Tema1-AII.pdf

jaliriop

Álgebra II

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

13/9/19

1 COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

1.1. PERMUTACIONES, VARIACIONES Y COMBINACIONES

Definición: dado un conjunto X, una <u>permutación</u> de X es una biyección de X en X. El conjunto de permutaciones se denota $Per(X)$

Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $Per(X) = S_n$ (grupo simétrico de grado n). Además, $|S_n| = n!$

Definición: sean $n \geq m \geq 1$, una variación de n elementos tomados m a m es cada elección ordenada de m elementos distintos tomados entre los n. $V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Si se admite que los elementos no tienen porqué ser distintos, tenemos las variaciones con repetición $VR_n^m = n^m$

Definición: Sean $n \geq m, \geq 1$. Entonces una combinación de n elementos tomados m a m es cada uno de los subconjuntos de m elementos distintos tomados entre los n. $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

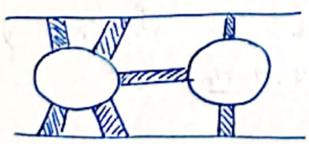
Si se admite que los elementos pueden repetirse, tenemos las combinaciones con repetición $CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \binom{n+m-1}{m}$

Propiedades:

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
3) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

1.2. GRAFOS

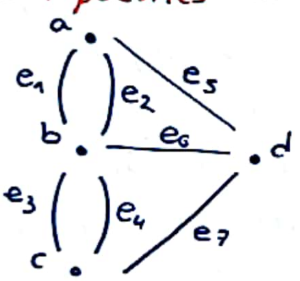
Motivado por el problema de los puentes de Königsberg



Definición (grafo): Un grafo $G = (V, E, \gamma_G)$ donde V y E son conjuntos finitos y $\gamma_G : E \longrightarrow \{(u,v) \mid u, v \in V\}$.
γ_G es la aplicación de incidencia.
V es el conjunto de vértices
E es el conjunto de aristas o lados.

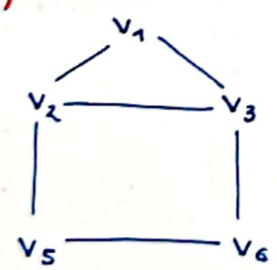
Observaciones: Si $\gamma_G(e_1) = \gamma(e_2)$, $e_1, e_2 \in E$, se dice que e_1 y e_2 son aristas o lados paralelos.
Si $\gamma(e) = \{u\}$ con $e \in E$, entonces e es un lazo.
Excluimos en nuestra noción de grafo la existencia de lados paralelos o lazos.
Cuando existen lados paralelos o lazos, lo llamaremos multigrafos.

Ejemplo (puentes de Königsberg):



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{e_1, \dots, e_7\}$
$\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2) = \{a, b\}$
$\gamma_G(e_3) = \gamma_G(e_4) = \{b, c\}$
$\gamma_G(e_5) = \{a, d\}$
$\gamma_G(e_6) = \{b, d\}$
$\gamma_G(e_7) = \{c, d\}$

Ejemplo 1:



Definición: Cuando en un grafo G tenemos aplicaciones s, t que para cada arista asigne un dominio y un codominio, tenemos un grafo orientado.
$s, t : E \to V$

Definición (subgrafo): dados grafos $G = (V, E, \gamma_G)$ y $G' = (V', E', \gamma_{G'})$, se dice que G' es un <u>subgrafo</u> de G si $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y $\gamma_G(e) = \gamma_{G'}(e)$ $\forall e \in E'$.
El subgrafo se dice <u>pleno</u> si tiene todas las aristas de G que unen vértices de G', esto es, si verifica que si $e \in E \mid \gamma_G(e) \subseteq V' \Rightarrow e \in E'$

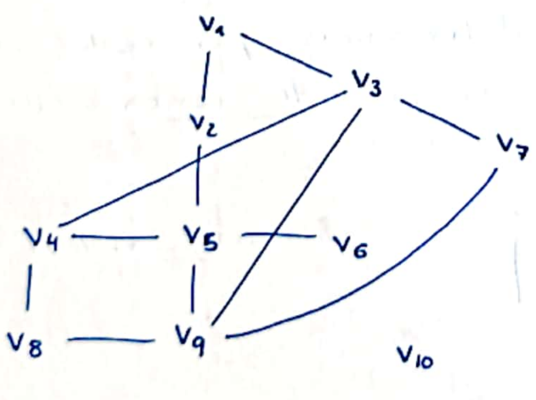
Definición: En un grafo $G = (V, E, \gamma_G)$,

+ un <u>camino</u> de longitud n de v_1 a v_{n+1} es una sucesión de n lados $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} \dots v_n \xrightarrow{e_{n+1}} v_{n+1}$ con $\gamma_G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. Entonces $e_{n+1} e_n \dots e_2 e_1$ es un camino de longitud n de v_{n+1} a v_1.

