3.pdf

mrsbl

Métodos Numéricos Ii

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Relación 3– Problemas de Valores Iniciales (PVI)

Versión 30/4/2020 (con soluciones)

En la mayoría de los ejercicios se hacer referencia al problema de valores iniciales (PVI)

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{array}} \begin{array}{l} f : D = [a = t_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t_0, \mu) \in D \end{array} \tag{1}$$

siendo $x = x(t)$ una función desconocida de t.

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz M, y $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Sea $h = \frac{b-a}{N}$. Se considera el método de Euler para resolver el PVI (1) con tamaño de paso h. Demuestre que

   - Si $M = 0$, entonces $|e_n| \leq (b-a)\dfrac{M^*}{2}h \ \forall n = 0, \dots, N$.
   - Si $M > 0$, entonces $|e_n| \leq \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}\dfrac{M^*}{2}h \ \forall n = 0, \dots, N$.

   donde e_n es el error de truncatura global del método en el punto t_n, y M^* es tal que $|x''(t)| \leq M^* \ \forall t \in [a, b]$ siendo $x(t)$ la única solución de (1).

   Solución. Primero acotemos R_{n+1}.

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) \\ & \quad (\text{...Taylor...}) \\ &= x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 x''(\xi_n) - x(t_n) - hx'(t_n) \\ &= \frac{1}{2}h^2 x''(\xi_n), \end{aligned}$$

   luego $|R_{n+1}| \leq \frac{1}{2}h^2 M^*$. Ahora (llamando $f_n = f(t_n, x_n)$)

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= x(t_{n+1}) - x_n - hf_n \\ &= [x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n))] + [x(t_n) - x_n] + [h(f(t_n)x(t_n)) - hf_n] \\ &= R_{n+1} + e_n + h(f(t_n, x(t_n)) - f(t_n, x_n)), \quad \text{luego} \\ |e_{n+1}| &\leq |R_{n+1}| + |e_n| + hM|e_n| \\ &\leq \frac{1}{2}h^2 M^* + (1 + hM)|e_n| \\ &\leq \frac{1}{2}h^2 M^* + (1 + hM)\left[\frac{1}{2}h^2 M^* + (1 + hM)|e_{n-1}|\right] \\ & \quad \cdots (1 + hM = A) \cdots \\ &\leq \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A) + A^2|e_{n-1}| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A + \cdots + A^n) + A^{n+1}|e_0| \end{aligned}$$

   y como $|e_0| = 0$ se tiene $|e_n| \leq \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A + \cdots + A^{n-1})$.

   Caso $M = 0$: $A = 1$ luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* n \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* N = (b-a)\dfrac{M^*}{2}h$.

   Caso $M > 0$: teniendo en cuenta que $1 + x \leq e^x \ \forall x$, entonces $A = 1 + hM \leq e^{hM}$, luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* \dfrac{A^n - 1}{A - 1} \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* \dfrac{e^{nhM} - 1}{hM} \leq \dfrac{1}{2}hM^* \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}$.

2. Demuestre que el PVI $x' = -\frac{1}{2}x, \ x(0) = 2$ tiene una única solución en $[0, 1]$ y halle una cota del error de truncatura global en cada nodo del método de Euler de tamaño de paso h para aproximar dicha solución.

3. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método del punto medio para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

Solución. $x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n))$; $\Phi(x; t, h) = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x))$. Veamos si Φ es lipschitziana. Supongamos que f lo es con constante L.

$$\begin{aligned}
|\Phi(z;t,h).\Phi(w;t,h)| &= \left| f\left(t+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(t,z)\right) - f\left(t+\frac{h}{2}, w+\frac{h}{2}f(t,w)\right)\right| \\
&\leq L\left|z+\frac{h}{2}f(t,z)-w-\frac{h}{2}f(t,w)\right| \\
&\leq L|z-w| + L\frac{h}{2}|f(t,z)-f(t,w)| \\
&\leq L|z-w| + \frac{h}{2}L^2|z-w| \\
&= \left(L+\frac{h}{2}L^2\right)|z-w|
\end{aligned}$$

luego Φ es lipschitziana con constante $M = L + \frac{h}{2}L^2$. Con esto queda probado que el método es estable. Por otro lado, $\lim_{h\to 0} \Phi(x; t, h) = f(t, x)$ implica que es consistente, y finalmente siendo estable y consistente, es convergente.

4. Razone la veracidad o falsedad de la afirmación siguiente: El método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$.

5. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

Solución.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= f(t_n, x_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3) \end{aligned}$$

Si $h \to 0$ entonces todos los K_j tienden a $f(t_n, x_n)$, luego es consistente. Veamos la estabilidad. Cualquier combinación lineal de funciones lipschitzianas también lo es, pero de todos modos se detalla.

$$\begin{aligned} |\Phi(z;t,h) - \Phi(w;t,h)| &= \frac{1}{6}\,|K_1(z) - K_1(w) + 2K_2(z) - 2K_2(w) + \cdots \\ &\quad \cdots + 2K_3(z) - 2K_3(w) + K_4(z) - K_4(w)| \\ &\leq \frac{1}{6}\,|K_1(z) - K_1(w)| + \frac{2}{6}\,|K_2(z) - K_2(w)| + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{2}{6}\,|K_3(z) - K_3(w)| + \frac{1}{6}\,|K_4(z) - K_4(w)| \end{aligned}$$

Ahora miremos cada K_j por separado. Sea L la constante de Lipschitz de f.

$$\begin{aligned} |K_1(z) - K_1(w)| &= |f(t,z) - f(t,w)| \leq L|z-w|. \\ |K_2(z) - K_2(w)| &= \cdots \leq L\left|z - w + \frac{h}{2}K_1(z) - \frac{h}{2}K_1(w)\right| \\ &\leq L|z-w| + \frac{h}{2}L^2|z-w| = \left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z-w| \\ |K_3(z) - K_3(w)| &= \cdots \leq L|z-w| + \frac{h}{2}L\left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z-w| \\ &= \left(L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{4}L^3\right)|z-w| \\ |K_4(z) - K_4(w)| &= \cdots \leq L|z-w| + hL\left(L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{4}L^3\right)|z-w| \\ &= \left(L + hL^2 + \frac{h^2}{2}L^3 + \frac{h^3}{4}L^4\right)|z-w| \end{aligned}$$

y de aquí se deduce que el método es estable, y finalmente convergente.

6. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Al aplicar el método de un paso del punto medio al problema $x'(t) = -x(t) + 1$, $x(0) = 2$ se obtiene la solución numérica $\{t_n, x_n\}_{n=0}^{N}$ donde $x_n = A^n + 1$ con $A = 1 - h + \frac{h^2}{2}$.

   b) El orden de un método explícito de un paso cuya ecuación en diferencias es

   $$x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

   con $\Phi(x; t, h) = f(t, x) + \frac{h}{2}x''(t)$ es 2.

7. Demuestre que el PVI $x' = t - x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución en $[0,1]$. ¿Se puede aproximar dicha solución mediante

   - el método de Taylor de orden 2?
   - el método de Heun?
   - el método del punto medio?

   ¿Por qué? Escriba la ecuación en diferencias de cada uno de estos métodos para resolver el PVI considerado. ¿Ocurre algo reseñable?

Solución. La función $f(t,x) = t - x$ es lipschitziana con constante $L = 1$, luego existe solución y es única.

- Método de Taylor de orden 2.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hx'_n + \frac{h^2}{2}x''_n \\ x'_n &= f(t_n, x_n) \ = \ t_n - x_n \\ x''_n &= F(t_n, x_n) \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 1 - f(t_n, x_n) = 1 - t_n + x_n \\ & \quad \text{y por tanto el método es} \\ x_{n+1} &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

- Método de Heun.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))\right) \\ &= x_n + \frac{h}{2}(t_n - x_n + t_n + h - x_n - h(t_n - x_n)) \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

- Método del punto medio.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right) \\ &= x_n + h\left(t_n + \frac{h}{2} - x_n - \frac{h}{2}(t_n - x_n)\right) \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

El hecho reseñable es que resultan ser los tres el mismo método, consistente, estable y convergente.

8. Demuestre que el PVI $x' = t^2 x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución $x(t)$ en $[0, 1]$. Demuestre que el método de Taylor de orden 2 y el método de Runge-Kutta clásico convergen a $x(t)$ y halle las aproximaciones de cada uno de los estos dos métodos para el tamaño de paso $h = 0.2$.

9. Utilizando el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t),\ x(0) = \mu$, deduzca una conocida fórmula de integración numérica e indique de qué fórmula se trata.

Solución. En este caso se tiene que f no depende de x.

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 & = & f(t_n, x_n) \qquad\qquad\quad = \ f(t_n) \\ K_2 & = & f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) \ = \ f(t_n + \frac{h}{2}) \\ K_3 & = & f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2) \ = \ f(t_n + \frac{h}{2}) \\ K_4 & = & f(t_n + h, x_n + hK_3) \ = \ f(t_n + h) \\ \text{y por tanto} & & \\ x_{n+1} & = & x_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n) + 4f(t_n + \frac{h}{2}) + f(t_n + h)\right) \end{array}$$

y como $x_{n+1} - x_n \approx \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\,dt$, estamos ante la conocida fórmula simple de Simpson.

