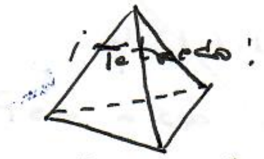
Relación Tema 3

Ejercicio 1:

Dado el experimento aleatorio de lanzar un dado con forma de tetraedro regular con caras numeradas del 1 a 4.



Se consideran los sucesos $A=\{$salir 1 ó 2$\}$; $B=\{$salir 2 ó 3$\}$; $C=\{$salir 2 ó 4$\}$

- Calcular $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$:

Aplicamos la regla de Laplace " $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ "

$P(A) = \frac{2}{4} = 1/2$

$P(B) = \frac{2}{4} = 1/2$

$P(C) = \frac{2}{4} = 1/2$

- Probabilidad de obtener un dos:

$P(\{\text{salir } 2\}) = \frac{1}{4}$

- ¿Son A, B y C independientes dos a dos?

¿ $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$? Sí

$P(\{\text{salir } 2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

¿ $P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C)$? Sí

$P\{\text{salir } 2\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)$ Sí

$P(\{\text{salir } 2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

- ¿Son A, B y C mutuamente excluyentes?

¿ $\forall k\geq 2 \quad P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{i_l})$ con $A_{i_1}=A$; $A_{i_2}=B$ y $A_{i_3}=C$?

- si $k=2$ es el caso anterior y se satisface.
- si $k=3 \to$ ¿ $P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$? No

$P(\{\text{salir } 2\} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Así que no son mutuamente excluyentes

Relación Tema 3

Ejercicio 2:

Sea $X=(X_1, X_2, X_3)$ vector aleatorio discreto con f.m.p.:

$$P[(X_1, X_2, X_3)=(x_1, x_2, x_3)] = 1/4$$

siendo $E_X = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,1,1)\}$

- ¿Son X_1, X_2, X_3 independientes 2 a 2?

Obtengamos primero las f.m.p. marginales y bidimensionales.
Está claro que $E_{X_1} = E_{X_2} = E_{X_3} = \{0,1\}$ y que $E_{(X_1,X_2)} =$

$= E_{(X_1,X_3)} = E_{(X_2,X_3)} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Marginales unidimensionales:

$$P_{X_1} \equiv \begin{cases} P[X_1=0] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P[X_1=1] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(1,1,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P_{X_2} \equiv \begin{cases} P[X_2=0] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P[X_2=1] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(1,1,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P_{X_3} \equiv \begin{cases} P[X_3=0] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P[X_3=1] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] + P[(X_1,X_2,X_3)=(1,1,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Marginales bidimensionales

$$P_{(X_1,X_2)} \equiv \begin{cases} P[(X_1,X_2)=(0,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_2)=(0,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_2)=(1,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_2)=(1,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,1,1)] = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P_{(X_1,X_3)} \begin{cases} P[(X_1,X_3)=(0,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_3)=(0,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_3)=(1,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_1,X_3)=(1,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,1)] = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P_{(X_2,X_3)} \begin{cases} P[(X_2,X_3)=(0,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_2,X_3)=(0,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,0,1)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_2,X_3)=(1,0)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,0)] = \frac{1}{4} \\ P[(X_2,X_3)=(1,1)] = P[(X_1,X_2,X_3)=(0,1,1)] = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Es evidente que $P[(X_i, X_j) = (x_i, x_j)] = \frac{1}{4} = P[X_i = x_i] \cdot P[X_j = x_j]$

$\forall \underset{(i \neq j)}{i,j} = 1,2,3;\ \forall x_i, x_j = 0,1;$ luego $\boxed{\text{hay independencia 2 a 2.}}$

• ¿Son mutuamente independientes?

Si $K=2$, sí hay independencia 2 a 2.

Si $K=3$ ¿ $P[(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)] = \prod_{i=1}^{3} P[X_i = x_i]$?