  Observación: aceptamos la existencia de caminos de longitud cero de un vértice v en sí mismo.

+ un camino se dice que es <u>cerrado</u> si coinciden el primer y el último vértice
+ un <u>recorrido</u> es un camino sin lados repetidos.
+ un <u>camino simple</u> es un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo, eventualmente, el primero y el último).
+ recorrido + camino cerrado = <u>circuito</u>
+ circuito + camino simple = <u>ciclo</u>

Ejemplo 2:



$v_7 v_3 v_9 v_5 v_4 v_8 v_9 v_3$
$l = 7$ no cerrado
no recorrido

$v_1 v_3 v_9 v_8 v_4 v_3 v_7$
$l = 6$ no cerrado
sí recorrido
no camino simple

$v_3 v_4 v_8 v_9$
$l = 3$ camino simple

$v_1 v_2 v_5 v_9 v_7 v_3 v_1$
$l = 6$ ciclo

$v_1 v_3 v_7 v_9 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1$
$l = 8$ camino cerrado, recorrido] circuito
no camino simple

Observaciones:

- Si en un grafo existe un camino de u a v, entonces existe un camino simple de u a v (basta quitar los vértices entre dos repetidos).
- Si u y v son dos vértices distintos de un grafo y hay dos caminos simples de u a v, entonces hay un ciclo en el grafo. En el ejemplo 2:

$$\left.\begin{matrix} V_3 V_4 V_8 \\ V_3 V_9 V_8 \end{matrix}\right\} \; V_3 V_4 V_8 V_9 V_3 \quad \text{ciclo}$$

$$\left.\begin{matrix} V_3 V_4 V_8 \\ V_3 V_1 V_2 V_5 V_9 V_8 \end{matrix}\right\} \; V_3 V_4 V_8 V_9 V_5 V_2 V_1 V_3$$

$$\downarrow$$

$$V_3 V_4 V_5 V_2 V_1 V_3 \quad \text{ciclo}$$

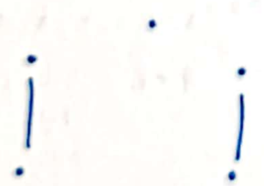
16/9/19

Definición: sea un grafo $G = (V, E; \gamma_G)$. Dados dos vértices $u, v \in V$ diremos que están relacionados si existe un camino de u a v. Esta relación binaria es de equivalencia, luego podemos definir el conjunto cociente V/R = clases de equivalencia (un vértice y todos los relacionados forman una clase de equivalencia)

Si cualesquiera dos vértices están relacionados (solo hay una clase de equivalencia) diremos que el grafo es <u>conexo</u>.

El subgrafo pleno determinado por cada clase de equivalencia es una <u>componente conexa</u> del grafo.

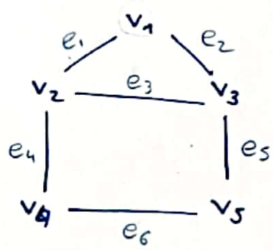
Ejemplo:



3 componentes conexas.

Definición: si $G = (V, E; \gamma_G)$ es un grafo y $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, su matriz de adyacencia es la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ con
$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{en otro caso} \\ 1 & \text{si } \exists e \in E \mid \gamma_G(e) = \{v_i, v_j\} \end{cases}$$

Ejemplo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observaciones:
- Siempre tiene ceros en la diagonal principal
- Es simétrica.
- Solo tiene 0 y 1

Definición: la matriz de incidencia en un (n, m)-grafo ($n = |V|$, $m = |E|$) es la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{N})$ con
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in \gamma_G(e_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

