Algebra II (Doble Grado Informática-Matemáticas)

Relación 1

Curso 2021-22

Grupos: generalidades y ejemplos

Ejercicio 1. Describir explícitamente la tabla de multiplicar de los grupos $\mathbb{Z}_n^\times$ para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 8$, donde por $\mathbb{Z}_n^\times$ denotamos al grupo de las unidades del anillo $\mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 2. Describir explícitamente la tabla de multiplicar de los grupos $\mathbb{Z}_p^\times$ para $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$ y $p = 7$.

Ejercicio 3. Calcular el inverso de 7 en los grupos $\mathbb{Z}_{11}^\times$ y $\mathbb{Z}_{37}^\times$.

Ejercicio 4. Describir explícitamente los grupos μ_n (de raíces n-ésimas de la unidad) para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 8$, dando su tabla de multiplicar.

Ejercicio 5. En el conjunto $\mathbb{Q}^\times := \{q \in \mathbb{Q} |\ q \neq 0\}$ de los números racionales no nulos, se considera la operación de división, dada por $(x, y) \mapsto \frac{x}{y} = xy^{-1}$. ¿Nos da esta operación una estructura de grupo en $\mathbb{Q}^\times$?

Ejercicio 6. Sea G un grupo en el que $x^2 = 1$ para todo $x \in G$. Demostrar que el grupo G es abeliano.

Ejercicio 7. Sea G un grupo. Demostrar que son equivalentes:

1. G es abeliano.
2. $\forall x, y \in G$ se verifica que $(xy)^2 = x^2y^2$.
3. $\forall x, y \in G$ se verifica que $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Ejercicio 8. Demostrar que si en un grupo G, $x, y \in G$ verifican que $xy = yx$ entonces, para todo $n \geq 1$, se tiene que $(xy)^n = x^ny^n$.

Ejercicio 9. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, demostrar que el conjunto de las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que $f(x) = ax + b$, es un grupo con la composición como ley de composición.

Ejercicio 10. (1) Demostrar que $|GL_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$, describiendo explícitamente todos los elementos que forman esta grupo.

(2) Sea $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que

$$GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}.$$

(3) Escribir, utilizando la representación anterior, la tabla de multiplicar de $GL_2(\mathbb{Z}_2)$.

Ejercicio 11. Dar las tablas de grupo para los grupos D_3, D_4, D_5 y D_6.

Ejercicio 12. Sean $s_1, s_2 \in S_7$ las permutaciones dadas por

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular los productos s_1s_2, s_2s_1 y $(s_2)^2$, y su representación como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 13. Dadas las permutaciones

$$p_1 = (1\,3\,2\,8\,5\,9)(2\,6\,3), \quad p_2 = (1\,3\,6)(2\,5\,3)(1\,9\,2\,8\,5),$$

hallar la descomposición de la permutación producto p_1p_2 como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 14. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas en los ejercicios anteriores.

1. Descomponer la permutación $s_1s_2s_1s_2$ como producto de ciclos disjuntos.

2. Expresar matricialmente la permutación $p_3 = p_2p_1p_2$ y obtener su descomposición como ciclos disjuntos.

3. Descomponer la permutación s_2p_2 como producto de ciclos disjuntos y expresarla matricialmente
   Nota: Aquí tratamos a S_7 como un subgrupo de S_9, donde consideramos cada permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ como una permutación del conjunto $\{1, \ldots, 9\}$ que deja fijos a los elementos 8 y 9.

Ejercicio 15. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas en los ejercicios anteriores.

1. Calcular el orden de la permutación producto s_1s_2. ¿Coincide dicho orden con el producto de los órdenes de s_1 y s_2?

2. Calcular el orden de $s_1(s_2)^{-1}(s_1)^{-1}$.

3. Calcular la permutación $(s_1)^{-1}$, y expresarla como producto de ciclos disjuntos.

4. Calcular la permutación $(p_1)^{-1}$ y expresarla matricialmente.

5. Calcular la permutación $p_2(s_2)^2(p_1)^{-1}$. ¿Cuál es su orden?

Ejercicio 16. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas anteriormente. Sean también $s_3 = (2\,4\,6)$, $s_4 = (1\,2\,7)(2\,4\,6\,1)(5\,3)$. ¿Cuál es la paridad de las permutaciones s_1, $s_4p_1p_2$ y p_2s_3?

Ejercicio 17. Demostrar que, para cualquier permutación $\alpha \in S_n$, y cualquier ciclo $(x_1, \ldots, x_r)$ se verifica la igualdad

$$\alpha(x_1, \ldots, x_r)\alpha^{-1} = (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_r))\,.$$

Ejercicio 18. En el grupo S_3, se consideran las permutaciones $\sigma = (1\,2\,3)$ y $\tau = (1\,2)$.

1. Demostrar que
$$S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}. \tag{0.1}$$

2. Reescribir la tabla de multiplicar de S_3 empleando la anterior expresión de los elementos de S_3.

3. Probar que
$$\sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau. \tag{0.2}$$

4. Observar que es posible escribir toda la tabla de multiplicar de S_3 usando simplemente la descripción (0.1) y las relaciones (0.2).

Ejercicio 19. Describir los diferentes ciclos del grupo S_4. Expresar todos los elementos de S_4 como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 20. Encontrar un isomorfismo $\mu_2 \cong \mathbb{Z}_3^\times$.

Ejercicio 21.

1. Demostrar que la aplicación
$$1 \mapsto 1,\ -1 \mapsto 4,\ i \mapsto 2, -i \mapsto 3,$$
da un isomorfismo entre el grupo μ_4 de las raíces cuárticas de la unidad y el grupo $\mathbb{Z}_5^\times$ de las unidades en $\mathbb{Z}_5$.

2. Encontrar otro isomorfismo entre estos dos grupos que sea distinto del anterior.

Ejercicio 22. Encontrar un isomorfismo $\mu_2 \times \mu_2 \cong \mathbb{Z}_8^\times$.

Ejercicio 23. Demostrar, haciendo uso de las representaciones conocidas, que $D_3 \cong S_3 \cong GL_2(\mathbb{Z}_2)$.

Ejercicio 24. Sea K un cuerpo y considérese la operación binaria

$$\otimes : K \times K \to K \;\; a \otimes b = a + b - ab\,.$$

Demostrar que $(K - \{1\}, \otimes)$ es un grupo isomorfo al grupo multiplicativo K^*.

Ejercicio 25. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar:

1. $f(x^n) = f(x)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. Si f es un isomorfismo entonces G y H tienen el mismo número de elementos de orden n ¿es cierto el resultado si f es sólo un homomorfismo?
3. Si f es un isomorfismo entonces G es abeliano $\Leftrightarrow$ H es abeliano.

Ejercicio 26.

1. Demostrar que los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^*$ (de los reales no nulos) y $\mathbb{C}^*$ (de los complejos no nulos) no son isomorfos.
2. Demostrar que los grupos aditivos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son isomorfos.

Ejercicio 27. Sea G un grupo. Demostrar:

1. G es abeliano $\Leftrightarrow$ la aplicación $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^{-1}$ es un homomorfismo de grupos.
2. G es abeliano $\Leftrightarrow$ la aplicación $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^2$ es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 28. Demostrar que no existe ningún cuerpo K tal que sus grupos aditivo $(K, +)$ y $(K^*, .)$ sean isomorfos.