EJERCICIOST6.pdf

martasw99

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

EJ-TEMA 6:

si pudiéramos decir que tiene primitiva en $C(0, r+\varepsilon)$ habríamos terminado

3 Probar que $\int_{C(0,r)} \boxed{\frac{\log(1+z)}{z}} dz = 0$ y deducir que

$$\int_0^{\pi} \log(1+r^2+2r\cos t)\,dt = 0, \ \forall r \in]0,1[$$

Ej 8 R5 a) Nos decía $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z) \quad \forall z \in D(0,1)$

a) $\Rightarrow$ Tenemos: $\frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in D(0,1)\setminus\{0\}$

$$\frac{\log(1+z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{n-1} \quad \forall z \in D(0,1)\setminus\{0\} \supset$$

$\supset C(0,r)^*$

Por el Th de Holomorfía de integr y deriv ??

$\frac{\log(1+z)}{z}$ admite primitiva en $D(0,1)\setminus\{0\}$ (abierto) por venir dada por una serie de potencias convergente $\Longrightarrow$ Por la R-B

"la integral de una función que admite primitiva en un camino cerrado $= 0$"

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ camino cerrado en el abierto } D(0,1)\setminus\{0\}$$

b)

$$0 = \int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overset{cte}{ire^{it}}(\log(1+re^{it}))}{re^{it}} dz =$$

Parametrizamos la circunferencia:

$\sigma: C(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \sigma(t) = re^{it}; \ \sigma'(t) = ire^{it}$

log principal

la parte real y la imaginaria $= 0$

$$(0) = i\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+re^{it})dz = i\int_{-\pi}^{\pi} (\ln|1+re^{it}| + i\arg(e^{it}))dt \Rightarrow$$

$\log(w) = \ln|w| + i\arg(w)$ $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+e^{it}r|\,dt = 0$

$\log(1+re^{it}) = \ln|1+re^{it}| + i\arg(re^{it})$

$|1+re^{it}| = ((1+r\cos t)^2+(r(\text{sen }t))^2)^{1/2} =$

$re^{it} = r\cos t + ir\,\text{sen}t$

$= (1+2r\cos t+\underbrace{r^2\cos^2 t+r^2\text{sen}^2 t}_{r^2})^{1/2} = (1+r^2+2r\cos t)^{1/2}$

$\Rightarrow \ln|1+re^{it}| = \frac{1}{2}\ln(1+r^2+2r\cos t)$

$\Rightarrow 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\ln|1+re^{it}|dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\ln(1+r^2+2r\cos t)}_{\text{par}}dt =$

$= \int_0^{\pi}\ln(1+r^2+2r\cos t)dt$ //

6 Probar que $\int_{\sigma}\frac{dz}{1+z^2}=0$ donde $\sigma(t)=\cos t+(i/2)\ \forall t\in[0,2\pi]$

La arctg es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{iy;\ y\in\mathbb{R} \text{ con } |y|\geq 1\}$

¿ $\sigma^*\in\Omega$?

$\sigma(t)=\cos t+\frac{i}{2}\text{sent}$

$|\text{Im}\,\sigma(t)|\leq 1/2 \Rightarrow \sigma(t)\in\Omega\ \forall t\in[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow \gamma^*\subset\Omega$
$+$
arctg $\in\mathcal{H}(\Omega)$
con $\text{arctg}'(t)=\frac{1}{1+z^2}$

$\left.\right\} \xRightarrow{R-B} \int_{\sigma}\frac{dz}{1+z^2}=0$


COMPRAR ENTRADAS
MARVEL STUDIOS
DOCTOR STRANGE
EN EL
MULTIVERSO DE LA LOCURA
6 DE MAYO SOLO EN CINES
©2022 MARVEL. PENDIENTE DE CALIFICACIÓN POR EDADES.

5 Sean $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f = \frac{1}{1+z^2}$ $\forall z \in \Omega$. Probar que f no admite primitiva en Ω.

Tenemos que buscar un camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ donde si $\exists$ el valor de la integral.

$$\frac{1}{1+z^2} = \underbrace{\frac{1}{(i+z)} \cdot \frac{-1}{(i-z)}}_{\text{se anula en } i \text{ y } -i}$$

$\to$ Vamos a calcular la integral ahí y veremos que es $\neq 0$

$$\sigma : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sigma(t) = i + e^{it} \simeq C(i,1) \qquad \sigma'(t) = ie^{it}$$

$$\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2}dz = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{ie^{it}}{1+e^{2it}}dt}_{\text{Tenemos que garantizar que es } \neq 0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{2ie^{it}+(e^{it})^2} =$$

$$1+e^{2it} = 1+(i+e^{it})^2 = \cancel{1}+(\cancel{-1})+2ie^{it}+(e^{it})^2$$

$$z = 1+e^{it}$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2i+e^{it}} = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\cos t + i(2+\operatorname{sen} t)} =$$

$$2i+e^{it} = 2i+\cos t + i\operatorname{sen} t$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t - i(2+\operatorname{sen} t)}{(\cos^2 t + (2+\operatorname{sen} t)^2)}dt \quad \text{la parte real}$$

es $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2+\operatorname{sen} t}{\cos^2 t+(2+\operatorname{sen} t)^2}dt > 0$$

$$\Rightarrow \int_\sigma \frac{1}{1+z^2} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+z^2} \text{ no admite primitiva en } \Omega.$$