10. Para el método de Runge-Kutta de 2 evaluaciones con arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{array}$$

a) Determine el orden del método según los valores del escalar α.

b) Para α adecuado para que el método tenga orden máximo, ¿cuál es el término principal del error local de truncatura?

c) ¿Es estable (cero-estable) el método para todo α si $f(t, x)$ es continua y lipschitziana respecto de x sobre D?

11. Considere el MML definido por: $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = h\left(b_0 f_n + b_1 f_{n+1}\right)$

   a) Exprese los valores de a_0, b_0, b_1 respecto de a_1 para que el método sea de orden, al menos, 2.

   b) Para la familia de métodos obtenida en a),

   - ¿Qué valor(es) de a_1 hacen el MML estable?
   - ¿Qué métodos particulares se obtienen si $a_1 = 0$ y $a_1 = -1$?
   - ¿Es estable y de orden 3 el MML para algún valor de a_1?

Solución.

a) Construimos las constantes

$$\begin{array}{rclclcl}
C_0 &=& 1-\alpha_0-\alpha_1 &=& 1+a_0+a_1 &=& 0 \quad \Rightarrow \boxed{a_0=-a_1-1} \\
C_1 &=& 2-\alpha_1-\beta_0-\beta_1 &=& 2+a_1-b_0-b_1 &=& 0 \quad \Rightarrow b_0 = 2+a_1-b_1 \\
C_2 &=& \frac{2^2}{2!}-\frac{1^2}{2!}\alpha_1-\frac{1}{1!}\beta_1 &=& 2+\frac{a_1}{2}-b_1 &=& 0 \quad \Rightarrow \boxed{b_1 = 2+\frac{a_1}{2}} \\
&&&&&& \quad \Rightarrow \boxed{b_0 = \frac{a_1}{2}}
\end{array}$$

b) Veamos las raíces del primer polinomio característico, en función de a_1.

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^2-\alpha_1\lambda-\alpha_0 \;=\; \lambda^2+a_1\lambda+a_0 \;=\; \lambda^2+a_1\lambda-a_1-1$$

sus raíces son

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2+4a_1+4}}{2} = \frac{-a_1 \pm (a_1+2)}{2} = 1 \text{ y } \; -a_1-1$$

Las raíces deben estar en el disco unidad, y las de la circunferencia unidad deben ser simples. 1 ya está en la circunferencia, luego $-1 \le -a_1-1 < 1$, con lo que finalmente el método será estable para $\boxed{-2 < a_1 \le 0}$.

Para $a_1 = 0$ se tiene $x_{n+2} - x_n = 2hf_{n+1}$ que es el método del punto medio.

Para $a_1 = -1$ se tiene $x_{n+2} - x_{n+1} = h\left(-\frac{1}{2}f_n + \frac{3}{2}f_{n+1}\right)$, que es el método de Adams-Bashforth con $q=1, m=0, r=1$.

Veamos la posible estabilidad y orden 3.

$$C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!}\alpha_1 - \frac{1^2}{2!}\beta_1 = \frac{8}{6} + \frac{a_1}{6} - \frac{3}{6}\left(2+\frac{a_1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 4}$$

pero para este valor de a_1 no puede ser estable.

12. Determine los parámetros α, β para los que el método lineal de ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - (1+\alpha)x_{n+1} + \alpha x_n = h\left((1+\beta)f_{n+2} - (\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{n+1} + \alpha\beta f_n\right)$$

$n = 0, \ldots, N-2$, tiene el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden? ¿Es convergente el método obtenido? ¿Por qué?

13. Construya una familia 1-paramétrica de MML implícitos de dos pasos con el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden?

    - Si $x(t)$ es suficientemente diferenciable, ¿cuál es la parte principal de error de truncatura local?
    - ¿Qué valores del parámetro aseguran la convergencia?

Solución. Un MML genérico implícito de 2 pasos es de la forma

$$x_{n+2} - \alpha_1 x_{n+1} - \alpha_0 x_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2})$$

donde vemos 5 parámetros. Para obtener una familia 1-paramétrica reqrerimos 4 ecuaciones relacionadas con el orden

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 - \alpha_1 - \alpha_0 \\ C_1 &= 2 - \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 \\ C_2 &= 2 - \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 \\ C_3 &= \frac{2^3}{6} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2 \end{aligned}$$

e igualando las cuatro constantes a cero puede quedar todo en función de α_1:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 - \alpha_1 \\ \beta_0 &= -\frac{1}{12}(5\alpha_1 + 8) \\ \beta_1 &= \frac{2}{3}(5 - \alpha_1) \\ \beta_2 &= \frac{1}{12}(\alpha_1 - 8) \end{aligned}$$

con lo que el orden sería al menos 3. Veamos si fuera posible el orden 4.

