EJERCICIOST2.pdf

martasw99

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJ TEMA-2:

1 Estudiar la continuidad de la función argumento principal $\arg: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$

$$\arg(z) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\right) \quad \forall z \in \underbrace{\mathbb{C}\setminus \mathbb{R}_0^-}_{\text{abierto}}$$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)+|z|>0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^- \\ \mathrm{arctg} \text{ continua en } \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \arg$ continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$

$\uparrow$ arctg loc. continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$

Sea $a \in \mathbb{R}^-$, consideramos la sucesión $z_n = a - i/n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Tenemos que } \{z_n\} \to a \text{ y } \arg(a) = \pi \\ \{\arg(z_n)\} = \{\arg(a - i/n)\} \longrightarrow -\pi\end{array}\right\}$ arg discontinua en a $\Downarrow$ disc. en $\mathbb{R}^-$

2 Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* / \theta \notin \mathrm{Arg}\,z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta) : \varphi(z) \in \mathrm{Arg}(z)$ $\forall z \in S_\theta$

Nos basamos en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \varphi' : S_\theta \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & \mathbb{R} \\ S_\pi \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Arg}"'] & \end{tikzcd}$$

$S_\pi = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ (ej 1)

Tenemos que $\varphi' = \arg \circ \psi$, donde ψ es un giro de ángulo $\pi - \theta$ que viene dado por: $\psi(z) = z(\cos(\pi-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\pi-\theta))$

$\Rightarrow \varphi'(z) = \arg(z(\cos(\pi-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\pi-\theta)))$

Pero tenemos que anular el giro que hemos hecho, luego restamos $\pi - \theta$ y obtenemos:

$$\varphi(z) = \arg(z(\cos(\pi-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\pi-\theta))) + \theta - \pi, \quad \varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$$

y se tiene que $\varphi(z) \in \mathrm{Arg}(z\underbrace{(\cos(\pi-\theta) + \mathrm{sen}(\pi-\theta))}_{w}) +$

$+ \mathrm{Arg}\underbrace{(\cos(\theta-\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta-\pi))}_{\bar{w}} = \mathrm{Arg}(z w \bar{w}) = \underset{|w|=1}{\mathrm{Arg}(z)}$

3 Probar que no existe ninguna función $\varphi \in C(\mathbb{C}^*)$ tq $\varphi(z) \in \text{Arg}(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Comenzamos probando el resultado en $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Sup que $\exists \varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tq $\varphi(z) \in \text{Arg}(z)$ $\forall z \in \mathbb{T}$

Definimos $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) = \varphi(\cos t + i \operatorname{sen} t)$ $\Big\} \Rightarrow$ f continua por ser φ continua y $f(-\pi) = f(\pi)$

Definimos $g : [-\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t+\pi) - f(t)$ $\Big|$ $g(0) = f(\pi) - f(0)$. $g(-\pi) = f(0) - f(-\pi) = f(0) - f(\pi)$

(g continua)

Ahora distinguimos dos casos:

1) $f(\pi) = f(0) \Rightarrow \begin{cases} f(\pi) = f(0) = \varphi(1) \overset{\text{por hipót.}}{\in} \text{Arg}(1) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ f(\pi) = \varphi(-1) \in \text{Arg}(-1) = \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$ $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$!!

2) $f(\pi) \neq f(0) \Rightarrow g(0) \cdot g(-\pi) < 0$, g continua $\Big| \xrightarrow{\text{T. Bolzano}} \exists t_0 \in]-\pi, 0[$ tq $g(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0 + \pi) = f(t_0)$

$f(t_0) = \varphi(\cos t_0 + i \operatorname{sen} t_0) \in \text{Arg}(\cos t_0 + i \operatorname{sen} t_0) =$

