Relación TEMA 5
Relación de ejercicios de las distintas distribuciones multivariantes introducidas.

---

1. El 60% de los clientes de un almacén paga con dinero, el 30% con tarjeta y el 10% con cheques. Calcular la probabilidad de que de 10 clientes, 5 paguen con dinero, 2 con tarjeta y 3 con cheques.

2. Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, y sea n un número entero positivo fijo. Probar que la distribución condicionada del vector $(X_1, \ldots, X_{k-1})$ dado $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$ es una distribución multinomial y especificar sus parámetros.

3. En un hotel hay tres salas de televisión. En un determinado instante, cada televisor puede sintonizar uno entre 6 canales distintos, A, B, C, D, E y F. Cada canal tiene probabilidad 1/36, 3/36, 5/36, 7/36, 9/36 y 11/36, respectivamente, de ser sintonizado, con independencia unas televisiones de otras. Calcular:

   a) Probabilidad de que en un instante dado se sintonicen los canales B, D y E.
   b) Probabilidad de que en un instante dado haya un televisor sintonizando el canal B y otro el E.
   c) Probabilidad de que en un instante dado los tres televisores sintonicen el canal F.
   d) Probabilidad de que en un instante dado no estén sintonizados A, B, C, D.

4. Un ordenador genera números aleatorios del 0 al 9 con independencia e igual probabilidad para cada dígito. Si se generan 12 números aleatorios, calcular:

   a) La probabilidad de que aparezca 6 veces el dígito 0, 4 veces el 1 y 2 veces el 2.
   b) El número esperado de veces que aparece el 0.
   c) La probabilidad de que aparezca 4 veces el 1 y 3 veces el 6.

5. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución continua, y sean α_1 y α_2 números reales tales que $F(\alpha_1) = 0.3$ y $F(\alpha_2) = 0.8$. Si se seleccionan al azar 25 observaciones independientes de la distribución cuya función de distribución es F. Calcular la probabilidad de que seis de los valores observados sean menores que α_1, diez de los valores observados estén entre α_1 y α_2 y 9 sean mayores que α_2.

6. Si se lanzan 5 dados equilibrados de forma independiente, calcular la probabilidad de que los números 1 y 4 aparezcan el mismo número de veces.

7. El 16% de los estudiantes de cierta escuela son de primer grado, el 14% de segundo grado, el 38% de penúltimo grado y el 32% de último grado. Si se selecciona al azar 15 estudiantes de la escuela,

   a) Calcular la probabilidad de que al menos 8 sean de primer o segundo grado.
   b) Calcular la probabilidad de que al menos 7 sean de primer o segundo grado y al menos siete de último grado.

8. En un determinado juego de azar existen tres posibles resultados A, B y C, que se dan con probabilidad $0.8, 0.15$ y 0.05, respectivamente. Una persona realiza 5 veces el juego de forma independiente, calcular la probabilidad de que no obtenga ninguna vez el resultado C ni más de una vez el resultado B.

9. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal con parámetros $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 8$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 9$, $\rho = 0.6$. Calcular
$$P(5 < Y < 11/X = 2).$$

10. Calcular la distribución de probabilidad de la suma $X+Y$ para $(X,Y) \sim \mathcal{N}((\mu_1,\mu_2),\Sigma)$, siendo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

11. Determinar una condición sobre θ que permita que las variables aleatorias transformadas $W = X\cos(\theta)+Y\sin(\theta)$ y $Z = X\cos(\theta)-Y\sin(\theta)$ sean independientes, siendo (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal.

12. Si (X,Y) es un vector aleatorio con distribución normal bidimensional con medias $2/3$ y 2, y varianzas 4 y 9, respectivamente, y la curva de regresión de Y sobre X es $y = 3(x+2)/4$, obtener el coeficiente de correlación y calcular $P(X > 3/Y = 3)$.

13. Si (X,Y) es un vector aleatorio con distribución normal, encontrar una condición necesaria y suficiente para que $X+Y$ y $X-Y$ sean independientes.

14. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional con las siguientes características:

    - La mediana de X es 1.
    - $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.
    - El coeficiente de correlación de X e Y vale 0.5.
    - El error cuadrático medio asociado a las curvas de regresión vale 1.
    - $P(X \leq -1/Y = 1) = 0.06681$.

    Determinar el vector de medias y la matriz de covarianzas de (X,Y).