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{16}{24} - \frac{\alpha_1}{24} - \frac{\beta_1}{6} - \frac{8}{6}\beta_2 \\ &= \cdots = \boxed{1 - \frac{\alpha_1}{24}} \end{aligned}$$

con lo cual el orden llegaría a 4 si $\alpha_1 = 24$. La parte principal del error de truncatura local es

$$\boxed{\left(1 - \frac{\alpha_1}{24}\right) h^4 x^{iv}(t_n)}.$$

Para ver la convergencia, el primer polinomio característico $\lambda^2 - (1-\alpha_1)\lambda - \alpha_1$ tiene las raíces 1 y $-\alpha_1$, luego tiene que ser $\boxed{-1 < \alpha_1 \leq 1}$ para que ambas estén en el disco unidad y no haya raíces múltiples en la circunferencia.

14. Obtenga la ecuación en diferencias del método de Adams-Bashforth de tres pasos y la del método de Adams-Moulton de dos pasos. Estudie la convergencia y el orden de dichos métodos.

15. Usando integración numérica sobre el intervalo $[t_{n+1}, t_{n+3}]$, deduzca dos métodos lineales de tres pasos explícitos diferentes para resolver el p.v.i. de ecuación $x' = f(t,x)$ y condición inicial $x(t_0) = \mu$. ¿Es alguno de ellos un método óptimo? Justifique la respuesta.

Solución. Los métodos han de seguir el modelo $x_{n+3} - x_{n+1} \approx \int_{t_{n+1}}^{t_{n+3}} f(t,x(t))\,dt$ y hay que aplicar a la integral una fórmula de integración numérica basada en los nodos t_n, t_{n+1} y t_{n+2}. El nodo t_{n+3} no puede formar parte de la fórmula porque se indica que los métodos han de ser explícitos, y el nodo t_n ha de aparecer con peso no nulo para que el método sea de 3 pasos. Los nodos t_{n+1} y t_{n+2} no son obligatorios. Si ponemos los tres

$$\int_{t_n+h}^{t_n+3h} f(t,x(t))\,dt \approx a_0 f_n + a_1 f_{n+1} + a_2 f_{n+2}, \quad a_0 \neq 0$$

al obligar exactitud en $1, t-t_n, (t-t_n)^2$ surge el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & h^2 & 4h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ \frac{(3h)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \\ \frac{(3h)^3}{3} - \frac{h^3}{3} \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a_0 = \frac{1}{3}h,\ a_1 = -\frac{2}{3}h,\ a_2 = \frac{7}{3}h$, dando lugar al método

$$Ⓐ: \quad x_{n+3} - x_{n+1} = \frac{h}{3}(f_n - 2f_{n+1} + 7f_{n+2})$$

Por otro lado, si (arbitrariamente) omitimos el nodo t_{n+1} en la fórmula de integración, surge un sistema lineal cuya solución $a_0 = 0,\ a_2 = 2h$ no es admisible. Omitimos, pues, el nodo t_{n+2} y surge el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ \frac{(3h)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a_0 = -2h,\ a_1 = 4h$, dando lugar al método

$$Ⓑ: \quad x_{n+3} - x_{n+1} = 2h(-f_n + 2f_{n+1})$$

Veamos si alguno es óptimo. El orden máximo es $k+1 = 3+1 = 4$ porque k es impar. Método A: $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = -\frac{2}{3},\ \beta_2 = \frac{7}{3}$.

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 0 - 1 = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 0 \\
C_1 &= 3 - 1 - 2 = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 1 \\
C_2 &= \tfrac{3^2}{2} - \tfrac{1}{2}1 - (-\tfrac{2}{3} + 2\tfrac{7}{3}) = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 2 \\
C_3 &= \tfrac{27}{6} - \tfrac{1}{6}1 - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{2}{3} + 2^2\tfrac{7}{3}) = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 3 \\
C_4 &= \tfrac{81}{24} - \tfrac{1}{24} - \tfrac{18}{6} \neq 0 && \Rightarrow \text{ orden } p = 3 < 4 \text{ no óptimo}
\end{aligned}$$

Método B: $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = -2,\ \beta_1 = 4,\ \beta_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 0 \\
C_1 &= 3 - 1 - 2 = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 1 \\
C_2 &= 4 - 4 = 0 && \Rightarrow \text{ orden } p \geq 2 \\
C_3 &= \tfrac{26}{6} - \tfrac{1}{2}4 \neq 0 && \Rightarrow \text{ orden } p = 2 < 4 \text{ no óptimo}
\end{aligned}$$

16. Dado el MML $x_{n+3} + \alpha\left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) - x_n = \frac{h}{2}\left(3 + \alpha\right)\left(f_{n+1} + f_{n+2}\right)$, razone si es cierto que

    a) $\exists\alpha$ para el que el orden es 4.

    b) Si $-3 < \alpha < 1$, el método es cero-estable.

    c) Si el MML dado es convergente su orden es exactamente 2.