Tema5-AII.pdf

jaliriop

Álgebra II

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

5 GRUPOS RESOLUBLES

4/11/19

Definición: Sea G un grupo. Una __serie de G__ es una cadena de subgrupos $G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots > G_r = 1$, donde $r \in \mathbb{N}$ es la __longitud de la serie__.

Definición: Dadas dos series de G: $(*)$ $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = 1$ y $(**)$ $G = G'_0 > G'_1 > \dots > G'_s = 1$, se dice que $(*)$ es un __refinamiento__ de $(**)$ si todo subgrupo que aparece en $(**)$ está en $(*)$.

Definición: Si existen subgrupos de $(*)$ que no están en $(**)$, se habla de __refinamiento propio__.

Definición: Una __serie propia__ es aquella en que todas las inclusiones son propias.

Ejemplo: $S_4 > A_4 > V > H > 1$ donde $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Esta serie de S_4 es un refinamiento $H = \{1, (12)(34)\}$ de $S_4 > A_4 > H > 1$.

Definición: Una serie $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = 1$ es __normal__ si $G_{i-1} \triangleright G_i$ $\forall i$. En este caso, se pueden construir todos los cocientes G_{i-1}/G_i, que se llaman los __factores de la serie__.

Definición: Dos series normales de un grupo G: $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_r = 1$ y $G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \dots \triangleright H_s = 1$ se dicen __isomorfas__ si

$$\begin{cases} r = s \\ \exists \sigma \in S_r \mid \dfrac{G_{i-1}}{G_i} \cong \dfrac{H_{\sigma(i)-1}}{H_{\sigma(i)}} \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Ejemplo: Consideremos las siguientes series de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

(Es abeliano, luego no nos tenemos que preocupar de la normalidad).

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 8\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 24\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 12\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} > 24\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$$

Las series son isomorfas porque: $\ell = 4$. Además, tomando $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$

$$\frac{\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}} \cong \frac{3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}, \quad \frac{2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}} \cong \frac{6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}},$$

$$\frac{4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}} \cong \frac{12\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}} \quad , \quad \frac{8\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}}$$

Definición: Una serie de composición de G es una serie normal de G sin refinamientos normales propios.

Ejemplo: Las dos series anteriores de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ son series de composición. Sin embargo, la serie $A_4 > V > 1$ no es de composición porque $A_4 > V > H > 1$ es un refinamiento normal propio.

Definición. Los factores de una serie de composición de un grupo se llaman factores de composición.

Definición: Un grupo G se dice que es un grupo simple si G no es trivial, y no tiene subgrupos normales propios.

Lema: Sea G un grupo abeliano. Entonces 5/11/19
G es simple si, y solo si, G es cíclico de orden primo.

DEMOSTRACIÓN:

Como G abeliano, si es simple, entonces no tiene subgrupos propios.

$\Leftarrow]$ $|G| = p$ primo $\overset{\text{Teorema Lagrange}}{\Longrightarrow}$ G no tiene subgrupos propios $\Rightarrow$ G simple

$\Rightarrow]$ Sea $\underset{\neq 1}{x} \in G$ y consideremos $\overset{1}{\underset{}{\neq}}\langle x \rangle < G$. Por ser G simple $\Rightarrow$ $G = \langle x \rangle$ cíclico.

G no puede ser cíclico infinito, porque si lo fuera, sería isomorfo a $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ no es simple (tiene subgrupos $n\mathbb{Z}$).

Por tanto G es cíclico finito, luego $G \cong \mathbb{Z}_n$, y al ser simple no tiene subgrupos propios, luego n es primo.

Lema: Los factores de composición de un grupo G son grupos simples.

DEMOSTRACIÓN:

Suponemos que G tiene una serie de composición

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_{i-1} \rhd G_i \rhd \dots \rhd G_r = 1.$$

¿ G_{i-1}/G_i es simple?

Supongamos que existe $\overset{\nexists}{J} \ntrianglelefteq G_{i-1}/G_i$ un subgrupo normal propio, por el 3^{er} Teorema de isomorfía, $J = H/G_i$ con $G_i \ntrianglelefteq H \ntrianglelefteq G_{i-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_{i-1} \rhd H \rhd G_i \dots \rhd G_r = 1$ sería un refinamiento normal propio de la serie inicial, pero entonces esta no sería de composición.

Luego $\nexists J \ntrianglelefteq \frac{G_{i-1}}{G_i}$

Observación: $\mathbb{Z}$ no tiene series de composición.

