EJERCICIOST1.pdf

martasw99

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJ TEMA-1:

$\boxed{1}$ $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} \overset{?}{\cong} \mathbb{C}$

Veamos primero que M es un cuerpo:

1) M es cerrado para la suma y el producto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} \in M$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix} \in M$$

2) Asociatividad $\rightarrow$ trivial

3) Conmutatividad $\rightarrow$ trivial para la suma, veamos el producto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

4) Elemento neutro $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para la suma

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para el producto

5) Elemento opuesto $\rightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$

6) Elemento inverso $\rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{a^2+b^2}$

7) Distributividad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ -d-f & c+e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+ae-bf-bd & ad+af+bc+be \\ -ad-af-bc-be & ac+ae-bf-bd \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

Ahora consideramos el isomorfismo $\phi: M \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longmapsto (a,b)$$

2 $u = \dfrac{i - \sqrt{3}}{1+i}$ $\quad v = \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1}$

$$u = \frac{(i-\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\text{Re}(u) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Im}(u) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Hay que cambiar de signo la parte imaginaria no la real.

$$v = \frac{1}{i\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}i+1}{(i\sqrt{3}-1)(i\sqrt{3}+1)} = \frac{i\sqrt{3}+1}{-4}$$

$$\text{Re}(v) = -1/4 \qquad \text{Im}(v) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

3 $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$: $f(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $\forall z \in U$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

- $f(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} = u \Rightarrow u(1-\bar{a}z) = z-a$

$\Rightarrow u - u\bar{a}z = z - a \Rightarrow u + a = z + u\bar{a}z \Rightarrow u+a = z(1+u\bar{a})$

$\Rightarrow z = \dfrac{u+a}{1+\bar{a}u} = f^{-1}(u)$ $\qquad |z-a|^2 = |z|^2 - 2\,\text{Re}(z\bar{a}) + |a|^2$

- $|f(z)| = \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \dfrac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} < 1 \iff |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2$

$\iff |z|^2 + |a|^2 - \cancel{2\,\text{Re}(z\bar{a})} < 1 + |\bar{a}z|^2 - \cancel{2\,\text{Re}(z\bar{a})}$

$\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |\bar{a}z|^2 \iff |z|^2 + |a|^2 - |\bar{a}z|^2 < 1$

$\iff |z|^2 + |a|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 \iff |a|^2(1 - |z|) < 1 - |z|^2$

$\exists$ inversa de $U \Rightarrow f$ biyección de U sobre sí mismo.

5 Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : \underbrace{|z+i|}_{\text{distancia}(z,i)} = 2\underbrace{|z-i|}_{\text{distancia}(z,-i)} \}$$

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$| a + i(b+1)| = 2| a + (b-1)i|$$

$$\left(\sqrt{a^2 + (b+1)^2}\right)^2 = \left(2\sqrt{a^2 + (b-1)^2}\right)^2$$

$$a^2 + (b+1)^2 = 4(a^2 + (b-1)^2)$$

$$a^2 + b^2 + 2b + 1 = 4a^2 + 4b^2 + 4 - 8b$$

$$3a^2 + 3b^2 - 10b + 3 = 0 \rightarrow \text{Ajustamos el cuadrado}$$

$$3a^2 + \underbrace{3b^2 - 10b + \frac{25}{3}}_{\left(\sqrt{3}b - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} + 3 - 25/3 = 0$$

$$3a^2 + \left(\sqrt{3}b - 5/\sqrt{3}\right)^2 + 3 - 25/3 = 0$$

$$a^2 + (b - 5/3)^2 + 1 - 25/9 = 0$$

$$a^2 + (b - 5/3)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$ circunferencia de centro $(0, 5/3)$ y radio $-4/3$

$$B = \{ z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 4 \}$$

Elipse de focos i, $-i$

La suma de las distancias a los focos es cte.

4 Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Veamos qué ocurre para dos elementos

$$|z+w| = |z| + |w| \iff |z+w|^2 = (|z| + |w|)^2 \iff$$

$$\iff |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$

$$\iff \mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z||w| \overset{?}{\iff} z\bar{w} \geq 0 \iff z = \lambda w \quad \lambda \geq 0$$

Supongamos que $z_i = \lambda_{ij} z_j$ con $\lambda_{ij} \geq 0$ (*)

Inducción en n:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1} \right| \underset{(*)}{=} \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| + |z_{n+1}| \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

La condición que buscamos es (*)

6 Probar que $\arg(z) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}\,z + |z|} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

(*)

$$\arg(z) = \theta = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|} \right)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|} = \frac{|z|\,\mathrm{sen}\,\theta}{|z|\cos\theta + |z|} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$\theta' = \theta/2 \Rightarrow \mathrm{tg}(\theta') = \frac{\mathrm{sen}(2\theta')}{\cos(2\theta') + 1} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta' \cos\theta'}{\underbrace{\cos^2\theta' - \mathrm{sen}^2\theta' + 1}_{\cos^2\theta}}$$

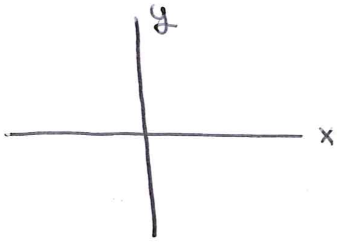
$$= \frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,\theta' \cancel{\cos\theta'}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta'} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta'}{\cos\theta'} = \mathrm{tg}(\theta')$$

(*) 1º) Probar que se encuentra en $]-\pi, \pi[$.

