VCI-Parcial2.pdf

DEDLED

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

NOTA: La prueba ha de entregarse escrita a mano.
Por favor, nombre y 2 apellidos arriba a la izquierda (1ª pg.)
FIRMA: arriba a la derecha, en la 1ª página.

A. Cañada. V.C.I. Prueba del 21/12/2020

① Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}^2 z - e^z}{z^2-16}\,dz$

3 puntos

donde $\gamma^* = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \right\}$

(elipse recorrida una vez, en sentido positivo)

② Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3+\cos(3z)}{z^4}\,dz$ (Numerador: $2z^3+\cos(3z)$ Denominador: z^4)

3 puntos

donde $\gamma^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

(circunferencia, recorrida una vez, en sentido positivo)

ATENCIÓN: Elige la pregunta ③ o la ④ (¡Sólo una de ellas!)

③ Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entera t.q. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$

4 puntos

Demuestra que $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z_0) = 0$

④ Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, γ cerrada, simple,

4 puntos

C^1_{tr}, t.q. $\Omega \supset \gamma^* \cup I(\gamma)$. Demuestra que si $z_0 \notin \gamma^*$, entonces

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz$$

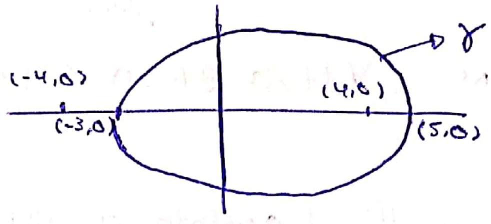
NOTA: – Todas las respuestas han de ser razonadas.

– Cualquier resultado teórico, $\boxed{\text{mostrado en clase}}$, puede usarse (esté demostrado o no)

– Si se entregan las preguntas ③ y ④, no se corregirá ninguna de ellas

PARCIAL 2. SOLUCIONES.

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}^2 z - e^z}{z^2-16}\,dz$,



Vemos que -4 está en el exterior de γ y 4 en el interior.

Tomando $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 z - e^z}{z+4}$ es holomorfa en $\Omega \supset I(\gamma)\cup\gamma^* \setminus \{-4\}$

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}^2 - e^z}{z^2-16}\,dz = \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}^2 - e^z}{(z+4)(z-4)}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-4}\,dz = \text{F.I. Cauchy}$$

$$= 2\pi i\, f(4) = 2\pi i\,\frac{\operatorname{sen}^2 4 - e^4}{8} = \boxed{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sen}^2 4 - e^4)}$$

// Se puede hacer con fracciones simples //

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(3z)+2z^3}{z^4}\,dz$ en $C(0,1)$.

$f(z) = \cos(3z) + 2z^3 \longrightarrow f'''(z) = 27\operatorname{sen}(3z) + 12$

Por la FJC para las derivadas de orden superior:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\,f'''(0) = \frac{2\pi i}{6}\,12 = \boxed{\pi i \cdot 4}$$

(3) Si $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ entonces $\dfrac{1}{f(z)}$ es entera.

Como $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad (\forall M > 0 \ \exists R > 0 \ / \ |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(z)}$ acotada en $\mathbb{C}$ (acotada en $|z| \leq R$ y $|z| > R$)

Por el T. Liouville, $\dfrac{1}{f}$ es cte $\Rightarrow$ f es cte.

y eso contradice que diverja en módulo.

(4) a) $z_0 \in I(\gamma)$

Usamos la fórmula integral de Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

b) $z_0 \notin I(\gamma)$

Ambas integrales son cero.