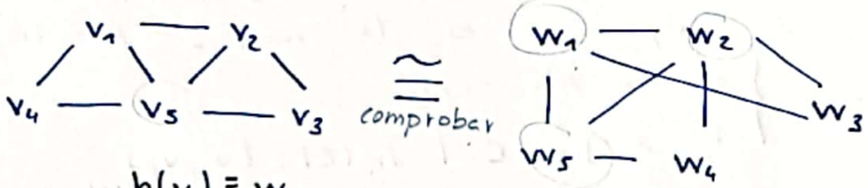
Ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición: dados dos grafos $G = (V, E; \gamma_G)$, $G' = (V', E'; \gamma_{G'})$ se dice que son isomorfos si $\exists\, h: V \longrightarrow V'$ biyectiva y $\exists\, e \in E \mid \gamma_G(e) = \{u, v\} \Leftrightarrow \exists\, e' \in E' \mid \gamma_{G'}(e') = \{h(u), h(v)\}$

Observación: para multigrafos también se necesita biyección entre aristas.

Ejemplos:



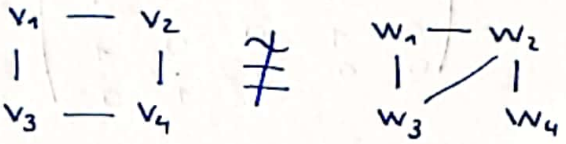
$h(v_1) = w_1$

$h(v_2) = w_5$

$h(v_3) = w_4$

$h(v_4) = w_3$

$h(v_5) = w_2$



Definición: el <u>grado de un vértice</u> de un grafo es el número de aristas que son incidentes con él.

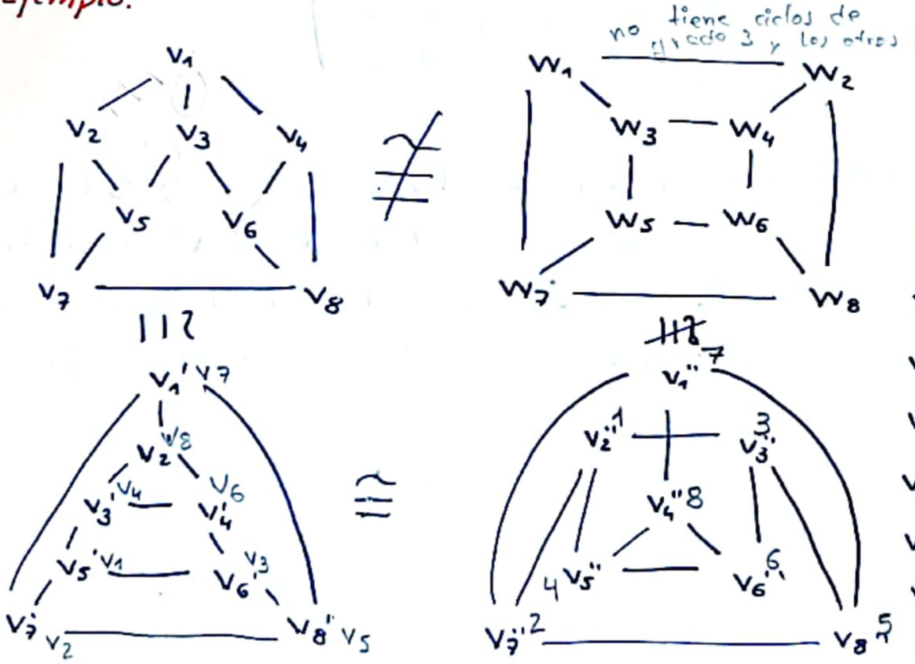
Si dos grafos son isomorfos y $h: V \to V$ es la biyección entre los vértices se tiene que $\forall v \in V \quad gr(v) = gr(h(v))$

Observación:

- $\sum_{v_i \in V} gr(v_i) = 2m \qquad (m \equiv n^o \text{ aristas})$

- Si todos los vértices de un grafo tienen el mismo grado (d) se dice que el grafo es <u>regular de grado d</u>

Ejemplo:



Todos son regulares de grado 3.

