1 $\sum_{n\geq 0} e^{-zn}$ $\quad \Omega = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0 \}$ Probar la convergencia absoluta en Ω y uniforme en cada compacto $K \subset \Omega$.

Deducir que $g: \Omega \to \mathbb{C}$
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$$
es continua en Ω y calcular $\int_{C(2,1)} g(z)\, dz$.

Tenemos que $\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} e^{-zn} = \sum_{n\geq 0} (e^{-z})^n$

Sea $\varphi(z) = e^{-z} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} (\varphi(z))^n$

Además sabemos que $\sum_{n\geq 0} w^n$ converge absolutamente en $D(0,1) \Leftrightarrow$ $w \in U = \{ w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \}$ y uniformemente en cada compacto suyo. Por tanto, se trata de encontrar un $\Omega \subseteq \mathbb{C}$: $\varphi(\Omega) = U$.

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

Fijamos $z \in \Omega \Rightarrow \varphi(z) \subseteq U \Leftrightarrow |e^{-z}| < 1 \Leftrightarrow$

$e^{z} = e^{Re(z)} (\cos(Im(z)) + i \operatorname{sen}(Im(z)))$
$\Rightarrow |e^{z}| = e^{Re(z)}$

$\Leftrightarrow |e^{-x-iy}| < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow Re(z) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0 \}}$$

Por tanto, $\sum f_n$ converge absolutamente en Ω.

Además, si $K \subset \Omega$ es un compacto $\xRightarrow{\varphi \text{ continua}}$ $\varphi(K)$ es un compacto de U

$\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformemente en K.

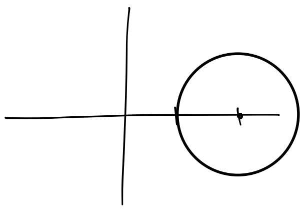
Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-zk}$, $z \in \Omega \Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ uniformemente en cada compacto de Ω. Además, S_n es continua $\forall n$ por ser una suma finita de funciones continuas. $\Rightarrow g$ continua en cada compacto de Ω

$$\int_{C(2,1)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}\, dz$$

Sabemos que $C(2,1) \subset \Omega$ y es compacto,

luego $\sum_{n\geq 0} e^{-zn}$ converge uniformemente en $C(2,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{C(2,1)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(2,1)} e^{-zn}\, dz$$



② Estudiar derivabilidad de $f, g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$f(z) = \cos(\bar{z})$; $g(z) = (z-1)\, f(z)$

$z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$f(x+iy) = \cos\,(x-iy) = \cos\,(x)\cdot\cos\,(iy) + \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}\,(iy) =$

$= \cos(x)\cdot \operatorname{ch}(y) + i\,(\operatorname{sen}(x)\cdot \operatorname{sh}(y))$

Consideramos $u(x,y) = \cos(x)\cdot\operatorname{ch}(y)$
$v(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sh}(y)$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z$, y $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i\operatorname{sh}(iz)$

En particular, para todo $y \in \mathbb{R}$ será:

- $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ y $\operatorname{sen}(iy) = i\operatorname{sh} y$

Ambas son diferenciables $\Rightarrow$ f será derivable si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{ch}(y) \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{ch}(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}(x)\operatorname{ch}(y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{ch}(y) \overset{\operatorname{ch}(y)\neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\operatorname{sen}(x) = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\cdot\operatorname{sh}(y) \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cdot\operatorname{sh}(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \cos(x)\cdot\operatorname{sh}(y) = -\cos(x)\cdot\operatorname{sh}(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)\cdot\operatorname{sh}(y) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ó } \operatorname{sh}(y) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos(x) = 0 \text{ ó } y = 0}$$

Como se tienen que dar ambas, y el seno y el coseno no se anulan a la vez, f será derivable $\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es derivable en } \{z \in \mathbb{C} \mid z = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

b) $g(z) = (z-1)\, f(z)$

·) $g(z)$ es derivable en $\overbrace{\{z \in \mathbb{C} \setminus z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}^{=\,\Omega}$ por ser producto de funciones derivables.

·) Si $z \notin \Omega$ y $z \neq 1 \Rightarrow f(z) = \dfrac{g(z)}{z-1}$, luego si $g(z)$ fuese derivable en ese dominio, f también lo sería !!

·) Si $z = 1$. Estudiamos la definición de derivabilidad.

$$\lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z-1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)\, f(z) - 0}{z-1} = \lim_{z \to 1} \overbrace{\left(\frac{z-1}{z-1}\right)}^{1} \cdot f(z) =$$

$$= \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = \underline{\underline{\cos(1)}}$$

g es derivable en 1.

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ es derivable en } \Omega \cup \{1\}}$

③ Sea Ω abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Probar que $|f|$ no puede tener ningún máximo relativo estricto.

Es decir, no pueden existir $z_0 \in \Omega$ y $r>0$ con $\bar{D}(z_0,r) \subset \Omega$

de modo que $|f(z_0)| > |f(z)|$ para cada $z \in \bar{D}(z_0,r) \setminus \{z_0\}$

Fijamos $z_0 \in \Omega$, $r>0$ / $\bar{D}(z_0,r) \subset \Omega$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \implies |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(z_0,r)} \left| \frac{f(z)}{z-z_0} \right| dz \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r} = M, \quad \text{donde} \quad M := \text{máx} \{ |f(z)| : z \in C(z_0,r)^* \}$$

$$\implies |f(z_0)| \leq \text{máx} \{ |f(z)| : z \in C(z_0,r)^* \}$$