Lema: Todo grupo finito tiene una serie de composición.

DEMOSTRACIÓN:

Sea G un grupo finito. Si G es simple, entonces $G \rhd 1$ es una serie de composición.

Si G no es simple, $\exists\ \overset{\nexists}{N} \ntrianglelefteq G$ y tomamos N el de mayor orden y consideramos la serie $G \rhd N \rhd 1$, que es normal. Por construcción, G/N es simple, y si N es simple, $G \rhd N \rhd 1$ es serie de composición. Si N no es simple, reiteramos el proceso, y como G es finito, el número de subgrupos es finito y, por tanto, debemos acabar en un número finito de pasos en una serie de composición para G.

Teorema (de refinamiento de Schreier): Dos series normales arbitrarias de cualquier grupo G tienen refinamientos isomorfos.

DEMOSTRACIÓN:

Sean $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_{i-1} \rhd G_i \rhd \dots \rhd G_r = 1$

$G = H_0 \rhd H_1 \rhd \dots \rhd H_{j-1} \rhd H_j \rhd \dots \rhd H_s = 1$

dos series normales de G.

Consideramos

$$\left.\begin{array}{l} G_i \lhd G_{i-1} < G \\ H_j \lhd H_{j-1} < G \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4° Teorema} \\ \text{Isomorfía}}}{\Longrightarrow} \quad G_{ij} = G_i(H_j \cap G_{i-1}) \lhd G_{ij-1} = G_i(H_{j-1} \cap G_{i-1})$$

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$
$\forall j \in \{0, \dots, s\}$

$$G_{i0} = G_i(H_0 \cap G_{i-1}) = G_i(G \cap G_{i-1}) = G_i G_{i-1} = G_{i-1}$$
$$G_{is} = G_i(H_s \cap G_{i-1}) = G_i(1 \cap G_{i-1}) = G_i 1 = G_i$$

$$G_{i-1} = G_{i0} \rhd G_{i1} \rhd \dots \rhd G_{is-1} \rhd G_{is} \trianglerighteq G_i$$

Entonces, obtenemos

$$G = G_0 \rhd G_{10} \rhd G_{11} \rhd \dots \rhd G_{1s} = G_1 = G_{20} \rhd G_{21} \rhd \dots \rhd G_{2s} = G_2 = G_{30} \rhd$$
$$\rhd \dots \rhd G_{r-1\,s} = G_{r-1} = G_{r0} \rhd G_{r1} \rhd \dots \rhd G_{rs} = G_r = 1$$

$$r(s+1) - (r-1) = rs + r - r + 1 = rs + 1$$

Igualmente, consideramos

$$H_{ij} = H_j(G_i \cap H_{j-1}) \lhd H_{i-1\,j} = H_j(G_{i-1} \cap H_{j-1}) \qquad \begin{array}{l} j \in \{1, \dots, s\} \\ i \in \{0, \dots, r\} \end{array}$$

Entonces

$$H_{0j} = H_j(G_0 \cap H_{j-1}) = H_j(G \cap H_{j-1}) = H_j H_{j-1} = H_{j-1}$$
$$H_{rj} = H_j(G_r \cap H_{j-1}) = H_j(1 \cap H_{j-1}) = H_j 1 = H_j$$

Por tanto

$$G = H_0 \rhd H_{01} \rhd \dots \rhd H_{r1} = H_1 = H_{02} \rhd \dots \rhd H_{r2} = H_2 = H_{03} \rhd \dots \rhd$$
$$\rhd H_{rs-1} = H_{s-1} = H_{0s} \rhd H_{1s} \rhd \dots \rhd H_{rs} = H_s = 1$$

$$(r+1)s - (s-1) = rs + s - s + 1 = rs + 1$$

Además, por el 4° Teorema de isomorfía:

$$\frac{G_i(H_{j-1} \cap G_{i-1})}{G_i(H_j \cap G_{i-1})} \cong \frac{H_j(G_{i-1} \cap H_{j-1})}{H_j(G_i \cap H_{j-1})} \Longleftrightarrow \frac{G_{ij-1}}{G_{ij}} \cong \frac{H_{i-1\,j}}{H_{ij}}$$

Por tanto, con factores isomorfos en las dos series extendidas con igual longitud, luego son isomorfas.

Teorema (de Jordan-Hölder): Si un grupo admite una serie de composición, cualquier serie normal suya puede refinarse hasta una serie de composición. Además, cualesquiera dos series de composición de un grupo son isomorfas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea C una serie de composición de G y N una serie normal suya.

