1. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$ con $f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1-i\}$.

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2}\right)^{n}$$

Sea $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{-1-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2}$$

Entonces $f_n(z) = (\varphi(z))^n$, y $\sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \varphi^n$

Sabemos que $\sum_{n\geq 0} w^n$ converge absolutamente en $\Leftrightarrow w\in$ $U = \{w\in\mathbb{C} : |w|<1\}$ $D(0,1)$ $\Leftrightarrow$

y uniformemente en cada compacto $K\subset U$.

Queremos encontrar un $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{-1-i\}$ tq. $\varphi(\Omega) = U$

Fijamos $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1-i\}$ tq. $\varphi(z)\in U \Leftrightarrow \left|\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^2\right| < 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1-i| < |z+1+i| \Leftrightarrow$$

$z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |z-1-i|^2 < |z+1+i|^2 \Leftrightarrow |x+iy-1-i|^2 < |x+iy+1+i|^2 \Leftrightarrow$$

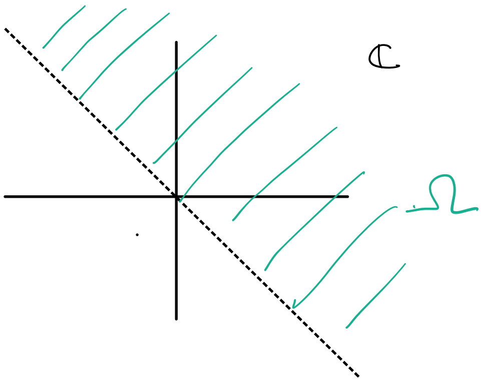
$$\Leftrightarrow |(x-1)+i(y-1)|^2 < |(x+1)+i(y+1)|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < (x+1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{1}-2x+\cancel{y^2}+\cancel{1}-2y < \cancel{x^2}+\cancel{1}+2x+\cancel{y^2}+\cancel{1}+2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y>0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)>0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 0 \}}$$



$x + y > 0 \qquad y > -x$

Por tanto, $\sum f_n$ converge absolutamente en Ω y no converge puntualmente en ningún punto fuera de Ω.

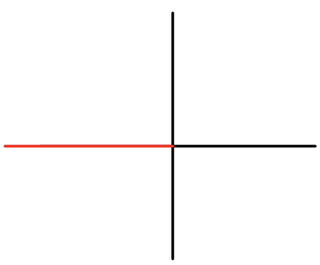
Además, como Ω es compacto y φ continua $\Rightarrow \varphi(\Omega)$ compacto, y $\sum f_n$ converge uniformemente en todo $K \subset \Omega$ compacto.

2. Estudiar derivabilidad de $f: \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \log(1 + z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen.

El logaritmo es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$



No se puede dar a la vez que

$\operatorname{Re}(z) < 0$ y $\operatorname{Im}(z) = 0$.

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + z^2 = 1 + (x+iy)^2 = 1 + x^2 - y^2 + 2xyi =$

$$= (1 + x^2 - y^2) + i(2xy).$$

$$\operatorname{Re}(z) < 0 \iff 1+x^2-y^2 < 0 \iff x^2 < y^2-1 \iff \operatorname{Re}(z)^2 < \operatorname{Im}(z)^2 - 1$$

$$\operatorname{Im}(z) = 0 \iff 2xy = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ ó } \operatorname{Im}(z) = 0$$

Se dan ambas cuando:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{Im}(z)^2 - 1 \Rightarrow \operatorname{Im}(z)^2 > 1 \iff \boxed{|\operatorname{Im}(z)| > 1} \\ \text{ó} \\ \operatorname{Re}(z)^2 < -1 \ !! \ \text{ABSURDO} \end{cases}$$

De hecho, el logaritmo no se puede anular, luego

$$1+z^2 = 0 \iff 1+(x+iy)^2 = 0 \iff 1+x^2-y^2+2xy = 0 \overset{\operatorname{Re}(x)=0}{\iff}$$

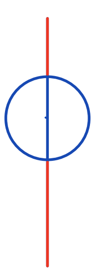
$$1-y^2 = 0 \iff y^2 = 1 \iff |y| = 1 \iff |\operatorname{Im}(z)| = 1$$

En definitiva, tenemos que f será derivable en

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge |\operatorname{Im}(z)| \geq 1$$

Para obtener el desarrollo de potencias,

tenemos que:



Si centramos un disco en el origen, podemos obtener el desarrollo en series de potencias de f sólo en $D(0,1)$.

Sabemos que si $z \in D(0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$\Rightarrow \log'(1+z^2) = \frac{2z}{1+z^2} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \log(1+z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n z^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n z^{2(n+1)}}{2(n+1)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2(n+1)}}{n+1}}_{= g}$$

g y f tienen la misma derivada y están definidas en $D(0,1)$, que es un dominio $\Rightarrow$ Se diferencian en una constante

$g(0) = 0$

$f(0) = \log(1+0) = \log(1) = 0$

$$\Rightarrow f(z) = g(z) \quad \forall z \in D(0,1).$$

③ $$\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz$$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

$$\frac{e^z}{z(z-2)^2} = \frac{e^z}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{z-0} \Rightarrow \text{Tomamos } f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2} \qquad \Omega = D(0,r)$$

Tomamos $1 < r < 2 \Rightarrow f : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2}$ $\Rightarrow f \in \mathcal{H}(D(0,r))$

Además, $\overline{D}(0,1) \subset D(0,r) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz} = f(0)\cdot 2\pi i = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i = \boxed{\frac{\pi i}{2}}$$

$$f(0) = \frac{e^0}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

③ b) $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$: $f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{T}$

Demostrar que $f(z) = g(z) \quad \forall z \in \bar{D}(0,1)$. ¿Probar que, de hecho, $f = g$?

$$\bar{D}(0,1) \subset \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(\omega)}{\omega - z} d\omega = g(z) \quad \forall z \in D(0,1)$$

$\Rightarrow$ Como $f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{T} \Rightarrow f(z) = g(z) \quad \forall z \in \bar{D}(0,1)$