EJERCICIOST5.pdf

martasw99

Variable Compleja I

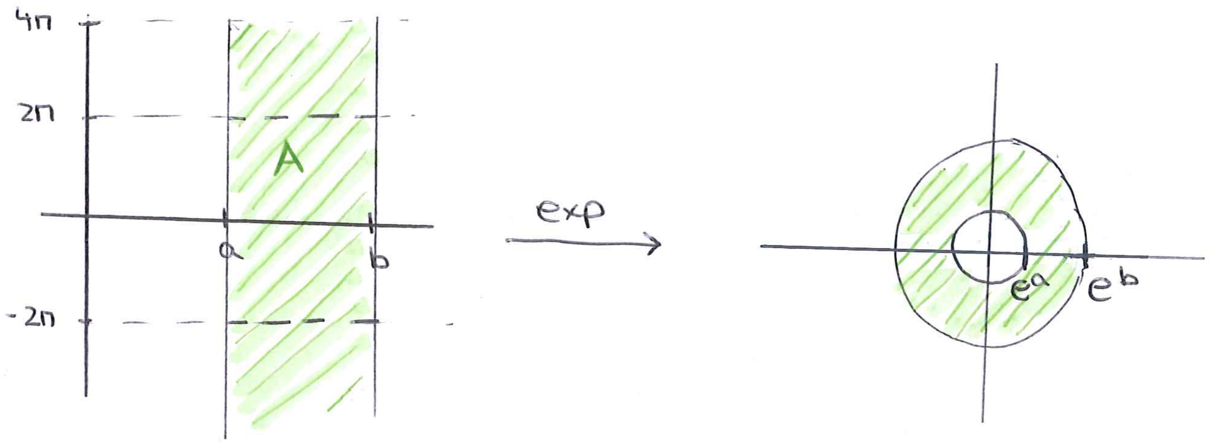
3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJ TEMA 5:

2 Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

▷ Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}$ $(a < b)$



$e^{a+ix} = e^a(\cos x + i \operatorname{sen} x) \Rightarrow \{e^{a+ix} : 0 \leq x \leq 2\pi\} = \mathbb{T}_a$ circunferencia de radio e^a

exp es $2\pi i$ periódica $\Rightarrow \{e^{a+ix} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{T}_a$

De forma análoga para b y para $\xi \in]a,b[$

luego $\{e^z : z \in A\} = \{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) : a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq 2\pi\}$

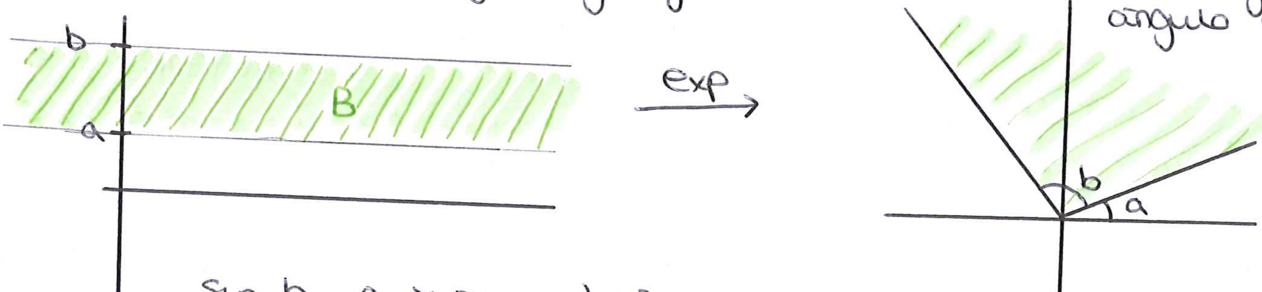
es decir, la exponencial lleva bandas verticales en coronas circulares centradas en el origen.

▷ Sea $B = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im} z \leq b\}$

Suponemos $b - a < 2\pi$

$e^{x+iy} \underset{\uparrow}{=} e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \{e^{x+iy} : x \in \mathbb{R}\}$ semirrecta $(0, +\infty)$ girada un ángulo y

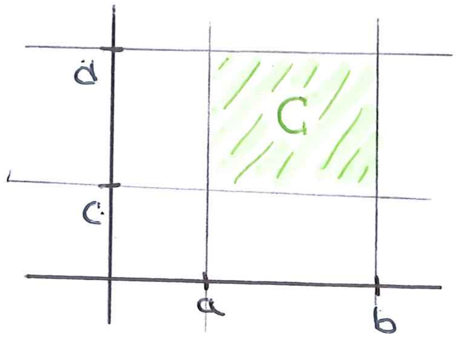
Fijo $y \in [a,b]$ ↳ giro ángulo y



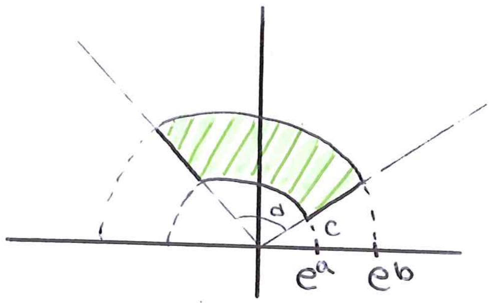
Sup $b - a \geq 2\pi \Rightarrow \{e^z : z \in B\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

