2-Prueba-de-Evaluacion-Variable-...

cristianp

Variable Compleja I

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Cristian Porro Gonzalez

Propuesta de Ejercicios N°2 ~~Cristian~~

1º) Estudia la continuidad de la función

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z) \begin{cases} \dfrac{z^3-1}{z-1} & |z| \neq 1 \\ 3 & |z| = 1 \end{cases}$$

Solución: Para estudiar la continuidad de la función f, distigo varios casos;

Para aclarar notación denoto $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Caso 1:) Para los puntos de $\mathbb{C} \setminus D$ la función f es continua ya que $f(z) = g(z) = \dfrac{z^3-1}{z-1}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D$ ya que la función g es continua por ser composición de continuas y además no se anula el denominador ya que $z = 1 \notin \mathbb{C} \setminus D$.

Por lo que la función f es continua en $\mathbb{C} \setminus D$

Caso 2:) Para los punto de D, vamos a intentar simplificar la función $g(z) = \dfrac{z^3-1}{z-1}$, ayudándonos de la división de los complejos

$$\begin{array}{lll} z^3 \qquad\qquad -1 & \underline{|\, z-1} & \Rightarrow g(z) = z^2+z+1 \\ -z^3+z^2 & z^2+z+1 & \qquad z \neq 1 \\ \quad -z^2+z & & \\ \qquad -z+1 & & \\ \qquad\quad 0 & & \end{array}$$

a-) Para los punto de $D \setminus \{1\}$, supongo por reducción a lo absurdo que f es continuo en $D \setminus \{1\}$.

Por lo que el $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) = f(a) \quad \forall a \in D \setminus \{1\}$

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{z^3-1}{z-1} = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} z^2+z+1 \neq 3 \quad \forall a \in D \setminus \{1\}$$

Que sería una contradicción ya que $f(a)=3 \ \forall a \in D \setminus \{1\}$

Por lo que puedo afirmar que f no es continua en los puntos $D \setminus \{1\}$

b-) Por ultimo estudio el caso $z=1$

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \neq 1}} f(z) = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \neq 1}} \frac{z^3-1}{z-1} = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \neq 1}} z^2+z+1 = 3 = f(1) \checkmark$$

con lo que puedo afirmar que

$\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \neq 1}} f(z) = f(1)$ Por lo que f es continua en $z=1$

En resumen:

* f es continua en $\mathbb{C} \setminus D$
* f es continua en 1
* f no es continuo en $D \setminus \{1\}$

Nota: cuando escribo $z=1$, me refiero al punto del plano complejo $(1,0)$
Idem en $D \setminus \{1\} = D \setminus \{(1,0)\}$

2º) Calculo el límite:

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{14}+1}{z^7+i}$$

Solución: Para resolver el límite, voy a ayudarme de las potencias de la unidad imaginaria.

$$n \in \mathbb{N} \qquad (i)^n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 4 \\ +i & n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{14}+1}{z^7+i} \underset{(1)}{=} \lim_{z \to i} \frac{(z^{14}+1)(z^7-i)}{(z^7+i)(z^7-i)} =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{\cancel{(z^{14}+1)}(z^7-i)}{\cancel{(z^{14}+1)}} = \lim_{z \to i} z^7 - i = (i)^7 - i = \boxed{-2i}$$

(1): Multiplico y divido por el conjugado.

Por lo que finalmente afirmo que

$$\boxed{\lim_{z \to i} \frac{z^{14}+1}{z^7+i} = -2i}$$