Ejercicios5-AII.pdf

jaliriop

Álgebra II

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Algebra II

Relación 5

Curso 2019-2020

Grupos resolubles

Ejercicio 1. Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Ejercicio 2. Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y sólo si G es finito.

Ejercicio 3. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Ejercicio 4. Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G entonces $l(G) = l(H) + l(G/H)$.

Ejercicio 5. Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:
a) El grupo diédrico D_4; b) El grupo alternado A_4;
c) El grupo simétrico S_4; d) El grupo diédrico D_5;
e) El grupo de cuaternios Q_2; f) El grupo cíclico C_{24};
g) El grupo simétrico S_5.

Ejercicio 6. Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = \{1\}$$

una serie normal de G. Demostrar que

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right), \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right).$$

Ejercicio 7. Si $G_1, G_2 \ldots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i), \quad fact(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Ejercicio 8. Sea G un grupo cíclico de orden p^n con p primo. Demostrar que $l(G) = n$ y que $fact(G) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, \overset{(n)}{\dots}, \mathbb{Z}_p)$

Ejercicio 9. Sea G un grupo cíclico de orden n. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\dots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\dots}, \mathbb{Z}_{p_r}).$$

Aplica el resultado cuando $n = 12$ y compara su longitud y factores de composición con los del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Ejercicio 10. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\dots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\dots}, \mathbb{Z}_{p_r}, \mathbb{Z}_2).$$

Ejercicio 11. Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

Ejercicio 12. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H \cap K)$ también es resoluble.

Ejercicio 13. Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial A de H que es abeliano y normal en G.

RELACIÓN 5 GRUPOS RESOLUBLES

1.- Sea $N \lhd G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Por el 3er Teorema de isomorfía, sabemos si J es subgrupo del cociente, $J < G/N$, entonces es de la forma $J = H/N$ con $N \lhd H < G$

Además, $J = H/N \lhd G/N \iff H \lhd G$

Entonces, dada una serie de composición de G/N, será de la forma:

$G/N = G_0/N \rhd G_1/N \rhd \dots \rhd G_r/N = 1$

Como la serie es de composición, los factores de composición son simples: $\dfrac{G_{i-1}/N}{G_i/N} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3er Teorema} \\ \text{isomorfía}}}{\cong} G_{i-1}/G_i$ simples.

Pero entonces, la serie $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_r = N \rhd 1$ es una serie normal y, de hecho, una serie normal porque los factores G_{i-1}/G_i son simples y $G_r/1 = N/1 = N$ es simple por hipótesis.

2.- Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si, y solo si, G es finito.

$\Leftarrow$] Ya demostramos que todo grupo finito tiene series de composición.

$\Rightarrow$] Sea $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_r = 1$ una serie de composición de G. Entonces los factores G_{i-1}/G_i son simples y, por ser G abeliano, los factores son abelianos.

Sabemos que todo grupo simple y abeliano es cíclico de orden primo. Por tanto, los factores de composición son finitos.

$$\left.\begin{array}{l} G_{r-1}/G_r = G_{r-1}/1 = G_{r-1} \text{ finito} \\ G_{r-2}/G_{r-1} \text{ finito} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} G_{r-2} \text{ finito} \\ \\ G_{r-3}/G_{r-2} \text{ finito} \end{array}\right\} G_{r-3} \text{ finito}$$

Iterando este proceso llegamos a que G_1 es finito, y como $G/G_1 = G_0/G_1$ es finito, entonces G es finito.

3.- Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Tomamos la serie normal $G \triangleright H \triangleright 1$.
Como G es finito, admite series de composición.
Por el Teorema de Jordan-Hölder, si un grupo admite series de composición, cualquier serie normal suya puede refinarse hasta una serie de composición.
Entonces existe $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = H \triangleright G_{m+1} \triangleright \dots \triangleright G_n = 1$ una serie de composición de G conteniendo a H.

4.- Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $\ell(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G, entonces $\ell(G) = \ell(H) + \ell(G/H)$.