$v_1 \to v_5' \to v_2''$

$v_2 \to v_7' \to v_7''$

$v_3 \to v_6' \to v_3''$

$v_4 \to v_3' \to v_5''$

$v_5 \to v_8' \to v_8''$

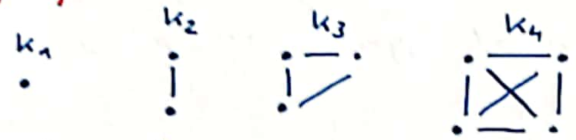
$v_6 \to v_4' \to v_6''$

$v_7 \to v_1' \to v_1''$

$v_8 \to v_2' \to v_4''$

Definición: se llama grafo completo de n vértices aquel en que cada dos vértices son adyacentes (hay una arista entre cada dos vértices). Los notaremos K_n.
El número de aristas en uno de estos grafos es $m = \binom{n}{2}$

Ejemplos:



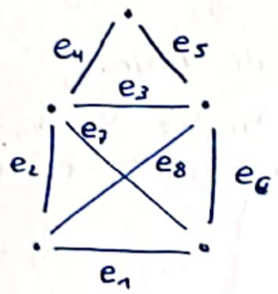
Todo grafo completo de n vértices es regular de grado $n-1$

Definición: un camino de Euler en un grafo es un recorrido en el que aparecen todas las aristas del grafo.

Definición: un circuito de Euler es un camino de Euler cerrado.

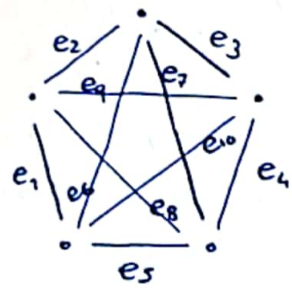
Definición: un grafo de Euler es un grafo conexo en el que hay un circuito de Euler.

Ejemplo:



$e_2 e_4 e_5 e_8 e_1 e_7 e_3 e_6$ camino de Euler

K_5



$e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10}$ circuito de Euler

Teorema: Un grafo conexo es un grafo de Euler si, y solo si, todos sus vértices tienen grado par.

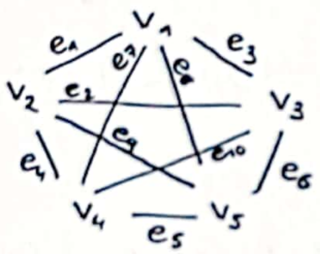
17/9/19

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$] Sea G un grafo conexo, de Euler y α es un circuito de Euler, entonces, cada vez que α pasa por un vértice, suma dos a su grado (entrada y salida). Además, como en α no se repiten lados , se tiene que el grado de α es múltiplo de 2.

$\Leftarrow$] Solo vamos a ilustrar la demostración.

Bajo la hipótesis de que todos los vértices tengan grado par, se tiene que en el conjunto de aristas se puede hacer una partición de forma que cada parte sea un ciclo. Por ejemplo, supongamos K_5

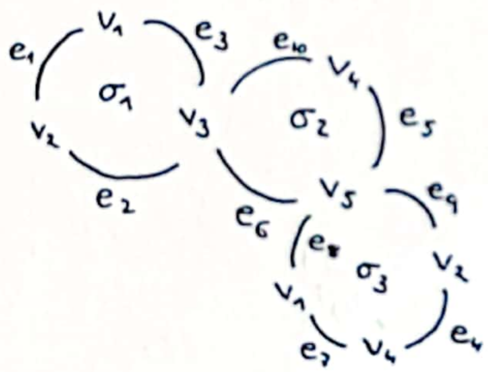


Todos los vértices tienen grado 4

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} =$$
$$= \{e_1, e_2, e_3\} \cup \{e_{10}, e_5, e_6\} \cup \{e_9, e_4, e_7, e_8\}$$
$$\Downarrow$$

Circuito de Euler

$v_1 \; v_3 \; v_4 \; v_5 \; v_2 \; v_4 \; v_1 \; v_5 \; v_3 \; v_2 \; v_1$
$e_3 \; e_{10} \; e_5 \; e_9 \; e_4 \; e_7 \; e_8 \; e_6 \; e_2 \; e_1$



Observación: El resultado anterior es válido para multigrafos. (La respuesta al problema de los puentes de Königsberg es negativa).

Corolario: El grafo completo de n vértices, K_n, es de Euler si, y solo si, n es impar.

DEMOSTRACIÓN:

Los vértices de K_n son de grado $n-1$, que serán par si n es impar. Entonces K_n será de Euler.

Algoritmo de Fleury: sirve para encontrar un circuito de Euler en un grafo de Euler.

1) Verificar que el grafo es conexo con todos los vértices de grado par.

