Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

Relación 2

Curso 2021/22

Subgrupos. Generadores. Retículos. Grupos cíclicos

Ejercicio 1. Demostrar que para cualquier permutación $\alpha \in S_n$ se verifica que $s(\alpha) = s(\alpha^{-1})$, donde s denota la ***signatura***, o paridad, de una permutación.

Ejercicio 2. Demostrar que si $(x_1 x_2 \cdots x_r) \in S_n$ es un ciclo de longitud r, entonces

$$s(x_1 x_2 \cdots x_r) = (-1)^{r-1}.$$

Ejercicio 3. Describir todos los elementos de los grupos alternados A_n, consistentes en las permutaciones pares del S_n correspondiente, para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.

Ejercicio 4. Demostrar que el grupo de unidades $\mathbb{Z}_7^\times$ es un grupo cíclico.

Ejercicio 5. Demostrar que el conjunto de transposiciones

$$\{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\}$$

genera al grupo simétrico S_n.

Ejercicio 6. Demostrar que el conjunto $\{(1, 2, \ldots, n), (1, 2)\}$ general al grupo simétrico S_n.

Ejercicio 7. Sea $D_n = \left\langle r, s \; s^2 = r^n = 1,\ sr = r^{n-1}s \right\rangle$ el n-ésimo grupo diédrico. Demostrar que el subgrupo de D_n generado por los elementos $\{r^j s, r^k s\}$ es todo el grupo D_n siempre que $0 \leq j < k < n$ y $m.c.d.(k-j, n) = 1$.

Ejercicio 8. Demostrar que el subgrupo Q de $GS_2(\mathbb{Z}_3)$ generado por los elementos

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es isomorfo al grupo cuaternio Q_2.

Ejercicio 9. Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k$, $a^n = 1 = b^m$ con $n, m > 0$.

1. Demostrar que para todo $i = 0, \cdots, m-1$ se verifica $b^i a = ab^{ik}$.

2. Demostrar que para todo $j = 0, \cdots, n-1$ se verifica $ba^j = a^j b^{k^j}$.

3. Demostrar que para todo $i = 0, \cdots, m-1$ y todo $j = 0, \cdots, n-1$ se verifica $b^i a^j = a^j b^{ik^j}$.

4. Demostrar que todo elemento de $\langle a, b \rangle$ puede escribirse como $a^r b^s$ con $0 \leq r < n$, $0 \leq s < m$.

Ejercicio 10. Razonar que un subconjunto no vacío $X \subseteq G$ de un grupo G es un subgrupo de G si, y sólo si, $X = \langle X \rangle$.

Ejercicio 11. Sea G un grupo y $a, b \in G$ dos elementos de orden finito. ¿Es ab necesariamente de orden finito? (**Pista:** Considerar el grupo $GL_2(\mathbb{Q})$ y los elementos

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.)$$

Ejercicio 12. En el grupo S_3 se considera el conjunto

$$H := \{Id, (1,2,3), (1,3,2)\}.$$

1. Demostrar que H es un subgrupo de S_3.

2. Describir las diferentes clases de S_3 módulo H.

Ejercicio 13.

1. Demostrar que si $H \leq G$ es un subgrupo, entonces $[G : H] = |G|$ si, y s$\frac{3}{4}$lo si, $H = \{1\}$, mientras que $[G : H] = 1$ si, y s$\frac{3}{4}$lo si, $H = G$.

2. Demostrar que si se tienen subgrupos $G_2 \leq G_1 \leq G$, entonces

$$[G : G_2] = [G : G_1][G_1 : G_2],$$

3. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_{r-1} \geq G_r,$$

entonces

$$[G : G_r] = \prod_{i=0}^{r-1} [G_i : G_{i+1}].$$

4. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma
$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_{r-1} \geq G_r = 1,$$
entonces
$$|G| = \prod_{i=0}^{r-1} [G_i : G_{i+1}].$$

Ejercicio 14. Encontrar el orden de cada elemento del grupo $\mathbb{Z}_{11}^{\times}$.