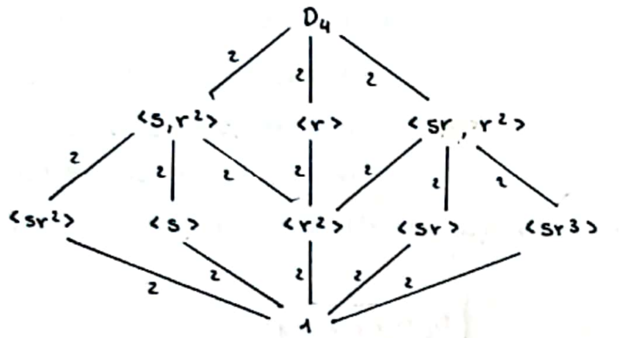
Por el ejercicio 3, podemos tomar una serie de composición de G de la forma

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = H \triangleright G_{m+1} \triangleright \dots \triangleright G_n = 1.$$

Entonces $\ell(G) = n$ y los factores G_{i-1}/G_i son simples.
Además, $H = G_m \triangleright G_{m+1} \triangleright \dots \triangleright G_n = 1$ es una serie de composición de H, luego $\ell(H) = n-m$.
Por último, como $H \trianglelefteq G$, entonces $H \trianglelefteq G_1, \dots, H \trianglelefteq G_m$ y entonces $G/H = G_0/H \triangleright G_1/H \triangleright \dots \triangleright G_m/H = 1$ es una serie de composición de G/H (de nuevo, hemos tenido en cuenta el 3er Teorema de isomorfía). Por tanto, $\ell(G/H) = m$.
En conclusión $\ell(H) + \ell(G/H) = n-m+m = n = \ell(G)$.

5.- Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de los factores de composición de los siguientes grupos:

a) El grupo diédrico D_4

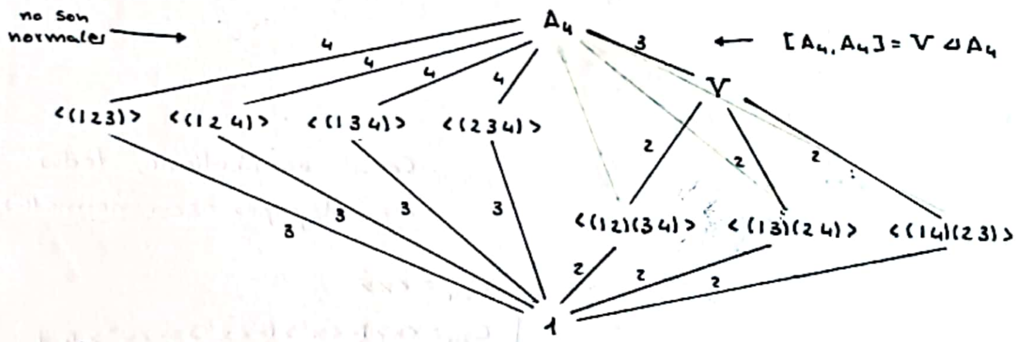


$$\left\{\begin{array}{l} D_4 \rhd \langle s, r^2\rangle \rhd \langle sr^2\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle s, r^2\rangle \rhd \langle s\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle s, r^2\rangle \rhd \langle r^2\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle r\rangle \rhd \langle r^2\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle sr, r^2\rangle \rhd \langle r^2\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle sr, r^2\rangle \rhd \langle sr\rangle \rhd 1 \\ D_4 \rhd \langle sr, r^2\rangle \rhd \langle sr^3\rangle \rhd 1 \end{array}\right.$$

$\ell(D_4) = 3$

$fact(D_4) = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\}$

b) el grupo alternado A_4



$$\left\{\begin{array}{l} A_4 \rhd V \rhd \langle(12)(34)\rangle \rhd 1 \\ A_4 \rhd V \rhd \langle(13)(24)\rangle \rhd 1 \\ A_4 \rhd V \rhd \langle(14)(23)\rangle \rhd 1 \end{array}\right.$$

$\ell(A_4) = 3$

$fact(A_4) = \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\}.$

c) el grupo simétrico S_4

Probaremos que los únicos subgrupos normales de S_4 son S_4, A_4, V y 1. ⊛

Entonces, usando el apartado b).

$$\left\{\begin{array}{l} S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(12)(34)\rangle \rhd 1 \\ S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(13)(24)\rangle \rhd 1 \\ S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(14)(23)\rangle \rhd 1 \end{array}\right.$$

$\ell(S_4) = 4$

$fact(S_4) = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\}.$

c)

Es claro que S_4, A_4 y 1 son subgrupos normales de S_4.
V también lo es (lo demostramos cuando calculamos los p-subgrupos de Sylow de S_4).