La respuesta es $\underline{\underline{\text{NO}}}$, porque

$$P[(X_1, X_2, X_3) = (0,0,0)] = 0 \neq \underset{1/2}{P[X_1=0]} \cdot \underset{1/2}{P[X_2=0]} \cdot \underset{1/2}{P[X_3=0]}$$

Por tanto, $\boxed{\text{no son mutuamente independientes.}}$

• ¿Son $X_1 + X_2$ y X_3 independientes?

$E_{X_1+X_2} = \{0,1,2\}$; $E_{X_3} = \{0,1\}$

¿ $P[X_1 + X_2 = k, X_3 = m] = P[X_1 + X_2 = k] \cdot P[X_3 = m]$

con $k = 0,1,2$ y $m = 0,1$?

$$P[X_1 + X_2 = 0, X_3 = 0] = P[(X_1, X_2, X_3) = (0,0,0)] = 0$$

$$P[X_1 + X_2 = 0] \cdot P[X_3 = 0] = P[(X_1, X_2, X_3) = (0,0,1)] \cdot P[X_3 = 0] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Como $0 \neq 1/8 \Rightarrow$ $\boxed{X_1 + X_2, X_3 \text{ no son independientes.}}$

Ejercicio 3:

Se lanza una moneda 10 veces. Consideramos las v.a.:

X = Número de lanzamientos hasta que aparece la 1ª cara (si no aparece cara $X=0$)

Y = Número de lanzamientos hasta que aparece la 1ª cruz (si no aparece cruz $Y=0$)

¿Son X e Y independientes?

Está claro que $X, Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(1/2)$ "Distribución geométrica"

Sabemos que $F_X(x) = F_Y(y) = 1-(1-p)^{x+1} = 1-(1-p)^{y+1}$; $x, y = 0, \dots, 10$

Por tanto la f.m.p es:

$$P[X=x] = F_X(x) - F_X(x-1) = 1-(1-p)^{x+1} - (1-(1-p)^x) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)^x - (1-1/2)^{x+1} = \frac{1}{2}^x - \frac{1}{2}^x \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}^x (1-1/2) = \frac{1}{2}^{x+1}$$

Para que sean independientes la f.m.p. conjunta debe ser el producto de las f.m.p. marginales.

Está claro que, por ejemplo, $P[X=2, Y=2] = 0$

(Esto es p.q si hacen falta 2 lanzamientos para que se obtenga la 1ª cara, $X=2$, necesariamente se ha obtenido cruz en el primer lanzamiento)

Ahora bien $P[X=2] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ y $P[Y=2] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

y por tanto $P[X=2, Y=2] \neq P[X=2] \cdot P[Y=2]$

p.q $0 \neq \cancel{\frac{1}{8}}$ 1/64

$\boxed{\text{Así que } X \text{ e } Y \text{ no son independientes}}$

Ejercicio 4:

Definición de función indicadora de un suceso

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A \in \mathcal{A}$ un suceso. Se define la función indicadora de A como:

$$I_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Es fácil ver que I_A es una función medible, y por tanto, una variable aleatoria.

En efecto,

$$I_A : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

verifica que $I_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}$ porque:

$$I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \phi & \longrightarrow 0 \notin B, 1 \notin B \\ A & \longrightarrow 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c & \longrightarrow 0 \in B, 1 \notin B \\ \Omega & \longrightarrow 0 \in B, 1 \in B \end{cases}$$

ya que ϕ, A, A^c y Ω están en la σ-álgebra $\mathcal{A}$

Consideramos ahora $A, B \in \mathcal{A}$ y consideramos las v.a. obtenidas por sus funciones indicadoras I_A e I_B. Justificar que I_A e I_B son v.a. independientes sii A y B son sucesos independientes.

(Ejercicio propuesto a los alumnos)

Ejercicio 5:

X = número de automóviles utilitarios

Y = " " " de lujo

La f.m.p. conjunta es:

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
0	1/3	1/12	1/24	11/24
1	1/6	1/24	1/48	11/48
2	5/22	5/88	5/176	55/176
P_Y	48/66	48/264	48/528	$\Sigma = 1$

¿Son X e Y independientes?

Para ver que X e Y son independientes hay que comprobar si la f.m.p conjunta es el producto de las marginales.

