

EJERCICIOST7.pdf



martasw99



Variable Compleja I



3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas



**Facultad de Ciencias
Universidad de Granada**

quieres trabajar en Wuolah??

tú puedes ayudarnos a llevar **WUOLAH**
al siguiente nivel (o alguien que conozcas)

**TE
BUSCAMOS**

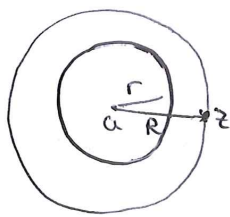


sin ánimo de lucro, chequea esto:

- Todos los apuntes que necesitas están aquí
- Al mejor precio del mercado, desde 2 cent.
- Recoge los apuntes en tu copistería más cercana o recíbelos en tu casa
- ✓ Todas las anteriores son correctas

EJ. TEMA-7:

1) Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r$



Tomamos $r < R < |z-a|$

$$\int_{\Gamma(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

$$f(w) = \frac{1}{w-z}$$

$$f \in \mathcal{H}(D(a,R))$$

$D(a,R)$ estrellado (convexo)

\Rightarrow Th de Cauchy para dominios estrellados

$$\Rightarrow \int_{\Gamma(a,r)} f(w) dw = 0 //$$

▷ Si $z \in D(a,r) \Rightarrow$ Fórmula de Cauchy para la circunferencia $\Rightarrow \int_{\Gamma(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i$

4) Calcular las siguientes integrales

$$a) \int_{\Gamma(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad r \neq 2$$

El denominador se anula en $z=0, z=2i, z=-2i$

Fórmula de Cauchy para la circunf

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

F.C.C. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$
 $z \in D(a,r)$

polinomio de gr 2 que tiene su raíz en un pto dentro del disco

▷ Si $r < 2 \Rightarrow$ la función $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$ es $\mathcal{H}(D(a,R))$ con $0 < r < R < 2$

$\Rightarrow \overline{D(0,r)} \subset D(0,R) = \Omega$ (Para aplicar F.C.C.)

$$\int_{\Gamma(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz = \int_{\Gamma(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz \stackrel{F.C.C.}{=} 2\pi i f(0) = \frac{\pi i}{2}$$

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$$

▷ Para el caso general descomponemos $\frac{z+1}{z^2(z^2+4)}$ en

fracciones simples

$$\frac{z+1}{z(z^2+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i} = \frac{A(z^2+1) + Bz(z-2i) + C(z-2i)z}{z(z-2i)(z+2i)}$$

Si $z=0 \Rightarrow 1 = 4A$

$z=2i \Rightarrow 1+2i = 2i(4iB) \Rightarrow B = \frac{1+2i}{8}$

$z=-2i \Rightarrow 1-2i = -8C \Rightarrow C = \frac{1-2i}{8}$

$$\int_{\Gamma(a,r)} \frac{z+1}{z(z^2+1)} dz = \frac{1}{4} \int_{\Gamma(0,r)} \frac{1}{z} dz - \underbrace{\frac{1+2i}{8} \int_{\Gamma(0,r)} \frac{1}{z-2i} dz}_{(2)} - \underbrace{\frac{1-2i}{8} \int_{\Gamma(0,r)} \frac{1}{z+2i} dz}_{(3)}$$

> Si $r < 2 \Rightarrow (2) = 0 = (3)$ T.C.D.E. Th de Cauchy
para Dominios Estrellados.

(1) = $\frac{1}{4} 2\pi i = \frac{\pi i}{2}$
F.C.C.

> Si $r > 2$ (1) = $\frac{\pi i}{2}$

F.C.C (2) = $-\frac{1+2i}{8} \cdot 2\pi i$

F.C.C (3) = $-\frac{1-2i}{8} \cdot 2\pi i$

b) $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{\cos z dz}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}$

$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = -a(z^2 - \frac{(a^2+1)}{2}z + 1) = -a(z-a)(z-1/a)$$

$$= -\frac{1}{a} \int_{\Gamma(0,1)} \frac{\cos(z)}{(z-a)(z-1/a)} dz$$

Si $|a| < 1 \Rightarrow a \in D(0,1)$ $f(z) = \frac{\cos(z)}{z-1/a} \in \mathcal{H}(D(0,R))$
 $1/8 < R < 1/|a|$
 $\overline{D(0,1)} \subset D(0,R)$

F.C.C $\Rightarrow \int_{\Gamma(0,1)} \frac{\cos(z)}{(z-a)(z-1/a)} dz = 2\pi i f(a)$



COMPRAR
ENTRADAS

MARVEL STUDIOS

DOCTOR STRANGE
EN EL

MULTIVERSO DE LA LOCURA

6 DE MAYO SOLO EN CINES

si $|a| > 1 \Rightarrow 1/a \in D(0, 1)$ y si tomamos $1 < R < |a|$
 $\overline{D}(0, 1) \subset D(0, R)$

Aplicamos F.C.C a $g(z) = \frac{\cos(z)}{z-a}$ $g \in \mathcal{H}(D(0, R))$

$$\int_{\partial(0,1)} \frac{g(z)}{z-1/a} dz = 2\pi i g(1/a)$$

$$-\frac{1}{a} \int_{\partial(0,1)} \frac{\cos(z)}{(z-a)(z-1/a)} dz = -\frac{1}{a} 2\pi i g(1/a)$$



- ☐ Todos los apuntes que necesitas están aquí
- ☐ Al mejor precio del mercado, desde **2 cent.**
- ☐ Recoge los apuntes en tu copistería más cercana o recíbelos en tu casa
- ☒ Todas las anteriores son correctas

Imprimir