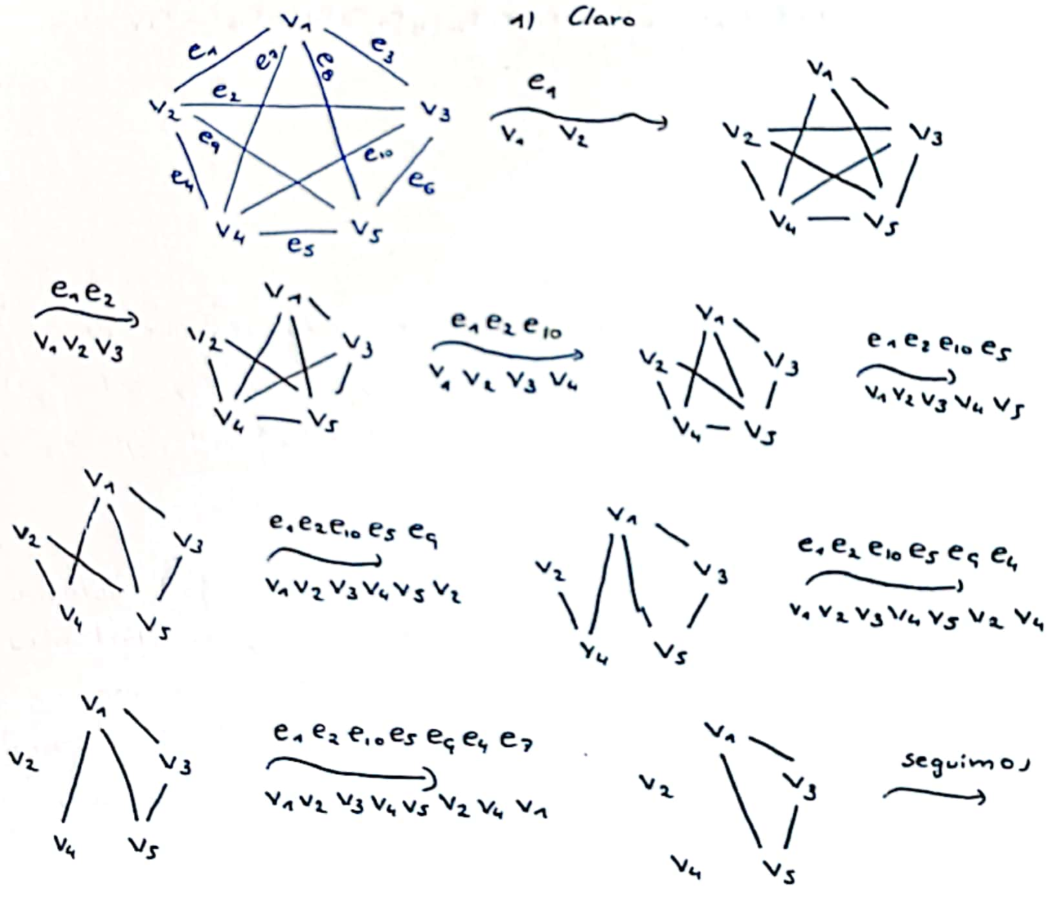
2) Seleccionar un vértice arbitrario.

3) Seleccionar una arista a partir de ese vértice que no sea puente, es decir, que no desconecte el grafo, a menos que no haya otra alternativa.

4) Reiterar a partir de 3), hasta conseguir que todos los vértices estén desconectados, en cuyo caso, ya tendremos el circuito de Euler.

Ejemplo:

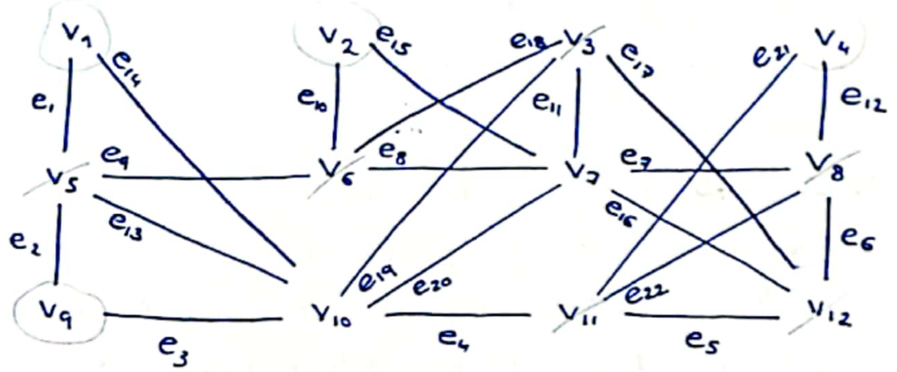
1) Claro



$e_1 e_2 e_{10} e_5 e_9 e_4 e_7 e_3 e_6 e_8$

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_2 v_4 v_1 v_3 v_5 v_1$

Ejemplo:



Sucesión de nº de vértices de grado i

$0, 0, 4, 0, 6, 0, 2$

Circuito de Euler.

