1. Probar que $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ y uniformemente en todo compacto $K \subset \Omega$.

$$\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^z}$$

Sea K un compacto de Ω

Sea $\alpha = \min\{Re(z) \mid z \in K\} > 1$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in K$:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{|n^z|} = \frac{1}{|n^{Re z + Im z}|} = \frac{1}{|n^{Re z}|} \cdot \frac{1}{|n^{Im z}|} \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{|n^{i Im(z)}|} \overset{(*)}{=} \frac{1}{n^\alpha}$$

$(*)$

$$n^{i Im(z)} = e^{\log(n^{i Im(z)})} = e^{i \cdot Im(z) \cdot \log(n)} \Rightarrow |n^{i Im(z)}| = 1$$

Además, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ es absolutamente convergente $\Rightarrow$ Test. de Weierstrass

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en Ω y uniformemente en K.

$\Rightarrow$ converge uniformemente en cada compacto.

Test de Weierstrass

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, y sea B un subconjunto no vacío de A.

Supongamos que:

- Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe una constante $M_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

- La serie de números reales $\sum\limits_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente

Entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en B.

② Estudiar derivabilidad de $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = z^2 + z\bar{z}$ $\qquad g(z) = (z-1)\, f(z)$ $\qquad \forall z \in \mathbb{C}$

•) $f(z) = z^2 + z \cdot \bar{z}$

$z = x + iy \quad , x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = (x+iy)^2 + (x+iy)(x-iy) =$$
$$= x^2 - \cancel{y}^2 + 2xyi + x^2 + \cancel{y}^2 + x\cancel{y}i - x\cancel{y}i =$$
$$= 2x^2 + (2xy)i$$

Definimos las funciones:

$u(x,y) = 2x^2$

$v(x,y) = 2xy$

Ambas son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f será derivable cuando se cumplan las ecuaciones de Cauchy.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 4x \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff 4x = 2x \iff \boxed{x = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \iff 0 = -2y \iff \boxed{y = 0}$$

$\boxed{f \text{ es derivable en } 0}$

•) $g(z) = (z-1)\, f(z)$

$\leadsto$ g es derivable en 0 por ser producto de derivables.

* Si $z \neq \{0,1\}$

$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-1}$ y g no puede ser derivable, porque en ese caso

también lo sería f. !!

* Si $z = 1$. Estudiamos la derivabilidad mediante la definición.

$$\lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z-1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)f(z) - 0}{z-1} = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Luego g también es derivable en 1.

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ es derivable en } 0 \text{ y } 1}$

③ $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, probar que $\exists !$ función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) + z f'(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando lo anterior.