EJERCICIOST3.pdf

martasw99

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJTEMA-3:

1 En cada uno de los siguientes casos estudiar la derivabilidad de la función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

a) $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Tomamos $z = x + iy$ y tenemos $f(x+iy) = \underbrace{x^3}_{u} + i\underbrace{x^2y}_{v}$

consideramos las funciones $u, v: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = x^3 \\ v(x,y) = x^2y \end{array}\right\} \forall (x,y) \in \mathbb{C}$$

f derivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{C} \iff u, v$ son diferenciables en (x_0, y_0) y se cumplen las ecuaciones de Cauchy - Riemann

- u y v son diferenciables en todo $\mathbb{C}$ (ya que son funciones polinómicas)

- Ecuaciones de C-R: $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx} = 3x^2 \\ \frac{dv}{dy} = x^2 \end{array}\right\} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \iff 3x^2 = x^2 \iff x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dy} = 0 \\ \frac{dv}{dx} = 2xy \end{array}\right\} \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \iff 0 = -2xy \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ó} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ En los puntos $(x,y) \in \mathbb{C}$ tq $x=0$ hay derivabilidad.

$\boxed{f \text{ diferenciable en } \{iy : y \in \mathbb{R}\}}$

b) $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \frac{x^2}{2}\right) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

En este caso:

$u(x,y) = x^3 - y$

$v(x,y) = y^3 + x^2/2$

u, v diferenciables y

f derivable $\Leftrightarrow$ $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$ y $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 \qquad \frac{du}{dy} = -1$

$\frac{dv}{dy} = 3y^2 \qquad \frac{dv}{dx} = x$

u y v diferenciables ya que existen las deriv. parciales en un entorno de cualquier pto y son continuas en él

$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \Leftrightarrow 3x^2 = 3y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy} \Leftrightarrow x = -(-1) \Leftrightarrow x = 1$

luego f diferenciable en $(1,1)$, $(1,-1)$ con

$f'(1,1) = 3 + i$

$f'(1,-1) = 3 \cdot 1^2 + i\,1 = 3 + i$

$f' = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}$

c) $f(x+iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad f(0) = 0$

$u(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad v(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{(x^2+y^2)3x^2 - 2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{du}{dy} = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{dv}{dy} = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \iff u, v$ dif y ecuaciones de C-R

- u y v diferenciables en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pq $\exists$ sus derivadas parciales y son continuas
- Ecuaciones C-R: $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$ y $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \iff \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \iff x^4 = y^4$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dy} \iff \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \iff xy(x^2+y^2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ ó } y = 0 \;!!!$$

$\Rightarrow$ No hay derivabilidad en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Veamos que ocurre en el $(0,0)$ $\quad u(0,0) = 0 = v(0,0)$

$$\frac{du}{dx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - h(0,0)}{h} = \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{du}{dy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0,h) - h(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$u \text{ dif en } (0,0) \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y) - u(0,0) - \langle \underbrace{\nabla u(x,y)}_{=(1,0)}, (x,y)\rangle}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

En ptos de la forma $(0,y)$ el $\lim = 0$, pero en ptos de la forma (x,x)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{2\sqrt{2}\,|x^3|} \leadsto \text{No existe}$$

$\Rightarrow u$ no es diferenciable en $(0,0) \Rightarrow f$ no es derivable en $(0,0)$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ no es deriv en ningún pto de } \mathbb{R}^2}$

2. Probar que existe una función entera f tq:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0)=0 \Rightarrow f$ es única.

f entera $\Leftrightarrow f$ holomorfa en $\mathbb{C} \Leftrightarrow f$ deriv $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \\ v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) \end{cases} \text{ dif en } \mathbb{C}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad y \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{dv}{dy} \Rightarrow v(x,y) = \int (4x^3 - 12xy^2)\,dy =$$

$$= 4x^3y - \frac{12xy^3}{3} = 4x^3y - 4xy^3 + k$$

$$\frac{du}{dy} = -12x^2y + 4y^3 = -\frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x,y) = \int (12x^2y - 4y^3)\,dx =$$

$$= \frac{12x^3}{3}y - 4yx + k = 4x^3y - 4y^3x + k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4y^3x + k)}$$

Si $f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = ik \Rightarrow k = 0$ y f es única.