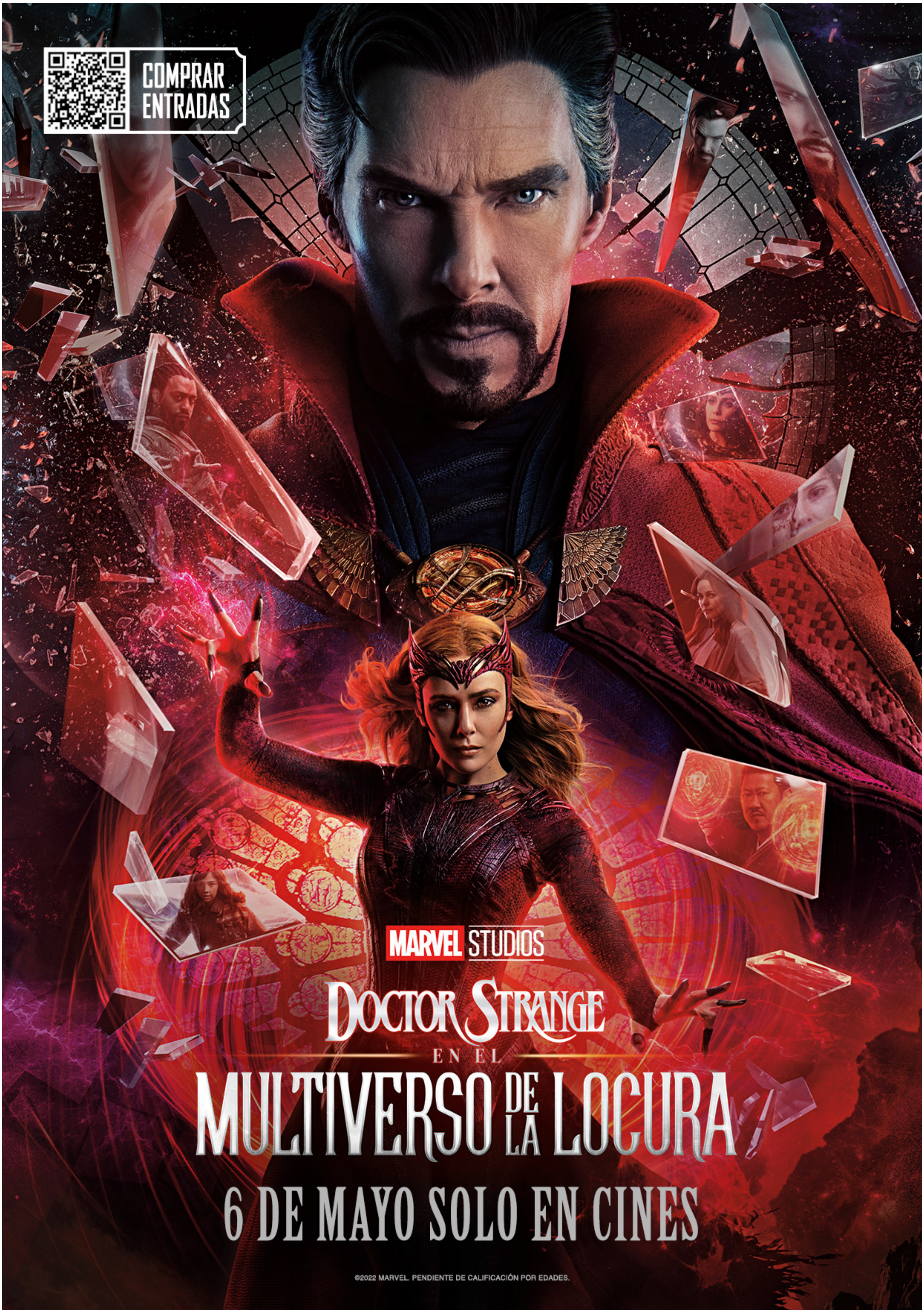
$= \{\theta \in \mathbb{R} : \cos t_0 + i \operatorname{sen} t_0 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\} =$

$= \{t_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(t_0 + \pi) = \varphi(\cos(t_0+\pi) + i \operatorname{sen}(t_0+\pi)) \in \{t_0 + \pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $t_0 + \pi + 2k\pi = t_0 + (2k+1)\pi$!!!

