## Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

## Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

## Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g) \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  con  $\alpha \neq 0$  de modo que  $g(z) = \alpha z + \beta$  y  $f(z) = \frac{z - \beta}{\alpha}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ .

**Ejercicio 2.** (2.5 puntos) Dado  $a \in \mathbb{R}$  con a > 1, integrar la función  $z \mapsto \frac{z}{a - e^{-iz}}$  sobre la poligonal  $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , para probar que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x) dx}{1 + a^2 - 2a \cos(x)} = \frac{2\pi}{a} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

**Ejercicio 3.** (2.5 puntos) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$  la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2} dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- a) Probar que  $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .
- b) Probar que la serie de funciones  $\sum_{n\geqslant 1} f_n$  converge en  $\mathbb C$  y que su suma es una función entera.

**Ejercicio 4.** (2.5) Probar el Lema de Schwarz: Sea  $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$  verificando f(0) = 0 y  $|f(z)| \leq 1$  para cada  $z \in D(0,1)$ . Entonces  $|f'(0)| \leq 1$  y  $|f(z)| \leq |z|$  para cada  $z \in D(0,1)$ . Además, si ocurre |f'(0)| = 1 ó  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ , entonces existe  $\alpha \in \mathbb{T}$  de modo que  $f(z) = \alpha z$  para cada  $z \in D(0,1)$ .

**Pista**: Para cada 0 < r < 1 estimar convenientemente el valor máx $\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$  donde la función  $g: D(0,1) \to \mathbb{C}$  viene dada por g(0) = f'(0) y  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  para cada  $z \in D(0,1)$ .