Preliminares. Relación de ejercicios (soluciones)

Ejercicio 1:

Consideramos X = nº de plantas contaminadas.
Entendremos "éxito" a encontrar una planta contaminada con probabilidad de éxito $p = 0'35$
Cada selección de planta es independiente del resto. Si consideramos n = nº de plantas de la zona se tiene que,

$$X \rightsquigarrow B(n, 0'35)$$

(a) si $n = 5 \Rightarrow X \rightsquigarrow B(5, 0'35)$
El número esperado de plantas contaminadas es su esperanza
$E[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0'35 = \boxed{1'75}$ (aprox. 2 plantas)

(b) $P[2 \leq X \leq 5]$ si $n = 9$
ahora $X \rightsquigarrow (9, 0'35)$
Por tanto $P[2 \leq X \leq 5] = \sum_{i=2}^{5} P[X=i] = \sum_{i=2}^{5} \binom{9}{i} 0'35^{i} \cdot 0'65^{9-i} =$

$= \binom{9}{2} 0'35^2 \cdot 0'65^7 + \binom{9}{3} \cdot 0'35^3 \cdot 0'65^6 + \binom{9}{4} \cdot 0'35^4 \cdot 0'65^5 + \binom{9}{5} 0'35^5 \cdot 0'64^4 =$

$= \boxed{0'8253}$

(c) <u>1ª forma</u> (con la v.a. X anterior) $X \rightsquigarrow B(6, 0'35)$
$P[4$ plantas <u>no</u> contaminadas$] = P[2$ plantas <u>sí</u> contaminadas$] =$
$= P[X=2] = \binom{6}{2} 0'35^2 \cdot 0'65^4 = \boxed{0'3280}$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

<u>2ª forma</u>
Consideramos ahora Y = nº de plantas <u>no</u> contaminadas
Entendemos "éxito" encontrar una planta <u>no</u> contaminada con probabilidad de éxito $p = 0'65$.
Entonces $Y \rightsquigarrow B(6, 0'65)$
Calculamos $P[Y=4] = \binom{6}{4} 0'65^4 \cdot 0'35^2 = \boxed{0'3280}$

Ejercicio 2:

Consideramos X = número de comprimidos defectuosos

Entenderemos "éxito" a producir un tornillo defectuoso con probabilidad de éxito $p = 0'01$

(a) Si $n = 25$ tubos $\Rightarrow X \rightsquigarrow B(25, 0'01)$

$P[\text{ninguno defectuoso}] = P[X=0] = \binom{25}{0} 0'01^0 \cdot 0'99^{25} = \boxed{0'7778}$

(b) Se tienen cajas de 10 tubos y se pide la probabilidad de encontrar 5 tubos con un comprimido defectuoso.

Consideramos ahora Y = número de tubos con un comprimido defectuoso

ahora el éxito es que 1 tubo tenga 1 comprimido defectuoso con probabilidad de éxito $p = P[X=1]$

De esta forma $Y \rightsquigarrow B(10, p)$ y hay que obtener $P[Y=5]$

Hallamos en primer lugar p.

$$p = P[X=1] = \binom{25}{1} 0'01^1 \cdot 0'99^{24} = 0'1964$$

Por tanto $Y \rightsquigarrow B(10, 0'1964)$

$P[Y=5] = \binom{10}{5} \cdot 0'1964^5 \cdot 0'8036^5 = \boxed{0'0247}$

Ejercicio 3:

Llamaremos "éxito" a pescar el ejemplar de sardina buscado con probabilidad de éxito $p = 0'15$

Nos indican que se realizan 10 intentos fallidos antes de:

a) Pescar la sardina buscada (que se produzca el 1er éxito)

Si consideramos X = número de intentos fallidos antes del primer éxito, tenemos que,

$$X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(0'15)$$

Nos piden $P[X=10] = p(1-p)^x = 0'15 \cdot 0'85^{10} = \boxed{0'0295}$

f.m.p de la exponencial

otra forma: a partir de la función de distribución

$$P[X=10] = F(10) - F(9) = 1 - 0'85^{11} - (1 - 0'85^{10}) =$$
$$= 0'85^{10} \cdot (1 - 0'85) = \boxed{0'0295}$$

b) Pescar tres ejemplares de la sardina buscada (que se produzcan 3 éxitos).

