Apuntes-Metodos.pdf

SAMU_APR

Métodos Numéricos Ii

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

NOTAS MÉTODOS MATEMÁTICOS II

Wuolah: SAMU_APR
samjmr@correo.ugr.es

Curso 2021-2022
Versión: 28 de Marzo, 2022

Disclaimer: Cualquier error o corrección, podeis contactarme a mi correo.

TEMA 1: Resolución Numérica de Ecuaciones

Feb. 21, 2022

1.1 ➢ Introducción

Una ecuación es una igualdad $f(x) = 0$, donde x denota la incógnita y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función (restricciones a la función vendran después). Un número $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(s) = 0$ se llama solución de la ecuación o cero o raiz de la función f.

Se dice que $s \in \mathbb{R}$ es un cero de $f(x)$ con multiplicidad $m \geq 1$ si existe $q(x)$ contínua tal que $f(x) = (x-s)^m \cdot q(x)$, $q(s) \neq 0$. Equivalentemente, si $f^{(n)}(s) = 0$ para $n < m$ y $f^{(m)}(s) \neq 0$. En el caso en el que $m = 1$ decimos que la raíz es simple.

Como ejemplo podemos poner la ecuación $3x + 5 = 7$. Aprendimos a resolver esta ecuación en el instituto: simplemente despejamos la incógnita para obtener $x = 2/3$. Sin embargo este procedimiento no es válido para otras ecuaciones como $xe^x = 3$. En estos casos vamos a buscar el valor numérico de la solución, o al menos una aproximación a la solución.

Fijemonos ahora en la ecuación $x^2 - 5 = 0$, cuya solución sabemos que es $\sqrt{5}$. Sin embargo, si no sabemos el valor numérico de la raíz de 5, de poco nos sirve resolver la ecuación de esta manera, pero podemos utilizar otros métodos para encontrar un valor numérico aproximado. Usando el teorema de Bolzano sabemos que debe estar entre 2 y 3, pues $f(2) \cdot f(3) < 0$ (donde $f(x) = x^2 - 5$ en este caso). Una posible aproximación sería tomar el valor intermedio del intervalo, 2.5. De nuevo, la solución debe estar entre 2 y 2,5, y podemos tomar de nuevo el valor intermedio. Este proceso, llamado **método de bisección**, es muy lento: en 10 iteraciones obtenemos la aproximación 2.2353515625, solo dos dígitos correctos.

Ahora, en vez de coger el punto medio del intervalo, vamos a empezar con un valor y el siguiente lo obtendremos usando la fórmula $\frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$. Si tomamos el primer valor 2, obtendríamos la siguiente sucesión:

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.25, \quad x_2 = 2.236\overline{1}, \quad x_3 = 2.236067977\ldots, \quad x_4 = 2.23606797749979\ldots$$

Comparando x_4 a la solución $\sqrt{(5)}$, vemos que tiene más de 12 decimales correctos, y solo hemos hecho 4 iteraciones! Este método se conoce como **método de Newton-Raphson**.

Si queremos usar un método para obtener una solución numérica aproximada a una ecuación, lo que obtendremos será una sucesión $\{x_n\}$ que converge a la solución L. Nos interesará estudiar la velocidad de convergencia, lo rápido o lento que llegamos a una solución aproximada con una determinada precisión. En vez de estudiar la sucesión $\{x_n\}$ podemos considerar la sucesión de errores $\{e_n\} = \{|x_n - L|\} \to 0$ y estudiar la velocidad de convergencia de esta nueva sucesión.

Una sucesión positiva $\{e_n\} \to 0$ tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c$, con $c \neq 0, \infty$. A la constante c la denotaremos la **constante asintótica del error**. La convergencia de menor orden, $p = 1$, la denotamos convergencia lineal, mientras que la convergencia de orden $p = 2$ será convergencia cuadrática.

- Ejemplo -

ORDEN DE CONVERGENCIA $p = 1$

Sea $x_n = 1 + 10^{-n}$. Claramente $\{x_n\} \to 1$, luego la sucesión de errores es $e_n = |x_n - 1| = 10^{-n}$.

$$c = \lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim \frac{10^{-(n+1)}}{10^{-n}} = \frac{1}{10}$$

Ya que $c \neq 0, \infty$ podemos concluír que la sucesión $\{e_n\}$ tiene orden de convergencia $p = 1$.

Ejercicio. Probar que las sucesiones $x_n = 1 + 10^{-2n}$ y $x_n = 1 + 10^{-\frac{n}{2}}$ tienen orden de convergencia $p = 1$.

ORDEN DE CONVERGENCIA $p = 2$

Sea $x_n = 1 + 10^{-2^n}$. Al igual que antes tenemos $\{x_n\} \to 1$, luego $e_n = 10^{-2^n}$ y

$$c = \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim \frac{10^{-2^{n+1}}}{(10^{-2^n})^2} = 1$$

En este caso concluímos que la sucesión de errores tiene orden de convergencia $p = 2$.

1.2 ➢ Métodos de Resolución Numérica de Ecuaciones

Método de Bisección. Dado un intervalo $[a, b]$ y una función contínua f tal que $f(a)f(b) < 0$, sabemos por Bolzano que debe de haber una solución en el intervalo. Tomamos ahora el punto medio del intervalo, $m = \frac{a+b}{2}$, y nos quedamos con la mitad izquierda si $f(a)f(m) < 0$ y con la mitad derecha si $f(m)f(b) < 0$. Repetimos el proceso a partir de este nuevo intervalo, obteniendo el punto medio y descartando una mitad. (orden de convergencia lineal, $p = 1$)

Feb. 23, 2022

Método de Regula Falsi. Se toma un intervalo $[a, b]$ y una función contínua, tal que $f(a)f(b) < 0$, luego sabemos que hay una solución a $f(x) = 0$ en el intervalo. Tomamos ahora un punto dentro del intervalo, $m = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$. Notemos la diferencia con el método de bisección. Continuamos de manera similar al método de bisección.

