Parcial-nov20-Resuelto.pdf

DEDLED

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

VARIABLE COMPLEJA I, grupo A

12/Noviembre/2020

PRUEBA

3 puntos

① Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, donde

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) \equiv 0$$

Prueba que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$ y que, sin embargo, no existe $f'(0)$ (es decir, no existe $f'(0+i0)$)

2 puntos

② Encuentra, razonadamente, alguna función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa, tal que su parte imaginaria sea la función $v(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen}(x)$ (Es decir, debes encontrar $u(x,y)$ tal que la función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, sea holomorfa en $\mathbb{C}$)

③ Encuentra el radio de convergencia de las series de potencias:

2 puntos a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (z-4-i)^n$

1 punto ¿Converge la serie anterior para $z=0$? ¿Y para $z=4$?

2 puntos b) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{2^n}$

¡Ojo: no me he equivocado en el apartado b): el numerador es "zeta elevado a 2n" y el denominador es "dos elevado a n"!

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y $v(x,y) \equiv 0$ siempre.

En vez de calcular explícitamente $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, calculo el lim en 0 porque solo necesito ver que, se satisfacen en $(x,y)=(0,0)$.

Así ahora calculo: usando la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{(h,0)-(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h)-u(0,0)}{(0,h)-(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Con lo cual: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$.

Se satisfacen las ecuaciones en $(0,0)$.

Si existiera $f'(0)$ ($f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) = u(x,y)$)

$$f'(0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y)-u(0,0)}{(x,y)-(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{x+iy} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

Candidato a límite:

$$f'(0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x\cdot 0}{x^2\cdot x} = 0$$

Sin embargo, si $y=x$,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{(x^2+x^2)(x+ix)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^3(1+i)} = \infty$$

Con lo cual $\nexists\ f'(0)$.


COMPRAR
ENTRADAS
MARVEL STUDIOS
DOCTOR STRANGE
EN EL
MULTIVERSO DE LA LOCURA
6 DE MAYO SOLO EN CINES
©2022 MARVEL. PENDIENTE DE CALIFICACIÓN POR EDADES.

2. $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ holomorfa / $v(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen} x$

Si es holomorfa : $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ (entera)

y $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\operatorname{sen} x = \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow u(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx = e^{-y}(\cos x) + f(y)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\cos x = \frac{-\partial u}{\partial y} \longrightarrow u(x,y) = \int \frac{-\partial v}{\partial x} dy = e^{-y}\cos x + g(x)$

Igualando $\Rightarrow f(y) = g(x) = 0$

$u(x,y) = e^{-y}\cos x$

Con lo cual

$f(z) = e^{-y}\cos x + i e^{-y}\operatorname{sen} x = e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)$

$= e^{-y+ix} = e^{i(x+iy)} = e^{iz}$

Es la función entera que buscamos.

Escaneado con CamScanner

3. a) $\sum \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (z-4-i)^n$

Criterio del cocient

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{\left(\frac{(n+1)+1}{2(n+1)+3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Con lo cual $\boxed{R = \frac{1}{1/2} = 2}$

La serie está centrada en $(x,y) = (4,1)$, entonces converge en $D((x,y),2)$.

¿Converge en $z=0$?

$$|z-(x,y)| = |-4-i| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} > 2$$

$\Rightarrow$ No converge en $z=0$, $z \notin \overline{D}((x,y),2)$ *)

¿Converge en $z=4$?

$$|4-(x,y)| = |4-4-i| = |-i| = 1 < 2 \Rightarrow 4 \in D((x,y),2)$$

Con lo cual, sí converge en $z=4$.

*) Pongo $\overline{D}$ porque sabemos que se pueden dar casos de convergencia en algún punto de $\overline{D}$, pero no se garantiza de forma general

Escaneado con CamScanner

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2\cdot n}}{2^n}$

Como es una serie de potencias de números pares, hacemos el cambio $y = z^2$. de forma que quede con una notación más habitual:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2\cdot n}}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{2^n}$$ $\longrightarrow$ el comportamiento de la serie es idéntico.

Entonces:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{y}{2}\right)^n \longrightarrow \text{serie geométrica}$$

Esta serie converge $\Leftrightarrow \left|\frac{y}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |y| < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2 < 2 \Leftrightarrow \boxed{|x| < \sqrt{2}}$

Con lo cual, el radio de convergencia de esta serie es $R = \sqrt{2}$.