$v_1 v_5 v_9 v_{10} v_{11} v_{12} v_8 v_4 v_{11} v_8 v_7 v_{12} v_3 v_7 v_{10} v_5 v_6 v_7 v_2 v_6 v_3 v_{10} v_1$

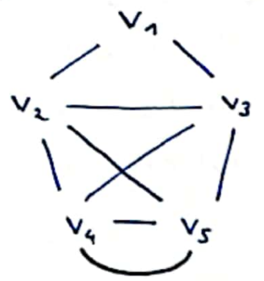
$e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_{12} e_{21} e_{22} e_7 e_{16} e_{17} e_{11} e_{20} e_{13} e_9 e_8 e_{15} e_{10} e_{18} e_{19} e_{14}$

Proposición: Un grafo conexo G tiene un camino de Euler conectando los vértices u y v si, y solo si, u y v son los únicos vértices de G de grado impar.

DEMOSTRACIÓN:

Sea G' el grafo (eventualmente multigrafo) obtenido añadiendo a G una arista entre u y v. Entonces G tiene un camino de Euler $\Leftrightarrow$ G' tiene un circuito de Euler $\Leftrightarrow$ todos los vértices de G' tienen grado par $\Leftrightarrow$ todos los vértices de G, salvo u y v, tienen grado par.

Ejemplo:



20/9/19

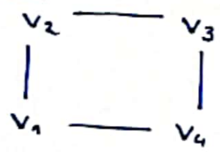
Definición: un <u>camino de Hamilton</u> en un grafo G es un camino que recorre todos los vértices de G una sola vez.

Definición: si el camino de Hamilton es cerrado, hablamos de un <u>circuito de Hamilton.</u>

Definición: un <u>grafo</u> se dice que es <u>de Hamilton</u> si tiene un circuito de Hamilton.

Ejemplos:

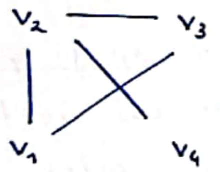
1)



grafo de Hamilton

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$

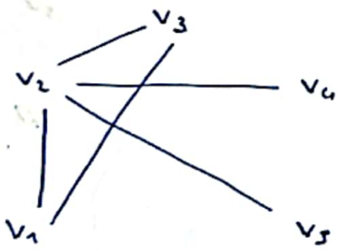
2)



no es un grafo de Hamilton
tiene un camino de Hamilton

$v_4 v_2 v_3 v_1$

3)



no es un grafo de Hamilton
no tiene camino de Hamilton
sí hay un camino de Euler de v_4 a v_5

Observaciones:

- Si $|V| \geq 3$ y existe un vértice de grado 1, el grafo no es de Hamilton
- Si G es de Hamilton con n vértices, G tiene al menos n aristas.

Teorema: sea G un (n,m)-grafo. Entonces

i) Si $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, entonces G es de Hamilton.

ii) Si $n \geq 3$ y para cualesquiera dos vértices no adyacentes u y v, se tiene que el $gr(u)+gr(v) \geq n \Rightarrow G$ es de Hamilton.

Ejemplos:

1) K_4

$m = 6$

$\left.\begin{array}{l} m=6 \\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 = 5 \end{array}\right\} 6 > 5 \Rightarrow$ Hamilton.

2) G grafo regular de grado 4 con 8 vértices.

$$m = \frac{\sum gr(v_i)}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$16 \not\geq 23$$

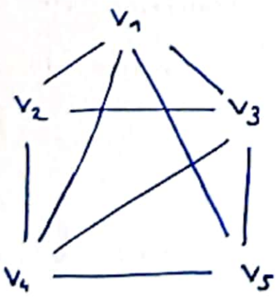
$$\frac{1}{2}(8-1)(8-2)+2 = 23$$

$gr(u)+gr(v) = 8 \qquad m = 8 \geq 8 \Rightarrow$ Hamilton

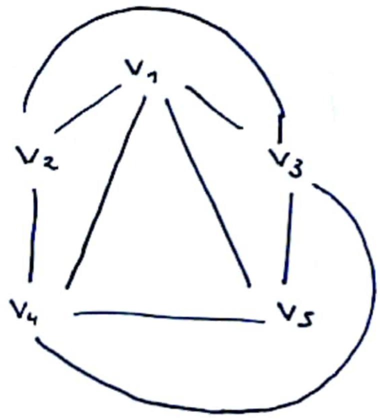
Definición: un grafo G se dice que es un grafo plano si admite una representación plana de sus vértices y aristas de forma que estas solo se corten en vértices.