Veamos que $1, V, A_4$ y S_4 son los únicos subgrupos normales de S_4.

Sea $1 \neq N \trianglelefteq S_4$ y veamos que $N = \begin{cases} S_4 \\ A_4 \\ V \end{cases}$

Consideremos $N \cap A_4 \trianglelefteq A_4 \Rightarrow N \cap A_4 = \begin{cases} A_4 \\ V \\ 1 \end{cases}$

- Si $N \cap A_4 = A_4 \Rightarrow A_4 < N \Rightarrow \boxed{N = \begin{cases} S_4 \\ A_4 \end{cases}}$

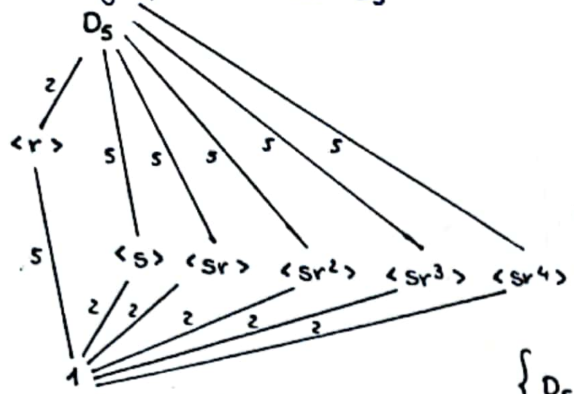
- Si $N \cap A_4 = 1 \Rightarrow NA_4 = S_4 \Rightarrow |N| = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} N = \langle n \rangle \\ N \trianglelefteq S_4 \end{array}\right\} n \in Z(S_4)$

  Pero $Z(S_n) = 1$ $\forall n \geq 3$. CONTRADICCIÓN: $N \cap A_4 \neq 1$

- Si $N \cap A_4 = V \Rightarrow V < N \Rightarrow |N| = \dot{4}$ (múltiplo de 4)
  Además $|N| \mid |S_4| = 24$
  $\left.\right\} |N| = \begin{cases} 24 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \end{cases}$

  - Si $|N| = 24 \Rightarrow N = S_4$ CONTRADICCIÓN con que $N \cap A_4 = V$
  - Si $|N| = 12 \Rightarrow N = A_4$ CONTRADICCIÓN con que $N \cap A_4 = V$
  - Si $|N| = 8 \Rightarrow N$ es 2-Sylow de S_4, y hay 3 de estos, luego $N \ntrianglelefteq S_4$ CONTRADICCIÓN.
  - Luego $|N| = 4 \Rightarrow \boxed{N = V}$

d) el grupo diédrico D_5



$r(s)r^{-1} = rrs = r^2 s = sr^3 \notin \langle s \rangle \Rightarrow \langle s \rangle \ntriangleleft D_5$

$r(sr)r^{-1} = rs = sr^4 \notin \langle sr \rangle \Rightarrow \langle sr \rangle \ntriangleleft D_5$

$r(sr^2)r^{-1} = rsr = s \notin \langle sr^2 \rangle \Rightarrow \langle sr^2 \rangle \ntriangleleft D_5$

$r(sr^3)r^{-1} = rsr^2 = sr \notin \langle sr^3 \rangle \Rightarrow \langle sr^3 \rangle \ntriangleleft D_5$

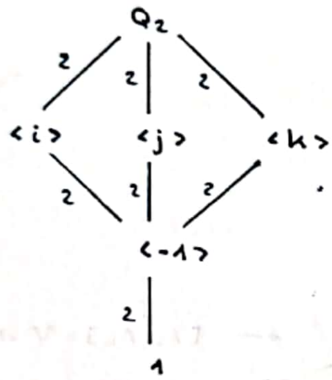
$r(sr^4)r^{-1} = rsr^3 = sr^2 \notin \langle sr^4 \rangle \Rightarrow \langle sr^4 \rangle \ntriangleleft D_5$

$\{ D_5 \triangleright \langle r \rangle \triangleright 1$

$\ell(D_5) = 2$

$\text{fact}(D_5) = \{ \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \}.$

e) el grupo de cuaternios Q_2.