$P[X=0, Y=0] = \frac{1}{3} = P[X=0] \cdot P[Y=0] = \frac{11}{24} \cdot \frac{48}{66} = 1/3$ ✓

$P[X=0, Y=1] = \frac{1}{12} = P[X=0] \cdot P[Y=1] = \frac{11}{24} \cdot \frac{48}{264} = 1/12$ ✓

$P[X=0, Y=2] = \frac{1}{24} = P[X=0] \cdot P[Y=2] = \frac{11}{24} \cdot \frac{48}{528} = \frac{1}{24}$ ✓

$P[X=1, Y=0] = \frac{1}{6} = P[X=1] \cdot P[Y=0] = \frac{11}{48} \cdot \frac{48}{66} = \frac{1}{6}$ ✓

$P[X=1, Y=1] = \frac{1}{24} = P[X=1] \cdot P[Y=1] = \frac{11}{48} \cdot \frac{48}{264} = \frac{1}{24}$ ✓

$P[X=1, Y=2] = \frac{1}{48} = P[X=1] \cdot P[Y=2] = \frac{11}{48} \cdot \frac{48}{528} = \frac{1}{48}$ ✓

$P[X=2, Y=0] = 5/22 = P[X=2] \cdot P[Y=0] = \frac{55}{176} \cdot \frac{48}{66} = \frac{2640}{11616} = \frac{5}{22}$ ✓

$P[X=2, Y=1] = 5/88 = P[X=2] \cdot P[Y=1] = \frac{55}{176} \cdot \frac{48}{264} = \frac{2640}{46464} = \frac{5}{88}$ ✓

$P[X=2, Y=2] = 5/176 = P[X=2]\, P[Y=1] = \frac{55}{176} \cdot \frac{48}{528} = \frac{5}{176}$ ✓

Por tanto X e Y son v.a independientes, es decir, el número de utilitarios de una familia es independiente del número de automóviles de lujo que pueda tener.

Ejercicio 6

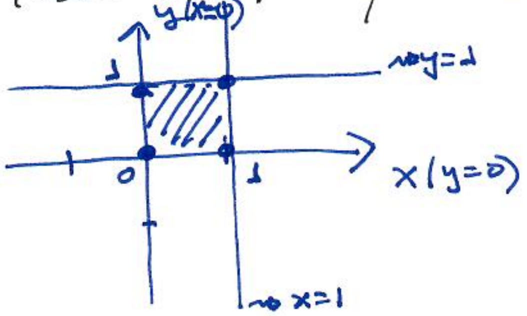
(a) Dado $(X;Y)$ con $f(x,y)=\frac{1}{2}$ en el cuadrado de vértices $\begin{cases}(1,0);(0,1)\\(-1,0);(0,-1)\end{cases}$

¿Son X e Y independientes?

Se ha dejado propuesto a los alumnos.

(b) Dado $(X;Y)$ con $f(x,y)=1$ en el cuadrado de vértices $\begin{cases}(0,0);(0,1)\\(1,0);(1,1)\end{cases}$

¿Son X e Y independientes?



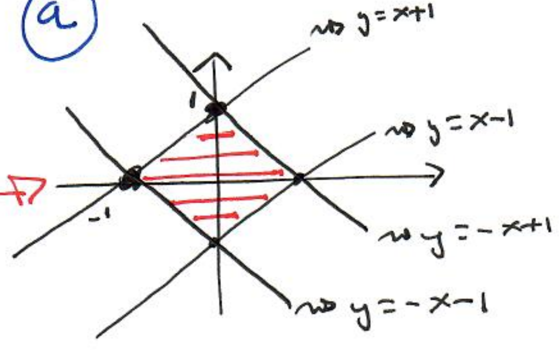
Viendo el recinto $f(x,y)=1$ si $0<x,y<1$

si considero $h_1:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, $h_1(x)=1$ y $h_2:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, $h_2(y)=1$

Se tiene que $h_1(x)\cdot h_2(y)=1$ si $0<x,y<1$

Luego $f(x,y)=h_1(x)\cdot h_2(y)\Rightarrow$ $\boxed{X \text{ e } Y \text{ son independientes.}}$

(a)



¿$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$?

$$\boxed{f(x,y)=\frac{1}{2} \text{ si } \begin{array}{l}-x-1<y<-x+1\\ x-1<y<x+1\end{array}}$$

¿Basta decir que como la x y la y condicionan el recinto entonces nunca puede haber independencia?

