EJERCICIOST4.pdf

martasw99

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJ TEMA 4:

1 Calcular el radio de convergencia

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

La convergencia de $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$

Vamos a usar el crit de la raiz para estudiar la sucesión

$\{\sqrt[n]{|n!/n^n|}\}$

$$\left\{\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right\} = \left\{\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right\} = \left\{\frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!}\right\} = \left\{\frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}\, n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n\, \cancel{n!}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{n^n}{(n+1)^n}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 1/e \Rightarrow \boxed{R=e}$$

$\left\{\frac{x+1}{x}\right\}^x \to e$

b) $\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \sum_{m\geq 0} z^m \alpha_m$ donde $\alpha_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{m\geq 0} \alpha_m z^m$ usamos la formula de Cauchy-Hadamard.

$\{\sqrt[m]{|\alpha_m|}\} = \{\sqrt[2n]{1}\} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$

c) $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!} = \sum_{m\geq 0} \alpha_m z^m$ con $\alpha_m = \begin{cases} 2^n & \text{si } \exists n : m = n! \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Sea R el radio de conv de $\sum_{m\geq 0} \alpha_m z^m$, usamos C-H:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[m]{|\alpha_m|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n/n!} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$

d) $\sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^n z^n = \sum_{\substack{n\geq 0\\ n \text{ impar}}} 2^n z^n + \sum_{\substack{n\geq 0\\ n \text{ par}}} 4^n z^n$

$\{\sqrt[n]{2^n}\} \longrightarrow 2 \Rightarrow R = 1/2$

$\{\sqrt[n]{4^n}\} \longrightarrow 4 \Rightarrow R = 1/4$

$\Longrightarrow \boxed{R = 1/4}$ ($1/4 < 1/2$)

e) $\sum_{n\geq 0} (n + a^n) z^n \quad (a \in \mathbb{R}^+)$

Estudiamos la sucesión $\left\{ \frac{n+1 + a^{n+1}}{n + a^n} \right\}$

$a \geq 1) \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/a^n + \frac{1}{a^n} + a}{n/a^n + 1} \underset{a \in \mathbb{R}}{=} a \Rightarrow \boxed{R = 1/a}$

$a < 1) \Rightarrow \lim — = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$

f) $\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$

Usamos la fórmula de C-H: $\{ \sqrt[n]{|a^{n^2}|} \} = \{ \sqrt[n]{|a|^{n^2}} \} = \{ |a|^n \}$

- si $|a| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = \infty \Rightarrow R = 0$
- si $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \Rightarrow R = \infty$
- si $|a| = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a^n \Rightarrow$ no podemos saber el radio de convergencia.

2 Conocido el radio de conv R de la serie $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ calcular el de los siguientes:

a) $\sum n^k \alpha_n z^n \quad (k \in \mathbb{N}$ fijo$)$

Veamos qué ocurre con la sucesión $\{ \sqrt[n]{n^k |\alpha_n|} \} =$

$= \{ \sqrt[n]{n^k} \cdot \sqrt[n]{|\alpha_n|}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} n^{k/n} = 0$

Sup $R > 0 \Rightarrow \{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \} \rightarrow$

Aplicamos el crit de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k \alpha_{n+1}}{n^k \alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right)^{k/n} 1/R =$$

$\sum \alpha_n z^n$ radio $r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{R}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{k/n} \cdot 1/R = \frac{1}{R} \Rightarrow \text{Radio } R.$$

b) $\sum \frac{\alpha_n}{n!} z^n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n+1!} : \frac{\alpha_n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} =$

$= \lim_{n\to\infty} 1/R \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{R = \infty}$


COMPRAR ENTRADAS
MARVEL STUDIOS
DOCTOR STRANGE
EN EL
MULTIVERSO DE LA LOCURA
6 DE MAYO SOLO EN CINES
©2022 MARVEL. PENDIENTE DE CALIFICACIÓN POR EDADES.

4 Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n\geq 0} f_n \;:\; f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \;\; \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$

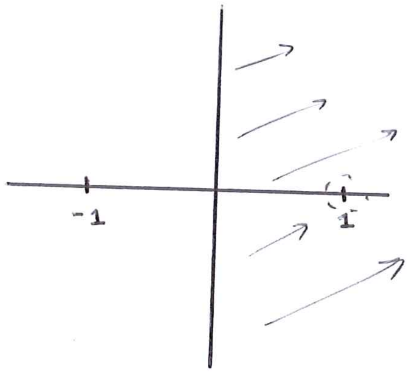
En general, $\sum_{n\geq 0} w^n$ converge absolutamente en $D(0,1)$ y converge unif. en cada compacto de $D(0,1)$
$\Rightarrow$ No converge fuera de $D(0,1)$

$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} \rightsquigarrow \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \varphi(z)^n$

Llamamos $A = \{ z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} \,/\, \varphi(z) \in D(0,1) \}$ la serie $\sum f_n$ converge absolutamente en todo punto de A. y la serie $\sum f_n$ no converge en ningún punto de $(\mathbb{C}\setminus\{-1\})\setminus A$ (Fuera de A)

$A = \{ z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} \,/\, \varphi(z) \in D(0,1) \}$

$\varphi(z) \in D(0,1) \iff \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \iff \underbrace{|z-1|}_{\text{dist de } z \text{ al nº complejo } 1} < \overbrace{|z+1|}^{|z-(-1)|}$



$\iff \mathrm{Re}\, z > 0$

La serie $\sum f_n$ converge absolutamente en $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$ y no conv en ningún pto de $(\mathbb{C}\setminus\{-1\})\setminus A$

Veamos la convergencia uniforme:

Si $K \subset A$ compacto, como φ es continua $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}$
$\varphi(K)$ es un compacto y está contenido en $\underbrace{\varphi(A)}_{= D(0,1)}$ (Disco unidad)
Como la serie geométrica converge uniformemente en cada compacto del $D(0,1) \Rightarrow$ conv. unif en $\varphi(K)$. Luego $\sum f_n$ converge uniformemente en K.

lleva el semiplano al disco unidad