Método de la Secante. Este método no se basa en intervalos ni cambios de signos, sino en iteraciones. Cada iteración está definida por $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$, dados siempre dos valores x_0, x_1 (orden de convergencia superlineal, $p = \varphi$).

Método de Newton-Raphson. Este método es similar al de la secante, donde las iteraciones vienen dadas por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. (orden de convergencia cuadrático, $p = 2$)

- Ejemplo -

Apliquemos el método de Newton-Raphson a la función $f(x) = x^2 - 5$. Entonces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 5}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{5}{x_n}}{2}$$

Teorema de Convergencia Global de N-R

Dada la ecuación $f(x) = 0$, con $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ verificando

[1] $f(a)f(b) < 0$

[2] $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

[3] $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$

[4] $max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b-a$

Entonces,

1. $\exists! s \in [a,b]$ tal que $f(s) = 0$
2. El método de N-R converge a s para todo $x_0 \in [a,b]$
3. El orden de convergencia es $p \geq 2$

- Dem -

El primer punto es trivial a partir de las condiciones [1] y [2]. Para los siguientes definimos $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, y por tanto $x_{n+1} = g(x_n)$. Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Vamos a demostrar que si $x_0 \in [a,b]$, entonces $x_1 \in [a,b]$. Supongamos que $f'(x) > 0$ y $f''(x) \geq 0$ en $[a,b]$. Así, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, y f' es no decreciente.

Mar. 02, 2022

- **Caso $a \leq x_0 < s$.** Por las suposiciones, g decrece en $[a,s[$. Entonces, como $a \leq x_0 < s$ tenemos que $g(a) \geq g(x_0) \geq g(s)$ y por tanto

$$s \leq x_1 \leq a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq b$$

donde hemos usado [4] en la última desigualdad.
- **Caso** $s < x_0 \leq b$ Por las suposiciones, g crece en $]s,b]$. Encontes, similar a antes tenemos $g(s) \leq g(x_0) \leq g(b)$ y

$$s \leq x_1 \leq b - \frac{f(a)}{f'(b)} \leq b$$

- **Caso** $x_0 = s$ Trivial $(x_n = s, \forall n)$

De aquí podemos deducir que toda la sucesión (salvo quizás x_0) está en la mitad derecha, pero no sabemos nada aún acerca de la convergencia. Para esto tomemos $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} < x_{n-1}$$

Obtenemos así una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente (por la solución s en nuestro caso), luego tiene límite. Veamos que este límite es la solución. Definimos el límite $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = s' \in [s,b]$. Entonces,

$$x_{n+1} = g(x_n) \implies s' = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(s')$$

Luego $f'(s') = 0$, y por ser única la raíz, concluímos que $\lim_{n\to\infty} x_n = s' = s$. Los demás casos $(f' < 0, f'' < 0)$ son equivalentes.

Vamos a demostrar ahora que el orden de convergencia es cuadrático. La sucesión de errores

viene dada por $e_n = x_n - s$. Entonces,

$$e_{n+1} = x_{n+1} - s = x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \frac{f(s) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \frac{f''(c_n)e_n^2}{2f'(x_n)}, \qquad c \in [s, x_n] \qquad \text{(Taylor, orden 2)}$$

$$\implies \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Cuando $n \to \infty$, $x_n \to s$ y por tanto $c_n \to s$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(s)}{f'(s)} \implies \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| \neq \infty$$

Tenemos así que el orden de convergencia es $p = 2$, salvo en el caso cuando $f''(s) = 0$, donde el orden de convergencia sería $p > 2$.

■

Ejercicio. Demostrar que la ecuación $x^2 - r = 0$ en el intervalo $[a, b]$, con $a, b > 0$, cumple las condiciones del teorema para a suficientemente pequeño y b suficientemente grande.

Relajación del TCG de N-R

En ausencia de la condición [4] del TCG de N-R, basta con que x_0 cumpla $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Teorema de Convergencia Local de N-R

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$, siendo I un entorno abierto de una raíz simple de f. Entonces $\exists I_\varepsilon = [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subseteq I$ tal que se cumple el TCG en I_ε.

En el caso de que la raíz no sea simple, no se cumplen los teoremas ya enunciados, pero el método de N-R sigue funcionando, aunque perderíamos la convergencia cuadrática. La velocidad cuádratica la podemos recuperar de la siguiente manera: Si s es una raíz de f con multiplicidad m, consideramos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En la práctica, esté método no es viable ya que no siempre conocemos la multiplicidad de una raíz. En este caso tenemos otro truco. Definimos $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Esta nueva función tiene las mismas raíces de f, todas simples. Aplicamos entonces el método de N-R a la función μ,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Para que esto funcione, debemos pedirle a f ser de clase (al menos) 3 para que $\mu \in \mathcal{C}^2$.