La exp lleva bandas horizontales en sectores del plano con vértice en el origen

Sea $C = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b,\ c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$



$\xrightarrow{\exp}$



3 Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar $\lim_{r\to+\infty} f(r)$ donde $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada por $f(r) = \exp(re^{i\theta})$ $\forall r \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{r\to+\infty} e^{re^{i\theta}} = \lim_{r\to+\infty} e^{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} = \lim_{r\to+\infty} e^{\overbrace{r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta}^{z}}$$

$\operatorname{Re} e^z = e^{r\cos\theta} \cos(r\operatorname{sen}\theta)$

$\operatorname{Im} e^z = e^{r\cos\theta} (\operatorname{sen}(r\operatorname{sen}\theta))$ $\Big\}$ No tiene lim en $+\infty$ $\Rightarrow \nexists \lim_{r\to+\infty} f(r)$

5 Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones: $\sum_{n\geq 0} e^{-nz^2}$

$$\sum_{n\geq 0} e^{-nz^2} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{(e^{-z^2})^n}_{(f(z))^n} \rightsquigarrow \text{la serie geométrica } \sum_{n\geq 0} w^n \text{ converge (absolut) } \Leftrightarrow |w| < 1$$

$\sum_{n\geq 0} (w)^n$ $\Big\{$ converge absolutamente en $D(0,1)$ (Esto lo sabemos)
converge uniformemente en todo compacto de $D(0,1)$
y no converge en ningún pto fuera de $D(0,1)$

Nuestra serie converge absolutamente en Ω

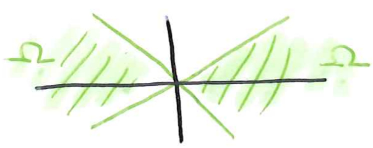
$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \ / \ f(z) \in D(0,1)\}$

y no converge en ningún punto fuera de Ω

$z \in \Omega \Leftrightarrow |e^{-z^2}| < 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(-z^2)} < 1 \Leftrightarrow e^{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2} < 1$

$-z^2 = -((\operatorname{Re}(z))^2 + 2i \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)^2)$

$\Leftrightarrow (\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 < 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Im} z)^2 < (\operatorname{Re} z)^2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|$



(convergencia uniforme pag 3)


COMPRAR ENTRADAS
MARVEL STUDIOS
DOCTOR STRANGE
EN EL
MULTIVERSO DE LA LOCURA
6 DE MAYO SOLO EN CINES
©2022 MARVEL. PENDIENTE DE CALIFICACIÓN POR EDADES.

8 Probar que $\forall z \in D(0,1)$, se tiene: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$

sea $f(z) = \log(1+z)$ $\forall z \in D(0,1) \Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{1+z}$ $\forall z \in (0,1)$

$$\frac{1}{1+z} = \underbrace{\frac{1}{1-(-z)}}_{\text{suma serie geometrica}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (\text{converge } \forall z \in D(0,1))$$

$$f(z) = \int f'(z)dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \log(1+z) \quad \forall z \in D(0,1)$$

12 Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$

Recordamos que el $\boxed{\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^{inz}}{i2^{n+1}} - \frac{e^{-inz}}{i2^{n+1}} \right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{e^{inz}}{2^{n+1} i} - \sum_{n\geq 0} \frac{e^{inz}}{2^{n+1} i} = \frac{i}{2} \sum \frac{e^{inz}}{2^n} - \frac{i}{2} \sum \frac{e^{-inz}}{2^n}$$

Estudiamos ambas series por separado:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n \Rightarrow$ serie geometrica converge $\Leftrightarrow \left|\dfrac{e^{iz}}{2}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |e^{iz}| < 2 \Leftrightarrow e^{-\operatorname{Im} z} < 2 \Leftrightarrow -\operatorname{Im} z < \log 2 \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Im} z > -\log 2}$

$iz = i(a+bi) = ia - b$ DUDA

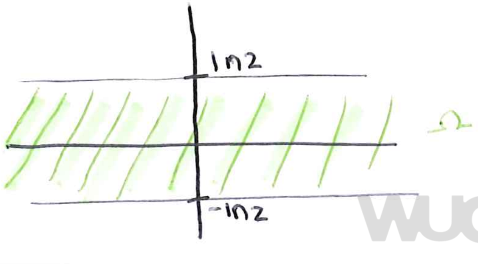
2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n \Rightarrow$ serie geom. converge $\Leftrightarrow \left|\dfrac{e^{-iz}}{2}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |e^{-iz}| < 2 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Im} z} < 2 \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Im} z < \log 2}$

