mediante derivadas.

•) <u>Criterio de Weierstrass:</u> supongamos que $\sum_{n\geq 0} M_n$ es una serie convergente de números positivos tal que

$$\| f_{n+1}(t) - f_n(t) \| \leq M_n \quad \forall t \in I$$

Entonces, $\{f_n\} \xrightarrow{cu} f$ en I.

Ejemplo: $f_n = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$. $I = [-10, 10]$. $|I| :=$ longitud.

$$\left| f_{n+1} - f_n \right| = \left| \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|I|^{n+1}}{(n+1)!} = \Omega_n.$$

Vemos que no depende de t; solo de n. Debemos comprobar con el criterio del cociente que converge.

•) <u>Notación</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. $\int_a^b f(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)\,dt \end{pmatrix}$

Iterantes de Picard

De la demostración del teorema anterior, nos quedaremos con esta forma de encontrar soluciones aproximadas. Supongamos que el intervalo de definición I tiene longitud finita y

$$\|A(t)\| \leq \alpha, \quad \|b(t)\| \leq \beta \quad \text{si } t \in I.$$

Construyamos un ejemplo de ellas:

$$\{x_n\} : I \to \mathbb{R}^n, \quad x_0(t) \equiv x_0 \text{ cond. ini}, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\,ds.$$

~~Supongamos que $A(t) = A$ matriz cte, $b(t) \equiv 0 \Rightarrow x' = Ax$.~~

$$\cancel{x_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A x_n(s)]\,ds}$$

Debemos acotar la norma de la diferencia: $\| x_{n+1} - x_n \| \leq \Omega_n$, con Ω_n indep. de t.

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)\,x_0(s) + b(s)]\,ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)x_0(s) + b(s)\|\,ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left[\|A(s)\|\|x_0(s)\| + \|b(s)\|\right] ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha \|x_0(s)\| + \beta]\,ds \right| \leq |I| \cdot (\alpha \|x_0\| + \beta) = C.$$

Es importante recordar este, pero no los siguientes. Además, no lo hemos integrado sólo acotado.

$$\|x_2 - x_1\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\,(x_1(s) - x_0(s))\,ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \alpha \|x_1 - x_0\|\,ds \right| \leq$$

$$\leq C\alpha\,|t - t_0|$$

$$\|x_3 - x_2\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \alpha \|x_2 - x_1\|\,ds \right| \leq C\alpha^2 \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\,ds \right| = C\alpha^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C\alpha^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \quad t \in I.$$

Buscamos dejar un factorial en el denominador. Llamamos $M_n = C\alpha^n \dfrac{|t - t_0|^n}{n!}$.

Por el criterio del cociente, M_n converge $\left(\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right) < 1 \Rightarrow M_n \text{ converge}\right)$.

Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$ tiende a:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1}(t) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s)\,x_n(s)\,ds & + & \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x(t) & = & x_0 & & \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds & & \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds \end{array}$$

Finalmente, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo: $x(t)$ es C^1 y

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

Sistemas homogéneos

$$x' = A(t)x(t).$$

De forma análoga, definimos $L[x] = x' - A(t)x$. L es lineal y

$$Z = \{\text{soluciones de la ecuación}\} = \ker(L).$$

Se tiene que $\dim(Z) = n$, con n el tamaño de la matriz = componentes del vector.

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son soluciones, equivalen:

1) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base de Z
2) $\det(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0 \quad \forall t \in I$
3) $\exists t_0 \in I: \det(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \neq 0$

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= \frac{1}{t} x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x' = A(t)x, \text{ con } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

$$x_2' = \frac{1}{t} x_2 \xrightarrow{\text{var. sep}} x_2 = c_2 t, \text{ con } c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$x_1' = x_1 + c_2 \cdot t \xrightarrow{\text{var. cts}} x_1(t) = c_1 e^t - c_2 t - c_2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t - c_2 t - c_2 \\ c_2 \cdot t \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varphi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -t-1 \\ t \end{pmatrix}}_{\varphi_2}$$

Si la matriz A es constante, propondremos las siguientes soluciones:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot v_\lambda,$$ con λ un valor propio real, y v_λ su vector propio asociado.

Si la multiplicidad ~~de~~ algebraica es mayor que 1, y la geométrica = algebraica, propondremos como soluciones $e^{\lambda t} \cdot v_{\lambda i}$, con $v_{\lambda i}$ ~~son~~ vectores que forman una base del espacio propio asociado.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x' = Ax$

$$\sigma(A) = \{4, -2\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si tenemos valores propios complejos $\Rightarrow$ $\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ es una solución compleja. La descomponemos en

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(t) = Re(\varphi) \\ \varphi_2(t) = Im(\varphi) \end{array} \right]$$

Ejemplo:

$x' = Ax$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\sigma(A) = \{\pm i\}$.

$\lambda = i$. Vector propio: $(A - i\,Id)v = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$

$$= (\cos(t) + i\,\text{sen}(t))\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,\text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ i\cos(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\text{sen}(t) \end{pmatrix}}_{= \varphi_1} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{= \varphi_2}$$

Matriz solución

Dadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Z$, definimos la matriz

$$\phi(t) = \left(\varphi_1(t) \middle| \dots \middle| \varphi_n(t) \right).$$

Se dice fundamental si $\det(\phi) \neq 0$ $\forall t \in I$.

Si ϕ es matriz fundamental

$$Z = \{ \phi(t)v \mid v \in \mathbb{R}^n \}.$$

Dada una matriz solución:

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t).$$

De hecho, si se da lo anterior $\Rightarrow \phi$ es matriz solución.

Donde $\phi'(t) = \left(\phi_{ij}'(t) \right)$.