Mar. 07, 2022

Aunque el método de Newton-Raphson tiene muchas ventajas, hay casos en los que no es aplicable. En la industria hay veces en las que se trabaja con funciones sin una expresión cerrada, o incluso solo conocida para ciertos valores. Esto implica que el conocimiento del valor de la derivada puede ser imposible o impractico. En estos casos, el método de la secante puede ser de gran utilidad. Podemos derivar el método de la secante a partir del de N-R, aproximando la derivada como

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$$

Utilizando esta expresión en la fórmula para el método de N-R obtenemos la fórmula para el método de la secante.

Teorema de la Convergencia Local (secante)

Dado $f(x) = 0$, con $f \in \mathcal{C}^2(I)$, I un entorno de s, raíz simple, entonces $\exists I_\varepsilon =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$ tal que la sucesión generada por el método de la secante converge a la solución

$$\{x_n\} \overset{(secante)}{\to} s, \qquad \forall x_0 \in I_\varepsilon$$

con orden de convergencia $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ejercicio. Deducir de la expresión de abajo que el orden de convergencia es el número áureo φ. Es decir,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} \to \frac{1}{2}\frac{f''(s)}{f'(s)} \quad \Longrightarrow \quad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^{\varphi}} = c \neq 0, \infty$$

Si queremos encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = x^3 + 9x + 9 = 0$, podemos transformar el problema en otro de encontrar el punto fijo de otra función. Podemos depejar la x de varias maneras:

$$0 = x^3 + 9x + 9 \qquad \Longrightarrow x = -\frac{x^3}{9} - 1 =: g_1(x)$$

$$0 = x^3 + 9x + 9 = x(x^2+9) + 9 \qquad \Longrightarrow x = -\frac{9}{x^2+9} =: g_2(x)$$

$$0 = x^3 + 9x + 9 = x(x^2 + 9 + \frac{1}{x}) \qquad \Longrightarrow x = \sqrt{-\frac{9}{x} - 9} =: g_3(x)$$

$$0 = x^3 + 9x + 9 = x \cdot 3(x^2+3) - 2x^3 + 9 \qquad \Longrightarrow x = \frac{2x^3 - 9}{3(x^2+3)} =: g_4(x)$$

Cada una de las cuatro funciones definidas satisface que $g(s) = s \iff f(s) = 0$, luego podemos definir el proceso iterativo

$$x_{n+1} = g_i(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde a g_i la denotamos **función generatriz**. Queremos estudiar cuando este proceso converge a la solución, es decir, si $\{x_n\}$ es la sucesión que obtenemos por medio de una función generatriz, queremos ver cuando $\{x_n\} \to s$, con s punto fijo. Veamos las tres primeras iteraciones de las sucesiones generadas por g_1, g_2, g_3 y g_4.

n	g_1	g_2	g_3	g_4
0	-1	-1	-1	-1
1	$-0.\overline{8}$	-0.9	0	$-0.91\overline{6}$
2	-0.9219162	-0.917431	$\nexists$	-0.914909
3	-0.912924	-0.914778		-0.914908
$\vdots$				

Parece ser que g_1, g_2 y g_3 están convergiendo a un valor alrededor de -0.914908, mientras que g_3 no existe para $n \geq 2$ por dividir por 0. También podemos notar que g_3 parecer ser la que converge más rápido.

Por tanto, para resolver una ecuación podemos cambiar el problema de encontrar una raíz a otro de encontrar puntos fijos. Esto da lugar a la necesidad del siguiente teorema del punto fijo, pero primero una definición.

Def. Una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ cumpliendo $|g(x) - g(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in [a,b]$, se dice **lipschitziana**. Si $L < 1$, decimos que g es **contráctil** (contractiva).

Teorema del Punto Fijo

Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ contráctil con constante L. Entonces,

1. $\exists! s \in [a,b] : g(s) = s$.
2. El método $x_{n+1} = g(x_n)$ produce una sucesión $\{x_n\} \to s$, $\forall x_0 \in [a,b]$.
3. Los errores $e_n = x_n - s$ satisfacen $|e_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$.

- Dem -

1. Para la existencia, consideramos la función $f(x) = g(x) - x$, claramente contínua. Entonces,

$$f(a) = g(a) - a \geq a - a = 0, \qquad f(b) = g(b) - b \leq b - b = 0$$

donde hemos usado que $g(a), g(b) \in [a, b]$. Por tanto, hay un cambio de signo en $[a, b]$ y por Bolzano debe existir una raíz de f, es decir, $s \in [a, b]$ tal que $f(s) = g(s) - s = 0 \implies g(s) = s$. Para la unicidad vamos a usar la contractividad. Si s y s' son dos puntos fijos distintos de g, entonces,

$$|s - s'| = |g(s) - g(s')| \leq L|s - s'| < |s - s'|$$

Luego $|s - s'| < |s - s'|$, que es una contradicción, y queda demostrada la unicidad del punto fijo.

2. Dado $x_0 \in [a, b]$, $e_0 = x_0 - s$. Entonces $|e_1| = |g(x_0) - g(s)| \leq L|x_0 - s| = L|e_0|$. Repitiendo el proceso obtenemos

$$|e_n| \leq L^n|e_0| \to 0$$

3. Notemos que $|x_0 - s| \leq |x_1 - x_0| + |x_1 - s| \leq |x_1 - x_0| + L|x_0 - s|$. Entonces, $|x_0 - s| \leq \frac{1}{1-L}|x_1 - x_0|$ y utilizando **2** obtenemos la cota esperada.