Ejemplos:

1)



$\Rightarrow$

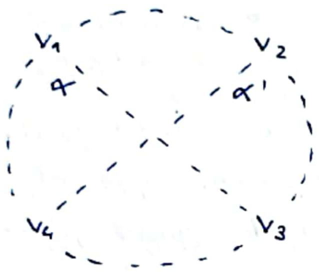


- grafos asociados a poliedros son planos
  K_4 es el grafo asociado a un tetraedro

Método sencillo para ver que un grafo no es plano.

$G \to$ ciclo $\quad v_1 \dots v_2 \dots v_3 \dots v_4 \dots v_1$

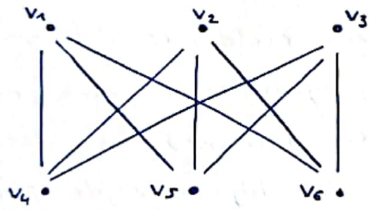
$\searrow$ dos caminos simples entre dos vértices intercalados del ciclo



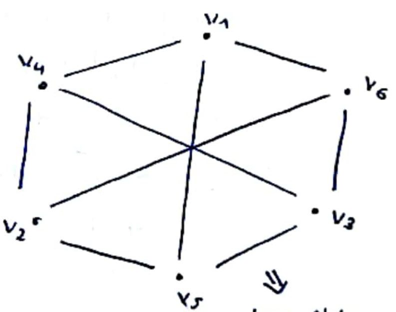
G no será plano
$\Updownarrow$
α y α' están ambos dentro o fuera de la región delimitada por el ciclo.

Ejemplo:

$K_{3,3}$



consideramos el ciclo
$v_1 v_6 v_3 v_5 v_2 v_4 v_1$



$\Downarrow$
Imposible, siempre habrá dos caminos simples dentro o fuera
$\Downarrow$
G no es plano

Una representación plana de un grafo en la que las aristas sólo se corten en vértices divide al plano en distintas regiones que llamamos <u>caras</u> del grafo.

Teorema: sea G un (n,m)-grafo plano conexo con c caras en una representación plana. Se tiene que

$$n - m + c = 2$$

(En general, si el grafo no es conexo, y tiene χ componentes conexas, se tiene que $n-m+c = 1+\chi$)

DEMOSTRACIÓN:

Haremos inducción sobre m = nº aristas

- Si $m=1 \Rightarrow$ •——• K_2 $\Rightarrow$ $n-m+c=2$
  $2-1+1=2$ ✓

- Supongamos un grafo conexo con $m+1$ aristas, n vértices y c caras, y suponemos que el resultado es cierto para todos los grafos planos conexos con m aristas.

¿$n-(m+1)+c=2$?

  - Si en el grafo G hay un ciclo, consideramos el subgrafo G' obtenido suprimiendo una arista del ciclo. Entonces, en G' tenemos n vértices m aristas y $c-1$ caras. Por hipótesis de inducción, $n-m+c-1=2 \Rightarrow n-(m+1)+c=2$ ✓
  - Si en el grafo G no hay ningún ciclo, entonces hay un vértice de grado 1 (si $\forall v_i$, $gr(v_i) \geq 2$, tomamos v_0 —— v_1 —— v_2 —— ..., lo que conduce sin repetir aristas a un circuito que es camino simple y, por tanto, a un ciclo). Consideramos el subgrafo de G obtenido suprimiendo el vértice de grado 1 y su arista incidente. El subgrafo tiene $n-1$ vértices, m aristas y c caras. Por hipótesis de inducción, $(n-1)-m+c=2$ $\Rightarrow n-(m+1)+c=2$ ✓

Por tanto, $n-m+c=2$

Corolario: sea G un grafo plano y conexo sin vértices de grado 1. Entonces

$$3c \leq 2m \quad y \quad m \leq 3n - 6$$

DEMOSTRACIÓN:

Admitimos la primera desigualdad como cierta, entonces

$$2 = n - m + c \leq n - m + \frac{2m}{3} = n - \frac{m}{3} \Rightarrow$$

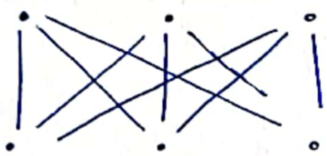
$$\Rightarrow 6 \leq 3n - m \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Ejemplos:

- $K_5 \Rightarrow n = 5$
  si fuera plano, $m \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ pero $m = 10$, luego K_5 no es plano.