Ejercicio 15. Probar que si $f : G \cong G'$ es un isomorfismo de grupos, entonces $or(a) = or(f(a))$, para todo elemento $a \in G$.

Ejercicio 16.
1. Listar los órdenes de los diferentes elementos del grupo Q_2.
2. Listar los órdenes de los elementos del grupo D_4.
3. Concluir que D_4 y Q_2 no son isomorfos.

Ejercicio 17. Sean $a, b \in G$ dos elementos de un grupo que conmutan entre sí, esto es, para los que $ab = ba$, y de manera que sus órdenes son primos relativos, esto es, $mcd(o(a), o(b)) = 1$.

1. Razonar que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$.
2. Demostrar que $o(ab) = o(a)o(b)$.

Ejercicio 18. Calcular el orden de la permutación
$$\sigma = (1\ 8\ 10\ 4)(2\ 8)(5\ 1\ 4\ 8) \in S_{15}$$

Ejercicio 19. Encontrar un grupo G y elementos $a, b \in G$ tales que sus órdenes sean primos relativos, pero para los que **no** se verifique la igualdad $o(ab) = o(a)o(b)$ del ejercicio anterior.

Ejercicio 20. Demostrar que un grupo generado por dos elementos distintos de orden dos, que conmutan entre sí, consiste del 1, de esos elementos y de su producto y es isomorfo al grupo de Klein.

Ejercicio 21. Sea G un grupo, $a, b \in G$.

1. Demostrar que el elemento b y su conjugado aba^{-1} tienen el mismo orden.
2. Demostrar que $o(ba) = o(ab)$

Ejercicio 22. Sea G un grupo y sean $a, b \in G$, $a \neq 1 \neq b$, tales que $a^2 = 1$ y $ab^2 = b^3a$. Demostrar que $or(a) = 2$ y que $or(b) = 5$.

Ejercicio 23.

1. Demostrar que si si G es un grupo de orden 4, entonces se tiene que o bien G es cíclico, o bien es isomorfo al grupo de Klein.
2. Demostrar que si G es un grupo de orden 6, entonces se tiene que o bien G es cíclico, o bien es isomorfo al grupo diédrico D_3.

Ejercicio 24. Deducir el *Teorema de Fermat*: Para todo primo p y todo entero m primo relativo con p se verifica $m^{p-1} \equiv 1\,(modp)$.

Ejercicio 25. Deducir el *Teorema de Euler*: Para todo entero positivo n y todo entero m primo relativo con n se verifica $m^{\varphi(n)} \equiv 1\,(modn)$.

Ejercicio 26. Si G es un grupo cíclico demostrar que cualquier homomorfismo de grupos $f : G \to H$ está determinado por la imagen del generador.

Ejercicio 27. Describir los retículos de subgrupos de los siguientes grupos: i) el grupo V de Klein; ii) el grupo simétrico S_3; iii) el grupo diédrico D_4; iv) el grupo cuaternio Q_2.

Ejercicio 28. Describe el retículo de subgrupos del grupo cíclico

$$C_{p^n} = \langle x |\ x^{p^n} = 1\rangle,$$

siendo p un número primo. En particular, describe el retículo de subgrupos del grupo cíclico

$$C_8 = \langle x |\ x^8 = 1\rangle.$$

Ejercicio 29. Demostrar que un grupo finito $G \neq \{1\}$ carece de subgrupos propios, esto es, que su retículo de subgrupos es

$$\begin{array}{c} G \\ \uparrow \\ \{1\} \end{array}$$

si, y sólo si, $G = C_p$ es un grupo cíclico de orden primo.

Ejercicio 30. Describir los retículos de subgrupos de los grupos cíclicos $C_6 = \langle x |\ x^6 = 1\rangle$ y $C_{12} = \langle x |\ x^{12} = 1\rangle$.

Ejercicio 31. Se considera el grupo cíclico C_{136} de orden 136, con generador t. ¿Qué relación hay entre los subgrupos $H_1 = \langle t^{48}, t^{72}\rangle$ y $H_2 = \langle t^{46}\rangle$?