■

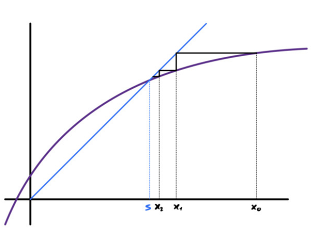
Sin embargo, la utilidad de este teorema depende de si sabemos encontrar la constante L. Podemos substituir la condición de contractividad por que la función g sea de clase $\mathcal{C}^1$ y $|g'(x)| \leq L < 1$, $\forall x \in [a, b]$. El siguiente paso es enunciar un teorema de carácter local.

Teorema de Convergencia Local

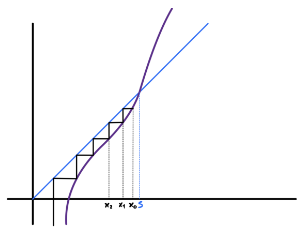
Sea $g \in \mathcal{C}^1(I)$, con I un entorno de una solución s tal que $|g'(s)| < 1$. Entonces $\exists I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ tal que $\forall x_0 \in I_\varepsilon$ se cumple $\{x_n\} \to s$ y todas los resultados del teorema del punto fijo.

Visualmente, dada una función g, la sucesión dada por el teorema del punto fijo hace lo siguiente. Partiendo de una semilla x_0, hacemos una línea vertical pasando por x_0 hasta intersecar con la gráfica de g en el punto $(x_0, g(x_0))$. Después hacemos una línea horizontal pasando por este punto hasta intersecar con el primer bisector, la recta $y = x$, en el punto $(g(x_0), g(x_0))$. La coordenada de abcisas nos da el siguiente elemento de la sucesión x_1, y repetimos el proceso.

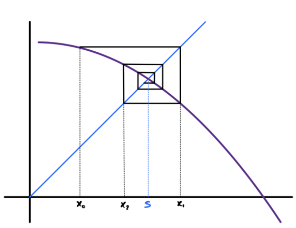
$0 < g'(s) < 1$: **Convergencia en escalera.**



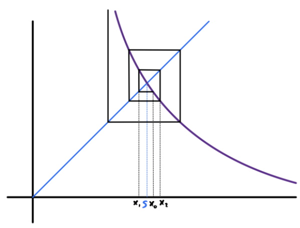
$1 < g'(s)$: **Divergencia en escalera.**



$-1 < g'(s) < 0$: **Convergencia en espiral.**



$g'(s) < -1$: **Divergencia en espiral.**



En cualquier método iterativo, si g es suficientemente derivable,

$$x_{n+1} - s = g(x_n) - g(s) = g'(c_n)(x_n - s) \implies e_{n+1} = g'(c_n)e_n \implies \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n)$$

Pasando al límite obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(s)$$

Es decir, si la convergencia es lineal entonces la velocidad de convergencia es $g'(s)$. Si $g'(s) = 0$, el orden de convergencia es $p > 1$ y mediante Taylor obtenemos

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}g''(c_n)$$

Y tomando límites obtenemos de nuevo la velocidad de convergencia.

Teorema (Orden de Convergencia)

Sea $g \in \mathcal{C}^p(I)$, con I un entorno de una solución s de g, tal que $g'(s) = g''(s) = \cdots = g^{(p-1)}(s) = 0$ y $g^{(p)}(s) \neq 0$. Entonces, para x_0 suficientemente próximo a s, la sucesión generada converge con orden de convergencia p, y además la constante asintótica del error es

$$c = \frac{1}{p!}\left|g^{(p)}(s)\right|$$

Aceleración de Aitken

Def. Dada una sucesión $\{x_n\}$, se define el operador $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. A este operador se le conoce como operador de diferencia progresiva. A partir de este operador construímos una nueva sucesión $\{\hat{x}_n\}$, que llamaremos **sucesión acelerada**, de manera que cada nuevo término de la sucesión acelerada se construye a partir de la sucesión no acelerada como

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}}$$

donde asumimos linealidad del operador Δ ($\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$).

Un método equivalente que podemos encontrar en ciertos libros es definir la sucesión acelerada como

$$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

Teorema de Aceleración de Aitken

Dada una sucesión $\{x_n\} \to s$, la sucesión $\{\hat{x}_n\} \to s$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{e}_n}{e_n} = 0$$

Como una variación de este método se encuentra el **método de Steffensen**. Dada una función generatriz g y partiendo de una semilla x_0, obtenemos los siguientes valores $x_1 = g(x_0)$ y $x_2 = g(x_1)$. Podemos calcular entonces el primer término de la sucesión acelerada $\hat{x}_0$. Aquí es donde el proceso difiere del de Aitken. En vez de calcular $x_3 = g(x_2)$ y $\hat{x}_1$, notamos que $\hat{x}_0$ está más cerca de la solución que x_2, luego continuamos la sucesión calculando $\hat{x}_1 = g(\hat{x}_0)$ y $\hat{x}_2 = g(\hat{x}_1)$, y de nuevo podemos calcular el primer término de la sucesión acelerada de $\{\hat{x}_n\}$ (no de la sucesión $\{x_n\}$), $\hat{\hat{x}}_0$.

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \implies \hat{x}_0 \to \hat{x}_1 \to \hat{x}_2 \implies \hat{\hat{x}}_0 \to \hat{\hat{x}}_1 \to \hat{\hat{x}}_2 \implies \hat{\hat{\hat{x}}}_0 \to \dots$$

En este método únicamente necesitamos usar la fórmula de la sucesión acelerada una vez cada tres términos en vez de despues de cada término, lo que simplifica los cálculos.