Ya tenemos la prueba para $\mathbb{T}$

Ahora, si sup que $\exists \psi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ cont con $\psi(z) \in \text{Arg}(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\Rightarrow \psi|_{\mathbb{T}}$ cumple que $\psi(z) \in \text{Arg}(z)$ $\forall z \in \mathbb{T}$, pero acabamos de ver que esto es falso, y ya hemos acabado.


COMPRAR
ENTRADAS
MARVEL STUDIOS
DOCTOR STRANGE
EN EL
MULTIVERSO DE LA LOCURA
6 DE MAYO SOLO EN CINES
©2022 MARVEL. PENDIENTE DE CALIFICACIÓN POR EDADES.

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\frac{(1+y\,\cancel{Re(z)})\,Im z - y\cdot Re z\,\cancel{Im(z)}}{(1+Re z\, y)^2}}{1 + \frac{y^2 (Im z)^2}{(1+y\,Re z)^2}} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{Im(z)}{(1+y\,Re z)^2 + y^2 (Im\, z)^2} = Im(z)$$

Luego: $\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n^n = e^{Re z}(\cos(Im\, z) + i\,sen(Im(z)))}$

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\{(1+z/n)^n\}$ es convergente y calcular su límite.

Sea $z_n = 1 + z/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos la sucesión $\{z_n^n\}$

Veamos qué ocurre con el módulo:

$$|z_n|^2 = z_n \overline{z_n} = (1+z/n)(1+\overline{z}/n) = 1 + \frac{\overline{z}}{n} + \frac{z}{n} + \frac{|z|^2}{n^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\mathrm{Re}(z)}{n} + \frac{|z|^2}{n^2}$$

$$|z_n|^n = (z_n^2)^{n/2} = \left(1 + \frac{2\mathrm{Re}\, z}{n} + \frac{|z|^2}{n^2}\right)^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2\mathrm{Re}(z)}{n} + \frac{|z|^2}{n^2}\right)^{n/2} = 1^\infty$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2}\left(\cancel{1} + \frac{2\mathrm{Re}(z)}{n} + \frac{|z|^2}{n^2} - \cancel{1}\right)\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Re}(z) + \frac{|z|^2}{n}\right)} = e^{\mathrm{Re}(z)} //$$

Ahora tenemos en cuenta que $z_n = |z_n|(\cos(\arg(z_n)) + i\,\mathrm{sen}(\arg(z_n)))$ y que $n\arg(z_n)$ es el arg de z_n^n (por De Moivre)

$$z_n^n = |z_n^n|(\cos(n\arg(z_n)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z_n)))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n^n = \lim_{n\to\infty} (|z_n^n|(\cos(n\arg(z_n)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z_n))))$$

$$= e^{\mathrm{Re}(z)} \cdot \lim_{n\to\infty} (\cos(n\arg(z_n)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z_n)))$$

Veamos cuánto vale el $\lim_{n\to\infty} n\arg(z_n)$

$z_n = 1 + z/n \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq m \Rightarrow \mathrm{Re}(z_n) > 0$,

luego $\forall n \geq m$ $\arg(z_n) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z_n}{\mathrm{Re}\, z_n}\right)$

$$1 + z/n \underset{z=a+bi}{=} 1 + a/n + i\, b/n \Rightarrow \mathrm{Im}(z_n) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{n}$$

$$\mathrm{Re}(z_n) = \frac{\mathrm{Re}\, z}{n} + 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (n\arg(z_n)) = \lim_{n\to\infty} n\, \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)/n}{\mathrm{Re}(z)/n + 1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z/n}{\mathrm{Re}\, z/n + 1}\right)}{1/n} \overset{1/n = y}{=} \lim_{y\to 0} \mathrm{arctg}\left(\frac{y\,\mathrm{Im}(z)}{1 + y\,\mathrm{Re}(z)}\right) \overset{LH}{=} \longrightarrow$$