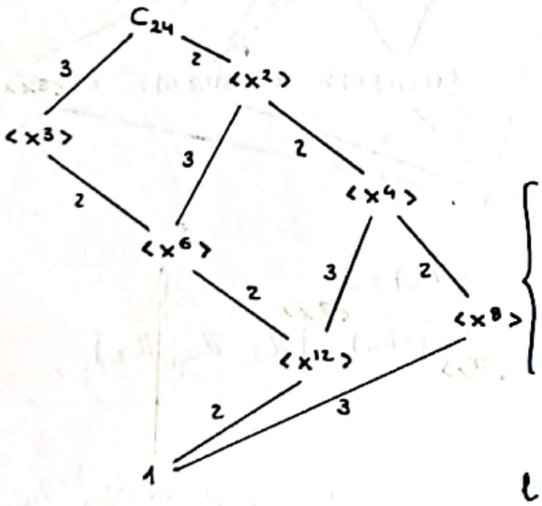


$$\begin{cases} Q_2 \triangleright \langle i \rangle \triangleright \langle -1 \rangle \triangleright 1 \\ Q_2 \triangleright \langle j \rangle \triangleright \langle -1 \rangle \triangleright 1 \\ Q_2 \triangleright \langle k \rangle \triangleright \langle -1 \rangle \triangleright 1 \end{cases}$$

$\ell(Q_2) = 3$

$\text{fact}(Q_2) = \{ \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \}.$

f) el grupo cíclico C_{24}



Como es abeliano, todos los subgrupos son normales.

$C_{24} = \langle x \rangle$

$$\begin{cases} C_{24} = \langle x \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^2 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^4 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^8 \rangle \underset{3}{\triangleright} 1 \\ C_{24} = \langle x \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^2 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^4 \rangle \underset{3}{\triangleright} \langle x^{12} \rangle \underset{2}{\triangleright} 1 \\ C_{24} = \langle x \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^2 \rangle \underset{3}{\triangleright} \langle x^6 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^{12} \rangle \underset{2}{\triangleright} 1 \\ C_{24} = \langle x \rangle \underset{3}{\triangleright} \langle x^3 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^6 \rangle \underset{2}{\triangleright} \langle x^{12} \rangle \underset{2}{\triangleright} 1 \end{cases}$$

$\ell(C_{24}) = 4$

$\text{fact}(C_{24}) = \{ \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \}$

g) el grupo simétrico S_5.

Veamos que, en general, $\forall n \geq 5$, A_n es el único subgrupo normal propio de S_n

Sea $1 \neq N \trianglelefteq S_n$ y veamos que $N = \begin{cases} S_n \\ A_n \end{cases}$

Consideremos $N \cap A_n \trianglelefteq A_n$

Por el Teorema de Abel, A_n es simple $\forall n \geq 5$. Es decir, A_n no tiene subgrupos normales propios.

Por tanto, $N \cap A_n = \begin{cases} A_n \\ 1 \end{cases}$

- Si $N \cap A_n = A_n \Rightarrow A_n < N \Rightarrow N = \begin{cases} S_n \\ A_n \end{cases}$
- Si $N \cap A_n = 1 \Rightarrow NA_n = S_n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |N| = 2 \rightarrow N = \langle n \rangle \\ N \trianglelefteq S_n \end{array}\right\} n \in Z(S_n)$

CONTRADICCIÓN, porque $Z(S_n) = 1 \ \forall n \geq 3$

Por tanto, el único subgrupo normal propio de S_n es A_n $\forall n \geq 5$

$S_5 \underset{2}{\trianglerighteq} A_5 \underset{60}{\trianglerighteq} 1$ $\quad \ell(S_5) = 2$ $\quad fact(S_5) = [\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{60}]$

6.- Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_{r-1} \trianglerighteq G_r = 1$$

una serie normal de G. Demostrar que

$$\ell(G) = \sum_{i=0}^{r-1} \ell\left(G_i/G_{i+1}\right) \quad y \quad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(G_i/G_{i+1}\right)$$

Consideremos la serie normal $G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq 1$

Por el ejercicio 4 sabemos que $\ell(G) = \ell(G_0/G_1) + \ell(G_1)$

Consideremos ahora la serie normal $G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq 1$

Entonces $\ell(G_1) = \ell(G_1/G_2) + \ell(G_2)$.