¿$M_X(t_1)\cdot M_Y(t_2)=M_{(X;Y)}(t_1,t_2)$?

¿O es mejor verlo con la FGM?

¡Exponer en clase algún estudiante de forma voluntaria!

Ejercicio 7:

Sean X, Y v.a. i.i.d. $\sim U(0,h)$. Calcular la probabilidad de que la ecuación $\lambda^2 - 2\lambda X + Y = 0$ tenga raíces complejas.

Obtenemos las raíces de $\lambda^2 - 2\lambda X + Y = 0$, por la fórmula de Bhaskara.

$$\lambda = \frac{2X \pm \sqrt{4X^2 - 4Y}}{2} = X \pm \sqrt{X^2 - Y}$$

Las raíces serán complejas si el discriminante es negativo. Por tanto nuestro ejercicio se reduce a obtener $P[X^2 < Y]$

Obtengamos la densidad conjunta de X e Y.

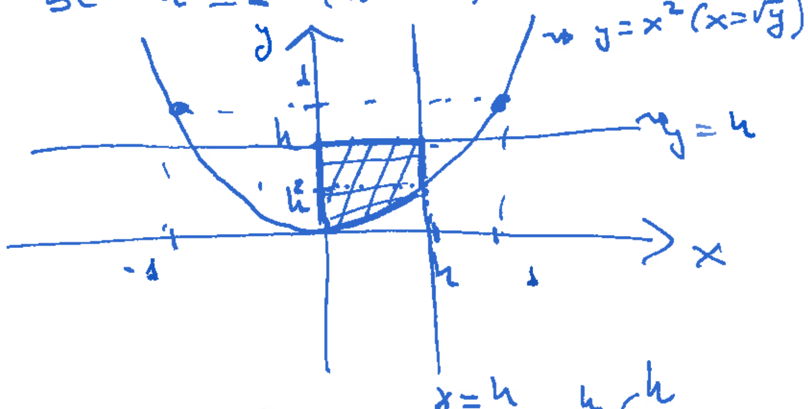
Como $X, Y \sim U(0,h) \Rightarrow f_X(x) = f_Y(y) = \frac{1}{h}$ si $0 < x, y < h$

Como X e Y son independientes $\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/h^2 & \text{si } 0 < x, y < h \\ 0 & \end{cases}$$

Distinguimos casos para calcular $P[X^2 < Y]$

- si $h \leq 1$ $(h^2 \leq h)$

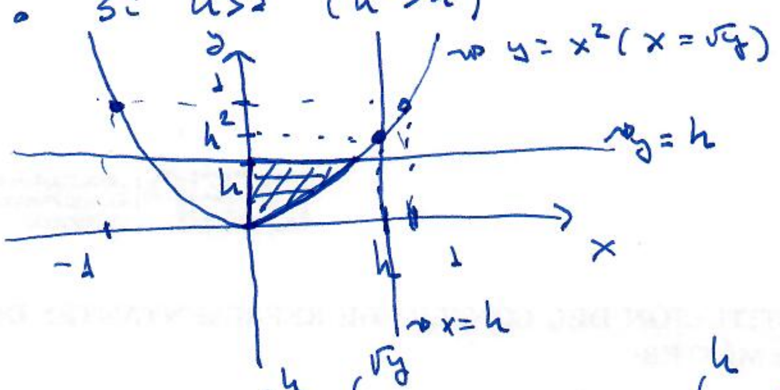


$$P[X^2 < Y] = \int_0^{h^2} \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{h^2}\, dx\, dy + \int_{h^2}^{h} \int_0^{h} \frac{1}{h^2}\, dx\, dy = \int_0^{h^2} \frac{\sqrt{y}}{h^2}\, dy + \int_{h^2}^{h} \frac{1}{h}\, dy =$$

