ResumenT3.pdf

martasw99

Ecuaciones Diferenciales I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Resumen T3 : Ecuaciones Exactas

Potencial $u(x,y)$

$$\boxed{P(x,y)\,Q(x,y)\,y'=0} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[u(x,y)\right]=0 \Longleftrightarrow u(x,y)=cte \Rightarrow y(x)$$

Sean $P,Q \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ funciones tales que $\exists u$ potencial $\in C^1(D)$ verificando:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=P \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q} \quad \forall (x,y)\in D$$

Entonces tiene que ocurrir "la condición de exactitud"

$$\boxed{\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}}$$ condición necesaria para que $\exists u(x,y)$

Dominio Estrellado:

Un dominio Ω es estrellado si $\exists x_* \in \Omega$ tq $\boxed{[x,x_*]\in\Omega \quad \forall x\in\Omega}$ segmento

¿? "x_* es un foco que ilumina toda la habitación (Ω)"

▶ TEOREMA:

Sea Ω un dominio estrellado de $\mathbb{R}^2$ y $P,Q\in C^1(\Omega)$ que verifican la condición de exactitud en todos los ptos de Ω. Entonces:

$$\boxed{\exists u \in C^1(\Omega) : \frac{du}{dx}=P \text{ y } \frac{du}{dy}=Q} \text{ en } \Omega.$$

Campos de Fuerza:

Consideramos $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y)\longmapsto F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$$

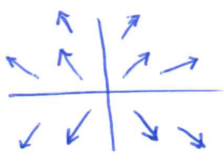
En cada pto hay una fuerza

Diremos, que el campo de fuerzas F, admite un potencial $u:\Omega\to\mathbb{R}$ tq $\boxed{\nabla u = F}$. Hablamos, en tal caso, de campo de fuerza conservativo.
por admitir un potencial

$$\boxed{\frac{du}{dx}=F_1 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dy}=F_2}$$

Ej $F(x,y)=(x,y)$ $\quad u=\frac{x^2+y^2}{2}$

$$\frac{du}{dx}=x \qquad \frac{du}{dy}=y$$

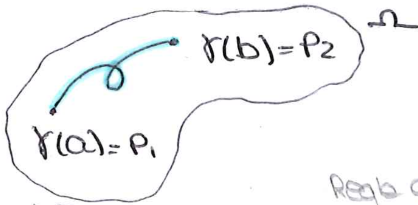


Trabajo:

Sea $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y consideramos una función $\gamma: [a,b] \longrightarrow \Omega$ (Es un camino o trayectoria en Ω)

El Trabajo del campo de fuerzas a lo largo de γ, se define como:

$$\boxed{T = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt}$$



Si F es conservativo:

Regla de la cadena.

$$T = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_a^b \underbrace{< \nabla u(\gamma(t)), \gamma'(t) >}_{d/dt [u(\gamma(t))]} dt \overset{\text{Regla de Barrow}}{=}$$

$$= [u(\gamma(t))]_a^b = \boxed{u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = T}$$

+ Pág 3 apuntes

El potencial u es el trabajo de una trayectoria recta desde el origen hasta el pto.

Que un campo PQ cumpla la condición de exactitud si el dominio no es estrellado $\Longrightarrow$ No tiene por qué $\exists u$.

La ec. diferencial exacta:

$\boxed{P(x,y) + Q(x,y)y' = 0}$ con $P, Q \in C^1(\Omega)$.

Consideramos una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Pedimos:

1) $\dfrac{dP}{dy} = \dfrac{dQ}{dx}$ en Ω

2) $Q(x_0, y_0) \neq 0$

Como $(x_0, y_0) \in \Omega$ (abierto) podemos tomar $B \subset \Omega$ Bola de centro (x_0, y_0)

Como B es estrellado y se cumple la condición de exactitud

$\Rightarrow \boxed{\exists u \in C^2(B)}$: $\dfrac{du}{dx} = P$ y $\dfrac{du}{dy} = Q$ en B

Por tanto en B la ecuac. se puede escribir: $\boxed{\dfrac{d}{dx}[u(x,y)] = 0} \Rightarrow u = cte$

Como tenemos que hacer que cumpla la cond. inicial:

$$c = u(x_0, y_0)$$

La curva que nos interesa en implícita es:

$$\boxed{u(x,y) = u(x_0, y_0)}$$

Si queremos la solución $y(x)$, la condición del TFI se cumple:

$$\frac{du}{dy}(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

Por tanto, podemos encontrar una solución $y(x)$ de:

$$y'(x) = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Ej pág 4 apuntes

Factor integrante:

Decimos que $\mu \in C^1(\Omega)$ es un factor integrante si:

1) $\mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

2) $\frac{d}{dy}(\mu P) = \frac{d}{dx}(\mu Q) \quad \forall (x,y) \in \Omega$

▷ CONDICIÓN PARA FACTOR INTEGRANTE

$$\frac{d}{dy}(\mu(x,y) P(x,y)) = \frac{d}{dx}(\mu(x,y) Q(x,y))$$

Tenemos que resolverla → μ incógnita!

$$\frac{d\mu}{dy}(x,y) P(x,y) + \mu(x,y) \frac{dP(x,y)}{dy} = \frac{du}{dx}(x,y) Q(x,y) + \mu(x,y) \frac{dQ}{dx}(x,y)$$

NOTACIÓN DE EINSTEIN ⇒ $\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$

$$\boxed{P\mu_y - Q\mu_x = \mu(Q_x - P_y)}$$

ECUACIÓN DEL FACTOR INTEGRANTE

siempre tiene solución, el problema es encontrar una.

Métodos de búsqueda de la ec. del Factor Integrante

1. $\boxed{\mu(x,y) = m(x)}$ $\quad \mu_x = m'(x) \quad \mu_y = 0$

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

$$0 - m'(x) = m(x)(Q_x - P_y)$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = f(x) \Longrightarrow \boxed{m(x) = e^{F(x)}} : F'(x) = f(x)$$

sólo dep de x

Variables separadas $\frac{m'(x)}{m(x)} = f(x) \Rightarrow \ln(m(x)) = F(x) \Rightarrow m(x) = e^{F(x)}$

2. $\boxed{\mu(x,y) = m(y)}$ $\qquad \mu_x = 0 \qquad \mu_y = m'(y)$

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

$$m'(y)P - 0 \cdot Q = m(y)(Q_x - P_y)$$

Si $\dfrac{m'(y)}{m(y)} = \dfrac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)} = f(y) \Rightarrow \boxed{m(y) = e^{F(y)}}$

3. $\boxed{\mu(x,y) = m(x^2+y^2)}$ $\qquad z = x^2+y^2$

$$\mu_y = m'(x^2+y^2)\,2y \qquad \mu_x = m'(x^2+y^2)\,2x$$

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

Si $\dfrac{m'(z)}{m(z)} = \dfrac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{2yP(x,y) - 2xQ(x,y)} = f(z)$