Si consideramos X = número de intentos fallidos antes del tercer éxito, tenemos que,

$$X \rightsquigarrow BN(3, 0'15)$$

Nos piden $P[X=10] = \dfrac{(x+k-1)!}{x!\,(k-1)!}(1-p)^x p^k =$

$$= \frac{(10+3-1)!}{10! \cdot 2!} \, 0'85^{10} \cdot 0'15^3 = \boxed{0'0439}$$

Ejercicio 4:

Consideramos X = número de fracasos antes del 5º éxito

Entenderemos "éxito" encontrar un mono enfermo con probabilidad de éxito $p = 0'3$

En estas condiciones $X \sim BN(5, 0'3)$

(a) El número medio de exámenes requeridos se obtendrá a partir de $E[X] = \frac{k(1-p)}{p} = \frac{5 \cdot 0'7}{0'3} = \frac{35}{3}$

¡Ojo!, $\frac{35}{3}$ es el número de fracasos esperados antes del 5º éxito. Para obtener el número esperado de exámenes requeridos hay que sumar los 5 monos enfermos que se van a encontrar.

Por tanto el nº esperado es $\frac{35}{3} + 5 = \frac{50}{3} = \boxed{16'6}$

se necesitarán aproximadamente 17 exámenes

(b) $P[X=10] = P[$10 monos sanos antes del 5º enfermo$] =$

$$= \frac{(10+5-1)!}{10! \cdot 4!} \cdot (0'7)^{10} \cdot 0'3^{5} = \boxed{0'0687}$$

(c) $P[X \geq 15] = P\left[\begin{array}{l}\text{examinar al menos 20 monos (incluidos} \\ \text{los 5 enfermos)}\end{array}\right] =$

$$= 1 - P[X \leq 14] = 1 - \sum_{i=0}^{14} P(X=i) = 1 - \sum_{i=0}^{14} \frac{(i+5-1)!}{i!\,4!} \cdot 0'3^{5} \cdot 0'7^{10} =$$

$$= 1 - 0'0000029 \cdot \sum_{i=0}^{14} (i+4)(i+3)(i+2)(i+1) = \_\_\_\_$$

(simplificando)

Ejercicio 5:

Consideramos X = número de peces anillados en la muestra.

Tenemos una población de peces de tamaño $N=10.000$, una subpoblación de tamaño $N_1=100$ y extraemos una muestra del total de tamaño $n=100$.

Con esta información $X \rightsquigarrow H(10.000, 100, 100)$

a) $P[\text{al menos un pez anillado}] = P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] =$

$$= 1 - P[X=0] = 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{9900}{100}}{\binom{10.000}{100}} = 1 - 0'3642 =$$

$$= \boxed{0'6358}$$

b) $E[X] = \frac{n N_1}{N} = \frac{100.100}{10.000} = \boxed{1}$ pez anillado en la muestra

Ejercicio 6:

Una página tiene 40 líneas x 75 posiciones de impresión, es decir 3.000 posiciones de impresión por página.

Consideramos X = número de errores por página.

Entenderemos "éxito" a que no halla error en una posición de impresión con probabilidad de éxito $p = 1/6000$

(a) Distribución de X.

Con la información anterior $X \rightsquigarrow B(3000, 1/6000)$ y por tanto

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{i=0}^{x} \binom{3000}{x} \left(\frac{1}{6000}\right)^x \cdot \left(\frac{5999}{6000}\right)^{3000-x} & ; 0 \leq x \leq 3000 \\ 1 & ; x > 3000 \end{cases}$$

(b) • $P[\text{no se cometen errores}] = P[X=0] = \binom{3000}{0} \left(\frac{1}{6000}\right)^0 \left(\frac{5999}{6000}\right)^{3000} = \boxed{0'6065}$

•• $P[\text{mínimo 5 errores}] = P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq 4] =$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{4} \binom{3000}{i} \left(\frac{1}{6000}\right)^i \left(\frac{5999}{6000}\right)^{3000-i} = 1 - 0'9998 = \boxed{0'0002}$$

(c) Nos piden la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores.

Consideramos Y = Número de páginas sin errores en 20 páginas

Entenderemos "éxito" que una página no contenga errores, con probabilidad de éxito $p = P[X=0] = 0'6065$ (aptdo. a)

En este contexto habría que calcular $P[Y=20]$

Se tiene que $Y \rightsquigarrow B(20, 0'6065) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P[Y=20] = \binom{20}{20} 0'6065^{20} \cdot (1-0'6065)^0 = \boxed{0'000045}$$

Ejercicio 7:

a) Consideramos X = número de fracasos antes del 2º éxito

Entenderemos "éxito" ser defectuosa con probabilidad de éxito $p = 0'05$.