1.3 ➤ Teoría de Sturn

Una ecuación polinómica es una ecuación de la forma $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio.

Teorema de Acotación de Raíces

Sea $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio, con $a_k \neq 0$. Entonces, toda raíz s del polinomio verifica

$$|s| \leq 1 + \alpha, \qquad \alpha = \max_{i=0,\ldots,k} \left| \frac{a_i}{a_k} \right|$$

Ejemplo. Consideremos el polinomio $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 28$. Entonces todas las soluciones se encuentran en el intervalo $[-29, 29]$

- Dem -

Toda raíz $s \in \mathbb{R}$ de $p(x)$ satisface $a_k s^k + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$. Despejando el término s^k obtenemos

$$s^k = -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{a_k} s^j$$

Tomando valor absoluto y usando la desigualdad triangular obtenemos

$$|s|^k \leq \sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{a_j}{a_k} \right| |s|^j \leq \alpha \sum_{j=0}^{k-1} |s|^j = \alpha \frac{|s|^k - 1}{|s| - 1}$$

Asumiendo que $|s| \neq 1$. Si $|s| > \alpha + 1$,

$$|s|^k \leq \alpha \frac{|s|^k - 1}{|s| - 1} < |s|^k - 1$$

Llegamos a una contradicción, luego $|s| \leq 1 + \alpha$.

Por último, si $|s| = 1 \implies |s| \leq 1 + \alpha$ $(\alpha \geq 0)$.

■

Def. Una sucesión de funciones $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{C}[a, b]$ es una **sucesión de Sturn** en $[a, b]$ si

1. $f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$
2. Para cualquier $s \in [a, b]$ tal que $f_0(s) = 0$, $f_0'(s) f_1(s) > 0$
3. Para cualquier $s \in [a, b]$ tal que $f_j(s) = 0$ (con $0 < j < m$), $f_{j-1}(s) f_{j+1}(s) < 0$
4. $f_m \not\equiv 0$ en $[a, b]$

Teorema de Sturn

Sea $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ una sucesión de Sturn en $[a, b]$. Entonces el número de raíces de f_0 en $[a, b]$ es la diferencia de cambios de signos entre

$$\{f_0(a), f_1(a), \ldots, f_m(a)\} \quad \text{y} \quad \{f_0(b), f_1(b), \ldots, f_m(b)\}$$

- Ejemplo -

Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} f_0 &= 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 3 \\ f_1 &= 10x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4x - 6 \\ f_2 &= 21x^3 - 12x^2 + 59x - 36 \\ f_3 &= 115x^2 - 48x + 9 \\ f_4 &= -185171x + 118188 \\ f_5 &= -cte \end{aligned}$$

La sucesión $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ es una sucesión de Sturn para cualquier intervalo $[a, b]$ (veremos más tarde cómo se construyen). Usando el teorema de acotación de raíces sabemos que todas las raíces reales de f_0 se encuentran en el intervalo $[-4, 4]$. Para ver el número de raíces reales en el intervalo, evaluamos la sucesión en - 4 y 4. Obtenemos así que en -4 hay 4 cambios de signo, mientras que en 4 hay solo 1 cambio de signo, luego la diferencia es 3 y por tanto f_0 tiene 3 raíces reales en el intervalo $[-4, 4]$ (y ninguna fuera del intervalo).

Si evaluamos en 0 obtenemos 3 cambios de signos, luego tenemos 1 raíz en $[-4, 0]$ y 2 raíces en $[0, 4]$. Evaluando esta vez en 2 obtenemos un único cambio, luego las 2 raíces del intervalo se encuentran en $[0, 2]$. Una vez más, si evaluamos en 1 obtenemos 2 cambios de signos. Podemos concluír que las raíces se encuentran en los intervalos

$$[-4, 0], \ [0, 1] \ [1, 2]$$

Construcción de una Sucesión de Sturn. Dado un polinomio $p(x)$, definimos $f_0 = p$, $f_1 = p'$, y para $k > 1$, f_k es el resto de dividir f_{k-2} por f_{k-1} cambiado de signo (utilizando el algoritmo de Euclídes). Terminamos la sucesión al obtener resto nulo, que se descarga. Y, si el último término de la sucesión no nulo es constante, hemos obtenido una sucesión de Sturn. En caso contrario, ese último resto es un polinomio que contiene todas las raíces del original con una multiplicidad menos. Así no obtenemos una sucesión de Sturn, pero podemos considerar la sucesión

$$\left\{ \frac{f_0}{f_m}, \frac{f_1}{f_m}, \dots, \frac{f_m}{f_m} \right\}$$

es una sucesión de Sturn, donde f_m es el último resto no nulo.

Mar. 14, 2022

1.4 ➤ Ecuaciones en Varias Variables: Sistemas de Ecuaciones

Consideramos una igualdad del tipo $F(X) = 0$, con $F : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Vamos a suponer que nuestro dominio $D = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$. Podemos ver esta ecuación en varias variables como un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k) = 0 \\ f_2(x_2, \dots, x_k) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_k) = 0 \end{cases}$$

donde $F(X) = (f_1(X), \dots, f_k(X))$.

