① Estudiar convergencia de $\sum f_n$,

con $f_n(z) = \left(\frac{z^2-i}{z^2+i}\right)^n$ $\quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\}$

Sabemos que $\sum_{n\geq 0} w^n$, converge absolutamente en $D(0,1)$ y uniformemente en cada $K \subset D(0,1)$ compacto $\Leftrightarrow w \in U = \{ w \in \mathbb{C} / |w| < 1 \}$

Consideramos $\varphi : \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \frac{z^2 - i}{z^2+i}$$

Entonces, $f_n(z) = (\varphi(z))^n$, y $\sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \varphi^n$

. Queremos encontrar un $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\}$ tal que $\varphi(\Omega) = U$.

Fijamos $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\}$ tq. $\varphi(z) \in U$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z^2-i}{z^2+i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z^2 - i| < |z^2+i| \Leftrightarrow$$

(*) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} |(x+iy)^2 - i| < |(x+iy)^2 + i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - y^2 + 2xyi - i| < |x^2 - y^2 + 2xyi + i| \underset{x,y \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$$

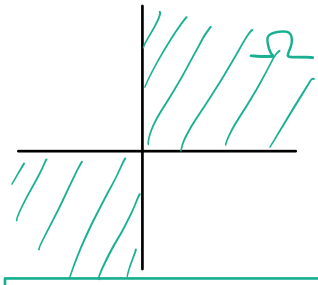
$$\Leftrightarrow |(x^2-y^2) + (2xy-1)i| < |(x^2-y^2) + (2xy+1)i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy-1)^2} < \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(x^2-y^2)^2} + (2xy-1)^2 < \cancel{(x^2-y^2)^2} + (2xy+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\iff (2xy-1)^2 < (2xy+1)^2 \iff \cancel{4x^2y^2} + \cancel{1} - 4xy < \cancel{4x^2y^2} + \cancel{1} + 4xy \iff$$

$$\iff 8xy > 0 \iff xy > 0 \iff \mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z) > 0$$



Por tanto, $\boxed{\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} - \left\{\pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\} \,/\, \mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}}$

Si K es un compacto de Ω, $\xRightarrow{\varphi \text{ continua}}$ $\varphi(\Omega)$ es un compacto de $D(0,1)$.

Es decir, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{z^2-i}{z^2+i}\right)$ converge absolutamente en Ω, y converge uniformemente en todo $K \subset \Omega$ compacto, y no converge en ningún punto fuera de Ω.

② Estudiar derivabilidad de $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$f(z) = z^2 e^{\bar{z}}$ y $g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

•) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$f(z) = z^2 e^{\bar{z}}$ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Empezamos estudiando la derivabilidad de $e^{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$

$$e^{\bar{z}} = e^{(x-iy)} = e^x \cdot e^{-iy} = e^x \left(\cos(y) - i \operatorname{sen}(y)\right) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Definimos las funciones:

$$u(x,y) = e^x \cos(y) \qquad v(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ambas son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ por el Teorema de Cauchy-Riemann, $e^{\bar{z}}$ será derivable en $z = x + iy$ si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos(y) \end{array}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff e^x \cos(y) = -e^x \cos(y) \iff$$
$$\iff \cos(y) = -\cos(y) \iff \cos(y) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen}(y) \end{array}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \iff e^x \operatorname{sen}(y) = -e^x \operatorname{sen}(y) \iff$$
$$\iff \operatorname{sen}(y) = 0$$

Como el seno y el coseno nunca se anulan a la vez, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen para ningún $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $e^{\bar{z}}$ no es derivable en ningún $z \in \mathbb{C}$.

•) Si $z \neq 0 \Rightarrow e^{\bar{z}} = \dfrac{f(z)}{z^2} \Rightarrow f(z)$ no puede ser derivable (porque si lo fuera, $e^{\bar{z}}$ sería cociente de funciones derivables y, por tanto, derivable !!)

•) Si $z = 0 \Rightarrow$ estudiamos la derivabilidad de z con la definición:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 \cdot e^{\bar{z}} - 0}{z} = \lim_{z \to 0} z \cdot e^{\bar{z}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Por tanto, } f \text{ es derivable en } z = 0}$

$\rightsquigarrow g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\qquad \Omega = \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$

•) Si $z \notin \Omega \overset{\operatorname{sen}(z) \neq 0}{\Rightarrow} f(z) = \dfrac{g(z)}{\operatorname{sen}(z)}$ y, si $g(z)$ fuese derivable, también lo sería $f(z)$!!

•) Si $z \in \Omega \Rightarrow$

$$\lim_{w \to z} \frac{g(w) - g(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{\operatorname{sen}(w) \cdot f(w) - \cancel{\operatorname{sen}(z) \cdot f(z)}^{\,0}}{w - z} =$$

$$= \lim_{w \to z} \frac{\operatorname{sen}(w) \cdot f(w)}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{\operatorname{sen}(w) \cdot w^2 \cdot e^{\bar{w}}}{w - z} =$$

$$= \lim_{w \to z} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w - z} \cdot \underbrace{\lim_{w \to z} w^2 \cdot e^{\bar{w}}}_{= f(z)} = \lim_{w \to z} \frac{\operatorname{sen}(w) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{sen}(z)}}}{w - z} \cdot f(z) =$$

$$= \operatorname{sen}'(z) \cdot f(z)$$

$\boxed{\text{Por tanto } g \text{, es derivable en } \Omega \text{ y no lo es fuera de él.}}$

③ $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2}\,dz$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

$\dfrac{\cos(z)}{z(z-2)^2} = \dfrac{\cos(z)}{(z-2)^2} \cdot \dfrac{1}{z-0}$. Tomamos $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{(z-2)^2}$, con $z \in D(0,r)$

Tomamos $1 < r < 2$. Como $2 \notin D(0,r) \longrightarrow f$ bien definida

y $f \in \mathcal{H}(D(0,r))$, por ser cociente de funciones holomorfas.

Como $\overline{D}(0,1) \subset D(0,r) \xRightarrow{\text{Cauchy para circunferencia}}$ $\Omega = D(0,r)$

$$\boxed{\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z-0}\,dz} = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(-2)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi i}{2}}$$

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

$|z^2 - i|^2 < |z^2 + i|^2$

$Re(z^2 - i)^2 + Im(z^2 - i)^2$

(4) $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $R > 0$: $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$.

Probar que si f es entera $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Liouville).

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{b-a}\left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(z)}{z-a}\right)$$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{b-a}\left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(2\pi i \, f(b) - 2\pi i \, f(a)\right) = 2\pi i \, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$