En este contexto $X \rightsquigarrow BN(2, 0'05)$

Nos piden $P\left[\begin{matrix}\text{la vigésima sea}\\ \text{la 2ª defectuosa}\end{matrix}\right] = P[X=18] = \frac{(18+2-1)!}{18!\cdot 1!} \cdot 0'05^2 \cdot 0'95^{18} =$

$= \boxed{0'0189}$

b) Número esperado de unidades que deben inspeccionarse hasta encontrar 4 defectuosas.

ahora X = número de fracasos antes del 4º éxito y se tiene que $X \rightsquigarrow BN(4, 0'05)$

$E[X] = \frac{K(1-p)}{p} = \frac{4 \cdot 0'95}{0'05} = \boxed{76}$ unidades sin error.

No olvidemos que hay que añadir las 4 defectuosas, luego deben inspeccionarse unas $\boxed{80 \text{ unidades}}$

c) Desviación típica (hasta 4 defectuosas)

$Y = X + K = X + 4 \longrightarrow$ Nº de elementos inspeccionados hasta encontrar 4 defectuosos.

$Var\, Y = Var(X+K) = Var(X) = \frac{K(1-p)}{p^2} =$

$= \frac{4 \cdot (0'95)}{(0'05)^2} = 1520 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_Y = \sqrt{1520} = 38'9872}$

Ejercicio 8:

Nos indican una urna con 10 tarjetas (del 1 al 10), que extraemos una a una y sin reemplazo.

a) P[Hay exactamente 3 nºs pares en 5 extracciones]

Si consideramos X = número de cartas pares en una muestra de 5 cartas,

tenemos la siguiente situación:

- Una población (en la urna) con $N = 10$ elementos
- Una subpoblación (las cartas pares) con $N_1 = 5$ elementos
- Una muestra del total con $n = 5$ elementos

Por tanto $X \sim H(10, 5, 5)$

Nos piden $P[X=3] = \dfrac{\binom{5}{3} \cdot \binom{10-5}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \boxed{0'3968}$

b) Como hacen falta 5 extracciones para obtener 3 pares, realmente la última extracción es par. Por tanto, podemos responder hallando la probabilidad de que se obtengan 2 pares en 4 extracciones y que la 5ª carta sea par también.

- $P[X=2] = \dfrac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{4!6!}} = \dfrac{100}{210} = 0'476$

  ahora $X \sim H(10, 5, 4)$

- $P[5^{\underline{a}}$ carta sea par$] = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{3}{6} = 0'5$

  (sin reemplazamiento)

Por tanto $P\left[\begin{array}{l}\text{se necesiten 5 extracciones} \\ \text{para obtener 3 pares}\end{array}\right] = 0'476 \cdot 0'5 = \boxed{0'2380}$

c) P[obtener el nº 7 en la cuarta extracción] = ?

¡Se razona de forma similar al aptdo a!

Ejercicio 9:

Consideramos X = número de televisores vendidos en un mes

Nos indican que $X \rightsquigarrow P(\lambda=10)$ y que el beneficio neto por unidad es de 30€.

ⓐ Nos piden la probabilidad de un beneficio superior a 360€.

Si consideramos Y = Beneficio neto por ~~unidad~~ mes, se distribuye también como una Poisson, es decir,

$$Y \rightsquigarrow P(\lambda = 10 \cdot 30) = P(300)$$

Por tanto $P[Y \geq 360] = 1 - P[Y \leq 359] =$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{359} e^{-300} \cdot \frac{300^i}{i!} = \boxed{0'3032}$$

<u>otra forma</u>: a partir de la v.a $X \rightsquigarrow P(10)$, si queremos un beneficio neto mensual de ~~más~~ 360€, tendremos que vender $\frac{360}{30} = 12$ televisores, por tanto:

$$P[Y \geq 360] = P[X \geq 12] = 1 - P[X \leq 11] = 1 - \sum_{i=0}^{11} e^{-10} \frac{10^i}{i!} =$$

$$= \boxed{0'3032}$$

ⓑ $P[X \leq x] \geq 0'95 \Rightarrow e^{-10} \sum_{i=0}^{x} \frac{10^i}{i!} \geq 0'95$

Por tanteo:

- Si $x = 15 \rightarrow P[X \leq x] = 0'9165 \leq 0'95 \Rightarrow$ no sirve
- Si $x = 16 \rightarrow P[X \leq x] = 0'9513 \geq 0'95 \Rightarrow$ es el número que se pasa

De este modo, se cubrirá la demanda mensual vendiendo $\boxed{\text{16 televisores}}$.