Es complicado generalizar los métodos que vimos para una variable en varias variables. Para el método de bisección, no tiene sentido el punto medio de D. Nuestra estrategia por tanto se basará en teoremas de punto fijo. Si buscamos soluciones de la ecuación $F(X) = 0$, vamos a transformar la ecuación a una equivalente de la forma $X = G(X)$. Equivalentemente, si $G(X) = (g_1(X), \dots, g_k(X))$, queremos transformar el sistema de ecuaciones en otro equivalente de la forma

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, \dots, x_k) \\ x_2 = g_2(x_1, \dots, x_k) \\ \qquad \vdots \\ x_k = g_k(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

- Ejemplo -

Consideremos el sistema

$$x_x^2 y - 10 = 0$$
$$3xy^2 + y - 57 = 0$$

Podemos transformar este sistema en el siguiente

$$x = g_1(x,y) = \frac{10}{x+y}$$
$$y = g_2(x,y) = 57 - 3xy^2$$

El siguiente paso será considerar un proceso iterativo y encontrar una sucesión generada mediante tal proceso que converja a la solución.

El sistema tiene una solución en el dominio $D = [1,3] \times [2,4]$, particularmente en $S = (2,3)$. Consideremos el proceso iterativo

$$x^{(n+1)} = \frac{10}{x^{(n)}+y^{(n)}}$$

Las cuatro primeras iteraciones son

n	x	y
1	2.10	2.90
2	2.00	4.02
3	1.66	−39.82
4	−0.26	–

El proceso claramente no converge a la solución, pero era de esperar pues, aunque el proceso lo hemos obtenido con puntos fijos en mente, la forma en la que lo hemos obtenido ha sido algo aleatoria.

Teorema de Convergencia Global

Sea $G : D \to D$ verificando que para alguna norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^k$,

$$\|G(X) - G(Y)\| \leq L\|X - Y\|, \quad \forall X, Y \in D$$

con $0 \leq L < 1$. Entonces,

1. $\exists! S \in D : G(S) = S$
2. $X^{(n+1)} = G(X^{(n)})$ produce una sucesión $\{X^{(n)}\} \to S$, $\forall X^{(0)} \in D$. Recordemos que

$$\{X^{(n)}\} \to S \iff \lim_{n\to\infty} \|X^{(n)} - S\| = 0$$

3. Los errores $E^{(n)} = X^{(n)} - S$ satisfacen $\|E^{(n)}\| = \frac{L^n}{1-L}\|X^{(1)} - X^{(0)}\|$

Similar al caso de una variable, podemos relajar la condición de contractibilidad a que la derivada este acotada (en norma) por 1. Es decir, si $G \in \mathcal{C}^1$, podemos sustituir la contractibilidad por la condición $\|G'(X)\| \leq L < 1$, o equivalentemente,

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \leq \frac{L}{k} < \frac{1}{k}, \quad \forall i, j$$

En este resultado G' denota el jacobiano de la matriz G, y si $|\cdot|$ es una norma vectorial, $\|\cdot\|$ es una norma matricial compatible con la norma vectorial. Esta norma matricial se define como

$$\|A\| = \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^k, |x| = 1\} = \sup\left\{\frac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{R}^k\right\}$$

Teorema de Convergencia Local

Sea $G : D \to D$ de clase $\mathcal{C}^1(I)$, con I un entorno de un punto fijo S de G, tal que $\|G'(S)\| < 1$. Entonces $\exists I_\varepsilon \subseteq I$ donde el método

$$X^{(n+1)} = G(X^{(n)})$$

converge a S, $\forall X^{(0)} \in I_\varepsilon$.

Método de Newton-Raphson para Varias Variables

Dada una ecuación vectorial $F(X) = 0$ y una semilla $X^{(0)}$, podemos considerar el siguiente método iterativo, similar al de Newton-Raphson para una variable

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - J^{-1}(X^{(n)}) \cdot F(X^{(n)})$$

Sin embargo, no es práctico calcular la matriz inversa del jacobiano en cada iteración. Luego podemos considerar la ecuación equivalente

$$J(X^{(n)}) \cdot (X^{(n)} - X^{(n+1)}) = F(X^{(n)})$$

Denotando $Y^{(n)} := X^{(n)} - X^{(n+1)}$ obtenemos el sistema lineal

$$J(X^{(n)}) \cdot Y^{(n)} = F(X^{(n)})$$

donde la única incognita aquí es $Y^{(n)}$. Usando métodos que ya sabemos podemos resolver este sistema lineal y entonces $X^{(n+1)} = X^{(n)} - Y^{(n)}$.

- Ejemplo -

Volvemos al sistema que vimos antes,

$$\begin{aligned} x_x^2 y - 10 &= 0 \\ 3xy^2 + y - 57 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyo jacobiano sería

$$J = \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 3y^2 & 6xy + 1 \end{pmatrix}$$

Partimos de la semilla $X^{(0)} = (1.5, 3.5)$,

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2.0360 \\ 2.8438 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1.9987 \\ 3.002288 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1.99999998 \\ 2.99999941 \end{pmatrix} \to \dots$$

La sucesión converge (bastante rápido) a la solución $(2, 3)$.

TEMA 2: Derivación e Integración Numérica

Mar. 21, 2022

Nuestro objetivo es calcular de forma numérica el valor de una derivada de una función en un punto, o la integral en un intervalo. Para ello vamos a olvidarnos de lo aprendido en cuanto a derivar e integrar, pues manipulaciones algebráicas no van a estar permitidas. Similar a los métodos de resolución de ecuaciones, vamos a necesitar desarrollar métodos de derivación e integración para funciones que no necesariamente sepamos su expresión, lo que haría imposible su manipulación algebráica para el cálculo de derivadas e integrales.