3

Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a,b,c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tq

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ es entera} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx}(x,y) = \dfrac{dv}{dy}(x,y) \\ \dfrac{du}{dy}(x,y) = -\dfrac{dv}{dx}(x,y) \end{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ donde } \begin{cases} u = \operatorname{Re} f \\ v = \operatorname{Im} f \end{cases}$$

$$\frac{du}{dx} = 2ax + by = \frac{dv}{dy} \Rightarrow v(x,y) = \int (2ax + by)\,dy =$$

$$= 2axy + by^2/2 + C_1$$

$$\frac{du}{dy} = bx + 2cy = -\frac{dv}{dx} = v(x,y) = \int (-bx - 2cy)\,dx =$$

$$= -\frac{bx^2}{2} - 2cyx + C_2$$

$$2axy + by^2/2 + C_1 = -\frac{bx^2}{2} - 2cyx + C_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases} //$$

4

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sp que $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \forall z \in \Omega$

Probar que f es cte

Sean $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(\overset{z}{\overset{\shortparallel}{x+iy}}))$ y $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(x+iy))$

$$a\,u(x,y) + b\,v(x,y) = c$$

Aplicamos: "Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si $f'(z) = 0 \ \forall z \in \Omega \Rightarrow f$ es cte"

Derivamos respecto a x e y:

$$\left.\begin{array}{l} a\dfrac{du}{dx}(x,y) + b\dfrac{dv}{dx}(x,y) = c \\ a\dfrac{du}{dy}(x,y) + b\dfrac{dv}{dy}(x,y) = c \end{array}\right\} \overset{C-R}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a\dfrac{du}{dx} - b\dfrac{du}{dy} = c \\ a\dfrac{du}{dy} + b\dfrac{dv}{dx} = c \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du/dx \\ du/dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 > 0$

tenemos la solución trivial $\frac{du}{dx} = 0 = \frac{du}{dy}$

Ahora, como $f'(x+iy) = \frac{du}{dx}(x,y) + i\,\frac{dv}{dx} = 0 \quad \forall z \in \Omega$

 (con $z = (x,y)$ y $\frac{dv}{dx} = -du/dy$)

y Ω es un dominio $\Rightarrow f$ es cte.

5 Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es cte.

$f, \overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow$ sea $g(z) = f(z)\overline{f}(z) = |f(z)|^2 \in \mathcal{H}(\Omega)$

Pero además $|f(z)|^2 \in \mathbb{R}\ \forall z \in \Omega \Rightarrow g$ cte en Ω

$\Rightarrow |f|$ cte en Ω

$$\left.\begin{array}{l} |f| \text{ cte en } \Omega \\ f \in \mathcal{H}(\Omega) \\ \Omega \text{ dominio} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es cte en } \Omega$$

6 Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{C}$; $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \forall z \in \Omega^*$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$

Fijamos $a \in \Omega^* \Rightarrow \overline{a} \in \Omega$

$\frac{f^*(z) - f^*(a)}{z-a}$ tiene límite :

$$\lim_{z\to a} \frac{f^*(z)-f^*(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(\overline{z}) - f(\overline{a})}}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(\overline{z})-f(\overline{a})}}{\overline{\overline{z-a}}}$$

como la conj es una isometría $\lim \overline{x} = \overline{\lim x}$

$$= \lim_{z\to a} \left(\overline{\frac{f(\overline{z})-f(\overline{a})}{\overline{z}-\overline{a}}} \right) \underset{\substack{z\to a \\ \Updownarrow \\ \overline{z}\to\overline{a}}}{=} \overline{\lim_{\overline{z}\to\overline{a}} \left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{a})}{\overline{z}-\overline{a}} \right)} = \overline{f'(\overline{a})}$$

7 Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto no vacío del plano, nunca es una función racional.

Vamos a dem. por reducción al absurdo: abierto no vacío de $\mathbb{C}$

Sup que existen P, Q polinomios tq $e^z = \frac{P(z)}{Q(z)}$ $\forall z \in \Omega$ con $Q(z) \neq 0$ y derivamos

$$\boxed{\frac{P(z)}{Q(z)}} = f(z) = e^z = (e^z)' = \boxed{\frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}}$$

$$\boxed{P(z)Q(z) = P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}$$

⇝ si P cte $\Rightarrow Q(z) = -Q'(z)$!! (polinomio $\neq$ su deriv)
↳ P no puede ser cte

⇝ si Q cte $\Rightarrow P(z) = P'(z)$!! → Q tampoco puede ser cte

⇝ gr P y gr Q ≥ 1

$$\left.\begin{array}{l} gr\, Q' < gr\, Q \\ gr\, P' < gr\, P \end{array}\right\} \begin{array}{l} gr(PQ') < gr(PQ) \\ gr(P'Q) < gr(PQ) \end{array}$$

$\Rightarrow gr(-PQ' + P'Q) < gr(PQ) \Rightarrow$ contradicción