Por el Teorema del refinamiento, al refinar C, obtenemos de nuevo C.

Al refinar N, obtenemos RN que, por el teorema del refinamiento, $RN \cong C$, luego es una serie de composición.

Para la segunda parte,
$$\begin{array}{l} C_1 \text{ s.d.c.} \rightsquigarrow C_1 \\ \phantom{C_1 \text{ s.d.c.} \rightsquigarrow} \ \wr\wr \\ C_2 \text{ s.d.c.} \rightsquigarrow C_2 \end{array}$$
Teorema del refinamiento.

Observación: Si G es finito, entonces tiene una serie de composición, y los factores de composición están determinados de forma única salvo isomorfismo.

Además, si $G_1 \cong G_2$ y tienen series de composición, entonces sus series de composición son isomorfas.

Sin embargo, existen grupos no isomorfos con factores de composición isomorfos. Por ejemplo:

$$S_3 \rhd A_3 \rhd 1 \quad \begin{cases} S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2 \\ A_3/1 \cong \mathbb{Z}_3 \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rhd 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rhd 1 \quad \begin{cases} \dfrac{2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{1} \cong \mathbb{Z}_3 \\ \dfrac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \end{cases}$$

8/11/19

Observación: $\{\mathbb{Z}_p \mid p \text{ primo}\}$ es una familia de grupos simples.

Teorema (de Abel): A_n es simple para $n \geq 5$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN:

Sea $1 \neq k \trianglelefteq A_n$ y veamos que $k = A_n$.

- k contiene un 3-ciclo
- k contiene todos los 3-ciclos.
- Como los 3-ciclos generan $A_n \Rightarrow k = A_n$.

Recordatorio:

$G \rightsquigarrow G' = [G,G] = \{[x,y] \mid x,y \in G\}$ subgrupo conmutador o derivado.

- $[G,G] \triangleleft G$ $= \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x y \in G\} \triangleleft G$
- $G/[G,G]$ abeliano
- $[G,G]$ es el menor subgrupo normal que hace el cociente abeliano

Notación: $G'' = [G', G'] = [[G,G],[G,G]]$

Recurrentemente, $G^{i} = (G^{i-1})'$

Definición: Dado un grupo G, se define la <u>serie derivada</u> de G como la serie normal

$$G = G^0 \trianglerighteq G' \trianglerighteq G'' \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G^{i} \trianglerighteq \dots$$

Se dice que G es <u>resoluble</u> si $\exists i \mid G^{i} = 1$

Ejemplos:

1) Los grupos abelianos son resolubles

G abeliano $\iff [G,G] = 1 \Rightarrow G \trianglerighteq G' = 1$

2) A_5

$A_5' \triangleleft \underset{\text{simple}}{A_5}$ por Tª de Abel $\Rightarrow A_5' = \begin{cases} 1 & \leftarrow \text{no, pq } A_5 \text{ no abeliano} \\ A_5 \end{cases}$

Luego $A_5 \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq \dots \Rightarrow A_5$ no es resoluble

3) $\left.\begin{array}{l} S_5 \\ S_5' = A_5 \\ S_5'' = A_5' = A_5 \end{array}\right\}$ $S_5 \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq A_5 \dots \Rightarrow S_5$ no resoluble

[El grupo más pequeño no resoluble es A_5]

4) $\left.\begin{array}{l} S_3 \\ S_3' = A_3 \leftarrow \text{abeliano} \\ S_3'' = A_3' = 1 \end{array}\right\}$ $S_3 \trianglerighteq A_3 \trianglerighteq 1. \Rightarrow S_3$ resoluble.

5) $S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq 1 \Rightarrow S_4$ resoluble

Teorema: Sea G un grupo finito. Entonces equivalen

i) G resoluble.

ii) G tiene una serie normal con factores abelianos

iii) G tiene una serie normal con factores cíclicos de orden primo
iv) G tiene una serie normal con factores cíclicos.

Ejemplo: $D_n \underset{2}{\trianglerighteq} \langle r \rangle \triangleright 1$

$$\left.\begin{array}{l} D_n/\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \text{ abeliano (cíclico)} \\ \langle r \rangle/1 = \langle r \rangle \text{ cíclico} \Rightarrow \text{abeliano} \end{array}\right\} \underline{D_n \text{ resoluble}}$$

DEMOSTRACIÓN:

i) $\Rightarrow$ ii) | La serie derivada de G, con G resoluble, alcanza el 1, y es una serie normal con factores abelianos

$[G,G] \triangleleft G$ y $G/[G,G]$ abeliano.