$-iz = -i(a+bi) = -ai + b$

luego la serie converge absolutamente en el conjunto:

$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : -\ln 2 < \operatorname{Im} z < \ln 2 \}$



Para estudiar la convergencia uniforme buscamos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left|\frac{e^{iz}}{2}\right| \leq r \text{ y } \left|\frac{e^{-iz}}{2}\right| \leq r \text{ con } r < 1$$

- $\left|\frac{e^{iz}}{2}\right| \leq r \iff e^{-\operatorname{Im} z} \leq 2r \iff \operatorname{Im} z \geq -\ln(2r)$

- $\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right| \leq r \iff e^{\operatorname{Im} z} \leq 2r \iff \operatorname{Im} z \leq \ln(2r)$

Luego para cada $r<1$ tenemos la convergencia uniforme en la banda:

$$\Omega_r = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\ln(2r) \leq \operatorname{Im} z \leq \ln(2r) \}$$

14 Para $z \in D(0,1)$ con $\operatorname{Re} z \neq 0$ probar que

$$\operatorname{arctg} 1/z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

4

Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos con $z_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $\{z_n\} \to 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \{z_n^{w_n}\} \to e^{\lambda}$$

$$z_n^{w_n} = e^{w_n \log(z_n)} = e^{\overbrace{w_n(z_n-1)}^{\to \lambda \text{ por hip}} \underbrace{\frac{\log(z_n)}{z_n - 1}}_{(*)\ \to 1 \text{ log deriv en } 1 \text{ y su deriv} = 1}} \longrightarrow e^{\lambda}$$

$$\lim_{z \to 1} \underbrace{\frac{\log(z) - \log(1)}{z - 1}}_{\text{si ponemos } z_n\ (*)} = (\log(z))'\Big|_{z=1} = \frac{1}{1} = 1$$

5

$\sum e^{-nz^2}$ convergencia uniforme :

Estudiamos la convergencia uniforme:

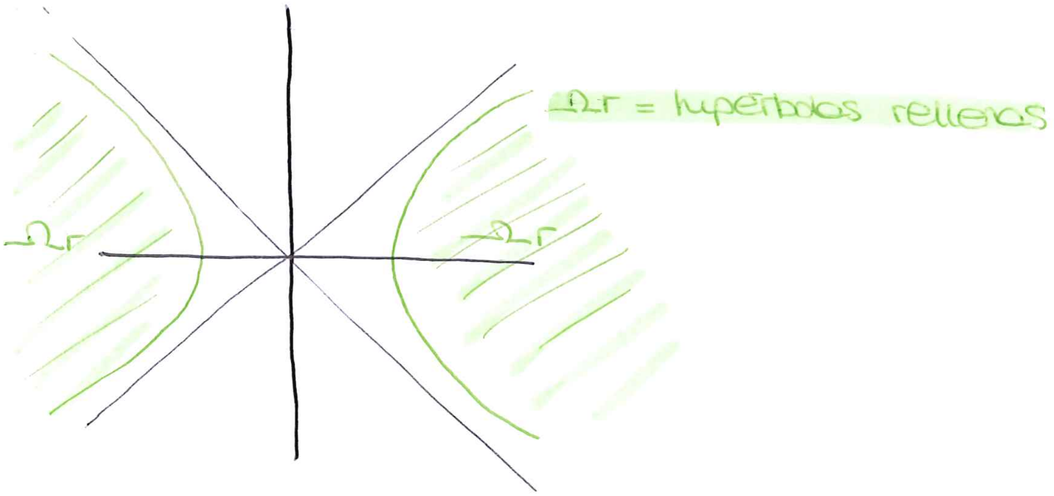
si $K \subset \Omega$ es compacto, como φ es continua , $\varphi(K)$ es un compacto de $D(0,1)$ y como la serie geométrica c.u. sobre compacto de $D(0,1) \Rightarrow$ nuestra serie conv. unif. en K

Podemos afinar un poco más :

con $0 < r < 1$

$\boxed{\Omega_r} = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \varphi(z) \in \bar{D}(0,1) \}$

nuestra serie conv. unif. en Ωr $\forall r \in]0,1[$



Faltaba dem la holomorfía:

$\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$

$\log(1+z) \in \mathcal{H}(D(0,1))$?

si $z \in D(0,1)$ ¿ $1+z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$?

$\Downarrow$

$1+z \in D(1,1) \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \Rightarrow \log(1+z) \in \mathcal{H}(D(0,1))$

por composición

$|1+z-1| = |z| < 1$

$$(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n\geq 0} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$\Rightarrow$ sigue como ej 8 pag 2