Si unimos esto con lo anterior obtenemos $\ell(G) = \ell(G_0/G_1) + \ell(G_1/G_2) + \ell(G_2)$

Iteramos este proceso hasta obtener

$$\ell(G) = \sum_{i=0}^{r-2} \ell\left(G_i/G_{i+1}\right) + \ell(G_{r-1})$$

Por último, considerando la serie $G_{r-1} \trianglerighteq G_r \trianglerighteq 1$, entonces

$\ell(G_{r-1}) = \ell(G_{r-1}/G_r) + \cancel{\ell(G_r)}^{0} = \ell(G_{r-1}/G_r)$

Por tanto, obtenemos que $\ell(G) = \sum_{i=0}^{r-1} \ell\left(G_i/G_{i+1}\right)$, como queríamos

Para la segunda parte, consideramos la serie normal $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright 1$, y la refinamos hasta una serie de composición:

$G = G_0 = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_s = G_1 \triangleright N_{s+1} \triangleright \dots \triangleright N_m = 1$.

Por tanto $fact(G) = \{ N_i/N_{i+1} \mid i \in \{0, \dots, m-1\} \}$.

Además, la serie $G_1 = N_s \triangleright N_{s+1} \triangleright \dots \triangleright N_m = 1$ es una serie de composición de G_1, luego $fact(G_1) = \{ N_i/N_{i+1} \mid i \in \{s, \dots, m-1\} \}$.

También tenemos que $G/G_1 = G_0/G_1 = N_0/N_s \triangleright N_1/N_s \triangleright \dots \triangleright N_{s-1}/N_s \triangleright N_s/N_s = 1$ es una serie de composición de G/G_1 porque, por el 3er Teorema de isomorfía, sus factores $\dfrac{N_i/N_s}{N_{i+1}/N_s} \cong N_i/N_{i+1}$ son simples, y entonces $fact(G/G_1) = \{ N_i/N_{i+1} \mid i \in \{0, \dots, s-1\} \}$.

Por tanto, $fact(G) = fact(G_0/G_1) \cup fact(G_1)$.

Repitiendo el proceso para $G_1 \triangleright G_2 \triangleright 1$, obtenemos que $fact(G_1) = fact(G_1/G_2) \cup fact(G_2)$, lo cual, unido a lo anterior, nos da que $fact(G) = fact(G_0/G_1) \cup fact(G_1/G_2) \cup fact(G_2)$.

llevando este proceso, obtenemos lo que queremos:

$$fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact(G_i/G_{i+1})$$

7.- Si $G_1, G_2, \dots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que:

$$\ell(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} \ell(G_i) \quad \text{y} \quad fact(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Consideremos la aplicación $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r \xrightarrow{p_1} G_1$

$\ker(p_1) = 1 \times G_2 \times \dots \times G_r$, y p_1 es sobreyectiva, luego $Im(p_1) = G_1$.

Si aplicamos el 1er Teorema de isomorfía, obtenemos que

$$\frac{G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r}{\ker(p_1)} \cong Im(p_1) \Rightarrow \frac{G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r}{1 \times G_2 \times \dots \times G_r} \cong G_1$$

Hacemos lo mismo para todas las proyecciones, y obtenemos la siguiente serie normal:

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r \underset{G_1}{\triangleright} 1 \times G_2 \times \dots \times G_r \underset{G_2}{\triangleright} 1 \times 1 \times G_3 \times \dots \times G_r \underset{G_3}{\triangleright} \dots \underset{G_{r-1}}{\triangleright} 1 \times \dots \times 1 \times G_r \underset{G_r}{\triangleright} 1 \times 1 \times \dots \times 1$$

Si aplicamos ahora los resultados del ejercicio 6 a esta serie, como ya conocemos sus factores, obtenemos lo que queremos:

$$\ell(G_1\times G_2\times\ldots\times G_r)=\sum_{i=1}^{r}\ell(G_i)\quad,\quad fact(G_1\times G_2\times\ldots\times G_r)=\bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i)$$

8.- Sea G un grupo cíclico de orden p^n con p primo. Demostrar que $\ell(G)=n$ y que $fact(G)=\{\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p,\overset{(n)}{\ldots},\mathbb{Z}_p\}$.

Como en un grupo cíclico hay un único subgrupo de orden divisor del orden del grupo, entonces la única serie de composición de G será

$$G=\langle x\mid x^{p^n}=1\rangle \underset{p}{\trianglerighteq} \langle x^p\rangle \underset{p}{\trianglerighteq} \langle x^{p^2}\rangle \underset{p}{\trianglerighteq}\ldots\underset{p}{\trianglerighteq} \langle x^{p^{n-1}}\rangle \underset{p}{\trianglerighteq} \langle x^{p^n}\rangle=1$$

Por tanto, $\ell(G)=n$ y $fact(G)=\{\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p,\overset{(n)}{\ldots},\mathbb{Z}_p\}$.