Propiedad: si $A(t), B(t) \in I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $(AB)' = A'B + AB'$. El orden es importante.

Matriz fundamental principal

Es una matriz tal que en t_0, $\phi(t_0) = Id$.

Si conocemos la matriz fundamental en t_0 Ψ, la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{es} \quad x(t) = \Psi(t)\, x_0$$

Lema: Sea $\phi(t)$ m.f., $c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz cte, con $\det(c) \neq 0 \Rightarrow \phi(t)c$ es m.f.

Corolario: Si $\phi(t)$ es m.f., la m.f.p. es

$$\Psi(t) = \phi(t) \cdot \phi^{-1}(t_0).$$

Fórmula de Liouville

Si $\phi(t)$ es matriz sol. de $x = A(t)x$, $t_0 \in I$, entonces

$$\det(\phi(t)) = \det(\phi(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \text{traza}(A(s))ds}.$$

Ecuación lineal Completa

$$x' = A(t)x + t_0$$

$L[x] = x' - A(t)x \to Z = \{\text{soluciones}\} = x_p + \text{Ker}(L)$, donde x_p son soluciones particulares. Vamos a ver cómo buscarlas.

Supongamos que tenemos $\phi(t)$ una matriz fundamental. Nuestras soluciones finales tendrán la siguiente forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \phi(t)\cdot C + \phi(t)\cdot C(t) =$$

$$= \phi(t)\cdot C + \phi(t)\cdot \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds \, .$$

Esta es la fórmula de variación de constantes. Debemos notar que $C \neq C(t)$. $C(t)$ vector.

Si tenemos condiciones iniciales ($x(t_0) = x_0$):

$$x(t) = \phi(t)\cdot \phi^{-1}(t_0)\cdot x_0 + \phi(t)\cdot \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

Exponencial de una matriz

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Lema: Sea $\{M_n\}$ una sucesión de matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$, tales que $\{\|M_n\|\}$ converge. Entonces, $\sum M_n$ también. Además: $\|\sum_{n=0}^{\infty} M_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M_n\| \Rightarrow$

•) $\dfrac{\|A^n\|}{n!} \leq \dfrac{\|A\|^n}{n!}$

•) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

Ejemplo:

1.- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum \frac{\lambda_n^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

2.- Si A es nilpotente hasta n, entonces

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{A^n}}}{n!} + \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{A^{n+1}}}}{(n+1)!} \dots$$

Teorema:

Dada $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\phi(t)=e^{A\cdot t}$ es la matriz fundamental principal en cero de $x'=Ax$.

Esto nos dice que si $x(0)=x_0 \Rightarrow x(t)=e^{A\cdot t}x_0$.

La mfp en t_0 es $e^{A(t-t_0)}$.

• Propiedades:

· $AB=BA \Rightarrow e^{A}e^{B}=e^{A+B}$

· $AB=BA \Rightarrow Ae^{B}=e^{B}A$

Cálculo de la matriz exponencial

Propiedad: Si $A=PBP^{-1} \Rightarrow e^{A}=Pe^{B}P^{-1}$

·) Caso 1: A diagonalizable tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$:

$$A=PDP^{-1},\quad D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow e^{At}=P\cdot\begin{pmatrix}e^{\lambda_1\cdot t}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n\cdot t}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}.$$

P = matriz de los vectores propios asociados, por columnas.

·) Caso 2: A no diagonalizable:

$$A\sim\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_k\end{pmatrix},\quad J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix},$$

tantos 1 como vectores te fallan en la base del espacio asociado.

$$e^{Jt}=e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix}1&t&t^2/2&\cdots&t^{k-1}/(k-1)!\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&t^2/2\\&&&\ddots&t\\&&&&1\end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$x'=Ax$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$. $\det(A-\lambda Id)=\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\-b&a-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=a\pm bi$

$v_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $(A-\lambda Id)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$

$v_2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $(A-\bar{\lambda} Id)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow e^{At} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Técnicas de resolución de integrales

- Partial Fraction Expansion

1.- Factorizar el denominador

2.- Expandir usando coeficientes indeterminados

3.- ~~B~~ Limpiar fracciones

4.- Resolver para A, B, C...

Ejemplo: $\dfrac{3x+11}{x^2-2x-3} = \dfrac{3x+11}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1}.$

$$(x-3)(x+1) \cdot \frac{3x+11}{(x-3)(x+1)} = (x+1)(x-3)\frac{A}{x-3} + (x+1)(x-3)\frac{B}{x+1}$$

$$3x+11 = (x+1)A + (x-3)B \Rightarrow \begin{cases} 3 = A+B \\ 11 = A-3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -2 \end{cases}$$

- Integración por partes (La vaca)

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ un día vi una vaca vestida de uniforme. Regla de los ALPES.

Ejemplo: $\int xe^x = \begin{bmatrix} u = x & \to du = 1dx \\ dv = e^x & \to v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = e^x(x-1) + C$

- Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

cos par, sen impar

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} \Rightarrow$$

Ejemplo:

$$\frac{-\varepsilon}{\omega}\int \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\Omega t)\,dt.$$

$$\Rightarrow \frac{-\varepsilon}{2\omega}\int \cos\left((\omega-\Omega)t\right) - \cos\left((\omega+\Omega)t\right)dt$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + (-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{(\quad)}{2}$$

Ejemplo:

$$\frac{\varepsilon}{\omega}\int \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\Omega t)\,dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\omega}\int \operatorname{sen}\left((\Omega-\omega)t\right) + \operatorname{sen}\left((\Omega+\omega)t\right)dt.$$

- Teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\left(b(x)\right)\cdot b'(x) - f\left(a(x)\right)\cdot a'(x), \text{ con } f \text{ int. en } [a(x), b(x)].$$