- Ejemplo -

En el caso de la derivada en un punto podemos pensar en usar la definición sin hacer uso del límite, es decir, aproximar la derivada de f en c por la expresión

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

que debería ser más precisa para valores pequeños de h. Sin embargo, consideremos la función $f(x)=x^2$. Sabemos que $f'(1)=2$, y para $h=10^{-3}$ la expresión nos da el valor 2.001, bastante cercano al valor actual. Pero si tomamos $h=10^{-20}$, dependiendo de la mantisa de la calculadora usada puede aproximarse $1+h\simeq 1$ y la expresión nos daría un valor aproximado de 0, lo cual no es cierto.

Def. Un **funcional lineal** (o forma lineal) sobre un espacio vectorial $\mathcal{F}$ es una aplicación $L:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ verificando

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g), \qquad f,g\in\mathcal{F},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

- Ejemplo -

1. Los ejemplos más conocidos y con los que vamos a trabajar más en este tema son

- Sea $\mathcal{F}=\{\text{funciones derivables en } c\}$. Entonces $L(f)=f'(c)$ es una forma lineal.
- Sea $\mathcal{F}=\{\text{funciones integrables en } [a,b]\}$. Entonces $L(f)=\int_a^b f(x)dx$ es una forma lineal.

Aunque solo nos interese el estudio de estos dos tipos de funcionales, la teoría que vamos a desarrollar podrá ser aplicada de forma mucho más general a funcionales lineales.

2. Consideremos los siguientes funcionales:

- $L_0(f)=3f'''(0)$
- $L_1(f)=f(7)$
- $L_2(f)=f'(-2)$
- $L_3(f)=\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$
- $L_4(f)=\int_{-2}^2 |x|f(x)dx$
- $L_5(f)=\int_1^3 (f(x^2)+2f''(x))dx$
- $L_6(f)=f(4)-2f'(4)+3f''(2)+\pi\int_{-1}^1 f(x)dx$

Todas los funcionales son lineales. Sin embargo, no todo funcional es lineal. Por ejemplo,

- $L_1(f) = \int_0^1 f^2(x)dx$
- $L_2(f) = \sqrt{f(7)}$
- $L_3(f) = f(2) \cdot f'(-2)$
- $L_4(f) = \int_1^3 (f(x^2) + 2f''(x))^2 dx$
- $L_5(f) = f(4) - 2f'(4) + 3f''(2) + \pi \int_1^3 f(x)dx + 2$

Def. Dadas las formas lineales $L_i : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, con $i = 0, \ldots, n$, una **fórmula numérica** para aproximar $L(f)$ es

$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(f) + R(f), \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

donde $R(f)$ se denota **término de error** (o residuo). Podemos omitir este término utilizando un símbolo de aproximación en vez de una igualdad:

$$L(f) \simeq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(f)$$

Al funcional L lo denotaremos **función objetivo**, mientras que a los L_i los denotaremos **datos** y a los α_i, **pesos**.

Como ejemplo, podemos considerar la aproximación de la derivada

$$f'(c) \simeq \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{1}{h} f(c+h) - \frac{1}{h} f(c)$$

que es una fórmula numérica. A los argumentos $c + h$ y c de la función f los llamamos **nodos**.

[hablar de interpolación??]

Def. A una fórmula numérica la diremos de **tipo interpolatorio** (t.i.) si es exacta para funciones dentro de un cierto espacio, denotado **espacio de interpolación**.

- Ejemplo -

1 La fórmula de aproximación de la derivada es exacta para las funciones constantes, puesto que si f es constante, $f(c+h) - f(c) = 0$ y por tanto $f'(c) \simeq 0$, lo cual es cierto. Además, es exacta para $f(x) = x$ por el mismo razonamiento. Esto demuestra que la fórmula

$$f'(c) \simeq \frac{1}{h} f(c+h) - \frac{1}{h} f(c)$$

es exacta en el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1, $\mathbb{P}_1$.

2 Queremos que encontrar $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ para que la fórmula numérica

$$f'(0) \simeq \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2)$$

de tipo interpolatorio en $\mathcal{P}_2$.

$$\begin{array}{rl} \text{Exacta en } 1: & 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ \text{Exacta en } x: & 1 = \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \text{Exacta en } x^2: & 0 = \qquad \alpha_1 + 4\alpha_2 \end{array}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $\alpha_0 = -\frac{3}{2}$, $\alpha_1 = 2$, y $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Por tanto, la fórmula

$$f'(0) \simeq -\frac{3}{2} f(0) + 2f(1) - \frac{1}{2} f(2)$$

es de tipo interpolatorio.

Si el espacio de interpolación son las funciones polinomicas de grado $\leq n$, $\mathbb{P}_n$, y los datos son de la forma $L_i(f) = f(x_i)$ estaremos trabajando con una fórmula de **tipo de interpolación clásico**. El **grado de exactitud** de un espacio de interpolación clásico es el mayor grado de los polinomios del espacio.

Mar. 23, 2022

Problema General de Interpolación

Dadas $L_i : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, y una función $f \in \mathcal{F}$, el PGI consiste en encontrar $p \in V \subseteq \mathcal{F}$ tal que $L_i(f) = L_i(p), \forall i$. El error de interpolación se define como $E = f - p$.

Cuando el subespacio vectorial V es el espacio de polinimios $\mathbb{P}_n$, estaremos trabajando con el problema de interpolación polinomial. Además, si $L_i(f) = f(x_i)$ para todo i, estaremos trabajando con el problema de interpolación polinomial lagrangiano.