Es evidente ya que $\mathrm{tg} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

7 $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x>0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{si } x<0 \quad y>0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{si } x<0 \quad y<0 \\ \pi/2 & \text{si } x=0 \quad y>0 \\ -\pi/2 & \text{si } x=0 \quad y<0 \end{cases}$$



$\arg(z) = \theta$

Para $t<0$: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(t) < 0$
$t \geq 0$: $0 < \operatorname{arctg}(t) < \pi/2$ $\Big\} \Rightarrow -\pi < \theta \leq \pi$

Para probar que $\theta = \arg(z)$ basta probar que se cumple:

$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow x = |z|\cos\theta \quad y = |z|\operatorname{sen}\theta$

- Para $\theta = \pi, \pi/2, -\pi/2$ las igualdades son evidentes
- Sea $x>0 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(y/x) \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = y/x$
  $\downarrow$
  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = 1 + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2} \Rightarrow \begin{matrix} x>0 \\ \cos\theta > 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\theta \Rightarrow x = |z|\cos\theta$

$y = x\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = |z|\operatorname{sen}\theta$

- Sup $x<0, y>0 \rightarrow \pi/2 < \theta = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi < \pi$
  $-\pi/2 < \theta - \pi < 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\theta - \pi) = y/x$

Razonando como antes obtenemos las desigualdades

- Sup $x<0, y<0 \rightarrow -\pi < \theta = \operatorname{arctg}(y/x) - \pi < -\pi/2$
  $0 < \theta + \pi < \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\theta+\pi) = y/x$

$\rightarrow$

8 Probar las formulas de De Moivre

$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

- Si $n=0 \Rightarrow \cancel{\cos 0}^{\nearrow 1} + i \cancel{\operatorname{sen} 0}^{\nearrow 0} = 1$ luego se cumple.
- Si $n>0$ procedemos por inducción

Para $n=1$ el resultado es trivialmente cierto

Sup cierto para $n>0$ y veamos si lo es para $n+1$:

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{n+1} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= (\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta + i(\operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos(n\theta))$$

$$= \cos(n\theta + \theta) + i\operatorname{sen}(n\theta + \theta) =$$

$$= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta) \text{ cqd.}$$

9 Calcular las partes real e imaginaria de :

$$z^8 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8$$

pasamos a forma polar: $\begin{cases} |z| = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1 \\ \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \pi/3 \end{cases}$

$z = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3$

$$z^8 = (\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)^8 \overset{\text{De Moivre}}{=} \cos 8\pi/3 + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{3} =$$

$$= -1/2 + i\sqrt{3}/2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z^8) = -1/2 \\ \operatorname{Im}(z^8) = \sqrt{3}/2 \end{array}}$$

10 Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$

b) $\operatorname{sen}(x/2)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$

Vamos a probar ambas desigualdades a la vez:

Consideramos el número complejo $z = (a) + (b)i$

$$z = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\operatorname{sen}(x/2)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx)\right) \underset{\operatorname{sen}(0)=0}{=}$$

De Moivre

$$= \operatorname{sen}(x/2)\sum_{k=0}^{n}(\cos x + \operatorname{sen} x)^k$$

Tenemos una progresión geométrica de razón $(\cos x + i\operatorname{sen} x)$ cuya suma es: $\frac{1-(\cos x + i\operatorname{sen} x)^{n+1}}{1-(\cos x + i\operatorname{sen} x)}$

De Moivre

$$= \operatorname{sen}(x/2)\frac{1-(\cos((n+1)x) - i\operatorname{sen}((n+1)x))}{1-\cos x - i\operatorname{sen} x} = \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \\ \operatorname{sen}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}\end{array}\right.$$

$$= \cancel{\operatorname{sen}}(x/2)\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}x\right) - 2i\,\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\cancel{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{2}i\,\cancel{\operatorname{sen}}(x/2)\cos(x/2)} =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right) - i\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}(x/2) - i\cos(x/2)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x/2) + i\cos(x/2)}{\operatorname{sen}(x/2) + i\cos(x/2)}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\Big[\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\operatorname{sen}(x/2) + \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos(x/2)}_{\cos\left(\frac{n+1}{2}x + x/2\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)} +$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x - x/2\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)$

$$+ i\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos(x/2) - \operatorname{sen}(x/2)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right)\Big] =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$$

con la parte real tenemos a) y con la imaginaria b).