9.- Sea G un grupo cíclico de orden n. Si la descomposición de n en factores primos es $n=p_1^{e_1}\ldots p_r^{e_r}$, demostrar que $\ell(G)=e_1+\ldots+e_r$ y que $fact(G)=\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_1},\ldots,\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_r}\}$

Aplica el resultado cuando $n=12$, y compara su longitud y factores de composición con los del grupo $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$.

Como G es cíclico de orden n y conocemos la factorización de n, entonces $G\cong\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{e_2}}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{p_r^{e_r}}$.

Aplicando el ejercicio 7, obtenemos que

$$\left.\begin{array}{l}\ell(G)=\ell(\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}})+\ell(\mathbb{Z}_{p_2^{e_2}})+\ldots+\ell(\mathbb{Z}_{p_r^{e_r}})\\ \text{Aplicando ahora el ejercicio 8, tenemos que}\\ \ell(\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}})=e_1,\ \ell(\mathbb{Z}_{p_2^{e_2}})=e_2,\ldots,\ell(\mathbb{Z}_{p_r^{e_r}})=e_r\end{array}\right\}\ \ell(G)=e_1+\ldots+e_r$$

Para los factores de composición hacemos lo mismo. Por 7:

$$fact(G)=fact(\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}})\cup fact(\mathbb{Z}_{p_2^{e_2}})\cup\ldots\cup fact(\mathbb{Z}_{p_r^{e_r}})$$

Y ahora, por el ejercicio 8:

$$fact(\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}})=\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_1}\}$$

$$fact(\mathbb{Z}_{p_2^{e_2}})=\{\mathbb{Z}_{p_2},\overset{(e_2)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_2}\}$$

...

$$fact(\mathbb{Z}_{p_r^{e_r}})=\{\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_r}\}$$

En conclusión,

$$fact(G)=\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_1},\mathbb{Z}_{p_2},\overset{(e_2)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_2},\ldots,\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\ldots},\mathbb{Z}_{p_r}\}.$$

En el caso $n=12=2^2\cdot 3 \Rightarrow \ell(G)=3$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{fact}(G)=\{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$

Si ahora $H=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$, entonces

$\ell(H)=\ell(\mathbb{Z}_2)+\ell(\mathbb{Z}_6)=1+2=3$

$\text{fact}(H)=\text{fact}(\mathbb{Z}_2)\cup\text{fact}(\mathbb{Z}_6)=\{\mathbb{Z}_2\}\cup\{\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3\}=\{\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3\}$.

Como vemos, $H=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$ y $G=\mathbb{Z}_{12}$ tienen misma longitud y mismos factores de composición, lo cual no quiere decir que sean isomorfos ($\mathbb{Z}_{12}$ es cíclico y $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$ no lo es).

10.- Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$, demostrar que $\ell(D_n)=e_1+\dots+e_r+1$, y que $\text{fact}(D_n)=\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_1},\dots,\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_r},\mathbb{Z}_2\}$.

Una serie normal de D_n es $D_n \underset{2}{\trianglerighteq} \langle r\rangle \underset{n}{\trianglerighteq} 1$

Por el ejercicio 6

$\ell(D_n)=\ell(D_n/\langle r\rangle)+\ell(\langle r\rangle/1)=\ell(D_n/\langle r\rangle)+\ell(\langle r\rangle)$

$D_n/\langle r\rangle\cong\mathbb{Z}_2 \Rightarrow \ell(D_n/\langle r\rangle)=1$

$\langle r\rangle\cong\mathbb{Z}_n \Rightarrow$ por el ej. 9 $\ell(\langle r\rangle)=e_1+\dots+e_r$

Por tanto, $\ell(D_n)=e_1+\dots+e_n+1$

De nuevo, por el ejercicio 6

$\text{fact}(D_n)=\text{fact}(D_n/\langle r\rangle)\cup\text{fact}(\langle r\rangle) \overset{\text{ejercicio 9 } (\langle r\rangle\cong\mathbb{Z}_n)}{=} \{\mathbb{Z}_2\}\cup\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_1},\dots,\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_r}\}$

$=\{\mathbb{Z}_{p_1},\overset{(e_1)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_1},\dots,\mathbb{Z}_{p_r},\overset{(e_r)}{\dots},\mathbb{Z}_{p_r},\mathbb{Z}_2\}$

11.- Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

- D_4, D_5

Lo haremos, en general, para D_n

Sabemos que un grupo finito es resoluble si, y solo si, tiene una serie normal con factores cíclicos.