$$= \frac{2}{3h^2} \left(y^{3/2}\right]_0^{h^2} + \frac{1}{h}(h - h^2) = \frac{2h^3}{3h^2} + 1 - h =$$

$$= \frac{2}{3}h + 1 - h = 1 - \frac{h}{3}$$

- si $h > 1$ $(h^2 > h)$



$$P[X^2 < Y] = \int_0^h \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{h^2}\,dx\,dy = \int_0^h \frac{\sqrt{y}}{h^2}\,dy = \frac{2}{3h^2}\left[y^{3/2}\right]_0^h =$$

$$= \frac{2}{3h^2}\,h^{3/2} = \frac{2}{3}\,h^{-1/2} = \frac{2}{3\sqrt{h}}$$

Solución:

$$\boxed{P[X^2 < Y] = \begin{cases} 1 - \dfrac{h}{3} & \text{si } h \leq 1 \\[2ex] \dfrac{2}{3\sqrt{h}} & \text{si } h > 1 \end{cases}}$$

Ejercicio 8:

Sean X_1, X_2 v.a. independientes con distribuciones binomiales con parámetros n_i, $i=1,2$ y $p=1/2$. Obtener la distribución de $X_1 - X_2 + n_2$.

Tenemos que $X_1 \leadsto B(n_1, 1/2)$ y $X_2 \leadsto B(n_2, 1/2)$ independientes.

Consideramos la distribución de $X_1 - X_2 + n_2$ caracterizada por su función generatriz de momentos.

$$M_{X_1 - X_2 + n_2}(t) = E\left[e^{t(X_1 - X_2 + n_2)}\right] = E\left[e^{tX_1} \cdot e^{-tX_2} \cdot e^{tn_2}\right] =$$

$$= e^{tn_2} \cdot E\left[e^{tX_1} \cdot e^{-tX_2}\right] \underset{\substack{\text{Tma de multiplicación}\\ \text{de esperanzas para fun-}\\ \text{ciones medibles de v.a.}\\ \text{independientes}}}{=} e^{tn_2} E\left[e^{tX_1}\right] \cdot E\left[e^{-tX_2}\right] =$$

$$= e^{tn_2} \cdot M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(-t) \underset{(X_1, X_2 \text{ binomiales})}{=} e^{tn_2}\left(\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n_2} =$$

$$= \left(\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n_1} \cdot \left(e^t\left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)^{n_2} = \left(\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2} + \frac{e^t}{2}\right)^{n_2} =$$

$$= \left(\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n_1 + n_2} \Rightarrow \boxed{X_1 - X_2 + n_2 \leadsto B(n_1 + n_2, 1/2)}$$

Ejercicio 9:

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a. i.i.d. según una ley $B(1,p)$, que además son independientes de otra v.a. $N \sim P(\lambda)$. Consideramos la v.a. $Z_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $N \geq 1$. Probar que Z_N y $N-Z_N$ son independientes.

Si conseguimos descomponer la F.G.M. conjunta, como el producto de dos funciones que separan variables, tendremos justificada la independencia de Z_N y $N-Z_N$.

Veámoslo:

$$M_{(N-Z_N,Z_N)}(t_1,t_2) = E\left[e^{t_1(N-Z_N)+t_2Z_N}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{t_1(n-k)+t_2k} \cdot \underbrace{P[N-Z_N=n-k,\ Z_N=k]}_{(*)} =$$

(*) Si aplicamos el t^ma de la probabilidad total

$$P[N-Z_N=n-k,\ Z_N=k] = \sum_{m=0}^{\infty} P[N-Z_N=n-k,\ Z_N=k / N=m]\cdot P[N=m] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P[N=n,\ Z_N=k/N=m]\cdot P[N=m] =$$