23/9/19

- $K_{3,3}$



$n = 6$
$m = 9$
$9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12 \Rightarrow$ Pero no es plano.

Luego la condición del corolario anterior, la condición es necesaria pero no suficiente.

Corolario: En un poliedro con v vértices, l lados y c caras se verifica que $\underbrace{v - l + c = 2}_{\text{característica de Euler (invariante topológico)}}$

Definición: Una sucesión de números naturales $d_1, d_2, \dots, d_n$ es una sucesión gráfica si existe un grafo G con conjunto de vértices $v_1 v_2, \dots, v_n$ con $gr(v_i) = d_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Ejemplos:

- $0, 0, 0, \dots, 0$ • • • ... •
- $1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1$ (número par de unos)   •—• •—• ... •—•

- 2, 2, 2, 2

- 4 3 3 2 2 1 → No es una sucesión gráfica

$\sum_{v_i \in V} gr(v_i) = 15$ → Imposible

- 5 4 3 2 2 → No es una sucesión gráfica porque solo hay 5 vértices, luego $gr(v_i) \leq 4$

Teorema: Dada una sucesión de números naturales $d_1, d_2, \dots, d_n$ que suponemos ordenada: $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ y con $d_1 < n$, se tiene que es una sucesión gráfica si, y solo si, lo es la sucesión

$\leftarrow d_{d_1}-1$

$$d_2-1,\ d_3-1, \dots,\ d_{d_1+1}-1,\ d_{d_1+2}, \dots,\ d_n$$

Ejemplo:

- 5 4 4 2 2 1

  3 3 1 1 0

  2 0 0 0

  -1 -1 0 ← No es gráfica

- 4 4 3 2 2 2 1

  3 2 1 1 2 1

  3 2 2 1 1 1

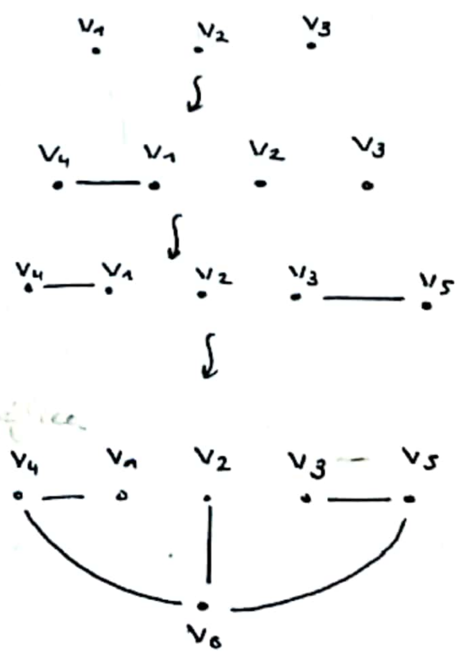
  1 1 0 1 1

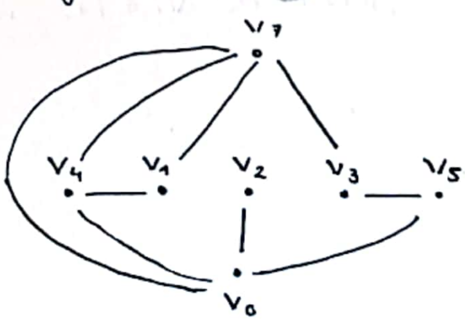
  1 1 1 1 0

  0 1 1 0

  1 1 0 0

  Gráfica ← 0 0 0





6 4 4 3 3 3 3 3 3

$\boxed{3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 2}$ 3 3

3 3 3 3 2 2 2 2

$\boxed{2\ 2\ 2}$ 2 2 2 2

$\boxed{1\ 1}$ 2 2 2 2

2 2 2 2 1 1 ←

$\boxed{1\ 1}$ 2 1 1

2 1 1 1 1

$\boxed{0\ 0}$ 1 1

1 1 0 0

Gráfica ← $\boxed{0}$ 0 0