Consideremos la serie normal de D_n: $D_n \underset{2}{\trianglerighteq} \langle r\rangle \underset{n}{\trianglerighteq} 1$

$$\left.\begin{array}{l} D_n/\langle r\rangle\cong\mathbb{Z}_2 \text{ cíclico} \\ \langle r\rangle/1\cong\langle r\rangle \text{ cíclico}\end{array}\right\} \Rightarrow D_n \text{ resoluble.}$$

- $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ abeliano $\Rightarrow$ resoluble
- S_3

Su serie derivada es

$$S_3 \trianglerighteq S_3' = A_3 \trianglerighteq S_3'' = A_3' = 1 \Rightarrow S_3 \trianglerighteq A_3 \trianglerighteq 1 \Rightarrow S_3 \text{ resoluble}$$

- S_4

Su serie derivada es

$$S_4 \trianglerighteq S_4' = A_4 \trianglerighteq S_4'' = A_4' = V \trianglerighteq S_4''' = A_4'' = V' = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq 1 \Rightarrow S_4 \text{ resoluble.}$$

OTRA MANERA:

$$S_4 \underset{2}{\trianglerighteq} A_4 \underset{3}{\trianglerighteq} V \underset{4}{\trianglerighteq} 1$$

$\mathbb{Z}_2$ abeliano, $\mathbb{Z}_3$ abeliano, $\mathbb{Z}_4$ ó $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ abelianos

S_4 tiene una serie normal con factores abelianos

$\Downarrow$

S_4 resoluble

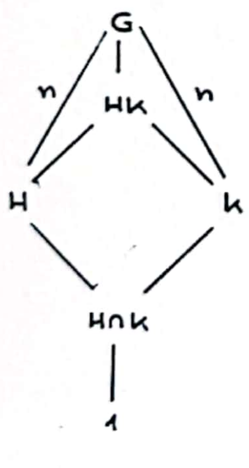
OTRA MANERA:

$$\left.\begin{array}{l} A_4 \trianglelefteq S_4 \text{ y } A_4 \text{ resoluble} \\ S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2 \text{ abeliano} \Rightarrow \text{resoluble} \end{array}\right\} \Rightarrow S_4 \text{ resoluble.}$$

12.- Sean H y K subgrupos normales de un grupo G, tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H\cap K)$ también es resoluble.

Para comenzar, como $H, K \trianglelefteq G$, entonces $H\cap K \trianglelefteq G$.

Consideremos el diagrama:



Utilizando el 2º Teorema de isomorfía, como $K \trianglelefteq G$, entonces $\dfrac{H}{H\cap K} \cong \dfrac{HK}{K}$

Como $\dfrac{HK}{K} < \dfrac{G}{K}$, y $\dfrac{G}{K}$ es resoluble, entonces $\dfrac{HK}{K}$ es resoluble. Por tanto, $\dfrac{H}{H\cap K}$ es resoluble

Por otro lado, $\dfrac{H}{H\cap K} \trianglelefteq \dfrac{G}{H\cap K}$, luego

$$\frac{G/H\cap K}{H/H\cap K} \cong \frac{G}{H}, \text{ que es resoluble.}$$

3er Teorema isomorfía

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{H}{H\cap K} \trianglelefteq \dfrac{G}{H\cap K} \text{ con } \dfrac{H}{H\cap K} \text{ resoluble} \\ \dfrac{G/H\cap K}{H/H\cap K} \text{ resoluble} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{G}{H\cap K} \text{ resoluble}$$

13.- Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial A de H que es abeliano y normal en G.

- Usando que $H \trianglelefteq G$, demostrar que $H^{(i} \trianglelefteq G$ por inducción sobre i.
  $H' \trianglelefteq G$, $H'' \trianglelefteq G$, ..., $H^{(i} \trianglelefteq G$
- Como G resoluble, H resoluble $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid H^{(k} = 1$
- Tomar $A = H^{(k-1}$ y ver que cumple lo que queremos (abeliano y $A \trianglelefteq G$).