(el suceso $\{N-Z_N=n-k,\ Z_N=k\}=\{N=n,\ Z_N=k\}$)

$$= P[N=n,\ Z_N=k/N=n]\cdot P[N=n] = P[Z_N=k]\cdot P[N=n]$$

(Todos los sumandos son 0 salvo si $m=n$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{t_1(n-k)+t_2k}\cdot P[Z_N=k]\cdot P[N=n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t_1n}P[N=n]\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} e^{(t_2-t_1)k}P[Z_N=k]}_{M_{Z_N}(t_2-t_1)} =$$

(agrupando adecuadamente)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n]\cdot\left[pe^{t_2-t_1}+(1-p)\right]^n\cdot e^{t_1n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P[N=n]}_{P(\lambda)}\cdot\left[pe^{t_2}+(1-p)e^{t_1}\right]^n =$$

(Multiplico y divido por e^{t_1n} y utilizo que $Z_N \sim B(N,p)$ por reproductividad)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[pe^{t_2}+(1-p)e^{t_1}\right]^n = \rightarrow$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda p e^{t_2} + \lambda(1-p)e^{t_1}\right]^n}{n!}}_{\text{esto es el desarrollo en serie de potencias de una exponencial}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda p e^{t_2} + \lambda(1-p)e^{t_1}} =$$

$$= e^{-\lambda + \lambda p e^{t_2} + \lambda(1-p)e^{t_1}} \underset{(\lambda = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2})}{=} e^{-\frac{\lambda}{2} + \lambda p e^{t_2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda(1-p)e^{t_1}} =$$

$$= e^{\lambda\left[p e^{t_2} - \frac{1}{2}\right]} \cdot e^{\lambda\left[(1-p)e^{t_1} - \frac{1}{2}\right]} = G_1(t_1) \cdot G_2(t_2)$$

Por tanto $M_{(N-Z_N, Z_N)}(t_1, t_2) = G_1(t_1) \cdot G_2(t_2)$ y

esto implica que $\boxed{N - Z_N \text{ y } Z_N \text{ son v.a. independientes}}$

Ejercicio 10:

Sea X = demanda de un producto en miles de toneladas e Y = precio por kilogramo en euros.
El vector (X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f(x,y) = K x^2(1-x)^3 y^3 (1-y)^2 \quad si \quad x,y \in (0,1)$$

• Hallar K para que f sea función de densidad.

Tiene que suceder que:

* $f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow K \geq 0$ p.q. $x, (1-x), y, (1-y) > 0$

* $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \int_0^1 K x^2(1-x)^3 y^3 (1-y)^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 K x^2 (1-x)^3 dx \cdot \int_0^1 y^3 (1-y)^2 dy =$$

$$= K \int_0^1 x^2 (1-3x+3x^2-x^3) dx \cdot \int_0^1 y^3 (1-2y+y^2) dy$$

$$= K \int_0^1 x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5 dx \cdot \int_0^1 y^3 - 2y^4 + y^5 dy$$

$$= K \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 \cdot \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^6}{6}\right]_0^1 \right]$$

$$= K \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) \right] =$$

$$= K \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} = 1 \Leftrightarrow \boxed{K = 3600}$$

Por tanto:

$$\boxed{f(x,y) = 3600\, x^2(1-x)^3 y^3 (1-y)^2 \quad si \quad x,y \in (0,1)}$$

- ¿Son X e Y independientes?

Es evidente que $f(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$ con $x,y \in (0,1)$

con $h_1 : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h_2 : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$h_1(x) = 3600\, x^2 (1-x)^3$ $\qquad h_2(y) = y^3 (1-y)^2$

Por tanto $\boxed{X \text{ e } Y \text{ son independientes.}}$

También se puede caracterizar por las funciones de densidad marginales. De hecho:

$$f_X(x) = 60\, x^2 (1-x)^3 \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = 60\, y^3 (1-y)^2 \quad \text{si } 0 < y < 1$$

lo que implica que $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

- Obtener la función de densidad de probabilidad del precio para una demanda fija.

Nos están pidiendo $\boxed{f_{Y/X=x_0}(y) = f_Y(y)}$ p.q son independientes.