$G^{(i} \triangleleft G^{(i-1}$ y $\frac{G^{(i}}{G^{(i-1}}$ abeliano

ii) $\Rightarrow$ iii) | Basta considerar (por el Teorema de Jordan-Hölder) el refinamiento hasta una serie de composición de la serie normal con factores abelianos dada.

En este refinamiento, los nuevos factores son abelianos (porque son cocientes o subgrupos de los factores de la serie original, que eran abelianos), y como son simples (por ser serie de composición) y finitos, entonces los nuevos factores son cíclicos de orden primo.

iii) $\Rightarrow$ iv) | Inmediato.

iv) $\Rightarrow$ i) | Si G tiene una serie normal con factores cíclicos

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_r = 1$$

los factores serán abelianos. Luego G/G_1 es abeliano. Por tanto $G' < G_1$. Por inducción, $G^{(i} < G_i$.

Entonces $G^{(i+1} < G_i' < G_{i+1}$ $\forall i$ $\quad G^{(i+1} < G_i' < G_{i+1}$ $\quad G_i/G_{i+1}$ abeliano

Pero entonces $G^{(r} < G_r = 1$. Luego $G^{(r} = 1$ y G resoluble.

Proposición:

1) Todo subgrupo de un grupo resoluble es resoluble

2) Todo cociente de un grupo resoluble es resoluble.

$\boxed{3)}$ Si $N \triangleleft G$ tal que N y G/N son resolubles, entonces G es resoluble.

IMPORTANTE

DEMOSTRACIÓN:

1) Si $H < G$, entonces, inductivamente $H^{(i} < G^{(i}$
y, si G resoluble $\exists r \mid G^{(r} = 1$
Luego $H^{(r} < G^{(r} = 1 \Rightarrow H^{(r} = 1 \Rightarrow H$ resoluble

2) Sea $N \trianglelefteq G$ y consideremos G/N.

$(G/N)' = \langle [xN, yN] \rangle = \frac{G'N}{N}$

$[xN, yN] = xNyNx^{-1}Ny^{-1}N = xyx^{-1}y^{-1} = [x,y]N$

Inductivamente, $\left(G/N\right)^{(i} = \frac{G^{(i}N}{N}$

Si G resoluble $\exists r \mid G^{(r} = 1$

Entonces $\left(G/N\right)^{(r} = \frac{G^{(r}N}{N} = \frac{N}{N} = 1 \Rightarrow G/N$ resoluble.

3) Si G/N resoluble $\exists r \mid \left(G/N\right)^{(r} = \frac{G^{(r}N}{N} = 1 \Rightarrow G^{(r} < N$
Como N resoluble $\exists s \mid N^{(s} = 1 \Rightarrow G^{(r+s} < N^{(s} = 1 \Rightarrow G$ resoluble.

11/11/19

Corolario: Todo producto finito de grupos resolubles es resoluble.

DEMOSTRACIÓN:

Sean $G_1, G_2, \dots, G_n$ grupos resolubles. ¿$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ es resoluble?

- $n = 2$ Consideramos $p_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2$ sobreyectiva.
$(x_1, x_2) \longmapsto x_2$

$\ker(p_2) = \{(x_1, 1) \mid x_1 \in G_1\} = G_1 \times 1$.
Además $G_1 \cong G_1 \times 1$. Así que $G_1 \times 1$ es resoluble ya que G_1 es resoluble. Además, por el 1er Teorema de isomorfía

$\frac{G_1 \times G_2}{\ker(p_2)} \cong Im(p_2) \Rightarrow \frac{G_1 \times G_2}{G_1 \times 1} \cong G_2 \Rightarrow G_1 \times G_2$ resoluble

porque $G_1 \times 1$ resoluble y el cociente $\cong G_2$ resoluble, luego por el apartado 3) anterior, $G_1 \times G_2$ resoluble.

- $n-1 \Rightarrow n$ $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \xrightarrow{p_n} G_n$ sobreyectiva

$\ker(p_n) = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_{n-1} \times 1 \cong G_1 \times G_2 \times \dots \times G_{n-1}$ resoluble

$$\underbrace{\frac{G_1 \times \dots \times G_n}{G_1 \times \dots \times G_{n-1}}}_{\text{resoluble}} \cong \underset{\substack{\downarrow \\ \text{resoluble}}}{G_n} \overset{3)}{\Longrightarrow} G_1 \times \dots \times G_n \text{ resoluble}$$