Diremos que la fórmula numérica es de **tipo interpolatorio** si

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(f) = L(p) \iff L(f) = L(p) + R(f)$$

Usando el error de interpolación tenemo

$$f = p + E \implies L(f) = L(p) + L(E)$$

Por tanto, $R(f) = L(E)$, es decir, el término de error $R(f)$ de una fórmula de t.i. es la forma lineal objetivo L aplicada al error interpolatorio E.

Una forma interpolatoria se dice **exacta** para f cuando $R(f) = 0$. Si el espacio interpolatorio es de polinomios, decimos que la forma interpolatoria es **exacta de grado** n si es exacta para $1, x, x^2, \ldots, x^m$ y $R(x^{m+1}) \neq 0$.

2.1 ➤ Derivación Numérica

Una fórmula interpolatoria para la derivada en un punto a se obtiene usando los datos lagrangianos,

$$f'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$$

El problema interpolatorio polinomial asociado a esta fórmula es el mismo problema de encontrar $p \in \mathbb{P}_n$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$, $\forall i$. Para resolver este problema, recordamos la fórmula de Lagrange para interpolación:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

donde los $l_i(x)$ se conocen como los polinomios fundamentales de Lagrange. Estos polinomios satisfacen que $\forall i, j$,

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La derivada de la fórmula de Lagrange en un punto a es

$$p'(a) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i'(a)$$

Tenemos entonces que $f'(a) = p'(a) + R(f)$, y comparando la fórmula numérica con esta igualdad nos damos cuenta de que los pesos deben ser las derivadas de los polinomios fundamentales de Lagrange, es decir,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i'(a) + R(f) \implies \alpha_i = l_i'(a)$$

- Ejemplo -

Queremos encontrar una fórmula numérica para aproximar el valor de la derivada de f en 0 usando como datos el valor de la función en los puntos -1, 0 y 1. El primer método que vamos a usar es calculando los pesos usando la fórmula de Lagrange. La fórmula numérica tiene la forma

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + R(f)$$

Usando lo que hemos obtenido anteriormente, los pesos deben ser $\alpha_i = l_i'(0)$,

$$l_0(x) = \frac{x-0}{-1-0}\cdot\frac{x-1}{-1-1} \implies l_0'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$l_1(x) = \frac{x+1}{0+1}\cdot\frac{x-1}{0-1} \implies l_1'(0) = 0$$

$$l_2(x) = \frac{x+1}{1+1}\cdot\frac{x-0}{1-0} \implies l_2'(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la fórmula quedaría

$$f'(0) = -\frac{1}{2}f(-1) + 0f(0) + \frac{1}{2}f(1) + R(f) \simeq \frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

Un método alternativo es buscando una fórmula exacta en $\mathbb{P}_2$. Para ello tenemos que resolver el sistema con matriz asociada

$$A \mid b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema es $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, que es exactamente lo que obtuvimos anteriormente.

La matriz asociada a este problema con n datos es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

donde los datos son el valor de la función en los puntos $x_1, \dots, x_n$. Una matriz de este tipo se le conoce como **matriz de Vandermonde** y es un ejemplo de un problema mal condicionado. Por esta razón no es aconsejable usarla para resolver problemas de interpolación, pues pequeños errores de cálculos y aproximaciones pueden convertirse en grandes errores en la solución.

Un tercer método a usar es usando el desarrollo en serie de Taylor.

$$\begin{array}{ccccccccc} f(-1) & = & f(0) & - & 1f'(0) & + & \frac{1}{2}f''(0) & - & \frac{1}{6}f'''(c_1) \\ f(0) & = & f(0) & & & & & & \\ f(1) & = & f(0) & + & 1f'(0) & + & \frac{1}{2}f''(0) & + & \frac{1}{6}f'''(c_2) \\ \hline ? & = & 0 & + & f'(0) & + & 0 & - & R(f) \end{array}$$

Nuestro objetivo es hacer una combinación lineal de los tres desarrollos en series de tal forma que obtengamos en la parte derecha únicamente $f'(0)$ y un término de error. Así, lo obtenido en la parte izquierda será la fórmula de interpolación. La combinación lineal que vamos a hacer es

$$\alpha_1 \cdot (\text{primera linea}) + \alpha_2 \cdot (\text{segunda lineal}) + \alpha_3 \cdot (\text{tercera linea})$$

Si queremos que esta combinación satisfaga lo ya dicho, los coeficientes α_i deben cumplir unas condiciones:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(0) = 0 & \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 f'(0) + \alpha_3 f'(0) = f'(0) & \implies -\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 \frac{1}{2} f''(0) + \alpha_3 \frac{1}{2} f''(0) = 0 & \implies \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Notemos que este sistema es el mismo que hemos resuelto en los dos anteriores métodos, luego $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. La ventaja de este método sobre los dos anteriores es que tenemos una expresión para el término de error:

$$\begin{aligned} R(f) &= -\left[-\alpha_1 \frac{1}{6} f'''(c_1) + \alpha_3 \frac{1}{6} f'''(c_2)\right] \\ &= -\left[\frac{1}{12} f'''(c_1) + \frac{1}{12} f'''(c_2)\right] \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2}\right] \end{aligned}$$

para ciertos $c_1, c_2 \in [-1,1]$ que vienen de la expansión de Taylor. Notemos que en la expresión tenemos la media aritmética de dos valores de f''', luego por ser continua existe $c \in [c_1, c_2] \subseteq [-1,1]$ tal que

$$R(f) = -\frac{1}{6} f'''(c)$$